

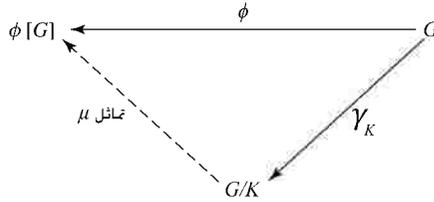
مبرهنة الزمر المتقدمة
Advanced Group Theory

مبرهنة التماثل	34
Isomorphism Theorems	
سلاسل الزمر	35
Series of Groups	
مبرهنة سيلو	36
Sylow Theorems	
تطبيقات على مبرهنة سيلو	37
Applications of the Sylow Theory	
الزمر الإبدالية الحرة	38
Free Abelian Groups	
الزمر الحرة	39
Free Groups	
تمثيلات الزمر	40
Group Presentations	

مبرهنات التماثل Isomorphism Theorems

الفصل 34

هناك كثير من المبرهنات المتعلقة بتماثل زمر العامل المعروفة بمبرهنات التماثل في مبرهنة الزمر: أولها المبرهنة 11.14، التي سنعيد ذكر نصّها ليسهل الرجوع إليها. تمثّل المبرهنة في الشكل 1.34



الشكل 1.34

(مبرهنة التماثل الأولى): ليكن $\phi: G \rightarrow G'$ تشاكلاً ذا نواة K ، وليكن $\gamma_K: G \rightarrow G/K$ التشاكل القانوني، يوجد تماثل وحيد $\mu: G/K \rightarrow \phi[G]$ ، حيث إن $\phi(x) = \mu(\gamma_K(x))$ لكل $x \in G$.

2.34 مبرهنة

ستساعد التمهيدية الآتية بصورة كبيرة في برهاننا وفهمنا الحدسي لمبرهنتي التماثل الأخيرين.

لتكن N زمرة جزئية ناظمية للزمرة G ، وليكن $\gamma: G \rightarrow G/N$ التشاكل القانوني، فإن الدالة ϕ من مجموعة الزمر الجزئية الناظمية في G ، التي تحوي N إلى مجموعة الزمر الجزئية الناظمية في G/N المعطاة بـ $\phi(L) = \gamma[L]$ ، تكون دالة أحادية وغامرة.

3.34 تمهيدية

تثبت المبرهنة 16.15 أنه إذا كانت L زمرة جزئية ناظمية من G وتحوي N ، فإن $\phi(L) = \gamma[L]$ زمرة جزئية ناظمية من G/N ، ولأن $N \leq L$ ، فإن كامل المجموعة المشاركة xN في G محتواة في L ، وذلك لكل $x \in L$ ، إذن، وبحسب المبرهنة 15.13 $L = \gamma^{-1}[\phi(L)]$ ، وعليه، فإذا كانت L و M زمرتين جزئيتين ناظميتين من G ، وكلاهما يحوي N ، وإذا كانت $H = \phi(M) = \phi(L)$ ، فإن $L = \gamma^{-1}[H] = M$ ؛ ولذلك، فإن ϕ أحادية.

البرهان

إذا كانت H زمرة جزئية ناظمية من G/N ، فإن $\gamma^{-1}[H]$ زمرة جزئية ناظمية في G ، بحسب المبرهنة 16.15؛ ولأن $N \in H$ و $\gamma^{-1}[\{N\}] = N$ ، فنرى أن $N \subseteq \gamma^{-1}[H]$ ، إذن، $\phi(\gamma^{-1}[H]) = \gamma[\gamma^{-1}[H]] = H$ ، وهذا يثبت أن ϕ غامرة لمجموعة الزمر الجزئية الناظمية في G/N .

إذا كانت H و N زمرتين جزئيتين من الزمرة G ، فسنعد

$$HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}.$$

نعرف الموصل (**join**) $H \vee N$ و $H \wedge N$ ليكون تقاطع الزمر الجزئية كلها في G التي تحوي HN ؛ إذن، $H \vee N$ هي أصغر زمرة جزئية في G وتحوي HN ، وبالطبع، فإن $H \vee N$ هي أصغر زمرة جزئية في G وتحوي كلا من H و N ؛ لأن أي زمرة من هذه الصورة يجب أن تحوي HN بوجه عام، ليست بالضرورة زمرة جزئية من G ، وفي الأحوال كلها، فإن لدينا التمهيدية الآتية:

إذا كانت N زمرة جزئية ناظمية من G ، وإذا كانت H أي زمرة جزئية من G ، فإن $H \vee N = HN = NH$ ، وإضافة إلى ذلك، فإذا كانت H ناظمية كذلك، فإن HN ناظمية في G .

4.34 تمهيدية

البرهان

سنثبت أن زمرة جزئية من G ، ومن ذلك تنتج $H \vee N = HN$ مباشرة. لتكن $h_1, h_2 \in H$ و $n_1, n_2 \in N$ ، ولأن N زمرة جزئية نظامية، فنحصل على $n_1 h_2 = h_2 n_3$ ، حيث $n_3 \in N$ ، إذن:

$$(h_1 n_1)(h_2 n_2) = h_1(n_1 h_2)n_2 = h_1(h_2 n_3)n_2 = (h_1 h_2)(n_3 n_2) \in HN,$$

وهذا يعني أن HN مغلقة على العملية المعرفة على G ، من الواضح أن $e=ee$ تنتمي إلى HN ، ولـ $n \in N$ و $h \in H$ فإن $n^{-1}h^{-1} = h^{-1}n^{-1}$ ، حيث $n_4 \in N$ ، لأن N زمرة جزئية نظامية، إذن، $(hn)^{-1} \in HN$ ، وهكذا، فإن $HN \leq G$ ، وثبتت مناقشة شبيهة لهذه أن NH زمرة جزئية، وهكذا، فإن $NH = H \vee N = HN$.

افترض الآن أن H ناظرية كذلك في G ، ولتكن $g \in G, n \in N, h \in H$ ، ولتكن $g \in G, n \in N, h \in H$ ، إذن،

$$\diamond \quad (gng^{-1})(hnh^{-1}) = (ghg^{-1})(ghg^{-1}) \in HN \text{، وهكذا، فإن } HN \text{ ناظرية في } G \text{ بالتأكيد.}$$

مبرهنة 5.34

(مبرهنة التماثل الثانية): لتكن H زمرة جزئية من G ، ولتكن N زمرة جزئية ناظرية في G . إذن، $(HN)/N \simeq H/(H \cap N)$

البرهان

ليكن $\gamma: G \rightarrow G/N$ التشاكل القانوني، ولتكن $H \leq G$ ، إذن، $\gamma[H]$ زمرة جزئية من G/N بحسب المبرهنة 2.13. الآن يزودنا تأثير γ في عناصر H فقط (يسمى قصر γ على H ((restricted)) تشاكلاً يربط H بصورة غامرة مع $\gamma[H]$ ، ومن الواضح أن نواة هذا القصر هي مجموعة عناصر N الموجودة كذلك في H ، أي التقاطع $H \cap N$ ، وترينا المبرهنة 2.34 أنه يوجد

$$\text{تماثل } \mu_1: H/(H \cap N) \rightarrow \gamma[H]$$

وفي المقابل، قصر γ على HN يزودنا كذلك بتشاكل يربط HN بصورة غامرة مع $\gamma[H]$ ؛ لأن $\gamma(n)$ هي العنصر المحايد N في G/N لكل $n \in N$ ، نواة γ عند قصرها على HN هي N ،

$$\text{وتزودنا المبرهنة 2.34 بتماثل } \mu_2: (HN)/N \rightarrow \gamma[H]$$

ولأن $(HN)/N$ و $H/(H \cap N)$ تماثلان $\gamma[H]$ كليهما، فإنه يوجد تماثل بينهما، وبالتأكيد، $\phi: (HN)/N \rightarrow H/(H \cap N)$ ، حيث $\phi = \mu_1^{-1} \mu_2$ سيكون تماثلاً. بصورة أكثر وضوحاً:

$$\diamond \quad \phi(hnN) = \mu_1^{-1}(\mu_2((hn)N)) = \mu_1^{-1}(h) = h(H \cap N)$$

مثال 6.34

ليكن $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، $H = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \{0\}$ ، $N = \{0\} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. من الواضح أن:

$$HN = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ و } H \cap N = \{0\} \times \mathbb{Z} \times \{0\} \text{ . نحصل على } (HN)/N \simeq \mathbb{Z} \text{ و } H/(H \cap N) \simeq \mathbb{Z}$$

إذا كانت H و K كلتاها زمرتين جزئيتين ناظمتين في G و $K \leq H$ ، فإن H/K زمرة جزئية ناظرية في G/K . تهتم مبرهنة التماثل الثالثة بهذه الزمر.

مبرهنة 7.34

(مبرهنة التماثل الثالثة): لتكن H و K زمرتين جزئيتين ناظمتين في الزمرة G ، بحيث $K \leq H$ ، فإن $G/H \simeq (G/K)/(H/K)$.

البرهان

ليكن $\phi: G \rightarrow (G/K)/(H/K)$ معطى بـ $\phi(a) = (aK)(H/K)$ ، حيث $a \in G$ ، من الواضح أن ϕ غامرة لـ $(G/K)/(H/K)$ ، ولكل $a, b \in G$

$$\begin{aligned}\phi(ab) &= [(ab)K] (H/K) = [(aK)(bK)] (H/K) \\ &= [(aK) (H/K)] [(bK) (H/K)] \\ &= \phi(a) \phi(b),\end{aligned}$$

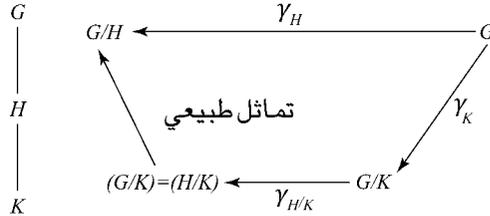
وهكذا، فإن ϕ تشاكل، وتتكوّن النواة من تلك العناصر $x \in G$ ، حيث إن $\phi(x) = H/K$ ، هذه العناصر هي عناصر H فقط، إذن، ترينا المبرهنة 2.34 أن $G/H \simeq (G/K) / (H/K)$. ◆

لعرض المبرهنة 7.34 بطريقة لطيفة يمكننا أن نعدّ الدالة القانونية $\gamma_H: G \rightarrow G/H$ وكأنها حلّت عن طريق زمرة جزئية ناظمية K في G ، $K \leq H \leq G$ ، لتعطي

$$\gamma_H = \gamma_{H/K} \gamma_K$$

لنتنتج تماثلاً طبيعياً، كما هو موضح في الشكل 8.34، وهناك طريقة أخرى لتصوير هذه المبرهنة، وذلك باستخدام الرسم البياني للزمر الجزئية في الشكل 9.34، حيث كل زمرة تكون زمرة جزئية ناظمية في G ومحتواة في التي فوقها، وكلما كبرت الزمرة الجزئية الناظمية، صغرت زمرة العامل؛ لذلك، يمكننا التفكير في G وكأنها ضعفت بـ H ، أي إن G/H وكأنها أصغر من G عندما ضعفت

بـ K ، حيث تنصّ المبرهنة 7.34 على أنه يمكن إضعاف G على طول الطريق هبوطاً إلى G/H بخطوتين: الأولى، إضعافها إلى G/K ، ثمّ يضعف هذا إلى $(G/K)/(H/K)$ باستخدام H/K والنتيجة النهائية هي نفسها (وفق التماثل) كإضعاف G بـ H .



الشكل 9.34

الشكل 8.34

لكن $G = \mathbb{Z} < H = 2\mathbb{Z} < K = 6\mathbb{Z}$. إذن: $G/H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$. الآن $G/K = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ تحوي العناصر

10.34 مثال

$$6\mathbb{Z}, 1+6\mathbb{Z}, 2+6\mathbb{Z}, 3+6\mathbb{Z}, 4+6\mathbb{Z}, 5+6\mathbb{Z}$$

من هذه المجموعات المشاركة الست، تقع $6\mathbb{Z}$ ، $2+6\mathbb{Z}$ ، و $4+6\mathbb{Z}$ في $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ، إذن، $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) / (2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ تحوي عنصرين، وتماثل \mathbb{Z}_2 كذلك، أو بدلاً من ذلك، فإننا نرى أنّ $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_6$ ، وترتبط $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ بهذا التماثل مع الزمرة الجزئية الدورية $\langle 2 \rangle$ في \mathbb{Z}_6 . إذن،



$$(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) / (2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_6 / \langle 2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

■ تمارين 34

حسابات

عند استخدام مبرهنات التماثل الثلاث، فمن الضروري عادة معرفة الارتباط الحقيقي المعطى بهذا التماثل، وليس مجرد حقيقة أن هذه الزمر متماثلة، تعطينا التمارين الستة الأولى تدريباً على ذلك.

1. ليكن $\phi: \mathbb{Z}_{12} \rightarrow \mathbb{Z}_3$ تشاكلاً، بحيث $\phi(1) = 2$.

أ. أوجد النواة $K \triangleleft \phi$.

ب. عدّد مجموعات المشاركة في \mathbb{Z}_{12}/K ، ذاكراً عناصر كل مجموعة مشاركة.

ج. أعطِ الارتباط بين \mathbb{Z}_3 و \mathbb{Z}_{12}/K المعطى بالدالة μ الموصوفة في المبرهنة 2.34.

2. ليكن $\phi: \mathbb{Z}_{18} \rightarrow \mathbb{Z}_{12}$ تشاكلاً، بحيث $\phi(1) = 10$.

أ. أوجد النواة $K \triangleleft \phi$.

ب. عدّد مجموعات المشاركة في \mathbb{Z}_{18}/K ، ذاكراً عناصر كل مجموعة مشاركة.

ج. أوجد الزمرة $\phi[\mathbb{Z}_{18}]$.

د. أعطِ الارتباط بين \mathbb{Z}_{18}/K و $\phi[\mathbb{Z}_{18}]$ المعطاة في الدالة μ الموصوفة في المبرهنة 2.34.

3. في الزمرة \mathbb{Z}_{24} ، لتكن $H = \langle 4 \rangle$ و $N = \langle 6 \rangle$.

أ. عدّد العناصر في HN (التي يمكن كتابتها على صورة $H+N$ لهذه الزمر الجمعية) و $H \cap N$.

ب. عدّد العناصر في HN/N ، ذاكراً عناصر كل مجموعة مشاركة.

ج. عدّد مجموعات المشاركة في $H/(H \cap N)$ ، ذاكراً عناصر كل مجموعة مشاركة.

د. أعطِ الارتباط بين HN/N و $H/(H \cap N)$ الموصوف في إثبات المبرهنة 5.34.

4. أعد التمرين 3 للزمرة \mathbb{Z}_{36} ، حيث $H = \langle 6 \rangle$ و $N = \langle 9 \rangle$.

5. في الزمرة $G = \mathbb{Z}_{24}$ ، لتكن $H = \langle 4 \rangle$ و $N = \langle 9 \rangle$.

أ. عدّد مجموعات المشاركة في G/H ، ذاكراً عناصر كل مجموعة مشاركة.

ب. عدّد مجموعات المشاركة في G/K ، ذاكراً عناصر كل مجموعة مشاركة.

ج. عدّد مجموعات المشاركة في H/K ، ذاكراً عناصر كل مجموعة مشاركة.

د. عدّد مجموعات المشاركة في $(G/K)/(H/K)$ ، ذاكراً عناصر كل مجموعة مشاركة.

هـ. أعطِ الارتباط بين G/H و $(G/K)/(H/K)$ الموصوف في إثبات المبرهنة 7.34.

6. أعد التمرين 5 للزمرة $G = \mathbb{Z}_{36}$ ، حيث $H = \langle 9 \rangle$ و $K = \langle 18 \rangle$.

براهين

7. أثبت مباشرة باستخدام تعريف الزمر الجزئية الناظمية أنه إذا كانت H و N زمريتين جزئيتين من الزمرة G ، و N ناظمية في G ، فإن $H \cap N$ ناظمية في H .

8. لتكن H, K, L زمراً جزئية ناظمية في G ، بحيث $H < K < L$ ، ولتكن $A = G/H, B = K/H, C = L/H$.

أ. أثبت أن B و C زمريتان جزئيتان ناظميتان في A ، وأن $B < C$.

ب. أي زمرة عامل لـ G تماثل $(A/B) / (C/B)$ ؟

9. لتكن K و L زمريتين جزئيتين ناظميتين في G ، حيث $K \vee L = G$ ، و $K \cap L = \{e\}$. أثبت أن $G/L \simeq K$ و $G/K \simeq L$.

سلاسل الزمر Series of Groups

السلسلة الناظرية وتحت الناظرية

يركز هذا الفصل على فكرة السلسلة في الزمرة، التي تعطي فهماً أكثر عمقاً لبنية G ، حيث تتحقق النتائج لكلا الزمر الإبدالية وغير الإبدالية، وهي ليست بتلك الأهمية للزمر الإبدالية منتهية التولد؛ بسبب مبرهنتنا القوية 12.11، حيث إن الكثير من توضيحاتنا ستكون مأخوذة من الزمر الإبدالية، لتسهيل الحسابات.

1.35 تعريف

للسلسلة تحت الناظرية للزمرة G (subnormal or (subinvariant) series) متتالية منتهية H_0, H_1, \dots, H_n من الزمر الجزئية في G ، حيث $H_i < H_{i+1}$ و H_i زمرة جزئية ناظرية في H_{i+1} ، وحيث $H_0 = \{e\}$ و $H_n = G$. السلسلة الناظرية لـ G (normal (or invariant) series) متتالية منتهية H_0, H_1, \dots, H_n من الزمر الجزئية الناظرية في G ، حيث إن: $H_i < H_{i+1}, H_0 = \{e\}, H_n = G$.

لاحظ أن مفهومي السلسلة الناظرية وتحت الناظرية ينطبقان في الزمر الإبدالية؛ لأن الزمر الجزئية كلها ناظرية، فضلاً عن أن السلسلة الناظرية دائماً تحت ناظرية، ولكن العكس ليس بالضرورة صحيحاً، وقد عرفنا السلسلة تحت الناظرية قبل السلسلة الناظرية؛ لأن مفهوم السلسلة تحت الناظرية أكثر أهمية لعملائنا.

2.35 مثال

مثالان لسلسلتين ناظمتين في \mathbb{Z} مع الجمع، هما:

$$\{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

و

▲ $\{0\} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$.

3.35 مثال

لتكن الزمرة D_4 لتماثلات المربع، كما في المثال 10.8. السلسلة:

$$\{\rho_0\} < \{\rho_0, \mu_1\} < \{\rho_0, \rho_2, \mu_1, \mu_2\} < D_4$$

سلسلة تحت ناظرية، أضف إلى ذلك أنه يمكننا أن نتحقق باستخدام الجدول 12.8 إنها ليست

▲ سلسلة ناظرية؛ لأن $\{\rho_0, \mu_1\}$ ليست ناظرية في D_4 .

4.35 تعريف

للسلسلة تحت الناظرية (الناظرية) $\{K_j\}$ تصفية للسلسلة تحت الناظرية (الناظرية) $\{H_i\}$ (re- $\{H_i\}$ finement of a subnormal (normal) series) للزمرة G ، إذا كان $\{H_i\} \subseteq \{K_j\}$ ، أي إن كل H_i هي أحد K_j .

السلسلة:

5.35 مثال

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 24\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

تصفية للسلسلة

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

لقد أُدرج الحدان، $4\mathbb{Z}$ و $24\mathbb{Z}$.

إن زمر العامل H_{i+1}/H_i ذات أهمية في دراستنا لبنية G ، وهي معرفة في السلاسل الناظرية وتحت الناظرية؛ لأن H_i ناظرية في H_{i+1} في كلتا الحالتين.

6.35 تعريف ككون السلسلتين تحت الناظمتين (الناظمتين) $\{H_i\}$ و $\{K_j\}$ للزمرة G نفسها متماثلتين (**iso-morphic**)، إذا وجد تقابل بين مجموعتي زمر العامل $\{H_{i+1}/H_i\}$ و $\{K_{j+1}/K_j\}$ ، حيث إن زمري العامل المتقابلتين متماثلتان.

من الواضح أن السلسلتين تحت الناظمتين (الناظمتين) المتماثلتين، لهما عدد الزمر نفسه.

السلسلتان في \mathbb{Z}_{15} ،**7.35 مثال**

$$\{0\} < \langle 5 \rangle < \mathbb{Z}_{15}$$

و

$$\{0\} < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{15}$$

▲ متماثلتان. كلا $\mathbb{Z}_{15}/\langle 5 \rangle$ و $\mathbb{Z}_{15}/\langle 3 \rangle$ تماثل \mathbb{Z}_3 ، و $\mathbb{Z}_5/\langle 3 \rangle$ تماثل $\mathbb{Z}_5/\langle 5 \rangle$ أو \mathbb{Z}_3 .

مبرهنة شراير (Schreier Theorem)

سنكمل لبرهان أن أي سلسلتين تحت ناظمتين في زمرة G لهما تصفيتان متماثلتان. هذه مبرهنة أساسية في مبرهنة السلاسل، البرهان ليس صعباً جداً، إلا أنه من المعلوم أن بعض الطلاب يتوهون في أثناء البرهان، ويميلون للشعور بأنهم لن يستطيعوا فهم المبرهنة، سنعطي توضيحاً للمبرهنة قبل أن ندخل إلى برهانها.

لنحاول إيجاد تصفيات متماثلة للسلسلتين:

8.35 مثال

$$\{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

و

$$\{0\} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

الموجودتين في المثال 2.35. لتكن التصفية:

$$\{0\} < 72\mathbb{Z} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

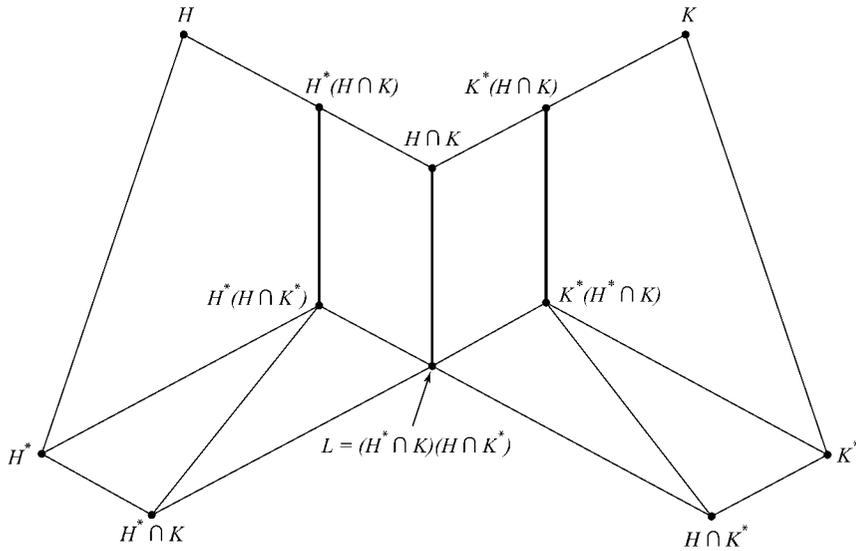
$$\downarrow \{0\} < 8\mathbb{Z} < 4\mathbb{Z} < \mathbb{Z} ، والتصفية $\{0\} < 72\mathbb{Z} < 18\mathbb{Z} < 9\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$$

لـ $\mathbb{Z} < 9\mathbb{Z} < \{0\}$ في كلتا الحالتين. خوي التصفيان أربع زمر عامل تماثل $\mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2$ أو $72\mathbb{Z}$ أو \mathbb{Z} .
 ▲ الترتيب الذي تظهر فيه زمر العامل مختلف بالتأكد.

سنبدأ بتمهيدية تقنية طورت على يد زاسنهاوس (*Zassen Haus*). تسمى هذه التمهيدية أحياناً تمهيدية الفراشة؛ لأن الشكل 9.35 - الذي يرافق التمهيدية - له هيئة الفراشة.

لتكن H و K زمراً جزئية من الزمرة G ، ولتكن H^* زمرة جزئية ناظمية من H و K^* زمرة جزئية ناظمية من K ، بتطبيق العبارة الأولى من التمهيدية 4.34 على H^* و $H \cap K$ بوصفها زمراً جزئية من H ، نرى أن $H^*(H \cap K)$ زمرة، وتثبت مناقشة شبيهة أن $H^*(H \cap K^*)$ و $K^*(H \cap K)$ و $K^*(H \cap K)$ زمرة كذلك، وليس من الصعب إثبات أن $H^* \cap K$ زمرة جزئية ناظمية من $H \cap K$ (انظر التمرين 22)، والمناقشة نفسها باستخدام التمهيدية 4.34 مطبقة على $H^* \cap K$ و $H \cap K^*$ بوصفها زمراً جزئية من $H \cap K$ ، تثبت أن $L = (H^* \cap K)(H \cap K^*)$ زمرة. إذن، ينتج لدينا المخطط البياني للزمر الجزئية المعروض في الشكل 9.35، ليس من الصعب إثبات علاقات الاحتواء المبينة في الرسم.

لأن كلتا $H \cap K^*$ و $H^* \cap K$ زمرة جزئية ناظمية في $H \cap K$ ، تثبت العبارة الثانية في التمهيدية 4.34 أن $L = (H^* \cap K)(H \cap K^*)$ زمرة جزئية ناظمية في $H \cap K$. لقد ميّزنا علاقة الزمرة الجزئية الناظمية هذه بالخط الثقيل في منتصف الشكل 9.35، وندعي أن الخطين الثقيلين الآخرين يرمزان لعلاقات زمر جزئية ناظمية، وأن زمر العامل الثلاث المعطاة بالزمر الجزئية الناظمية الثلاث كلها متماثلة، ولإثبات هذا، سنعرّف التشاكل $\phi: H^*(H \cap K) \rightarrow (H \cap K)/L$ ، ونثبت أن ϕ غامرة لـ $(H \cap K)/L$ ونواتها $H^*(H \cap K^*)$ ، وسينتج حينها مباشرة عن المبرهنة 2.34 أن $H^*(H \cap K^*)$ ناظمية



الشكل 9.35

في $H^*(H \cap K)$ ، وأن $H^*(H \cap K) / H^*(H \cap K^*) \simeq (H \cap K) / L$ ونحصل على نتيجة مشابهة بالتناظر للزمر على يمين الخط الثقيل في الشكل 9.35.

ليكن معرفاً كالاتي: $\phi: H^*(H \cap K) \rightarrow (H \cap K)/L$

دع $\phi(hx) = xL$ ، $x \in H \cap K$ و $h \in H^*$ ، سنثبت أن ϕ تشاكل بحسب التعريف، لتكن $x_1, x_2 \in H \cap K$ و $h_1, h_2 \in H^*$ فإذا كان $h_1 x_1 = h_2 x_2$ فإن $h_2^{-1} h_1 = x_2 x_1^{-1} \in H^* \cap (H \cap K) = H^* \cap K \subseteq L$ وهكذا فإن ϕ حسن التعريف، ولأن H^* ناظمية في H ، فيوجد h_3 في H^* حيث إن $x_1 h_2 = h_3 x_1$ إذن:

$$\begin{aligned}\phi((h_1 x_1)(h_2 x_2)) &= \phi((h_1 h_3)(x_1 x_2)) = (x_1 x_2)L \\ &= (x_1 L)(x_2 L) = \phi(h_1 x_1)\phi(h_2 x_2)\end{aligned}$$

إذن، ϕ تشاكل.

من الواضح أن ϕ غامرة لـ $(H \cap K) / L$.

أخيراً، إذا كانت $h \in H^*$ و $x \in H \cap K$ فإن $\phi(hx) = xL = L$ ، إذا وفقط إذا كانت $xL = L$ أو إذا وفقط إذا كانت $x \in L$ ،

$(H \cap K^*) = H^*(H \cap K)$ ، $H^*L = H^*(H \cap K)$ ، إذن $\text{Ker}(\phi) = H^*(H \cap K)$ ،

برهنا التمهيدية الآتية:

(تمهيدية زاسنهاوس): لتكن H و K زمراً جزئية من الزمرة G ، ولتكن H^* و K^* زمراً جزئية ناظمية من H و K ، على الترتيب، فإن:

10.35 تمهيدية

1. $H^*(H \cap K)$ زمرة جزئية ناظمية في $H^*(H \cap K)$.

2. $K^*(H \cap K)$ زمرة جزئية ناظمية في $K^*(H \cap K)$.

3. $H^*(H \cap K) / H^*(H \cap K^*) \simeq K^*(H \cap K) / K^*(H^* \cap K)$
 $\simeq (H \cap K) / [(H^* \cap K)(H \cap K^*)]$

(مبرهنة شراير): لأي سلسلتين تحت ناظمتين (ناظمتين) في زمرة G توجد تصنيفتان متماثلتان.

11.35 مبرهنة

لتكن G زمرة، ولتكن:

البرهان

$$(1) \quad \{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \dots < H_n = G$$

و

$$(2) \quad \{e\} = K_0 < K_1 < K_2 < \dots < K_m = G$$

سلسلتين تحت ناظمتين في G ، حيث $0 \leq i \leq n-1$ ، كونه سلسلة الزمر:

$$H_i = H_i (H_{i+1} \cap K_0) \leq H_i (H_{i+1} \cap K_1) \leq \dots \leq H_i (H_{i+1} \cap K_m) = H_{i+1}$$

يُدرج هذا $m-1$ زمرة - ليست بالضرورة مختلفة - بين H_i و H_{i+1} . إذا صنعنا هذا لكل i حيث $0 \leq i \leq n-1$ ، وجعلنا $H_{i,j} = H_i (H_{i+1} \cap K_j)$ ، فإننا نحصل على سلسلة الزمر:

$$\begin{aligned}\{e\} = H_{0,0} &\leq H_{0,1} \leq H_{0,2} \leq \dots \leq H_{0,n-1} \leq H_{1,0} \\ &\leq H_{1,1} \leq H_{1,2} \leq \dots \leq H_{1,m-1} \leq H_{2,0} \\ &\leq H_{2,1} \leq H_{2,2} \leq \dots \leq H_{2,m-1} \leq H_{3,0} \\ &\leq \dots \\ &\leq H_{n-1,1} \leq H_{n-1,2} \leq \dots \leq H_{n-1,m-1} \leq H_{n-1,m} \\ &= G.\end{aligned}$$

(3)

تحتوي السلسلة (3) هذه زمرة $nm+1$ - ليست بالضرورة مختلفة، و $H_{i,0} = H_i$ لكل i . بحسب بديهية زاسنهاوس، السلسلة (3) تحت ناظرية، أي إن كل زمرة ناظرية في الزمرة التي تليها، هذه السلسلة تصفي السلسلة (1).

بطريقة مماثلة، نضع $K_{j,i} = K_j(K_{j+1} \cap H_i)$ حيث $0 \leq i \leq n$ و $0 \leq j \leq m-1$. هذا يعطي السلسلة تحت الناظرية:

$$\begin{aligned}
 \{e\} = K_{0,0} \leq K_{0,1} \leq K_{0,2} \leq \dots \leq K_{0,n-1} \leq K_{1,0} \\
 \leq K_{1,1} \leq K_{1,2} \leq \dots \leq K_{1,n-1} \leq K_{2,0} \\
 \leq K_{2,1} \leq K_{2,2} \leq \dots \leq K_{2,n-1} \leq K_{3,0} \\
 \leq \dots \\
 \leq K_{m-1,1} \leq K_{m-1,2} \leq \dots \leq K_{m-1,n-1} \leq K_{m-1,n} \\
 = G.
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

السلسلة (4) تحتوي 1 $mn+1$ زمرة - ليست بالضرورة مختلفة - و $K_{j,0} = K_j$ لكل j ، وهذه السلسلة تصفي السلسلة (2).

ونحصل بحسب بديهية زاسنهاوس 10.35 على:

$$H_i(H_{i+1} \cap K_{j+1})/H_i(H_{i+1} \cap K_j) \simeq K_j(K_{j+1} \cap H_{i+1})/K_j(K_{j+1} \cap H_i),$$

أو

$$H_{i,j+1}/H_{i,j} \simeq K_{j,i+1}/K_{j,i} \tag{5}$$

حيث $0 \leq j \leq m-1$ و $0 \leq i \leq n-1$. التماثلات في العلاقة (5) تعطي تقابلاً لتماثل زمر العامل بين السلسلة تحت الناظرية (3) و(4). ولتبيين هذا التقابل، لاحظ أن $H_{i,0} = H_i$ و $H_{i,m} = H_{i+1}$ ، بينما $K_{j,0} = K_j$ و $K_{j,m} = K_{j+1}$ ، حيث تحتوي كل سلسلة في (3) و(4) مصفوفة مستطيلة من mn رمزاً \leq . وكل \leq تعطي زمرة عامل، إضافة إلى أن زمر العامل التي تظهر من الصف $r \geq 1$ في السلسلة (3) ترتبط بزمر العامل التي تظهر في العمود $r \geq 1$ في السلسلة (4)، وبحذف الزمر المكررة من السلسلتين (3) و(4)، نحصل على سلسلتين تحت ناظريتين من الزمر المختلفة، التي تكون تصفيتين متماثلتين للسلسلتين (1) و(2). وهذا يثبت المبرهنة للسلاسل تحت الناظرية.

للسلاسل الناظرية، حيث H_i و K_j جميعها ناظرية في G ، نلاحظ فقط أن الزمر $H_{i,j}$ و $K_{j,i}$ المكونة في الأعلى كلها ناظرية كذلك في G ، وهكذا ينطبق البرهان نفسه. ناظرية $H_{i,j}$ و $K_{j,i}$ هذه تنتج مباشرة من الجزء الثاني في البديهية 4.34، ومن حقيقة أن تقاطع الزمر الجزئية الناظرية في الزمرة يعطي زمراً جزئية ناظرية.

مبرهنة جوردان - هولدر (Jordan- Hölder Theorem)

نأتي الآن إلى اللب الحقيقي للمبرهنة.

12.35 تعريف

تكون السلسلة تحت الناظرية $\{H_i\}$ في الزمرة G سلسلة تركيب (Composition Series) إذا كانت زمر العامل H_{i+1}/H_i كلها بسيطة، وتكون السلسلة الناظرية $\{H_i\}$ في G سلسلة رئيسية (principal or Chief series) إذا كانت زمر العامل H_{i+1}/H_i كلها بسيطة. ■

لاحظ أنه في الزمر الإبدالية ينطبق مفهومًا سلسلة التركيب والسلسلة الرئيسية. وكذلك فلأن كل سلسلة ناظرية هي كذلك سلسلة تحت ناظرية، فإن أي سلسلة رئيسية هي كذلك سلسلة تركيب لأي زمرة، إبدالية أم لا.

إن \mathbb{Z} لا تحوي سلاسل تركيب (وكذلك لا تحوي سلاسل رئيسية): لأنه إذا كانت

$$\{0\} = H_0 < H_1 < \dots < H_{n-1} < H_n = \mathbb{Z}$$

سلسلة تحت ناظرية، فيجب أن تكون H_1 على الصورة $r\mathbb{Z}$ ، حيث $r \in \mathbb{Z}^+$ ، ولكن عندها H_1/H_0 تماثل $r\mathbb{Z}$ ، وهي دورية غير منتهية وتحوي الكثير من الزمر الجزئية الناظرية الفعلية غير التافهة، على سبيل المثال: $2r\mathbb{Z}$ ؛ إذن، لا تحوي \mathbb{Z} سلاسل تركيب (وكذلك لا تحوي سلاسل رئيسية). ▲

13.35 مثال

السلسلة

14.35 مثال

$$\{e\} < A_n < S_n$$

حيث $n \geq 5$ سلسلة تركيب (وكذلك سلسلة رئيسية) في S_n ؛ لأن $A_n/\{e\}$ تماثل A_n ، وهي بسيطة لكل $n \geq 5$ ، و S_n/A_n تماثل \mathbb{Z}_2 ، وهي بسيطة. وبالمثل، السلسلتان في المثال 7.35 سلسلتا تركيب (وكذلك سلسلتان رئيسيتان) في \mathbb{Z}_{15} ، إنهما متماثلتان، كما أثبت في ذلك المثال. هذا يوضح نظريتنا الرئيسية، التي سينص عليها قريباً. ▲

لاحظ أنه بحسب المبرهنة 8.15، H_{i+1}/H_i بسيطة، إذا فقط إذا كانت H_i زمرة جزئية ناظرية أعظمية في H_{i+1} ؛ إذن، يجب أن تكون كل H_i في سلسلة التركيب زمرة جزئية ناظرية أعظمية في H_{i+1} . لبناء سلسلة تركيب لزمرة G ، نسطاد فقط زمرة جزئية ناظرية أعظمية H_{n-1} في G ، ثم زمرة جزئية ناظرية أعظمية H_{n-2} في H_{n-1} ، وهكذا، إذا توقفت هذه العملية بعدد من الخطوات، فنكون قد حصلنا على سلسلة تركيب.

لاحظ أنه بحسب المبرهنة 18.15، لا يمكن أن يكون هناك تصفية أبعد من ذلك لسلسلة تركيب. لبناء سلسلة رئيسية، يجب علينا أن نسطاد زمرة جزئية ناظرية أعظمية H_{n-1} في G ، ثم زمرة جزئية ناظرية أعظمية H_{n-2} في H_{n-1} وهي كذلك ناظرية في G ، وهكذا. المبرهنة الرئيسية كما يأتي:

(مبرهنة جوردان - هولدر): أي سلسلتي تركيب (رئيسيتين) في زمرة G متماثلتان.

15.35 مبرهنة

البرهان

لتكن $\{H_i\}$ و $\{K_i\}$ سلسلتي تركيب (رئيسيتين) في G ، فبحسب المبرهنة 11.35، فإن لهما تصفيتين متماثلتين؛ ولكن، لأن زمر العامل فيها كلها بسيطة، فتثبت المبرهنة 18.15 عدم وجود أي تصفية أبعد من ذلك؛ إذن، يجب أن تكون $\{H_i\}$ و $\{K_i\}$ متماثلتين. ◆

في الزمر المنتهية، يمكننا أن نعد سلسلة التركيب نوعاً من تحليل الزمرة إلى زمر عامل بسيطة، ومماثلاً لتحليل العدد الصحيح الموجب إلى عوامل أولية، وفي كلتا الحالتين، التحليل وحيد، تبعاً لترتيب العوامل.

نبذة تاريخية

كان الظهور الأول لما بات يعرف بمبرهنة جوردان - هولدر عام 1869م، بوصفه تعليقاً على عمل جالوا من خلال عالم الجبر الفرنسي المتألق كامايل جوردان (1922 - 1938) (Camille Jordan)، فقد كان السياق الذي ظهرت به في دراسة زمر التباديل المرتبطة بجذور معادلات كثيرات الحدود، حيث أثبت جوردان أنه على الرغم من أن متتالية الزمر الجزئية الناظرية J, I, G, \dots لزمرة المعادلة ليست بالضرورة وحيدة، ومع ذلك، فإن متتالية مؤشرات سلسلة التركيب هذه وحيدة، وقد أعطى جوردان برهاناً في عمله العظيم عام 1870م أطروحة في التعويض والمعادلات الجبرية (-Treatise on Substitutions and Algebraic Equations). هذا العمل الأخير - ظل مع ذلك محدداً لما أصبح يطلق عليه الآن زمر التباديل - بقي الموضوع القياسي لمبرهنة الزمر سنوات عدة.

كان الجزء الخاص بهولدر في المبرهنة، أن متتالية زمر العامل في سلسلة التركيب وحيدة تبعاً للترتيب، وكان من عمل أوتو هولدر (1859 - 1937) (Otto Holer)، الذي أدى دوراً مهماً جداً في تطور مبرهنة الزمر بعد أن أعطى التعريف المجرد الكامل للزمرة، ومن بين مشاركاته الأخرى، أنه أعطى أول تعريف مجرد "لزمرة العامل"، وحدد بنية الزمر المنتهية جميعها ذات الرتبة غير المقسومة بمربع كامل.

16.35 مبرهنة إذا كان G سلسلة تركيب (رئيسية)، وإذا كانت N زمرة جزئية ناظرية فعلية في G ، فيوجد سلسلة تركيب (رئيسية) تحوي N .

البرهان السلسلة تحت ناظرية $\langle e \rangle < N < G$ وكذلك هي سلسلة ناظرية؛ ولأن G تحوي سلسلة تركيب $\{H_i\}$ ، فإنه وبحسب المبرهنة 11.35 يوجد تصفية L لسلسلة تحت ناظرية تماثل تصفية $\{H_i\}$ ، أما بوصفها سلسلة تركيب، فلا يوجد L تصفية أبعد من ذلك. إذن، يمكن تصفية $\langle e \rangle < N < G$ إلى سلسلة تحت ناظرية، حيث إن زمر العامل فيها كلها بسيطة - أي سلسلة تركيب -، وتتحقق مناقشة شبيهة إذا بدأنا بسلسلة رئيسية $\{K_j\}$ في G ♦

17.35 مثال سلسلة تركيب (وكذلك رئيسية) في $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ وتحوي $\langle (0,1) \rangle$ ، هي:

$$\langle (0,0) \rangle < \langle (0,3) \rangle < \langle (0,1) \rangle < \langle 2 \rangle \times \langle 1 \rangle < \langle 1 \rangle \times \langle 1 \rangle = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9.$$

التعريف الآتي أساسي في تشخيص معادلات كثيرات الحدود التي يمكن التعبير عن حلولها باستخلاص الجذور.

18.35 تعريف تسمى الزمرة G قابلة للحل (Solvable)، إذا كانت تحوي سلسلة تركيب $\{H_i\}$ ، حيث إن زمر العامل H_{i+1} / H_i كلها إبدالية.

وبحسب مبرهنة جوردان - هولدر، نرى أنه في زمرة قابلة للحل، كل سلسلة تركيب $\{H_i\}$ ، يجب أن تكون زمر العامل H_{i+1} / H_i إبدالية.

19.35 مثال

الزمرة S_3 قابلة للحل: لأن سلسلة التركيب

$$\{e\} < A_3 < S_3$$

لها زمرة عامل تماثل \mathbb{Z}_3 و \mathbb{Z}_2 ، التي هي إبدالية. والزمرة S_5 ليست قابلة للحل؛ لأن A_5 بسيطة، والسلسلة

$$\{e\} < A_5 < S_5$$

سلسلة تركيب، و $A_5/\{e\}$ تماثل A_5 ، وهي ليست إبدالية. يمكن إثبات أن A_5 ذات الرتبة 60 هي أصغر زمرة غير قابلة للحل، وهذه الفكرة مرتبطة بصورة قريبة من حقيقة أن معادلة كثيرة حدود من الدرجة 5، ليست بوجه عام قابلة للحل باستخلاص الجذور، بخلاف معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجة $4 \geq$. ▲

السلسلة المركزية المتصاعدة

سنذكر سلسلة تحت ناظرية لزمرة G يمكن تكوينها باستخدام مراكز الزمر. نذكر الفصل 15 أن $Z(G)$ مركز الزمرة G معرف بـ

$$Z(G) = \{z \in G \mid zg = gz \text{ لكل } g \in G\},$$

وأن $Z(G)$ زمرة جزئية ناظرية في G ، فإذا كان لدينا جدول زمرة منتهية، فمن السهل إيجاد المركز، وسيكون العنصر a في مركز G ، إذا وفقط إذا كانت العناصر في الصف المقابل لـ a الواقعة أقصى اليسار، معطاة بترتيب العناصر نفسه في العمود أسفل a الواقعة في أعلى الجدول.

الآن، لتكن G زمرة، وليكن $Z(G)$ مركز G ، ولأن $Z(G)$ ناظرية في G ، فيمكننا صنع زمرة العامل $G/Z(G)$ ، وأن نجد المركز $Z(G/Z(G))$ لزمرة العامل هذه، ولأن $Z(G/Z(G))$ ناظرية في $G/Z(G)$ ، وإذا كانت $\gamma: G \rightarrow G/Z(G)$ الدالة القانونية، فتكون $\gamma^{-1}: [Z(G/Z(G))]$ بحسب المبرهنة 15.16، زمرة جزئية ناظرية $Z_1(G)$ في G ، وهكذا يمكننا صنع زمرة العامل $G/Z_1(G)$ ونجد مركزها، خذ γ^{-1} لها لتحصل على $Z_2(G)$ ، وهكذا.

تسمى السلسلة

20.35 مثال

$$\{e\} \leq Z(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \dots$$

الموصوفة في المناقشة السابقة سلسلة مركزية متصاعدة للزمرة G

■ (Ascending Central Series Of The Group G)

مركز S_3 هو مجرد العنصر المحايد $\{\rho_0\}$. إذن، السلسلة المركزية المتصاعدة لـ S_3 هي:

21.35 مثال

$$\{\rho_0\} \leq \{\rho_0\} \leq \{\rho_0\} \leq \dots$$

مركز الزمرة D_4 لتماثلات المربع في المثال 10.8 هو $\{\rho_0, \rho_2\}$. (هل تذكر أننا قلنا: إن هذه الزمرة ستعطينا أمثلة جميلة على أشياء كثيرة ناقشناها؟) لأن $D_4/\{\rho_0, \rho_2\}$ من الرتبة 4 فهي إبدالية، ومركزها هو كل $D_4/\{\rho_0, \rho_2\}$. إذن، السلسلة المركزية المتصاعدة لـ D_4 هي:

$$\{\rho_0\} \leq \{\rho_0, \rho_2\} \leq D_4 \leq D_4 \leq D_4 \leq \dots$$

▲

■ تمارين 35

حسابات

في التمارين 1 إلى 5، أعطِ تصنيفتين متماثلتين للسلسلتين.

$$1. \{0\} < 25\mathbb{Z} < \mathbb{Z} \text{ و } \{0\} < 10\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

$$2. \{0\} < 245\mathbb{Z} < 49\mathbb{Z} < \mathbb{Z} \text{ و } \{0\} < 60\mathbb{Z} < 20\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$$

$$3. \{0\} < \langle 8 \rangle < \mathbb{Z}_{24} \text{ و } \{0\} < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{24}$$

$$4. \{0\} < \langle 24 \rangle < \langle 12 \rangle < \mathbb{Z}_{72} \text{ و } \{0\} < \langle 18 \rangle < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{72}$$

$$5. \{(0, 0)\} < \mathbb{Z} \times (80\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times (20\mathbb{Z}) < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ و } \{(0, 0)\} < (60\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < (10\mathbb{Z}) \times \mathbb{Z} < \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

6. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ \mathbb{Z}_{60} وبرهن على أنها متماثلة.

7. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ \mathbb{Z}_{48} وبرهن على أنها متماثلة.

8. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $\mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$.

9. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $S_3 \times \mathbb{Z}_2$.

10. أوجد سلاسل التركيب كلها لـ $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$.

11. أوجد مركز $S_3 \times \mathbb{Z}_4$.

12. أوجد مركز $S_3 \times D_4$.

13. أوجد السلسلة المركزية المتصاعدة لـ $S_3 \times \mathbb{Z}_4$.

14. أوجد السلسلة المركزية المتصاعدة لـ $S_3 \times D_4$.

مفاهيم

في التمرينين 15 و16، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب – إذا كانت هناك حاجة للتصحيح – بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

15. سلسلة التركيب لزمرة G هي متتالية منتهية

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \dots < H_{n-1} < H_n = G$$

من الزمر الجزئية من G ، حيث إن H_i زمرة جزئية ناظرية أعظمية في H_{i+1} ، حيث $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

16. الزمرة القابلة للحل هي تلك التي لها سلسلة تركيب من الزمر الإبدالية.

17. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

- أ. كل سلسلة ناظرية هي كذلك تحت ناظرية.
 ب. كل سلسلة تحت ناظرية هي كذلك ناظرية.
 ج. كل سلسلة رئيسة هي كذلك سلسلة تركيب.
 د. كل سلسلة تركيب هي كذلك سلسلة رئيسة.
 هـ. كل زمرة إبدالية لها بالضبط سلسلة تركيب واحدة.
 و. كل زمرة منتهية لها سلسلة تركيب.
 ز. الزمرة قابلة للحل، إذا وفقط إذا كان لها سلسلة تركيب مع زمر عامل بسيطة.
 ح. S_7 زمرة قابلة للحل.
 ط. يوجد بعض التشابه بين مبرهنة جوردان - هولدر والمبرهنة الأساسية في الحساب، التي تنص على أن كل عدد صحيح موجب أكبر من 1، يمكن تحليله إلى حاصل ضرب أعداد أولية وحيدة تبعاً للترتيب.
 ي. كل زمرة منتهية رتبته عدد أولي قابلة للحل.

18. أوجد سلسلة تركيب لـ $S_3 \times S_3$. هل $S_3 \times S_3$ قابلة للحل؟

19. هل الزمرة D_4 لتماثلات المربع في المثال 10.8 قابلة للحل؟

20. لتكن G هي \mathbb{Z}_{36} . ارجع إلى إثبات المبرهنة 11.35 ولتكن السلسلة تحت الناظرية (1) هي:

$$\{0\} < \langle 12 \rangle < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{36}$$

ولتكن السلسلة تحت الناظرية (2) هي:

$$\{0\} < \langle 18 \rangle < \mathbb{Z}_{36}$$

أوجد السلسلتين (3) و(4)، واعرض زمر العامل المتماثلة كما وصف في الإثبات. اكتب السلسلتين (3) و(4) كالمصفوفة المستطيلة المعروضة في الكتاب.

21. أعد التمرين 20 للزمرة \mathbb{Z}_{24} مع السلسلة تحت الناظرية (1)

$$\{0\} < \langle 12 \rangle < \langle 4 \rangle < \mathbb{Z}_{24}$$

ولتكن السلسلة (2)

$$\{0\} < \langle 6 \rangle < \langle 3 \rangle < \mathbb{Z}_{24}$$

براهين

22. لتكن H^* ، H و K زمراً جزئية من G ، بحيث إن H^* ناظرية في H . أثبت أن $H^* \cap K$ ناظرية في $H \cap K$.

23. أثبت أنه إذا كانت

$$H_0 = \{e\} < H_1 < H_2 < \dots < H_n = G$$

سلسلة تحت ناظرية (ناظرية) للزمرة G ، وإذا كانت H_{i+1}/H_i من رتبة منتهية s_{i+1} ، فإن G من رتبة منتهية $s_1 s_2 \dots s_n$.

24. أثبت أنه لا يمكن لزمرة إبدالية غير منتهية أن تحوي سلسلة تركيب. [مساعدة: استخدم التمرين 23 مع حقيقة أن أي زمرة إبدالية غير منتهية يجب أن تحوي زمرة جزئية ناظرية فعلية].

25. أثبت أن الضرب المباشر المنتهي لزمرة قابلة للحل يكون قابلاً للحل.

26. أثبت أن الزمرة الجزئية K من زمرة G قابلة للحل تكون قابلة للحل كذلك. [مساعدة: لتكن $H_0 = \{e\} < H_1 < \dots < H_n = G$ سلسلة تركيب في G . أثبت أن الزمر المختلفة بين $K \cap H_i$ ، حيث $i = 0, \dots, n$ تشكل سلسلة تركيب لـ K . لاحظ أن:

$$(K \cap H_i) / (K \cap H_{i-1}) \simeq [H_{i-1}(K \cap H_i)] / [H_{i-1}]$$

بحسب المبرهنة 5.34، حيث $H = K \cap H_i$ و $N = H_{i-1}$ ، وأن $[H_{i-1}(K \cap H_i) \leq H_{i-1}]$.

27. لتكن $H_0 = \{e\} < H_1 < \dots < H_n = G$ سلسلة تركيب في الزمرة G . لتكن N زمرة جزئية ناظرية في G ، وافترض أن N زمرة بسيطة. أثبت أن الزمر المختلفة بين $H_i N$ ، حيث $i = 0, \dots, n$ تشكل كذلك سلسلة تركيب لـ G . [مساعدة: زمرة $H_i N$ بحسب التمهيدية 4.34. أثبت أن $H_i N$ ناظرية في $H_{i-1} N$ بحسب المبرهنة 5.34]

$$(H_i N) / (H_{i-1} N) \simeq H_i / [H_i \cap (H_{i-1} N)]$$

الزمرة الأخيرة تماثل

$$[H_i / H_{i-1}] / [(H_i \cap (H_{i-1} N)) / H_{i-1}]$$

بحسب المبرهنة 7.34. ولكن H_i / H_{i-1} بسيطة.

28. لتكن G زمرة. ولتكن $H_0 = \{e\} < H_1 < \dots < H_n = G$ سلسلة تركيب لـ G . لتكن N زمرة جزئية ناظرية في G . ولتكن $\gamma: G \rightarrow G/N$ الدالة القانونية. أثبت أن الزمر المختلفة بين $\gamma[H_i]$ ، حيث $i = 0, \dots, n$ تشكل سلسلة تركيب في G/N . [مساعدة: لاحظ أن الدالة

$$\psi: H_i N \rightarrow \gamma[H_i] / \gamma[H_{i-1}]$$

المعرفة بـ

$$\psi(h_i n) = \gamma(h_i n) \gamma[H_{i-1}]$$

تشاكل نواته $H_{i-1} N$ بحسب المبرهنة 2.34

$$\gamma[H_i] / \gamma[H_{i-1}] \simeq (H_i N) / (H_{i-1} N)$$

أكمل من خلال المبرهنة 5.34، كما هو موضح في المساعدة للتمرين 27.

29. أثبت أن صورة التشاكل لزمرة قابلة للحل تكون قابلة للحل. [مساعدة: طبق التمرين 28 لتحصل على سلسلة تركيب لصورة التشاكل. المساعدات للتمرينين 27 و 28 ترينا كيف تبدو صور زمر العامل في سلسلة التركيب].

الفصل 36

مبرهنتات سيلو Sylow Theorems

تعطينا المبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية المنتهية التولد (المبرهنة 12.11) معلومات كاملة عن الزمر الإبدالية المنتهية جميعها، حيث إن دراسة الزمر المنتهية غير الإبدالية معقدة أكثر، وتعطينا مبرهنتات سيلو بعض المعلومات المهمة عنها.

نعلم أن رتبة الزمرة الجزئية لزمرة منتهية G يجب أن تقسم $|G|$ ، فإذا كانت G إبدالية، فتوجد زمرة جزئية من كل رتبة تقسم $|G|$ ، وقد أثبتنا في المثال 6.15 أن A_4 ذات الرتبة $12 - لا$ تحوي زمرة جزئية من الرتبة 6. إذن، الزمر غير الإبدالية G من الممكن ألا تحوي زمراً جزئية من إحدى الرتب d التي تقسم $|G|$ ؛ ”ومعكوس مبرهنة لاجرانج“ لا يتحقق، وتعطينا مبرهنتات سيلو معكوساً ضعيفاً. تحديداً، إنها تثبت أنه إذا كانت d قوة لعدد أولي d تقسم $|G|$ ، فإن G تحوي زمرة جزئية من الرتبة d . (لاحظ أن 6 ليست قوة لعدد أولي)، وتعطي مبرهنتات سيلو كذلك معلومات تتعلق بعدد مثل هذه الزمر الجزئية وعلاقتها مع بعضها، وسنرى أن هذه المبرهنتات مفيدة جداً في دراسة الزمر المنتهية غير الإبدالية.

تعطي براهين مبرهنتات سيلو تطبيقاً آخر على تأثير الزمرة في مجموعة، الموصوف في الفصل 16. في هذه المرة، المجموعة نفسها مصنوعة من الزمرة؛ في بعض الأحيان المجموعة هي الزمرة نفسها، وهي - أحياناً - مجموعة المجموعات المشاركة لزمرة جزئية، وفي أحيان أخرى هي مجموعة زمر جزئية.

الزمر - p

أعطى الفصل 17 تطبيقاً على صيغة بيرنسايد، التي تحصي عدد المدارات في مجموعة G -منتهية، حيث تنبع معظم نتائج هذا الفصل من معادلة تحسب عدد العناصر في مجموعة G -منتهية.

لتكن X مجموعة G -منتهية. تذكر أنه إذا كان $x \in X$ ، فإن مدار x في X بالنسبة إلى G ، هو: $Gx = \{gx \mid g \in G\}$. افترض وجود r من المدارات في X بالنسبة إلى G ، ولتكن $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ تحوي عنصراً من كل مدار في X . كل عنصر الآن في X هو بالتحديد في مدار واحد. إذن:

$$(1) \quad |X| = \sum_{i=1}^r |Gx_i|$$

يمكن أن تكون هناك مدارات بعنصر واحد فقط في X . لتكن $X_G = \{x \in X \mid gx = x \text{ لكل } g \in G\}$. إذن، X_G هي بالضبط اتحاد المدارات ذات العنصر الواحد في X . لنفترض وجود s من المدارات ذات العنصر الواحد، حيث $0 \leq s \leq r$. إذن، $|X_G| = s$ ، وبإعادة ترتيب $x_i -$ إذا كان ذلك ضرورياً، فإنه يمكننا كتابة المعادلة (1) كالآتي:

$$(2) \quad |X| = |X_G| + \sum_{i=s+1}^r |Gx_i|.$$

نحصل على معظم نتائج هذا الفصل من المعادلة (2). سنعرض مبرهنة سيلو كما في ([10] Hungerford)، حيث ينسب الفضل إلى (R. J. Nunke) في خطوات البرهان، وينسب الفضل في إثبات المبرهنة 3.36 (مبرهنة كوشي) إلى (J. H. Mckay).

المبرهنة 1.36 الآتية ليست مبرهنة عدّ بالضبط، ولكن لها استنتاج عددي، فهي تعدّ مقياس p ، حيث تبدو المبرهنة قوية بصورة مذهلة، وفي بقية هذه الوحدة، إذا اخترنا المجموعة الصحيحة، وتأثير الزمرة الصحيح فيها، وطبقنا المبرهنة 1.36، فإن ما نريده يقع تمامًا في يدنا! مقارنة بالبراهين الأقدم، فإن المناقشة جميلة جدًا ورائعة.

خلال هذا الفصل، سيكون p دائمًا عددًا صحيحًا أوليًا.

مبرهنة 1.36

لتكن G زمرة من الرتبة p^n ، ولتكن X مجموعة G -منتهية، فإن $|X| \equiv |X_G| \pmod{p}$.

البرهان

باستخدام مصطلحات المعادلة (2)، نعلم أن $|GX_i|$ تقسم $|G|$ بحسب المبرهنة 16.16، وعليه، فإن p تقسم $|GX_i|$ ، حيث $r+1 \leq i \leq s$ ، وهكذا، فإن المعادلة (2) تثبت أن p تقسم $|X| - |X_G|$ ، إذن، $|X| \equiv |X_G| \pmod{p}$.

2.36 تعريف

ليكن p عددًا أوليًا. تسمى الزمرة G زمرة p - (p -group) إذا كان كل عنصر في G ذا رتبة قوة للعدد الأولي p . والزمرة الجزئية في G هي زمرة جزئية p - من G إذا كانت الزمرة الجزئية هي نفسها زمرة p -

إنّ هدفنا في هذا الفصل إثبات أن الزمرة المنتهية G تحوي زمرة جزئية من رتبة تساوي كل قوة لعدد أولي يقسم $|G|$. ستثبت مبرهنة كوشي بوصفها خطوة أولى، التي تقول: إنه إذا كان p يقسم $|G|$ ، فإن G تحوي زمرة جزئية من الرتبة p .

3.36 مبرهنة

(مبرهنة كوشي Cauchy's Theorem) ليكن p عددًا أوليًا. لتكن G زمرة منتهية، وليكن p يقسم $|G|$ ، فإن G تحوي عنصرًا من الرتبة p ، وعليه، زمرة جزئية من الرتبة p . نكوّن المجموعة X من المتعددات p - (g_1, g_2, \dots, g_p) كلها من عناصر G التي تتمتع بخاصية أن حاصل ضرب الإحداثيات في G يساوي e ، أي إن:

$$X = \{(g_1, g_2, \dots, g_p) \mid g_i \in G \text{ و } g_1 g_2 \dots g_p = e\}.$$

ندعي أن p تقسم $|X|$. عند تكوين المتعددات p - في X ، فيمكننا أن ندع g_1, g_2, \dots, g_{p-1} لتكون أي عناصر في G ، و g_p تحدد بصورة وحيدة بوصفها $(g_1 g_2 \dots g_{p-1})^{-1}$. إذن، $|X| = |G|^{p-1}$ ، ولأن p تقسم $|G|$ ، فنرى أن p تقسم $|X|$.

لتكن σ الحلقة $(1, 2, 3, \dots, p)$ في S_p . سندع σ تؤثر في X كالآتي:

$$\sigma(g_1, g_2, \dots, g_p) = (g_{\sigma(1)}, g_{\sigma(2)}, \dots, g_{\sigma(p)}) = (g_2, g_3, \dots, g_p, g_1)$$

لاحظ أن $X = \langle g_1, g_2, g_3, \dots, g_p \rangle$ ؛ لأن $g_1(g_2g_3 \dots g_p) = e$ يؤدي إلى أن $g_1 = (g_2g_3 \dots g_p)^{-1}$ وهكذا، فإن $g_1 = e$ كذلك. إذن، σ تؤثر في X ، وسنعد تأثير الزمرة الجزئية $\langle \sigma \rangle$ في S_p على X بالترار بطريقة طبيعية.

الآن، $|\langle \sigma \rangle| = p$ ، وهكذا، فبإمكاننا تطبيق المبرهنة 1.36، حيث نعلم أن $|X| \equiv |X_{\langle \sigma \rangle}|$ (مقياس p)، ولأن p تقسم $|X|$ ، فإن p تقسم $|X_{\langle \sigma \rangle}|$ كذلك، لنختبر $X_{\langle \sigma \rangle}$ ، يُترك -الآن- (g_1, g_2, \dots, g_p) ثابتاً بـ σ ، وإذن، بكل $\langle \sigma \rangle$ ، إذا وفقط إذا كان $g_1 = g_2 = \dots = g_p$ ، حيث نعرف على الأقل عنصراً واحداً في $X_{\langle \sigma \rangle}$ ، (e, e, \dots, e) ، ولأن p تقسم $|X_{\langle \sigma \rangle}|$ ، فيجب أن يكون هناك p عنصر على الأقل في $X_{\langle \sigma \rangle}$ ، إذن، يوجد عنصر $a \in G$ ، $a \neq e$ ، حيث إن $(a, a, \dots, a) \in X_{\langle \sigma \rangle}$ ، وهكذا $a^p = e$ ، وإذن، رتبة a تساوي p ، وبالطبع، $\langle a \rangle$ زمرة جزئية من G من الرتبة p .

لكن G زمرة منتهية. تكون G زمرة p -، إذا وفقط إذا كان $|G|$ قوة لـ p .

4.36 نتيجة

سنترك برهان هذه النتيجة للتمرين 14.

البرهان

مبرهنت سيلو

لكن G زمرة، ولتكن \mathcal{L} مجموعة الزمر الجزئية في G جميعها. سنجعل \mathcal{L} مجموعة G - بجعل G تؤثر في \mathcal{L} بالترافق، أي إنه إذا كانت $H \in \mathcal{L}$ - أي $H \leq G$ و $g \in G$ ، فإن g تؤثر في H ، ما يعطي الزمرة الجزئية المرافقة gHg^{-1} . (لتجنب الإرباك، لن نكتب هذا التأثير أبداً على الصورة gh)، من السهل الآن رؤية أن $\{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ زمرة جزئية من G (التمرين 11)، و H زمرة جزئية ناظمية في G ، ولأن G_H تتألف من عناصر G جميعها التي تترك H ثابتة تحت تأثير المرافقة، فإن G_H أكبر زمرة جزئية في G تحوي H بوصفها زمرة جزئية ناظمية.

5.36 تعريف

الزمرة الجزئية G_H التي نوقشت توأ هي منظم H في G (normalizer)، وسيتم لها بالرمز $N[H]$ من الآن فصاعداً.

في إثبات التمهيدية الآتية، سنستخدم حقيقة أنه إذا كانت H زمرة جزئية منتهية في الزمرة G ، فإن $g \in N[H]$ إذا كان $ghg^{-1} \in H$ لكل $h \in H$ ، ولرؤية هذا، لاحظ أنه إذا كان $gh_1g^{-1} = gh_2g^{-1}$ ، فإن $h_1 = h_2$ بخاصية الحذف في الزمرة G . إذن، دالة الترافق $i_g : H \rightarrow H$ المعطاة بـ $i_g(h) = ghg^{-1}$ دالة أحادية؛ ولأن $|H|$ منتهية، فإن i_g دالة غامرة من H إلى H ، أي إن $gHg^{-1} = H$ و $g \in N[H]$.

6.36 تمهيدية

لكن H زمرة p - جزئية من الزمرة المنتهية G ، فإن:

$$(N[H] : H) \equiv (G : H) \quad (\text{مقياس } p).$$

نبذة تاريخية

تنسب مبرهنات سيلو إلى الرياضي النرويجي (Peter Ludvig Mejdell Sylow) (1832 – 1918)، الذي نشرها في بحث مختصر عام 1872م، فقد نصّ سيلو على هذه المبرهنات مستخدماً زمراً التباديل (لأن التعريف المجرد للزمر المجردة لم يكن قد أعطي بعد)، وقد أعاد جورج فروبينس إثبات هذه المبرهنات للزمر المجردة عام 1887م، على الرغم من ملاحظته أنّ كل زمرة هي في الحقيقة زمرة تباديل (مبرهنة كيللي [المبرهنة 16.8]، وقد طبق سيلو نفسه مباشرة المبرهنات على مسألة حل المعادلات الجبرية، وبرهن على أنّ أي معادلة ذات زمرة جالوا من رتبة تساوي قوة لعدد أولي p ، يمكن حلها باستخلاص الجذور.

أمضى سيلو معظم حياته المهنية بوصفه معلماً في مدرسة عليا في هالدين في النرويج، ولم يعين في موقع في جامعة كريستينا إلا عام 1898م، حيث كرّس ثماني سنوات من عمره لمشروع تحرير أعمال ابن بلده (Niels Henrik Able) الرياضية.

البرهان لتكن \mathcal{L} مجموعة مجموعات المشاركة اليسرى H في G ، ولندع H تؤثر في \mathcal{L} بالإزاحة من اليسار، بحيث $h(xH) = (hx)H$. إذن، تصبح \mathcal{L} مجموعة H -لحظ أنّ $(G : H) = |\mathcal{L}|$

لنحدد \mathcal{L}_H ، أي مجموعات المشاركة اليسرى التي تترك ثابتة تحت تأثير عناصر H جميعها. الآن، $xH = h(xH)$ إذا وفقط إذا كان $xH = h(xH) \in H$ ، أو إذا وفقط إذا كان $H = x^{-1}hxH$ ، إذن، $xH = h(xH)$ لكل $h \in H$ ، إذا وفقط إذا كان $x^{-1}hx = x^{-1}h(x^{-1})^{-1} \in H$ لكل $h \in H$ ، أو إذا وفقط إذا كان $x^{-1} \in N[H]$ (انظر إلى التعليق السابق للتمهيدية)، أو إذا وفقط إذا كان $x \in N[H]$. إذن، مجموعات المشاركة اليسرى في \mathcal{L}_H هي تلك المحتواة في $N[H]$ ، وعدد هذه المجموعات المشاركة هو $(N[H] : H)$ ، وهكذا، فإنّ $(N[H] : H) = |\mathcal{L}_H|$.

لأنّ H زمرة p -، فإنّ رتبته قوة لـ p بحسب النتيجة 4.36، وتخبّرنا المبرهنة 1.36 الآن بأنّ

$$|\mathcal{L}| \equiv |\mathcal{L}_H| \pmod{p}, \text{ أي أنّ } (N[H] : H) \equiv (G : H) \pmod{p}.$$

7.36 نتيجة لتكن H زمرة p -جزئية من الزمرة المنتهية G ، فإذا كان p يقسم $(G : H)$ ، فإنّ $N[H] \neq H$.

البرهان ينتج عن التمهيدية 6.36 أنّ p تقسم $(N[H] : H)$ ، التي يجب ألا تساوي 1. إذن،

$$H \neq N[H].$$

إننا مستعدون الآن لأولى مبرهنات سيلو، التي تؤكد وجود زمرة جزئية في G من رتبة تساوي قوة عدد أولي لأي قوة عدد أولي تقسم $|G|$.

8.36 مبرهنة (مبرهنة سيلو الأولى) لتكن G زمرة منتهية، وليكن $|G| = p^n m$ ، حيث $n \geq 1$ و p لا تقسم m ، فإنّ

1. تحوي G زمرة جزئية من الرتبة p^i لكل $1 \leq i \leq n$.
2. تكون كل زمرة جزئية H في G من الرتبة p^i ، زمرة جزئية ناظرية في زمرة جزئية من الرتبة p^{i+1} ، حيث $1 \leq i < n$.

البرهان

1. نعلم من مبرهنة كوشي أن G تحوي زمرة جزئية من الرتبة p . (المبرهنة 3.36).
سنستخدم الاستقراء الرياضي في إثبات أن وجود زمرة جزئية من الرتبة p^i ، حيث $i < n$
يؤدي إلى وجود زمرة جزئية من الرتبة p^{i+1} لتكن H زمرة جزئية من الرتبة p^i ولأن $i < n$
فدري أن p تقسم $(G:H)$ ، ونعلم من التمهيدية 6.36 أن p تقسم $(N[H]:H)$: لأن H زمرة
جزئية ناظمية في $N[H]$ ، فيمكننا صنع $N[H]/H$ ، ونرى أن p تقسم $|N[H]/H|$ ،
وبحسب مبرهنة كوشي، يوجد لزمرة العامل $N[H]/H$ زمرة جزئية K من الرتبة p ، إذا كان
 $\gamma^{-1}[K] = \{x \in N[H] \mid \gamma(x) \in K\}$ فإن التشاكل القانوني، $\gamma: N[H] \rightarrow N[H]/H$
زمرة جزئية من $N[H]$ ومن ثم من G ، هذه الزمرة الجزئية تحوي H ومن الرتبة p^{i+1} .

2. نعيد البناء في الجزء 1، ونلاحظ أن $|N[H]| \leq \gamma^{-1}[K] < H$ ، حيث $|\gamma^{-1}[K]| = p^{i+1}$
، ولأن H ناظمية في $N[H]$ ، فإنها بالطبع ناظمية في الزمرة التي ربما تكون أصغر.
◆ $\gamma^{-1}[K]$

9.36 تعريف

زمر سيلو الجزئية p - (Sylow p - Subgroup) في الزمرة G ، هي زمرة جزئية p - أعظمية في
 G ، أي إنها زمرة جزئية p -، وغير محتواة في زمرة جزئية p - أكبر منها. ■

لتكن G زمرة منتهية، حيث $|G| = p^m$ كما في المبرهنة 8.36. تثبت المبرهنة أن زمر
سيلو الجزئية p - في G هي بالضبط تلك الزمر الجزئية من الرتبة p^n ، فإذا كانت P زمرة سيلو
الجزئية p -، فإن كل مرافقة gPg^{-1} هي كذلك زمرة سيلو جزئية p - وتنص مبرهنة سيلو
الثانية على أنه يمكن الحصول على زمر سيلو الجزئية p - جميعها من P بهذه الطريقة، أي إن أي
زمرتي سيلو جزئيتين p - تكونان مترافقتين.

10.36 مبرهنة

(مبرهنة سيلو الثانية) لتكن P_1 و P_2 زمرتي سيلو جزئيتين p - في زمرة منتهية G ، فإن P_1 و P_2
زمرتان جزئيتان مترافقتان في G .

البرهان

هنا سندع إحدى الزمرتين الجزئيتين تؤثر في مجموعات المشاركة اليسرى للأخرى، ونستخدم
المبرهنة 1.36. لتكن \mathcal{S} مجموعة مجموعات المشاركة اليسرى لـ P_1 ، ولندع P_2 تؤثر في \mathcal{S}
كالآتي: $\gamma(xP_1) = (\gamma x)P_1$ ، حيث $\gamma \in P_2$ ، إذن، \mathcal{S} مجموعة p_2 -، وبحسب المبرهنة 1.36، فإن
 $|\mathcal{S}| \equiv |\mathcal{S}_{p_2}| \pmod{p}$ (مقياس p)، $(G:P_1) = |\mathcal{S}|$ ولا تقبل القسمة على p ، وهكذا، فإن
 $|\mathcal{S}_{p_2}| \neq 0$. لتكن $xP_1 \in \mathcal{S}_{p_2}$ ، إذن $\gamma xP_1 = xP_1$ لكل $\gamma \in P_2$ ، وهكذا، فإن $x^{-1}\gamma xP_1 = P_1$ ، ولأن
 $|P_1| = |P_2|$ ، فيجب أن نحصل على $P_1 = x^{-1}P_2x$ ، وهكذا، فإن P_1 و P_2 بالتأكيد زمرتان جزئيتان
مترافقتان. ◆

مبرهنة سيلو الأخيرة تعطي معلومات عن عدد زمر سيلو الجزئية p -، بعض التوضيحات
معتادة بعد المبرهنة، والمزيد معطى في الفصل المقبل.

11.36 مبرهنة

(مبرهنة سيلو الثالثة) إذا كانت G زمرة منتهية و p تقسم $|G|$ ، فإن عدد زمر سيلو الجزئية p - مطابق لـ 1 مقياس p ، ويقسم $|G|$.

البرهان

لتكن P إحدى زمر سيلو الجزئية p - في G . لتكن \mathcal{L} مجموعة كل زمر سيلو الجزئية p -، ولندع P تؤثر في \mathcal{L} بالترافق، حيث إن $x \in P$ ترسل $T \in \mathcal{L}$ إلى xTx^{-1} . فبحسب المبرهنة 1.36، فإن $|\mathcal{L}| \equiv |\mathcal{L}_p| \pmod{p}$. لنحسب $|\mathcal{L}_p|$.

إذا كانت $T \in \mathcal{L}_p$ ، فإن $xTx^{-1} = T$ لكل $x \in P$ ، إذن، $P \leq N[T]$ ، وبالطبع، $T \leq N[T]$ كذلك، ولأن P و T زمر سيلو جزئية p - في G ، فهي كذلك زمر سيلو جزئية p - في $N[T]$ ، ولكنهما عند ذلك يصبحان مترافقين في $N[T]$ بحسب المبرهنة 10.36، ولأن T زمرة جزئية ناظرية في $N[T]$ ، فإنها المترافق الوحيد لنفسها في $N[T]$ ، إذن، $T = P$ ، وهكذا، فإن $\mathcal{L}_p = \{P\}$ ، ولأن $|\mathcal{L}| \equiv |\mathcal{L}_p| \pmod{p}$ (مقياس p)، فنرى أن عدد زمر سيلو الجزئية p - مطابق لـ 1 مقياس p .

لندع الآن G تؤثر في \mathcal{L} بالترافق. فلأن زمر سيلو الجزئية p - كلها مترافقة، فيوجد مدار واحد فقط في \mathcal{L} تحت G ، وإذا كانت $P \in \mathcal{L}$ ، فإن $(G : G_p) = |مدار P| = |\mathcal{L}|$ بحسب المبرهنة 16.16 (في الحقيقة G_p هي منظم P)؛ ولكن $(G : G_p)$ يقسم $|G|$ ، وهكذا، فإن عدد زمر سيلو الجزئية p - يقسم $|G|$. ♦

12.36 مثال

زمر سيلو الجزئية 2 - في S_3 لها رتبة 2. الزمر الجزئية من الرتبة 2 في S_3 في المثال 7.8، هي:

$$\{\rho_0\mu_1\}, \quad \{\rho_0\mu_2\}, \quad \{\rho_0\mu_3\}.$$

لاحظ أنه توجد ثلاث زمر جزئية، وأن $3 \equiv 1 \pmod{2}$ ، وكذلك 3 تقسم 6 (رتبة S_3) يمكننا التحقق بسهولة أن: $i_{\rho_0}[\{\rho_0\mu_1\}] = \{\rho_0\mu_3\}$ و $i_{\rho_2}[\{\rho_0\mu_1\}] = \{\rho_0\mu_2\}$ حيث $i_{\rho_j}(x) = \rho_j x \rho_j^{-1}$ موضحة أنها جميعها مترافقة. ▲

13.36 مثال

لنستخدم مبرهنات سيلو في برهان أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 15. لتكن رتبة G 15، فنُدعي أن G تحوي زمرة جزئية ناظرية من الرتبة 5، وبحسب المبرهنة 8.36، تحوي G على الأقل زمرة جزئية واحدة من الرتبة 5، وبحسب المبرهنة 11.36 عدد مثل هذه الزمر الجزئية يطابق 1 مقياس 5، ويقسم 15، ولأن 1، 6، و 11 هي الأعداد الصحيحة الموجبة الوحيدة الأقل من 15 وتطابق 1 مقياس 5، ولأن العدد 1 هو الوحيد بينها الذي يقسم 15، فنرى أن G تحوي بالضبط زمرة جزئية واحدة P من الرتبة 5؛ ولكن لكل $g \in G$ ، يربط التماثل الذاتي الداخلي i_g المعرف على G ، حيث $i_g(x) = gxg^{-1}$ ، الزمرة الجزئية P بصورة غامرة بزمرة جزئية P ، وهي الأخرى من الرتبة 5. إذن، يجب أن يكون لدينا $P = gPg^{-1}$ لكل $g \in G$ ، وهكذا، فإن P زمرة جزئية ناظرية في G ؛ لذلك، فإن G ليست بسيطة (سيثبت المثال 10.37 أن G يجب أن تكون في الحقيقة إبدالية؛ ولذلك، فيجب أن تكون دورية). ▲

إننا على ثقة بأن المثال 13.36 أعطى لمحة عن قوة المبرهنة 11.36. لا تقلل أبداً من أهمية مبرهنة تعد شيئاً، حتى لو كان مقياس p .

■ تمارين 36

حسابات

املاً الفراغات في التمارين 1 - 4.

1. زمرة سيلو جزئية -3 في زمرة رتبته 12 لها رتبة _____.
2. زمرة سيلو جزئية -3 في زمرة رتبته 54 لها رتبة _____.
3. الزمرة من الرتبة 24 يجب أن تحوي _____ أو _____ زمرة سيلو جزئية -2. (استخدم المعلومات المعطاة فقط في المبرهنة 11.36).
4. الزمرة من الرتبة (17) (5) (3) = 255 يجب أن تحوي إما _____ أو _____ زمرة سيلو جزئية -3 و _____ أو _____ زمرة سيلو جزئية -5. (استخدم فقط المعلومات المعطاة في المبرهنة 11.36).
5. أوجد زمرة سيلو الجزئية -3 في S_4 كلها، وبين أنها مترافقة.
6. أوجد زمرتي سيلو جزئيتين -2 في S_4 ، وأثبت أنهما مترافقتان.

مفاهيم

- في التمارين 7 إلى 9، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب - إذا كانت هناك حاجة للتصحيح - بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.
7. ليكن p عدداً أولياً. الزمرة p - هي زمرة بخاصية أن كل عنصر فيها له رتبة p .
 8. المنظم $N[H]$ للزمرة الجزئية H في G هي مجموعة التماثلات الذاتية الداخلية كلها التي تربط H بصورة غامرة بنفسها.
 9. لتكن G زمرة، حيث إن p يقسم رتبها. زمرة سيلو جزئية p - في الزمرة، هي أكبر زمرة جزئية P في G لها خاصية أن رتبته هي إحدى قوى p .
 10. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:
 - أ. أي زمرتي سيلو جزئيتين p - في زمرة منتهية مترافقتان.
 - ب. تثبت المبرهنة 11.36 أن أي زمرة من الرتبة 15 لها فقط زمرة سيلو جزئية - 5 واحدة.
 - ج. كل زمرة سيلو جزئية p - في زمرة منتهية لها رتبة من قوى p .
 - د. كل زمرة جزئية p - في أي زمرة منتهية تكون زمرة سيلو الجزئية p -.
 - هـ. تحوي كل زمرة إبدالية منتهية زمرة سيلو جزئية p - واحدة فقط لكل عدد أولي p يقسم رتبة G .
 - و. المنظم في G للزمرة الجزئية H هو دائماً زمرة جزئية ناظمية في G .
 - ز. إذا كانت H زمرة جزئية في G ، فإن H دائماً زمرة جزئية ناظمية في $N[H]$.
 - ح. تكون زمرة سيلو الجزئية p - في زمرة منتهية G ناظمية، إذا فقط إذا كانت زمرة سيلو الجزئية p - الوحيدة في G .

- ط. إذا كانت G زمرة إبدالية و H زمرة جزئية من G ، فإن $N[H] = H$.
- ي. الزمرة ذات الرتبة p^n حيث p عدد أولي، لا تحوي زمرة سيلو جزئية p -.

براهين

11. لتكن H زمرة جزئية في الزمرة G . أثبت أن $G_H = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$ زمرة جزئية في G .
12. لتكن G زمرة منتهية، ولتكن الأعداد الأولية p و $q \neq p$ تقسم $|G|$. أثبت أنه إذا كانت G تحوي بالضبط زمرة سيلو جزئية p - فعلية واحدة، فإنها زمرة جزئية ناظمية، وهكذا فإن G ليست بسيطة.
13. أثبت أن أي زمرة من الرتبة 45 تحوي زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 9.
14. أثبت النتيجة 4.36.
15. لتكن G زمرة منتهية، وليكن p عدداً أولياً يقسم $|G|$. لتكن P زمرة سيلو جزئية p - في G ، فأثبت أن $N[N[P]] = N[P]$. [مساعدة: ناقش أن P هي زمرة سيلو الجزئية p - الوحيدة في $N[N[P]]$ ، ومن ثم استخدم المبرهنة 10.36].
16. لتكن G زمرة منتهية، وليكن العدد الأولي p يقسم $|G|$ ، ولتكن P زمرة سيلو جزئية p - في G ، ولتكن H أي زمرة جزئية p - في G ، فأثبت أنه يوجد $g \in G$ ، حيث إن $gHg^{-1} \leq P$.
17. أثبت أن زمرة من الرتبة $(35)^3$ تحوي زمرة جزئية ناظمية من الرتبة 125.
18. أثبت عدم وجود زمر بسيطة من الرتبة $(3)(5)(17) = 255$.
19. أثبت عدم وجود زمر بسيطة من الرتبة $p^r m$ ، حيث p عدد أولي، r عدد صحيح موجب، و $m < p$.
20. لتكن G زمرة منتهية. افترض G كمجموعة G ، حيث G تؤثر في نفسها بالترافق.
 - أ. أثبت أن G_G هو المركز $Z(G)$. (انظر الفصل 15).
 - ب. استخدم المبرهنة 1.36 في إثبات أن مركز زمرة p - منتهية غير تافهة يكون غير تافه.
21. ليكن p عدداً أولياً. أثبت أن الزمرة المنتهية من الرتبة p^n تحوي زمراً جزئية ناظمية H_i ، حيث $0 \leq i \leq n$ و $|H_i| = p^i$ و $H_i \leq H_{i+1}$ ، حيث $0 \leq i < n$ [مساعدة: انظر التمرين 20، وخذ فكرة من الفصل 35].
22. لتكن G زمرة منتهية، ولتكن P زمرة جزئية p - ناظمية في G ، فأثبت أن P محتواة في كل زمرة سيلو جزئية p - في G .

تطبيقات على مبرهنات سيلو Applications of the Sylow Theory

سنعطي في هذا الفصل كثيراً من التطبيقات على مبرهنات سيلو. إنه من المثير رؤية مدى سهولة استنتاج حقائق معينة عن زمردات رتب خاصة، وعلى أي حال، فيجب أن ندرك أننا نعمل فقط مع زمرد منتهية، وأنا حقيقة نحرز تقدماً بسيطاً في المسألة العامة لتحديد بنية الزمرد المنتهية جميعها، فإذا كانت رتبة الزمرد تحوي فقط عدداً صغيراً من العوامل، فإن التقنيات الموضحة في هذا الفصل، يمكن أن تكون ذات فائدة في تحديد بنية الزمرد. سيتم توضيح هذا أكثر في الفصل 40، حيث سنثبت أنه من الممكن أحياناً وصف الزمرد كلها (تبعاً للتماثل) من رتبة معينة، حتى لو كانت بعض الزمرد ليست إبدالية، وعلى أي حال، إذا كانت رتبة الزمرد المنتهية مركبة بصورة كبيرة، أي لها عدد كبير من العوامل، فإن المشكلة بوجه عام أصعب بكثير.

تطبيقات على الزمرد p -ومعادلة الفصول

1.37 مبرهنة

كل زمرد ذات رتبة تساوي قوة لعدد أولي (أي زمرد p -منتهية) قابلة للحل.

البرهان

إذا كانت رتبة G تساوي p^r ، فينتج مباشرة من المبرهنة 8.36، أن G تحوي زمرد جزئية H_i من الرتبة p^i ناظمية في زمرد جزئية H_{i+1} من الرتبة p^{i+1} ، حيث $0 \leq i < r$. إذن:

$$\{e\} = H_0 < H_1 < H_2 < \dots < H_r = G$$

سلسلة تركيب، حيث زمرد العامل جميعها من الرتبة p ، وهكذا فهي إبدالية، بل في الحقيقة هي دورية. إذن، G قابلة للحل. ♦

استخدمت البراهين الأقدم لمبرهنات سيلو معادلة الفصول، وقد تم تجنب ذكر معادلة الفصول بصورة واضحة في براهين الفصل 36، مع أن المعادلة (2) هناك هي صورة عامة لها. سنطور الآن معادلة الفصول التقليدية لتصبح مألوفة لديك.

لتكن X مجموعة G -منتهية، حيث G زمرد منتهية. تخبرنا المعادلة (2) في الفصل 36 بأن:

$$(1) \quad |x| = |x_G| + \sum_{i=s+1}^r |Gx_i|$$

حيث x_i عنصر في المدار i في X . سنعمد الآن حالة خاصة من المعادلة (1)، حيث $X = G$ وتأثير G في G بالترافق، وهكذا تنقل $g \in G$ العنصر $x \in X = G$ إلى gxg^{-1} ، إذن:

$$\begin{aligned} X_G &= \{x \in G \mid gxg^{-1} = x \text{ لكل } g \in G\} \\ &= \{x \in G \mid xg = gx \text{ لكل } g \in G\} = Z(G), \end{aligned}$$

مركز G ، فإذا جعلنا $n_i = |Gx_i|$ و $c = |Z(G)|$ في المعادلة (1)، فإننا نحصل على:

$$(2) \quad |G| = c + n_{c+1} + \dots + n_r$$

حيث n_i عدد عناصر المدار i في G تحت تأثير الترافق في نفسها، لاحظ أن n_i تقسم $|G|$ $\mid c+1 \leq i \leq r$ لأننا نعلم في المعادلة (1) أن $|Gx_i| = (G : G_{x_i})$ ، التي هي من قواسم $|G|$.

المعادلة (2) هي معادلة الفصول لـ G (Class equation). كل مدار في G تحت الترافق بـ G ، هو فصل ترافق في G (Conjugate Class).

2.37 تعريف

من السهل التحقق أنه في S_3 في المثال 7.8 تكون فصول الترافق

3.37 مثال

$$\{\rho_0\}, \{\rho_1, \rho_2\}, \{\mu_1, \mu_2, \mu_3\}.$$

معادلة الفصول في S_3 هي:

$$6 = 1 + 2 + 3.$$

لتوضيح استخدام معادلة الفصول، نثبت المبرهنة التي طلب التمرين (b) 20 في الفصل 36 أن نبرهنها.

4.37 مبرهنة

يكون مركز زمرة p -منتهية غير تافهة G غير تافه.

في المعادلة (2) لـ G ، كل n_i تقسم $|G|$ ، حيث $c+1 \leq i \leq r$ ، وهكذا، فإن p تقسم كل n_i ، وكذلك فإن p تقسم $|G|$. إذن، p تقسم c . الآن، $e \in Z(G)$ ، وهكذا $c \geq 1$ ، لذلك، $c \geq p$ ، ويوجد $a \in Z(G)$ بحيث $a \neq e$.

البرهان

نتحول الآن إلى تمهيدية على الضرب المباشر، التي ستستخدم في المبرهنات التي تلي.

5.37 تمهيدية

لتكن G زمرة تحوي زمرتين جزئيتين ناظمتين H و K ، حيث $H \cap K = \{e\}$ و $H \vee K = G$ ، إذن، تماثل $H \times K$.

البرهان

سنبدأ بإثبات أن $hk = kh$ ، حيث $k \in K$ و $h \in H$. خذ المبدل $hkh^{-1}k^{-1} = (hkh^{-1})k^{-1} = h(kh^{-1}k^{-1})$ ، ولأن H و K زمرتان جزئيتان ناظمتان في G ، فإن التجميعين في الأقواس يثبتان أن $hkh^{-1}k^{-1}$ في كلا H و K ، ولأن $H \cap K = \{e\}$ ، فنرى أن $hkh^{-1}k^{-1} = e$ وهكذا $hk = kh$.

ليكن $\phi: H \times K \rightarrow G$ معرفًا بـ $\phi(h, k) = hk$ إذن:

$$\begin{aligned}\phi((h, k)(h', k')) &= \phi(hh', kk') = hh'kk' \\ &= hkh'k' = \phi(h, k)\phi(h', k'),\end{aligned}$$

وهكذا، فإن ϕ تشاكل.

إذا كان $\phi(h, k) = e$ ، فإن $hk = e$ ، وهكذا، فإن $h = k^{-1}$ وكلا h و k في $H \cap K$. إذن، $\text{Ker}(\phi) = \{(e, e)\}$ ، ولذلك، $h = k = e$ أحادية.

بحسب التمهيدية 4.34، نعلم أن $HK = H \vee K = G$ ، $H \vee K = G$ بالافتراض. إذن، ϕ غامرة لـ G ، و $H \times K \simeq G$.

◆

6.37 مبرهنة

للعدد الأولي p ، كل زمرة من الرتبة p^2 إبدالية.

البرهان

إذا كانت G غير دورية، فإن كل عنصر ما عدا e يجب أن يكون من الرتبة p . ليكن a أحد هذه العناصر؛ إذن، الزمرة الجزئية الدورية $\langle a \rangle$ من الرتبة p لا تستنفذ G ، وكذلك ليكن $b \in G$ ، حيث $b \notin \langle a \rangle$ ؛ إذن، $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \{e\}$ ؛ لأن العنصر c في $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ ، حيث $c \neq e$ سيكون مولدًا لكل من $\langle a \rangle$ و $\langle b \rangle$ ، معطياً $\langle a \rangle = \langle b \rangle$ ، ما يناقض الإنشاء، ومن المبرهنة 8.36، $\langle a \rangle$ ناظرية في زمرة جزئية من الرتبة p^2 في G ، أي ناظرية في G كلها، وبالمثل $\langle b \rangle$ ناظرية في G ، الآن $\langle a \rangle \vee \langle b \rangle$ زمرة جزئية في G ، وتحوي بصورة فعلية $\langle a \rangle$ ، ورتبتها تقسم p^2 ؛ إذن، يجب أن تكون $\langle a \rangle \vee \langle b \rangle$ هي G كلها؛ إذن، فرضيات البديهية 5.37 متحققة، و G تماثل $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ ؛ ولذلك فهي إبدالية.

◆

المزيد من التطبيقات

سنتحول إلى مناقشة ما إذا كانت زمرة بسيطة من رتب معينة موجودة، وقد رأينا أن كل زمرة ذات رتبة عدد أولي تكون بسيطة، وكذلك أثبتنا أن A_n بسيطة حيث $n \geq 5$ ، وأن A_5 أصغر زمرة بسيطة ذات رتبة ليست عددًا أوليًا، إذ إن هناك تخمينًا من بيرنسايد بأن أي زمرة منتهية بسيطة ذات رتبة غير أولية، يجب أن تكون ذات رتبة زوجية، وقد كان النصر حينما برهن هذا [21] (Thompson and Feit).

إذا كانت p و q عددين أوليين مختلفين و $p < q$ ، فإن كل زمرة ذات رتبة pq لها زمرة جزئية وحيدة من الرتبة q ، وهذه الزمرة الجزئية ناظرية في G ، وهكذا فإن G ليست بسيطة، وإذا كان q لا يطابق 1 مقياس p ، فإن G إبدالية ودورية.

7.37 مبرهنة

البرهان

تخبرنا المبرهنتان 8.36 و 11.36 بأن G تحوي زمرة سيلو جزئية q -، وأن عدد هذه الزمر الجزئية يطابق 1 مقياس q ويقسم pq ؛ ولذلك، يجب أن يقسم p ، ولأن $p < q$ ، فإن الاحتمال الوحيد هو العدد 1؛ إذن، توجد زمرة سيلو جزئية q - واحدة Q في G ، حيث يجب أن تكون الزمرة Q ناظرية في G ؛ لأنها تحت تماثل ذاتي داخلي ستحمل إلى زمرة من الرتبة نفسها، أي هي نفسها؛ إذن، G ليست بسيطة.

بالمثل، توجد P زمرة سيلو جزئية p - في G ، وعددها يقسم pq ، ويطابق 1 مقياس p ، هذا العدد يجب أن يكون 1 أو q ، فإذا كان q لا يطابق 1 مقياس p ، فإن العدد يجب أن يكون 1 P ناظرية في G ، لنفترض أن $q \neq 1$ (مقياس p). لأن كل عنصر في Q مختلف عن e له رتبة q ، وكل عنصر في P مختلف عن e له رتبة p ، فنحصل على $Q \cap P = \{e\}$ ، وكذلك $P \vee Q$ يجب أن تكون زمرة جزئية من G تحوي Q فعلياً ورتبتها تقسم pq ؛ إذن، $Q \vee P = G$ وبحسب البديهية 5.37 تماثل $Q \times P$ أو $\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_p$ ؛ إذن، G إبدالية ودورية. ♦

سنحتاج إلى تمهيدية أخرى لبعض مناقشات العد الآتية.

8.37 تمهيدية

إذا كانت H و K زمرتين جزئيتين منتهيتين في الزمرة G . فإن:

$$|HK| = \frac{(|H|)(|K|)}{|H \cap K|}$$

البرهان

تذكر أن $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$. ليكن $|H| = r$ و $|K| = s$ و $|H \cap K| = t$. الآن تحوي HK على الأكثر rs عنصراً، وعلى أي حال، فمن الممكن أن يكون $h_1 k_1$ يساوي $h_2 k_2$ ، حيث $h_1, h_2 \in H$ و $k_1, k_2 \in K$ ؛ أي يمكن أن يكون هناك بعض التداخل، فإذا كان $h_1 k_1 = h_2 k_2$ فدع

$$x = (h_2)^{-1} h_1 = k_2 (k_1)^{-1}$$

يبث $x = (h_2^{-1}) h_1$ أن $x \in H$ و $x = k_2 (k_1)^{-1}$ يثبت أن $x \in K$ ؛ إذن، $x \in (H \cap K)$

$$h_2 = h_1 x^{-1} \quad \text{و} \quad k_2 = x k_1$$

من الناحية الأخرى، إذا كانت $y \in (H \cap K)$ ، فنضع $h_3 = h_1 y^{-1}$ و $k_3 = y k_1$ ؛ إذن، من الواضح أن $h_3 k_3 = h_1 k_1$ ، حيث $h_3 \in H$ و $k_3 \in K$ ؛ إذن، يمكن تمثيل $hk \in HK$ على صورة $h_i k_i$ ، حيث $h_i \in H$ و $k_i \in K$ بعدد من المرات يساوي عدد عناصر $H \cap K$ ، أي t من المرات؛ لذلك، عدد العناصر في HK يساوي rs/t . ♦

التمهيدية 8.37 هي نتيجة أخرى تعد الأشياء؛ لذلك لا تقلل من قيمتها، ستستخدم البديهية بالصورة الآتية: لا يمكن لزمرة منتهية G أن تحوي زمرتين جزئيتين H و K كبيرتين جداً مع تقاطع صغير جداً، أو أن رتبة HK ستتجاوز رتبة G ، وهذا مستحيل، على سبيل المثال: الزمرة من الرتبة 24 لا يمكن أن تحوي زمرتين جزئيتين من الرتبة 12 و 8 وتقاطعاً من الرتبة 2.

تتألف بقية هذا الفصل من تمارين عدّة توضح تقنيات إثبات أنّ الزمر من رتبة معينة جميعها إبدالية، أو أنّ لها زمرة جزئية ناظرية فعلية، أي إنها ليست بسيطة. سنستخدم حقيقة واحدة ذكرناها سابقاً في التمارين فقط، الزمرة الجزئية H ذات الدليل 2 في زمرة منتهية G هي دائماً ناظرية؛ لأنه - وبالعدّ - نرى أنّ مجموعات المشاركة اليسرى هي فقط H ومجموعة المشاركة التي تتكوّن من جميع عناصر G التي ليست في H ، ومجموعات المشاركة اليمنى مثلها؛ إذن، كلّ مجموعة مشاركة اليمنى هي مجموعة مشاركة يسرى، و H ناظرية في G .

9.37 مثال

لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة p^r حيث $r > 1$ ، حيث p عدد أولي؛ لأنه وبحسب المبرهنة 8.36، تحوي مثل هذه الزمرة G زمرة جزئية من الرتبة p^{r-1} وناظرية في زمرة جزئية من الرتبة p^r ، التي يجب أن تكون G كلها؛ إذن، الزمرة من الرتبة 16 ليست بسيطة، إنها تحوي زمرة جزئية ناظرية من الرتبة 8. ▲

10.37 مثال

كل زمرة من الرتبة 15 دورية (وهكذا، فهي إبدالية، وليست بسيطة؛ لأن 15 ليس عدداً أولياً)؛ هذا لأن $(3)(5) = 15$ ، و 5 لا تطابق 1 مقياس 3، وبذلك نكون انتهينا بحسب المبرهنة 7.37. ▲

11.37 مثال

لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 20؛ لأن مثل هذه الزمرة G لها زمر سيلو جزئية -5، وعددها يطابق 1 مقياس 5، وهو من قواسم 20؛ ولذلك فهو 1، زمرة سيلو الجزئية -5 هذه ناظرية؛ لأنها تساوي مرافقاتها جميعها. ▲

12.37 مثال

لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 30، وقد رأينا أنه إذا وجدت زمرة سيلو جزئية p - واحدة فقط، حيث p عدد أولي يقسم 30، فنكون انتهينا، وبحسب المبرهنة 11.36، فإن احتمالات عدد زمر سيلو الجزئية -5 هي 1 أو 6، وتلك لزمر سيلو الجزئية -3 تساوي 1 أو 10؛ ولكن، إذا كان G زمر سيلو جزئية -5، فإن تقاطع أي اثنتين منها هو زمرة جزئية ذات رتبة تقسم 5؛ ولذلك هي فقط $\{e\}$ ؛ إذن، تحوي كل منها 4 عناصر من الرتبة 5، التي لا تنتمي إلى الأخريات؛ إذن، يجب أن تحوي G 24 عنصراً من الرتبة 5، وبالمثل، إذا كانت G تحوي 10 زمر سيلو جزئية -3، فإنها تحوي على الأقل 20 عنصراً من الرتبة 3، سيحتاج نوعا زمر سيلو معاً على الأقل إلى 44 عنصراً في G ؛ إذن، توجد زمرة جزئية ناظرية من الرتبة 5 أو من الرتبة 3. ▲

13.37 مثال

لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 48، وسنثبت بالطبع، أن الزمر G ذات الرتبة 48 تحوي زمراً جزئية ناظرية من الرتبة 16 أو الرتبة 8، وبحسب المبرهنة 11.36، فإن G تحوي واحدة أو ثلاث زمر سيلو جزئية -2 من الرتبة 16، فإذا كانت هناك زمرة جزئية واحدة فقط من الرتبة 16، فإنها تكون ناظرية في G .

افترض أن هناك ثلاث زمر جزئية من الرتبة 16، ولتكن H و K اثنتين منها.

إذن، يجب أن تكون رتبة $H \cap K$ تساوي 8؛ لأنه إذا كانت $H \cap K$ ذات رتبة $4 \geq$ ، فإنه وبحسب التمهيدية 8.37 تحوي HK على الأقل $64 = 4 / (16) (16)$ عناصر، ما يناقض حقيقة أن G تحوي فقط 48 عناصر، فإن $H \cap K$ ناظرية في كل من H و K (لأنها ذات دليل يساوي 2، أو بحسب المبرهنة 8.36)؛ إذن، منظم $H \cap K$ يحوي كلاً من H و K ، ويجب أن يكون ذا رتبة مضاعف $1 < 16$ وقاسماً لـ 48؛ ولذلك، فهو 48؛ إذن، يجب أن تكون $H \cap K$ ناظرية في G . ▲

14.37 مثال

لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 36، ومثل هذه الزمرة G تحوي إما زمرة جزئية واحدة أو أربعة من الرتبة 9، فإذا كان هناك منها زمرة جزئية واحدة فقط، فإنها ناظرية في G ، وإذا كان هناك أربعة من هذه الزمر الجزئية، فلتكن H و K اثنتين منها، وكما في المثال 13.37، يجب أن تحوي $H \cap K$ ثلاثة عناصر على الأقل، أو أن HK ستحوي 81 عناصر، وهذا مستحيل؛ إذن، منظم $H \cap K$ له رتبة مضاعف $1 < 9$ وقاسم لـ 36؛ إذن، يجب أن تكون الرتبة إما 18 أو 36، فإذا كانت الرتبة تساوي 18، فإن دليل المنظم يساوي 2؛ ولذلك، فهو ناظمي في G ، أما إذا كانت الرتبة تساوي 36، فإن $H \cap K$ ناظرية في G . ▲

15.37 مثال

تكون كل زمرة G من الرتبة (17) (5) (3) = 255 إبدالية (ولذلك، فهي دورية بحسب المبرهنة الأساسية 12.11 وليست بسيطة؛ لأن 255 ليس عدداً أولياً)، وبحسب المبرهنة 11.36، الزمرة G تحوي زمرة جزئية H واحدة فقط من الرتبة 17؛ إذن، G/H لها رتبة 15 وهي إبدالية بحسب المثال 10.37، حيث نرى بحسب المبرهنة 20.15، أن زمرة المبدلات الجزئية C في G محتواة في H ؛ إذن ويوصفها زمرة جزئية من H ، فإن رتبة C إما 1 أو 17.

كذلك ترينا المبرهنة 11.36، أن G تحوي إما 1 أو 85 زمرة جزئية من الرتبة 3، وإما 1 أو 51 زمرة جزئية من الرتبة 5، وفي أي حال، فإن 85 زمرة جزئية من الرتبة 3 ستحتاج إلى 170 عناصر من الرتبة 3، و51 زمرة جزئية من الرتبة 5 ستحتاج إلى 204 عناصر من الرتبة 5 في G ، كلاهما معاً سيحتاجان إلى 375 عناصر في G ، وذلك مستحيل؛ إذن، توجد زمرة جزئية K رتبته إما 3 أو 5 وناظرية في G ؛ إذن، G/K لها رتبة (17) (5) أو (17) (3)، وفي كلتا الحالتين ترينا المبرهنة 7.37 أن G/K إبدالية؛ إذن، $C \leq K$ ولها رتبة إما 3، 5، أو 1، ولأن $C \leq H$ تثبت أن رتبة C إما 17 أو 1، فنستنتج أن رتبة C هي 1؛ إذن، $C = \{e\}$ ، و $G/C \cong G$ ، وإبدالية، وتثبت المبرهنة الأساسية 12.11 أن G دورية. ▲

■ تمارين 37

حسابات

1. لتكن زمرة تماثلات المربع في المثال 10.8.
 - أ. أوجد تحليل D_4 إلى فصول ترافق.
 - ب. اكتب معادلة الفصول لـ D_4 .
2. بمناقشات شبيهة لتلك التي استخدمت في الأمثلة في هذا الفصل، أقنع نفسك بأن كل زمرة غير تافهة ذات رتبة غير أولية وأقل من 60، تحوي زمرة جزئية ناظرية فعلية غير تافهة، وبذلك تكون غير بسيطة. لا تحتاج إلى كتابة التفاصيل. (نوقشت أصعب الحالات في الأمثلة).

مفاهيم

3. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:
 - أ. كل زمرة من الرتبة 159 دورية.
 - ب. كل زمرة من الرتبة 102 لها زمرة جزئية ناظرية فعلية غير تافهة.
 - ج. كل زمرة قابلة للحل رتبتهما إحدى قوى عدد أولي.
 - د. كل زمرة ذات رتبة تساوي قوة عدد أولي قابلة للحل.
 - هـ. سيكون مضجراً جداً إثبات أنه لا توجد زمرة ذات رتبة غير أولية بين 60 و168 بسيطة بالطرق الموضحة في الكتاب.
 - و. لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 21.
 - ز. تحوي كل زمرة بـ 125 عنصراً 5 عناصر على الأقل تبدل مع عناصر الزمرة جميعها.
 - ح. تحوي كل زمرة من الرتبة 42 زمرة جزئية ناظرية من الرتبة 7.
 - ط. تحوي كل زمرة من الرتبة 42 زمرة جزئية ناظرية من الرتبة 8.
 - ي. الزمر البسيطة الوحيدة هي الزمر \mathbb{Z}_p و A_n حيث p عدد أولي و $n \neq 4$.

براهين

4. أثبت أن كل زمرة من الرتبة (5) (7) (47) إبدالية ودورية.
5. أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 96.
6. أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة من الرتبة 160.
7. أثبت أن أي زمرة من الرتبة 30 تحوي زمرة جزئية من الرتبة 15. [مساعدة: استخدم آخر عبارة في المثال 12.37، ثم اذهب إلى زمرة العامل].
8. يحدد هذا التمرين فصول الترافق في S_n لكل $n \geq 1$.
 - أ. أثبت أنه إذا كانت $\sigma = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ دورة في S_n و τ أي عنصر في S_n ، فإن $\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau a_1, \tau a_2, \dots, \tau a_m)$.
 - ب. ناقش مستخدماً (أ) أن أي دورتين في S_n من الطول نفسه تكونان مترافقتين.
 - ج. ناقش مستخدماً (أ) و(ب) أن ضرب s من الدورات غير المتقاطعة في S_n وذات أطول r_i ، حيث $i = 1, 2, \dots, s$ ، مترافق مع أي ضرب آخر لـ s من الدورات غير المتقاطعة وذات أطول r_i في S_n .

د. أثبت أن عدد فصول الترافق في S_n يساوي $p(n)$ ، حيث $p(n)$ تساوي عدد الطرق - بإهمال ترتيب الحدود - التي يمكن كتابة n بوصفها مجموع أعداد صحيحة موجبة، يسمى العدد $p(n)$ عدد تقسيمات

(number of partitions of n)

هـ. احسب $p(n)$ لـ $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

9. أوجد فصول الترافق ومعادلة الفصول لـ S_4 . [مساعدة: استخدم التمرين 8].

10. أوجد معادلة الفصول لـ S_5 و S_6 . [مساعدة: استخدم التمرين 8].

11. أثبت أن عدد فصول الترافق لـ S_n هي كذلك عدد الزمر الإبدالية المختلفة (تبعًا للتماثل) من الرتبة n ، حيث p عدد أولي. [مساعدة: استخدم التمرين 8].

12. أثبت أنه إذا كانت $n > 2$ ، فإن مركز S_n هو الزمرة الجزئية المكوّنة من التبديلة المحايدة فقط. [مساعدة: استخدم التمرين 8].

Free Abelian Groups الزمر الإبدالية الحرة

الفصل 38

سنقدم في هذا الفصل مفهوم الزمر الإبدالية الحرة، ونثبت بعض النتائج المتعلقة بها، حيث يختتم الفصل بعرض للمبرهنة الأساسية للزمر الإبدالية منتهية التولد (المبرهنة 12.11).

الزمر الإبدالية الحرة

سنراجع أفكار مجموعة المولدات لزمرة G والزمرة منتهية التولد، كما أعطيت في الفصل 7، وسنتعامل في هذا الفصل بصورة خاصة مع الزمر الإبدالية، ونستخدم مصطلحات الجمع، كما يأتي:

0 للعنصر المحايد، للعملية:

$$a \in G, n \in \mathbb{Z}^+ \text{ حيث } \begin{cases} na = \underbrace{a + a + \dots + a}_{n \text{ من المرات}} \\ -na = \underbrace{(-a) + (-a) + \dots + (-a)}_{n \text{ من المرات}} \end{cases}$$

$0a = 0$ حيث 0 الأول في \mathbb{Z} والثاني في G .

سنستمر باستخدام الرمز \times للضرب المباشر للزمر بدلاً من استخدام رمز الجمع المباشر.

لاحظ أن $\{(1,0), (0,1)\}$ مجموعة مولدة لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ لأن $(n,m) = n(1,0) + m(0,1)$ لأي (m,n) في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، حيث إن مجموعة المولدات هذه تتمتع بخاصية أن كل عنصر في $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ يمكن كتابته بطريقة وحيدة على الصورة $n(1,0) + m(0,1)$ ، أي إن المعاملات n و m في \mathbb{Z} وحيدة.

لتكن X مجموعة جزئية من زمرة إبدالية غير صفرية G ، فإن الشروط الآتية على X متكافئة.

1.38 مبرهنة

1. يمكن كتابة كل عنصر a في G بطريقة وحيدة (ما عدا ترتيب الحدود) على الصورة $a = n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r$ ، حيث $n_i \neq 0$ في \mathbb{Z} و x_i عناصر مختلفة في X .

2. تولد G ، و $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r = 0$ ، حيث $n_i \in \mathbb{Z}$ و x_i عناصر مختلفة في X ، إذا وفقط إذا كانت $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$.

افتراض أن الشرط 1 صحيح، فلأن $G \neq \{0\}$ ، فإن $X \neq \{0\}$. ينتج من 1 أن $0 \notin X$ لأنه إذا كان $x_i = 0$ و $x_j \neq 0$ فإن $x_j = x_i + x_j$ ، ما يناقض وحدانية كتابة x_j ، ومن الشرط 1، تولد G و $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r = 0$ ، إذا كانت $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$. افتراض الآن أن $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r = 0$ ، حيث إن بعض $n_i \neq 0$ ؛ إذن:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 + (n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r) \\ &= (n_1 + 1)x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r \end{aligned}$$

ما يعطي طريقتين لكتابة $x_1 \neq 0$ ما يناقض افتراض الوحدانية في الشرط 1؛ إذن، الشرط 1 يؤدي إلى الشرط 2.

البرهان

سنثبت الآن أن الشرط 2 يؤدي إلى الشرط 1. ليكن $a \in G$ ، ولأن X تولد G ، فنرى أنه يمكن كتابة a على الصورة: $a = n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r$.

افترض أنه يمكن كتابة a بطريقة أخرى باستخدام عناصر X ، فباستخدام معاملات صفرية في التعبيرين عند الحاجة، بإمكاننا افتراض أنهما يشتملان على العناصر نفسها من X ، وأنهما على الصورة:

$$a = n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r$$

$$a = m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_rx_r$$

بالطرح، نحصل على:

$$0 = (n_1 - m_1)x_1 + (n_2 - m_2)x_2 + \dots + (n_r - m_r)x_r$$

وهكذا، فإن $n_i - m_i = 0$ بحسب الشرط 2، و $n_i = m_i$ ، حيث $i = 1, 2, \dots, r$ ؛ إذن، المعاملات وحيدة. \blacklozenge

تسمى الزمر الإبدالية التي لها مجموعة مولدات X تحقق الشروط في المبرهنة 1.38 زمرة إبدالية حرة (Free Abelian Group)، وتسمى X أساساً (basis) للزمرة. \blacksquare

2.38 تعريف

الزمرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ إبدالية حرة و $\{(1, 0), (0, 1)\}$ أساس لها، وبالمثل، $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ أساس للزمرة الإبدالية الحرة $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، وهكذا؛ إذن، الضرب المباشر المنتهي للزمرة \mathbb{Z} مع نفسها زمرة إبدالية حرة. \blacktriangle

3.38 مثال

الزمرة \mathbb{Z}_n ليست إبدالية حرة؛ لأن $nx = 0$ لكل $x \in \mathbb{Z}_n$ ، و $n \neq 0$ ، ما يناقض الشرط 2. \blacktriangle

4.38 مثال

افترض أن زمرة إبدالية حرة G لها أساس منته $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ ، فإذا كان $a \in G$ و $a \neq 0$ ، فإن a كتابة وحيدة على الصورة:

$$a = n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_rx_r \text{ حيث } n_i \in \mathbb{Z}$$

(لاحظ أننا في الكتابة السابقة لـ a قد استخدمنا العناصر x_i كلها في الأساس المنتهي X ، بوصفه مقابلاً لكتابة a في الشرط 1 في المبرهنة 1.38، حيث يمكن أن يكون الأساس غير منته؛ إذن، في الكتابة السابقة لـ a ، يجب أن نسمح باحتمالية أن بعض المعاملات n_i أصفار، بينما في الشرط 1 في المبرهنة 1.38 أشترنا إلى أن كل $n_i \neq 0$.)

نعرف

$$\phi: G \rightarrow \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{r \text{ من العوامل}}$$

بـ $(n_1, n_2, \dots, n_r) = \phi(a)$ و $\phi(0) = (0, 0, \dots, 0)$ ، إذ إنه من السهل التحقق أن ϕ تماثل. نترك التفاصيل للتمارين (انظر التمرين 9)، وننص على النتيجة بوصفها مبرهنة.

5.38 مبرهنة إذا كانت G زمرة إبدالية حرة غير صفيرية ولها أساس بـ r من العناصر، فإن G تماثل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ من العوامل.

إنها حقيقة أن أي أساسين لزمرة إبدالية حرة G تحويان العدد نفسه من العناصر، سنثبت هذا فقط في حالة الأساس المنتهي لـ G ، على الرغم من أنها صحيحة إذا كان كل أساس لـ G غير منته. إن البرهان جميل حقاً؛ فهو يعطي تشخيصاً سهلاً لعدد العناصر في الأساس بدلالة حجم زمرة العامل.

6.38 مبرهنة لتكن $\{0\} \neq G$ زمرة إبدالية حرة ذات أساس منته، فإن كل أساس لـ G منته، وكل أسس G لها العدد نفسه من العناصر.

البرهان ليكن لـ G الأساس $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ ؛ إذن، G تماثل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ من العوامل. لتكن $2G = \{2g \mid g \in G\}$ ، ومن السهل التحقق أن $2G$ زمرة جزئية من G ، ولأن

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z} \simeq G \text{ من العوامل، فنحصل على}$$

$$\begin{aligned} G/2G &\simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}) / (2\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \times \dots \times 2\mathbb{Z}) \\ &\simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

لـ r من العوامل. إذا $|G/2G| = 2^r$ ، وهكذا عدد عناصر أي أساس منته X يساوي $|\log_2 |G/2G||$ ؛ إذن، أي أساسين منتهيين لهما العدد نفسه من العناصر.

بقي أن نثبت أنه لا يمكن أن يكون هناك أساس غير منته لـ G . ليكن Y أساساً لـ G ، ولتكن $\{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ عناصر مختلفة في Y . لتكن H زمرة جزئية في G مولدة بـ $\{y_1, y_2, \dots, y_s\}$ ، ولتكن K زمرة جزئية في G مولدة ببقية عناصر Y ، فمن السهل التحقق أن $G \simeq H \times K$ ، وهكذا فإن:

$$G/2G \simeq (H \times K) / (2H \times 2K) \simeq (H/2H) \times (K/2K).$$

ولأن $|H/2H| = 2^s$ ، فنرى أن $|G/2G| \geq 2^s$ ، ولأن لدينا $|G/2G| = 2^r$ ، فنرى أن $s \leq r$ ؛ إذن، لا يمكن لـ Y أن تكون مجموعة غير منتهية؛ لأنه يمكننا حينها أن نأخذ $s > r$.

7.38 تعريف إذا كانت G زمرة إبدالية حرة، فإن مرتبة G (**rank**) هي عدد العناصر في أساس لـ G . (كل الأسس لها عدد العناصر نفسه).

إثبات المبرهنة الأساسية

سنثبت المبرهنة الأساسية (المبرهنة 12.11) بإثبات أن أي زمرة إبدالية منتهية التولد تماثل زمرة عامل على الصورة:

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}) / (d_1\mathbb{Z} \times d_2\mathbb{Z} \times \dots \times d_s\mathbb{Z} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}),$$

حيث "البسط" و"المقام" كلاهما يحويان n عاملاً، و d_1 تقسم d_2 ، التي تقسم d_3 ، ...، والتي تقسم d_s . وهكذا سينتج التحليل بقوى الأعداد الأولية في المبرهنة 12.11.

لإثبات أن G تماثل زمرة العامل هذه، سنثبت وجود تشاكل من $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ غامر لـ G ، ونواته على صورة $\{0\} \times \{0\} \times \dots \times d_1\mathbb{Z} \times d_2\mathbb{Z} \times \dots \times d_s\mathbb{Z}$ ، وسنحصل على النتيجة من المبرهنة 11.14. ستعطي المبرهنات الآتية تفاصيل هذه المناقشة، حيث إن هدفنا من هذه الفقرة التقديمية، هو رؤية إلى أين نحن ناهبون عندما نقرأ ما يأتي:

لتكن G زمرة إبدالية منتهية التوليد، مولدة بالمجموعة $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ، ليكن:

$$\phi: \underbrace{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}_{\text{عامل } n} \rightarrow G$$

معرِّفاً بـ $\phi: (h_1, h_2, \dots, h_n) = h_1 a_1 + h_2 a_2 + \dots + h_n a_n$ ، فإن ϕ تشاكل غامر لـ G .

8.38 مبرهنة

من معنى $h_i a_i$ ، حيث $h_i \in \mathbb{Z}$ و $a_i \in G$ ، نرى مباشرة أن:

البرهان

$$\begin{aligned} \phi[(h_1, \dots, h_n) + (k_1, \dots, k_n)] &= \phi(h_1 + k_1, \dots, h_n + k_n) \\ &= (h_1 + k_1)a_1 + \dots + (h_n + k_n)a_n \\ &= (h_1 a_1 + k_1 a_1) + \dots + (h_n a_n + k_n a_n) \\ &= (h_1 a_1 + \dots + h_n a_n) + (k_1 a_1 + \dots + k_n a_n) \\ &= \phi(k_1, \dots, k_n) + \phi(h_1, \dots, h_n). \end{aligned}$$

لأن $\{a_1, \dots, a_n\}$ تولد G ، فمن الواضح أن التشاكل ϕ غامر لـ G .

سنبرهن الآن "خاصية الاستبدال"، التي تجعل من الممكن ضبط الأساس.

إذا كان $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ أساساً للزمرة الإبدالية الحرة G و $t \in \mathbb{Z}$ ، فإن لكل $i \neq j$ ، تكون المجموعة

9.38 مبرهنة

$$Y = \{x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t x_i, x_j, x_{j+1}, \dots, x_r\}$$

أساساً كذلك لـ G .

لأن $x_j = (-t)x_i + (1)(x_j + t x_i)$ ، فنرى أنه يمكن استعادة x_j من Y ، التي هي من ثم تولد G . افترض أن

البرهان

$$n_1 x_1 + n_{j-1} x_{j-1} + n_j (x_j + t x_i) + n_{j+1} x_{j+1} + \dots + n_r x_r = 0.$$

إذن

$$n_1 x_1 + (n_i + n_j t) x_i + \dots + n_j x_j + \dots + n_r x_r = 0.$$

ولأن X أساس، فإن $n_1 = n_i + n_j t = \dots = n_j = \dots = n_r = 0$. لأن

$$n_j = 0 \text{ و } n_i + n_j t = 0 \text{، فينتج أن } n_i = 0 \text{، وهكذا فإن}$$

$n_1 = \dots = n_i = \dots = n_j = \dots = n_r = 0$ وبهذا يتحقق الشرط 2 في المبرهنة 1.38:

إذن، Y أساس.

10.38 مثال

المجموعة $\{(1, 0), (0, 1)\}$ أساس لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ، والمجموعة $\{(1, 0), (4, 1)\}$ أساس آخر؛ لأن $(4, 1) = 4(1, 0) + (0, 1)$ ؛ ولكن $\{(3, 0), (0, 1)\}$ ليست أساسًا. فعلى سبيل المثال: لا يمكننا التعبير عن $(2, 0)$ على الصورة $n_1(3, 0) + n_2(0, 1)$ حيث $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ هنا $(3, 0) = (1, 0) + 2(1, 0)$ ، ومضاعف أحد عناصر الأساس أضيف إلى نفسه، بدلاً من إضافته لعنصر مختلف في الأساس. ▲

يمكن أن يكون للزمرة الإبدالية الحرة ذات مرتبة منتهية كثير من الأسس، وسنثبت أنه إذا كانت $K \leq G$ ، فإن K كذلك زمرة إبدالية حرة ذات مرتبة لا تزيد على مرتبة G ، وبصورة مساوية في الأهمية، توجد أسس لـ G و K مرتبطات ببعض بصورة لطيفة.

11.38 مبرهنة

لتكن G زمرة إبدالية حرة غير صفيرية وذات مرتبة منتهية n ، ولتكن K زمرة جزئية غير صفيرية في G ، فإن K إبدالية حرة ومرتبته $s \leq n$.

وإضافة إلى ذلك، يوجد أساس $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ لـ G وأعداد صحيحة موجبة d_1, d_2, \dots, d_s حيث إن d_i تقسم d_{i+1} لـ $i=1, \dots, s-1$ و $\{d_1 x_1, d_2 x_2, \dots, d_s x_s\}$ أساس لـ K .

البرهان

سنثبت أن لـ K أساسًا بالصورة الموصوفة، وهذا سيثبت أن K إبدالية حرة ذات مرتبة على الأكثر n . افترض أن $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ أساس لـ G . يمكن التعبير عن كل عنصر غير صفيري في K على الصورة:

$$k_1 y_1 + \dots + k_n y_n$$

حيث إن بعض $|k_i|$ لا تساوي صفرًا من بين الأسس Y كلها لـ G ، اختر واحدة Y_1 بحيث تعطي أقل قيم غير الصفيرية $|k_i|$ ، وبحيث تكتب عناصر K غير الصفيرية كلها بدلالة عناصر الأساس Y_1 ، وبإعادة ترقيم عناصر Y_1 عند الحاجة، فيمكننا افتراض وجود $w_1 \in K$ ، حيث إن:

$$w_1 = d_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n$$

وحيث $d_1 > 0$ وأصغر معامل سهل المنال كما وصف توًّا، ونكتب باستخدام خوارزمية القسمة $k_j = d_1 q_j + r_j$ حيث $0 \leq r_j < d_1$ ؛ إذن:

$$(1) \quad w_1 = d_1(y_1 + q_2 y_2 + \dots + q_n y_n) + r_2 y_2 + \dots + r_n y_n.$$

الآن دع $x_1 = y_1 + q_2 y_2 + q_n y_n$ بحسب المبرهنة 9.38. أساس $\{x_1, y_2, \dots, y_n\}$ لـ G ، ومن المعادلة (1) واختيارنا لـ Y_1 ، بحيث d_1 أصغر معامل، فنرى أن $d_1 x_1 \in K$ ، إذن: $r_2 = \dots = r_n = 0$.

نعمد الآن الأسس على الصورة $\{x_1, y_2, \dots, y_n\}$ لـ G . كل عنصر في K يمكن كتابته على الصورة:

$$h_1 x_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n$$

ولأن $d_1 x_1 \in K$ ، فبإمكاننا طرح مضاعف مناسب لـ $d_1 x_1$ ، ثم استخدام أن d_1 صفري لنرى أن h_1 مضاعف لـ d_1 ، حيث نرى في الحقيقة أن $k_2 y_2 + \dots + k_n y_n$ في K ، ومن بين الأسس كلها على الشكل $\{x_1, y_2, \dots, y_n\}$ ، نختار y_2 واحدة التي تؤدي إلى بعض $k_i \neq 0$ وذات أقل قيمة. (من الممكن أن تكون k_i كلها أصفارًا دائمًا، وتولد في هذه الحالة K من $d_1 x_1$ ، ونكون قد انتهينا). وبإعادة ترقيم عناصر Y_2 ، يمكننا افتراض وجود $w_2 \in K$ ، حيث إن

$$w_2 = d_2 y_2 + \dots + k_n y_n$$

حيث $d_2 < 0$ و d_2 صغرى كما وصفنا توًا، ويمكننا تمامًا كما في الفقرة السابقة، تعديل الأساس $d_2 x_2 \in$ و $d_1 x_1 \in K$ بحيث $G \perp \{x_1, x_2, y_3, \dots, y_n\}$ إلى الأساس $Y_2 = \{x_1, y_2, \dots, y_n\}$ وكتابة $d_2 = d_1 q + r$ حيث $0 \leq r < d_1$ ، نرى أن $\{x_1 + q x_2, x_2, y_3, \dots, y_n\}$ أساس لـ G و $d_1 x_1 + d_2 x_2 = d_1(x_1 + q x_2) + r x_2$ عنصر في K ، وباختيارنا لـ d_1 لتكون صغرى، نرى أن $r = 0$ ، وبهذا فإن d_1 تقسم d_2 .

نعمد الآن الأسس كلها على الصورة $\{x_1, x_2, y_3, \dots, y_n\}$ و $G \perp$ ، ونختبر عناصر في K على الصورة $k_3 y_3 + \dots + k_n y_n$ ، فالنمط واضح، وتستمر العملية، حتى نحصل على الأساس $\{x_1, x_2, \dots, x_s, y_{s+1}, \dots, y_n\}$ ، حيث العنصر الوحيد في K على الصورة $k_{s+1} y_{s+1} + \dots + k_n y_n$ هو الصفر، أي إن k_i كلها أصفار، عندها، ندع $x_n = y_n, \dots, x_{s+1} = y_{s+1}$ ونحصل على أساس G على الصورة الموصوفة في نصّ المبرهنة 11.38. ♦

كل زمرة إبدالية منتهية التولد تماثل زمرة على الصورة:

$$\mathbb{Z}_{m_1} \times \mathbb{Z}_{m_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{m_r} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$$

حيث m_i تقسم m_{i+1} لـ $i = 1, \dots, r-1$.

ولغايات هذا البرهان، سيكون من المقنع استخدام الترميز $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_1 = \{0\}$. لتكن G زمرة منتهية التوليد بـ n عنصر، ولتكن $F = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ من n العوامل، افترض التشاكل $\phi: F \rightarrow G$ من المبرهنة 8.38، ولتكن K نواة هذا التشاكل؛ إذن، يوجد أساس لـ F على الصورة $\{x_1, \dots, x_n\}$ ، حيث إن $\{d_1 x_1, \dots, d_s x_s\}$ أساس لـ K و d_i تقسم d_{i+1} لـ $i = 1, \dots, s-1$ ، وبحسب المبرهنة 11.14، G تماثل F/K ؛ ولكن:

$$F/K \simeq (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}) / (d_1 \mathbb{Z} \times d_2 \mathbb{Z} \times \dots \times d_s \mathbb{Z} \times \{0\} \times \dots \times \{0\}) \\ \simeq \mathbb{Z} d_1 \times \mathbb{Z} d_2 \times \dots \times \mathbb{Z} d_s \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}.$$

من الممكن أن تكون $d_1 = 1$ ، وفي هذه الحالة $\mathbb{Z}_{d_1} = \{0\}$ ، حيث يمكننا حذفها (تبعًا للتماثل) من هذا الضرب، وبالمثل، يمكن لـ d_2 أن تكون 1، وهكذا. سندع m_1 لتكون أول $d_i > 1$ ، m_2 تساوي أول d_i اللاحق، وهكذا، وتنتج مبرهنتنا مباشرة. ♦

أثبتنا أصعب جزء من المبرهنة الأساسية (المبرهنة 12.11)، وبالطبع، يتحقق التحليل إلى قوى أعداد أولية؛ لأننا نستطيع كسر الزمر \mathbb{Z}_{m_i} إلى عوامل ذات قوى أولية، ويخصّ الجزء المتبقي الوحيد من المبرهنة 12.11 وحدانية رقم بيتي للمعاملات الملتوية، وقوى الأعداد الأولية، حيث يظهر عدد بيتي بوصفه مرتبة للزمرة الإبدالية الحرة G/T ، حيث T الزمرة الجزئية الملتوية في G ، ولا تتغير هذه المرتبة بحسب المبرهنة 6.38، ما يثبت وحدانية عدد بيتي، إلا أن وحدانية المعاملات الملتوية وقوى الأعداد الأولية أكثر صعوبة بعض الشيء في الإثبات. سنعطي بعض التمارين التي تظهر وحدانيتها (انظر التمارين 14 إلى 22).

12.38 مبرهنة

البرهان

■ تمارين 38

حسابات

1. أوجد أساساً $\{(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3), (c_1, c_2, c_3)\}$ لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. بحيث إن كل $a_i \neq 0$, كل $b_i \neq 0$ وكل $c_i \neq 0$ (الكثير من الإجابات محتملة).
2. هل $\{(2, 1), (3, 1)\}$ أساس لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ؟ برهن اختيارك.
3. هل $\{(2, 1), (4, 1)\}$ أساس لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ؟ برهن اختيارك.
4. أوجد شروطاً على $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ ؛ لتصبح $\{(a, b), (c, d)\}$ أساساً لـ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. [مساعدة: حل $x(a, b) + y(c, d) = (e, f)$ في \mathbb{R} ، وقرّر متى تقع x و y في \mathbb{Z}].

مفاهيم

- في التمرينين 5 و6، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب - إذا كانت هناك حاجة للتحصيح - بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.
5. مرتبة الزمرة الإبدالية الحرة G ، هي عدد العناصر في مجموعة مولدة لـ G .
 6. الأساس لزمرة إبدالية غير صفرية G ، هو مجموعة مولدة $X \subseteq G$ ، بحيث إن $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m = 0$ لعناصر مختلفة $x_i \in X$ و $n_i \in \mathbb{Z}$ فقط إذا كانت $n_1 = n_2 = \dots = n_m = 0$.
 7. أثبت بمثال أنه من الممكن لزمرة جزئية فعلية من زمرة إبدالية حرة ذات مرتبة منتهية r أن يكون لها كذلك مرتبة r .
 8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:
 - أ. تكون كل زمرة إبدالية حرة عديمة الالتواء.
 - ب. تكون كل زمرة إبدالية عديمة الالتواء ومنتهية التولد زمرة إبدالية حرة.
 - ج. توجد زمرة إبدالية حرة بمرتبة تساوي أي عدد صحيح موجب.
 - د. تكون الزمرة الإبدالية منتهية التولد زمرة إبدالية حرة، إذا كان عدد بيتي لها يساوي عدد العناصر في إحدى مجموعاتها المولدة.
 - هـ. إذا كانت X تولد الزمرة الإبدالية الحرة G ، وكانت $X \leq Y \leq G$ ، فإن Y تولد G .
 - و. إذا كانت X أساساً للزمرة الإبدالية الحرة G ، وكانت $X \leq Y \leq G$ ، فإن Y أساس لـ G .
 - ز. لكل زمرة إبدالية حرة غير صفرية عدد غير منته من الأسس.
 - ح. لكل زمرة إبدالية حرة ذات مرتبة على الأقل 2، عدد غير منته من الأسس.
 - ط. إذا كانت K زمرة جزئية غير صفرية من زمرة إبدالية حرة منتهية التولد، فإن K إبدالية حرة.
 - ي. إذا كانت K زمرة جزئية غير صفرية من زمرة إبدالية حرة منتهية التولد، فإن G/K إبدالية حرة.

براهين

9. أكمل إثبات المبرهنة 5.38 (ارجع للعبارتين السابقتين للمبرهنة).
10. أثبت أن الزمرة الإبدالية الحرة لا تحوي عناصر غير صفرية ذات رتبة منتهية.
11. أثبت أنه إذا كانت G و G' زمريتين إبداليتين حرّتين، فإن $G \times G'$ إبدالية حرّة.
12. أثبت أن الزمر الإبدالية الحرّة ذات المراتب المنتهية هي بالضبط الزمر الإبدالية المنتهية التولد، التي لا تحوي عناصر غير صفرية منتهية الرتبة.
13. أثبت أن \mathbb{Q} مع الجمع ليست زمرة إبدالية حرة. [مساعدة: أثبت أنه لا يوجد عدنان نسبيان مختلفان n/m و r/s ، يمكن أن يقعا في مجموعة تحقق الشرط 2 في المبرهنة 1.38].
- التمارين من 14 إلى 19 تتعامل مع إثبات وحدانية قوى الأعداد الأولية، التي تظهر في التحليل إلى قوى أعداد أولية للزمرة الجزئية الملتوية T في زمرة إبدالية منتهية التولد.
14. ليكن p عدداً أولياً محدداً، فأثبت أن عناصر T ذات الرتبة من قوى p ، مع الصفر تشكل زمرة جزئية T_p من T .
15. أثبت أنه في أيّ تحليل لـ T لقوى - أولية، الزمرة T_p في التمرين السابق تماثل الضرب المباشر للعوامل الدورية من الرتب قوى العدد الأولي p . [يختزل هذا مسألتنا لإثبات أنه لا يمكن أن يكون للزمرة T_p تحليلات مختلفة جوهرياً كضرب زمرة دورية].
16. لتكن G أيّ زمرة إبدالية، وليكن n أيّ عدد صحيح موجب، فأثبت أن $G[n] = \{x \in G \mid nx = 0\}$ زمرة جزئية من G . (باستخدام رموز الضرب $\{x \in G \mid x^n = e\}$).
17. بالرجوع إلى التمرين 16، أثبت أن $\mathbb{Z}_p \simeq \mathbb{Z}_{p^r}$ لأيّ $r \geq 1$ وعدد أولي p .
18. باستخدام التمرين 17، أثبت أن:

$$(\mathbb{Z}_{p^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{r_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{r_m}})[p] \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p}_{m \text{ مرة}}$$

بشرط أن $r_i \geq 1$.

19. لتكن G زمرة إبدالية منتهية التولد و T_p الزمرة الجزئية المعرفة في التمرين 14. افترض أن

$$\text{حيث } T_p \simeq \mathbb{Z}_{p^{r_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{r_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{r_m}} \simeq \mathbb{Z}_{p^{s_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{s_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{s_n}}$$

برهان وحدانية التحليل إلى قوى - أعداد أولية. $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_m$ و $1 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$ ، نحتاج إلى إثبات أن $m = n$ و $r_i = s_i$ و $i = 1, \dots, n$ لإكمال

أ. استخدم التمرين 18 في إثبات أن $n = m$.

ب. أثبت أن $r_1 = s_1$ ، وافترض أن $r_i = s_i$ لكل $i < j$ ، وأثبت أن $r_j = s_j$ ، ما يكمل البرهان [مساعدة: افترض أن $r_j < s_j$ افترض الزمرة الجزئية $T_p = \{p^{ij}x \mid x \in T_p\}$ ، وأثبت أن هذه الزمرة الجزئية سيكون لها تحليلان لقوى - أعداد أولية تتضمن أعدادًا مختلفة من العوامل غير الصفريّة، ثم ناقش بأن هذا مستحيل حسب الجزء (أ) من هذا التمرين].

لتكن T الزمرة الجزئية الملتوية لزمرة إبدالية منتهية التولد، وافترض أن $T \simeq \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_r}$ حيث m_i يقسم m_{i+1} و $i = 1, \dots, r-1$ و n_j تقسم n_{j+1} و $j = 1, \dots, s-1$ و $m_1 > 1$ و $n_1 > 1$ نود إثبات أن $r = s$ و $m_k = n_k$ حيث $k = 1, \dots, r$ ، ما يبرهن وحدانية المعاملات الملتوية. يتم هذا للتمرين 20 إلى 22.

20. وضّح كيف يمكن الحصول على التحليل إلى قوى - أعداد أولية من التحليل إلى معاملات - ملتوية. (لاحظ أن التمارين السابقة تثبت أن التحليل إلى قوى - أعداد أولية وحيد).

21. ناقش مستخدمًا التمرين 20، أن m_r و n_s يمكن تشخيصهما كليهما، كما يأتي: لتكن p_1, \dots, p_t أعدادًا أولية مختلفة تقسم $|T|$ ، ولتكن $p_1^{h_1}, \dots, p_t^{h_t}$ أعلى قوى لهذه الأعداد الأولية، التي تظهر في التحليل لقوى - أعداد أولية (الوحيد)؛ إذن، $m_r = n_s = p_1^{h_1} p_2^{h_2} \cdots p_t^{h_t}$.

22. شخّص m_{r-1} و n_{s-1} مبرهنًا أنهما متساويان، وأكمل لتبرهن أن $m_{r-i} = n_{s-i}$ حيث $i = 1, \dots, r-1$ ، وهكذا، فإن $r = s$.

سنناقش في هذا الفصل وفي الفصل 40 جزءاً من مبرهنة الزمر، وهو ذو أهمية عظيمة ليس في الجبر فقط بل في الطوبولوجيا كذلك، وهناك مناقشة رائعة وسهلة القراءة للزمر الحرة وتمثيلات الزمر في (Crowell and Fox) [46، الفصلان 3 و4].

الكلمات والكلمات المختصرة

لتكن A (ليست بالضرورة منتهية) مجموعة عناصر a_i ، حيث $i \in I$. نفكر في A بوصفها أبجدية (alphabet) وفي a_i بوصفها حروفاً (letters) في الأبجدية، أي رمز على الصورة a_i^n حيث $n = \mathbb{Z}$ هو مقطع (syllable)، وأي سلسلة منتهية w من المقاطع المكتوبة بصورة متراصة هي كلمة (word)، وكذلك نقدم مفهوم الكلمة الفارغة 1 (empty word)، التي لا تحوي مقاطع.

لتكن $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ ؛ إذن:

1.39 مثال

$$a_2^3 \text{ و } a_2^3 a_2^{-1} a_3 a_1^2 a_1^{-7}, a_1 a_3^4 a_2^2 a_3$$

كلها كلمات، إذا اتبعنا العرف بأن نعدّ تساوي a_i .

ووجدت طريقتان طبيعيتان لتعديل كلمات معينة، الانكماش الأولي (elementary contraction). يتكوّن النوع الأول من استبدال ظهور $a_i^m a_i^n$ في كلمة بـ a_i^{m+n} ، والنوع الثاني يتكوّن من تبديل ظهور a_i^0 في الكلمة بـ 1، أي حذفها من الكلمة، وعن طريق الانكماش الأولي لعدد منته من المرات، يمكن تحويل كل كلمة إلى كلمة مختصرة (reduced word)، وهي التي لا يمكن إجراء مزيد من الانكماشات الأولية لها، لاحظ أنّ الانكماشات الأولية هي تقابل - شكلياً - التعامل مع أسس الأعداد الصحيحة.

الصورة المختصرة للكلمة $a_2^3 a_2^{-1} a_3 a_1^2 a_1^{-7}$ في المثال 1.39 هي $a_2^2 a_3 a_1^{-5}$.

2.39 مثال

يتعين أن يقال هنا وبصورة نهائية: إننا سنشرح كثيراً من النقاط التي تستغرق بعض الكتب صفحات في برهانها - عادة بمناقشة معقدة في الاستقراء الرياضي التي تجزأ إلى كثير من الحالات، على سبيل المثال: افترض أننا أعطينا كلمة، ونرغب في إيجاد الصورة المختصرة لها، فقد تكون هناك تشكيلة من الانكماشات الأولية التي يمكن إنجازها أولاً.

كيف يمكن أن نعلم أنّ الكلمة المختصرة التي توصلنا إليها أخيراً ستكون نفسها، بغض النظر عن الترتيب الذي اتبعناه في أداء الانكماشات الأولية؟ قد يقول الطالب: هذا واضح. يقضي بعض المؤلفين جهداً كبيراً في إثبات هذا، حيث يميل المؤلف هنا إلى موافقة الطالب، فهو يعدّ هذا النوع من البراهين مملاً، ولا يجعله مرتاحاً مع هذا الوضع أبداً، وعلى أي حال، فالمؤلف هو أول من يعترف بأنه ليس رياضياً عظيماً، مع احترام أنّ بعض الرياضيين يشعرون بأنّ هذه الأشياء تحتاج إلى مناقشة كبيرة، ستميز الحالات عندما ننصّ فقط على هذه الحقائق بالعبارة «سيبدو واضحاً أنّ» مع إبقاء علامتي التنصيص.

الزمر الحرة

لتكن مجموعة الكلمات المختصرة كلها والمكوّنة من أبجديتنا A هي $F[A]$ ، سنجعل $F[A]$ الآن زمرة بصورة طبيعية. لـ w_1 و w_2 في $F[A]$ عرّف $w_1 \cdot w_2$ لتكون الصورة المختصرة للكلمة المكوّنة من وضع الكلمتين $w_1 w_2$ بصورة مترابطة.

3.39 مثال إذا كانت

$$w_1 = a_2^3 a_1^{-5} a_3^2$$

و

$$w_2 = a_3^{-2} a_1^2 a_3 a_2^{-2},$$

$$\text{فإن } w_1 \cdot w_2 = a_2^3 a_1^{-3} a_3 a_2^{-2}$$

”سيبدو واضحاً أنّ“ عملية الضرب هذه على $F[A]$ حسنة التعريف وتجميعية، تؤدي الكلمة الفارغة 1 دور العنصر المحايد، و”سيبدو واضحاً أنه“ إذا أعطينا كلمة مختصرة

$w \in F[A]$ ، وإذا كوّننا الكلمة التي نحصل عليها، أولاً بكتابة مقاطع w بترتيب معكوس وثانياً باستبدال a_i^n بـ a_i^{-n} ، فإنّ الكلمة الناتجة w^{-1} هي كلمة مختصرة أيضاً، و

$$w \cdot w^{-1} = w^{-1} \cdot w = 1.$$

4.39 تعريف الزمرة $F[A]$ التي عرفت توّاً هي الزمرة الحرة المولدة من A

(free group generated by A)

ارجع إلى المبرهنة 6.7 وإلى التعريف السابق لها؛ لتري أنّ الاستخدام الحالي لمصطلح يولد متوافقة مع الاستخدام السابق.

بدءاً بزمرة G ومجموعة مولدات $\{a_i \mid i \in I\}$ التي سنختصرها بـ $\{a_i\}$ ، يمكننا أن نسأل ما إذا كانت G حرة على $\{a_i\}$. سنعرّف بالضبط ماذا يعني هذا.

5.39 تعريف

إذا كانت G زمرة مع مجموعة المولدات $A = \{a_i\}$ ، وإذا كانت G تماثل $F[A]$ تحت تأثير الدالة $\phi: G \rightarrow F[A]$ ، حيث إنّ $\phi(a_i) = a_i$ ، فإنّ G حرة على A (free on A)، و a_i مولدات حرة (free generators) لـ G ، وتكون الزمرة حرة (free) إذا كانت حرة على مجموعة غير خالية A .

6.39 مثال

المثال الوحيد السابق لزمرة حرة هو \mathbb{Z} ، التي تكون حرة على مولّد واحد. لاحظ أنّ كل زمرة حرة تكون غير منتهية.

ارجع إلى المراجع لإثبات المبرهنات الثلاث الآتية. لن نستخدم هذه النتائج، فقد ذكرناها ببساطة؛ لتعلمنا بهذه الحقائق الممتعة.

7.39 مبرهنة

إذا كانت الزمرة G حرة على A وعلى B كذلك، فإنّ للمجموعتين A و B عدد العناصر نفسه؛ أي إنّ مجموعتي توليد حرتين لزمرة حرة لهما عدد العناصر نفسه.

8.39 تعريف إذا كانت G حرة على A ، فإن عدد عناصر A هي مرتبة الزمرة الحرة G (rank of the free group G).

في الحقيقة، المبرهنة الآتية هي نتيجة واضحة تماماً من المبرهنة 7.39.

9.39 مبرهنة تكون الزمرتان الحرتان متماثلتين، إذا وفقط إذا كان لهما المرتبة نفسها.

10.39 مبرهنة الزمرة الجزئية الفعلية غير التافهة من الزمرة الحرة تكون كذلك حرة.

11.39 مثال لتكن $F[\{x, y\}]$ الزمرة الحرة على $\{x, y\}$. لتكن

$$y_k = x^k y x^{-k}$$

حيث $k \geq 0$. أُل y_k ، حيث $k \geq 0$ مولدات حرة للزمرة الجزئية من $F[\{x, y\}]$ التي تولدها، هذا يوضح أنه على الرغم من أن الزمرة الجزئية من الزمرة الحرة تكون حرة، ولكن قد تكون مرتبة الزمرة الجزئية أكبر بكثير من مرتبة كامل الزمرة!

تشاكلات الزمر الحرة

سيركز عملنا في الفصل وقبل كل شيء على التشاكلات المعرّفة على الزمر الحرة، والنتائج هنا بسيطة ورائعة.

12.39 مبرهنة لتكن G زمرة مولدة بـ $A = \{a_i \mid i \in I\}$ ، ولتكن G' أي زمرة، فإذا كانت a'_i ، حيث $i \in I$ أي عناصر في G' - ليست بالضرورة مختلفة - فإنه يوجد على الأكثر تشاكل واحد $\phi: G \rightarrow G'$ بحيث إن $\phi(a_i) = a'_i$ ، وإذا كانت G حرة على A ، فإنه يوجد بالضبط تشاكل واحد من هذا النوع.

البرهان ليكن ϕ تشاكلاً من G إلى G' ، بحيث إن $\phi(a_i) = a'_i$. الآن وبحسب المبرهنة 6.7، فلكل $x \in G$ ، نحصل على:

$$x = \prod_j a_j^{n_j}$$

لضرب منته من المولدات a_i ، وحيث إن أُل a_j التي تظهر في الضرب ليست بالضرورة مختلفة؛ إذن، ولأنّ ϕ تشاكل، فيجب أن يكون:

$$\phi(x) = \prod_j \phi(a_j^{n_j}) = \prod_j (a'_j)^{n_j}.$$

إذن، يتحدد التشاكل بالكامل بقيمه على عناصر المجموعة المولدة. هذا يثبت وجود تماثل واحد على الأكثر، بحيث إن $\phi(a_i) = a'_i$.

افترض الآن أن G حرة على A ، أي إن $G = F[A]$. 1.

$$x = \prod_j a_{i_j}^{n_j}$$

في G ، عرف بـ $\psi: G \rightarrow G'$

$$\psi(x) = \prod_j (a_{i_j}')^{n_j}.$$

الدالة حسنة التعريف؛ لأن $F[A]$ تتكوّن بالضبط من الكلمات المختصرة؛ ولا يوجد ضربان شكليان مختلفان في $F[A]$ متساويان، ولأنّ قواعد الحسابات المتضمنة للأسس في G' هي شكلياً نفسها تلك المتضمنة للأسس في G ، فمن الواضح أن $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ لأيّ عنصرين x و y في G ؛ إذن، ψ هي بالتأكيد تشاكل.

ربما كان علينا إثبات الجزء الأول من هذه المبرهنة مبكراً، بدلاً من تحويلها إلى التمارين. لاحظ أنّ المبرهنة تنصّ على أن تشاكل الزمر يتحدد تماماً بمعرفة قيمه على كل عنصر من مجموعة المولدات. كان هذا التمرين 46 في الفصل 13، وبوجه خاص، تشاكل الزمرة الدورية يتحدد تماماً بقيمته على أيّ مولد مفرد للزمرة.

كل زمرة G' هي صورة تشاكل لزمرة حرة G .

13.39 مبرهنة

لتكن $G' = \{a_i' \mid i \in I\}$ ، ولتكن $A = \{a_i \mid i \in I\}$ أيّ مجموعة لها عدد عناصر G' نفسه. لتكن $G = F[A]$ ؛ إذن، وبحسب المبرهنة 12.39، يوجد تشاكل ψ يربط G بـ G' ، بحيث إن $\psi(a_i) = a_i'$. من الواضح أنّ صورة G مع ψ هي كل G' .

البرهان

نظرة أخرى للزمر الإبدالية الحرة

من المهم ألا نخلط بين مفهوم الزمرة الحرة ومفهوم الزمرة الإبدالية الحرة، فالزمرة الحرة على أكثر من مولد لا تكون إبدالية، وقد عرفنا في الفصل السابق الزمرة الإبدالية الحرة بوصفها زمرة إبدالية ذات أساس؛ أي، مجموعة مولدة تحقق الخصائص المذكورة في المبرهنة 1.38. هناك نظرة أخرى - من خلال الزمر الحرة - للزمر الإبدالية الحرة، سنصفها الآن.

لتكن $F[A]$ زمرة حرة على مجموعة مولدة A ، سنكتب F بدلاً من $F[A]$ لهذه اللحظة، لاحظ أنّ F ليست إبدالية إذا كانت A تحوي أكثر من عنصر. لتكن C الزمرة الجزئية للمبدلات في F ؛ إذن، F/C زمرة إبدالية، وليس من الصعب برهان أنّ F/C زمرة إبدالية حرة بأساس، فإذا سمينا aC بـ a ، فيمكننا النظر إلى F/C بوصفها زمرة إبدالية حرة ذات أساس، وهذا يُظهر كيف تُبنى الزمرة الإبدالية الحرة ذات الأساس، فكل زمرة إبدالية حرة يمكن أن تُبنى بهذه الطريقة تبعاً للتماثل، أي إنه إذا كانت G زمرة إبدالية حرة ذات أساس X ، فكوّن الزمرة الحرة $F[X]$ ، وكوّن زمرة عامل من $F[X]$ مقياس الزمرة الجزئية للمبدلات، فنحصل على زمرة تماثل G .

تتحقق المبرهنات 7.39، 9.39، و10.39 للزمر الإبدالية الحرة إضافة إلى الزمر الحرة، وفي الواقع، النسخة الإبدالية من المبرهنة 10.39 قد برهننا لحالة المرتبة المنتهية في المبرهنة 11.38، وبالمقارنة بالمثل 11.39 للزمرة الحرة، فالحقيقة في حالة الزمر الإبدالية الحرة، أنّ مرتبة الزمرة الجزئية هي على الأكثر مرتبة كامل الزمرة، وقد أثبتت المبرهنة 11.38 هذا كذلك لحالة المرتبة المنتهية.

■ تمارين 39

حسابات

1. أوجد الصورة المختصرة ومعكوسها لكل من الكلمات الآتية:
 أ. $a^2b^{-1}b^3a^3c^{-1}c^4b^{-2}$ ب. $a^2a^{-3}b^3a^4c^4c^2a^{-1}$
2. احسب حواصل الضرب المعطاة في الفرعين (أ) و (ب) في التمرين 1 في حالة كانت $\{a, b, c\}$ مجموعة مولدات تكون زمرة إبدالية حرة. أوجد معكوس حواصل الضرب هذه.
3. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة حرة مرتبتها 2 إلى:
 أ. \mathbb{Z}_2 ب. \mathbb{Z}_6 ج. S_3 ؛
4. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة حرة مرتبتها 3 وغامرة لـ:
 أ. \mathbb{Z}_4 ب. \mathbb{Z}_6 ج. S_3 ؛
5. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة إبدالية حرة مرتبتها 2 إلى:
 أ. \mathbb{Z}_4 ب. \mathbb{Z}_6 ج. S_3 ؛
6. ما عدد التشاكلات المختلفة من زمرة إبدالية حرة مرتبتها 2 وغامرة لـ:
 أ. \mathbb{Z}_4 ب. \mathbb{Z}_6 ج. S_3 ؛

مفاهيم

- في التمرينين 7 و 8، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب -إذا كانت هناك حاجة للتصحيح - بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.
7. الكلمة المختصرة هي تلك التي لا يظهر فيها مقطعان متجاوران فيهما الحرف نفسه، وكذلك لا يظهر فيها مقطع ذو أس يساوي 0.
 8. مرتبة الزمرة الحرة هي عدد العناصر في مجموعة مولدات للزمرة.
 9. خذ إحدى الحالات في هذا الفصل، التي استعملت فيها عبارة "سيبدو واضحاً أن" وناقش تفاعلك مع هذه الحالة.
 10. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:
 أ. كل زمرة جزئية فعلية حرة من زمرة حرة تكون زمرة حرة.
 ب. كل زمرة جزئية فعلية من كل زمرة إبدالية حرة تكون زمرة حرة.
 ج. صورة التشاكل من زمرة حرة يكون زمرة حرة.
 د. كل زمرة إبدالية حرة لها أساس.
 هـ. الزمر الإبدالية الحرة ذات المرتبة المنتهية هي بالضبط الزمر الإبدالية المنتهية التولد.
 و. لا تكون الزمرة الحرة حرة.
 ز. لا تكون الزمرة الإبدالية الحرة حرة.
 ح. لا تكون الزمرة الإبدالية الحرة ذات المرتبة < 1 حرة.
 ط. أيّ زمريتين حرتين متماثلتان.
 ي. أيّ زمريتين إبداليتين حرتين لهما المرتبة نفسها متماثلتان.

براهين

11. لتكن G زمرة إبدالية منتهية التولد مع عنصر محايد 0 . المجموعة المنتهية $\{b_1, \dots, b_n\}$ ، حيث $b_i \in G$ أساس G لـ G (basis) إذا كانت $\{b_1, \dots, b_n\}$ تولد G و $\sum_{i=1}^n m_i b_i = 0$ ، إذا وفقط إذا كانت كل $m_i \in \mathbb{Z}$ ، حيث $m_i b_i = 0$. أثبت أن $\{2, 3\}$ ليست أساساً لـ \mathbb{Z}_4 . أوجد أساساً لـ \mathbb{Z}_4 .

ب. أثبت أن $\{1\}$ و $\{2, 3\}$ أسس لـ \mathbb{Z}_6 . (يثبت هذا أنه لزمرة إبدالية منتهية التولد مع التواء، قد يختلف عدد العناصر في الأساس، أي إنه ليس بالضرورة ثابتاً للزمرة G).

ج. هل الأساس للزمرة الإبدالية الحرّة كما عرّفناه في الفصل 38 أساس بالمعنى الذي استخدمناه في هذا التمرين؟

د. أثبت أنه لكل زمرة إبدالية منتهية لها أساس $\{b_1, \dots, b_n\}$ ، حيث إن رتبة b_i تقسم رتبة b_{i+1} .

في شرح الجبر هذه الأيام، تُستخدم غالباً هذه التقنية (وخاصة من أتباع N. Bourbaki) لتقديم كيان جبري جديد، وذلك كما يأتي:

- صف الخصائص الجبرية التي يمتلكها هذا الكيان الجبري.

- برهن على أن أي كيانين جبريين يتمتعان بهذه الخصائص يكونان متماثلين، أي إن هذه الخصائص تشخص هذا الكيان.

- برهن وجود كيان واحد على الأقل من هذا النوع.

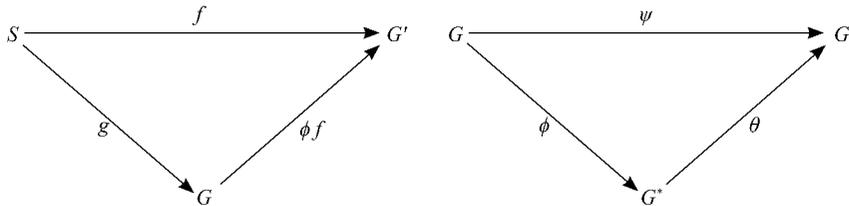
توضّح التمارين الثلاثة الآتية هذه التقنية لثلاثة كيانات جبرية، واجهنا كلاً منها سابقاً؛ ولذلك لن نضيع هويتها، ولكن سنستخدم أسماء وهمية لها في أول تمرينين. سيسألنا الجزء الأخير من هذين التمرينين إعطاء أسماء هذه الكيانات.

12. لتكن G زمرة. تسمى الزمرة الإبدالية G^* زمرة بليب من G (blip group of G)، إذا وجد تشاكل محدد ϕ على G غامر لـ G^* ، بحيث إن أي تشاكل ψ من G إلى أي زمرة إبدالية G' يمكن تحليله إلى $\psi = \theta \phi$ ، حيث θ تشاكل من G^* إلى G' (انظر الشكل 14.39).

أ. أثبت أن أي زمرتي بليب لـ G متماثلتان. [مساعدة: لتكن G_1^* و G_2^* زمرتي بليب لـ G . إن التشاكلين المحددين $\phi_1: G \rightarrow G_1^*$ و $\phi_2: G \rightarrow G_2^*$ يمكن تحليلهما كلٌّ عن طريق زمرة البليب الأخرى بحسب تعريف زمرة البليب، أي إن $\phi_1 = \theta_1 \phi_2$ و $\phi_2 = \theta_2 \phi_1$ ، من خلال إثبات أن $\theta_1 \theta_2$ و $\theta_2 \theta_1$ هما الدالتان المحايدتان].

ب. أثبت وجود زمرة بليب G^* لأي زمرة G .

ج. أي المفاهيم التي درسناها سابقاً تقابل فكرة زمرة البليب لـ G هذه؟



الشكل 15.39

الشكل 14.39

13. لتكن S أي مجموعة. تشكل الزمرة G مع الدالة المحددة $g: S \rightarrow G$ زمرة بلوب على S (blob group on S)، فإذا كان لكل زمرة G' ودالة $f: S \rightarrow G'$ ، فيوجد تشاكل وحيد ϕ_f من G إلى G' ، حيث إن $f = \phi_f \circ g$ (انظر الشكل 15.39).

أ. لتكن S مجموعة محددة. أثبت أنه إذا كان كل من G_1 مع $g_1: S \rightarrow G_1$ و G_2 مع $g_2: S \rightarrow G_2$ زمرتي بلوب على S ،

فإن G_1 و G_2 متماثلتان. [مساعدة: أثبت أن g_1 و g_2 دالتان أحاديتان، وأن g_1S و g_2S تولدان G_1 و G_2 ، على الترتيب، ثم تابع بطريقة مماثلة لتلك المعطاة في مساعدة التمرين 12].

ب. لتكن S مجموعة. أثبت وجود زمرة بلوب لـ S . يمكنك استعمال أي من مبرهنات الكتاب.

ج. أي المفاهيم التي درسناها سابقًا تقابل فكرة زمرة البلوب على S هذه؟

14. شخّص الزمرة الإبدالية الحرة باستخدام خصائص بطريقة مشابهة لتلك المستخدمة في التمرين 13.

تمثيلات الزمر Group Presentations

تعريف

باتباع معظم ما كتب في تمثيلات الزمر، سندع في هذا الفصل 1 ليكون العنصر المحايد في الزمرة، ففكرة تمثيل الزمرة هي تكوين الزمرة بإعطاء مجموعة من المولدات للزمرة ومعادلات أو علاقات محددة، التي نريد أن تحققها المولدات، حيث نريد أن تكون الزمرة حرة قدر الإمكان على المولدات، تبعاً لهذه العلاقات.

افترض أن G لـ G مولدين x و y ، وهي حرة ما عدا العلاقة $xy = yx$ التي يمكننا التعبير عنها بـ $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ لاحظ أن الشرط $xy = yx$ هو بالضبط ما نحتاج إليه لجعل G إبدالية، على الرغم من أن $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ هو مجرد واحد من كثير من المبدلات الممكنة في $F[\{x, y\}]$. إذن، G إبدالية حرة بمولدين، وتماثل $F[\{x, y\}]$ مقياس زمرتها الجزئية للمبدلات، والزمرة الجزئية لمبدلات $F[\{x, y\}]$ هذه هي أصغر زمرة جزئية ناظمية تحوي $xyx^{-1}y^{-1}$ لأن أي زمرة جزئية ناظمية تحوي $xyx^{-1}y^{-1}$ تعطي زمرة عامل إبدالية، وهكذا فهي تحوي الزمرة الجزئية للمبدلات بحسب المبرهنة 20.15. ▲

مثال 1.40

يوضح المثال السابق الحالة العامة. لتكن $F[A]$ زمرة حرة، وافترض أننا نريد تكوين زمرة جديدة تشبه $F[A]$ قدر الإمكان، تبعاً لمعادلات محددة نريد تحقيقها، يمكن كتابة أي معادلة على أن يكون الطرف الأيمن منها يساوي 1؛ إذن، يمكننا كتابة المعادلات لتكون $r_i = 1$ ، حيث $i \in I$ و $r_i \in F[A]$ ، فإذا اشتربنا أن $r_i = 1$ ، فسيكون علينا أن نجد:

$$x(r_i^n)x^{-1} = 1$$

لأي $x \in F[A]$ و $n \in \mathbb{Z}$ ، وكذلك، فإن حاصل ضرب عناصر تساوي 1 هو كذلك يجب أن يساوي 1؛ إذن، أي ضرب منته على الصورة:

$$\prod_j x_j(r_j^{n_j})x_j^{-1},$$

حيث ألا r_j ليست بالضرورة مختلفة، سيكون عليه أن يساوي 1 في الزمرة الجديدة، ومن السهل التحقق من أن مجموعة حواصل الضرب المنتهية هذه تكون زمرة جزئية ناظمية R في $F[A]$ ؛ إذن، أي زمرة تشبه $F[A]$ قدر الإمكان، تبعاً للشروط $r_i = 1$ ، تحقق كذلك $r = 1$ لكل $r \in R$ ؛ ولكن $F[A]/R$ تشبه $F[A]$ (تذكر أننا نضرب مجموعات مشاركة باختيار الممثلين)، ما عدا أن R قد اضمحلت لتشكيل العنصر المحايد 1. إذن، الزمرة التي نسعى وراءها (على الأقل مماثلة لـ)

$F[A]/R$. يمكننا عرض هذه الزمرة، وكأنها مولدة بالمجموعة A والمجموعة $\{r_i \mid i \in I\}$ التي سنختصرها بـ $\{r_i\}$.

■ نبذة تاريخية

ظهرت فكرة تمثيل الزمرة في بحث آرثر كيلبي عام 1859م، "حول مبرهنة الزمر المعتمدة على المعادلة الزمرية $\theta^n = 1$. الجزء الثالث".

في هذا المقال، أعطى كيلبي حساباً كاملاً للزمر الخمس من الرتبة 8، بذكر عناصر كل منها، وبإعطاء تمثيل كل منها، على سبيل المثال: كان مثاله الثالث ما أسميناه هنا الزمرة الثامنة؛ لاحظ كيلبي أنّ هذه الزمرة مولدة بعنصرين α و β مع العلاقات $\alpha^4 = 1$ ، $\beta^2 = 1$ ، $\alpha\beta = \beta\alpha^3$ ، وقد برهن كذلك بصورة أكثر عمومًا بأنّ الزمرة من الرتبة mn مولدة بعنصرين α, β مع العلاقات $\alpha^m = 1$ ، $\beta^n = 1$ ، $\alpha\beta = \beta\alpha^s$ ، إذا وفقط إذا كان $s^n \equiv 1 \pmod{m}$ (انظر التمرين 13).

عام 1878م، عاد كيلبي إلى مبرهنة الزمر، ولاحظ أنّ المسألة المركزية في تلك المبرهنة، هي تحديد الزمر جميعها من رتبة n معطاة، وفي بدايات عام 1890م، نشر أوتو هولدر (Otto Holder) كثيرًا من الأبحاث في محاولة لحل مسألة كيلبي، مستخدمًا تقنيات مماثلة لتلك التي نوقشت في الفصول 36، و 37، و 40، وقد حدّد هولدر الزمر البسيطة كلها من الرتب الأقل من 200، وشخّص الزمر كلها من الرتب p^3 ، pq^2 ، pqr ، و p^4 حيث p, q, r أعداد أولية مختلفة، إضافة إلى ذلك، طوّرت تقنيات لتحديد البنية الممكنة لزمرة G ، إذا علّمت بنية زمرة جزئية ناظرية H وبنية زمرة العامل G/H ، وبصورة مثيرة للانتباه، لأنّ فكرة الزمر المجردة كانت لا تزال إلى حدّ لا بأس به جديدة في ذلك الوقت، فإنّ هولدر بدأ أبحاثه بصورة نموذجية بتعريف الزمرة، وأكد أنّ الزمر المتماثلة هي في الجوهر واحدة والشئ نفسه.

2.40 تعريف

لتكن A مجموعة، ولتكن $\{r_i\} \subseteq F[A]$. لتكن R أصغر زمرة جزئية ناظرية في $F[A]$ ، وتحتوي ألد r_i ، فيسمى التماثل ϕ من $F[A]/R$ غامرًا للزمرة G تمثيلًا لـ G (**presentation**). المجموعات A و $\{r_i\}$ تعطي تمثيل للزمرة (**group presentation**). المجموعة A هي مجموعة المولدات للتمثيل (**generators for the presentation**)، وكل r_i علانقي (**relator**)، كل $r \in R$ هو نتيجة لـ $\{r_i\}$ (**consequence**). المعادلة

$r_i = 1$ هي علاقة (**Relation**)، والتمثيل المنتهي (**finite presentation**) هو ذلك الذي يكون فيه كل من A و $\{r_i\}$ مجموعة منتهية. ■

قد يبدو هذا التعريف معقدًا، ولكنه في الحقيقة ليس كذلك، ففي المثال 1.40، $\{x, y\}$ هي مجموعتنا للمولدات و $y^{-1}xyx^{-1}$ هو العلانقي الوحيد، والمعادلة $xyx^{-1}y^{-1} = 1$ أو $xy = yx$ هي علاقة. كان هذا مثالاً لتمثيل منته.

إذا كان تمثيل الزمرة له مولدات x_j وعلائق r_i ، فنستخدم الترميز:

$$(x_j : r_i = 1) \text{ أو } (x_j : r_i)$$

للتعبير عن تمثيل الزمرة، يمكننا أن نشير إلى $F[\{x_j\}]/R$ بوصفها زمرة ذات تمثيل $(x_j : r_i)$.

التمثيلات المتماثلة

3.40 مثال

ليكن تمثيل الزمرة بـ

$$\{r_i\} = \{a^6\} \text{ و } A = \{a\}$$

أي التمثيل

$$(a : a^6 = 1)$$

هذه الزمرة معرفة بمولد واحد a وعلاقة $a^6 = 1$ ، تماثل \mathbb{Z}_6 .

الآن، افترض الزمرة المعرفة بمولدين a و b ، مع $a^2 = 1$ ، $b^3 = 1$ و $ab = ba$ ، أي الزمرة ذات التمثيل:

$$(a, b : a^2, b^3, aba^{-1}b^{-1})$$

الشرط $a^2 = 1$ يعطي $a^{-1} = a$. كذلك $b^3 = 1$ تعطي $b^{-1} = b^2$ ؛ إذن، كل عنصر في هذه الزمرة يمكن كتابته بوصفه ضرباً لقسوى غير سالبة لـ a و b ، وتمكننا العلاقة $aba^{-1}b^{-1} = 1$ ، أي $ab = ba$ من كتابة العوامل كلها التي تتضمن a أولاً، ثم العوامل التي تتضمن b ؛ إذن، كل عنصر في الزمرة يساوي أحد $a^m b^n$ ، ولكن $a^2 = 1$ و $b^3 = 1$ تثبت وجود ستة عناصر مختلفة فقط،

$$1, b, b^2, a, ab, ab^2.$$

لذلك، فإن هذا التمثيل يعطي كذلك زمرة رتبته 6، وهي كذلك إبدالية، وبحسب المبرهنة الأساسية 12.11، يجب أن تكون كذلك دورية وتماثل \mathbb{Z}_6 . ▲

يوضح المثال السابق أن التمثيلات المختلفة يمكن أن تعطي زمراً متماثلة، وعندما يحدث هذا، فإن لدينا تمثيلات متماثلة (**isomorphic presentations**)، لتحديد ما إذا كان تمثيلان متماثلان أمراً قد يكون صعباً جداً. لقد أثبت (انظر [22] Rabin) أن عدداً من مثل هذه المسائل المرتبطة بهذه المبرهنة ليست بوجه عام قابلة للحل؛ أي لا توجد طريقة رتيبة وحسنة التعريف لاكتشاف حل للحالات جميعها، حيث تتضمن هذه المسائل غير المحلولة مسألة تحديد ما إذا كان تمثيلان متماثلين، ما إذا كانت الزمرة المعطاة بالتمثيل منتهية، أو حرة، إبدالية، أو تافهة، ومسألة الكلمة المشهورة لتحديد ما إذا كانت كلمة معطاة w ، هي نتيجة مجموعة علاقات $\{r_i\}$ معطاة. ظهرت أهمية هذه المادة في مبرهنتنا 13.39، التي تضمن أن كل زمرة لها تمثيل.

لنتثبت أن:

$$(x, y : y^2x = y, yx^2y = x)$$

تمثيل للزمرة التافهة بعنصر واحد. نحتاج فقط إلى إثبات أن x و y نتائج للعلائق y^2xy^{-1} و yx^2yx^{-1} ، أو أن $x = 1$ و $y = 1$ يمكن أن تستنتج من $y^2x = y$ و $yx^2y = x$. سنوضح كلتا التقنيتين.

4.40 مثال

بوصفها نتيجة لـ y^2xy^{-1} ، نحصل على yx بناءً على المرافقة بـ y^{-1} . ومن yx نستنتج $y^{-1}x^{-1}$ ، وهكذا، فإن $(yx^2yx^{-1})(x^{-1}y^{-1})$ تعطي xyx^{-1} ومرافقة xyx^{-1} بـ x^{-1} ، نحصل على y . ونحصل من y على y^{-1} ، و $y^{-1}(yx)$ هي x

وبالعمل بالعلاقات بدلاً من العلائق، من $y^2x = y$ ، نستنتج أن $yx = 1$ عند الضرب بـ y^{-1} من اليسار، ثم بتعويض $yx = 1$ في $yx^2y = x$ ، أي إن $(yx)(xy) = x$ ، ونحصل على $xy = x$ ، ثم بالضرب بـ x^{-1} من اليسار، نحصل على $y = 1$ ، وبتعويض هذا في $yx = 1$ ، نحصل على $x = 1$.

تحتاج كلتا التقنيتين إلى العمل نفسه، ولكن بطريقة ما يبدو العمل بالعلاقات طبيعياً أكثر لمعظمنا. ▲

تطبيقات

نهي هذا الفصل بتطبيقات.

5.40 مثال

لنحدد الزمر من الرتبة 10 تبعاً للتماثل، حيث نعلم من المبرهنة الأساسية 12.11 أن كل زمرة إبدالية من الرتبة 10 تماثل \mathbb{Z}_{10} . افترض أن G غير إبدالية من الرتبة 10 - بحسب مبرهنة سيلو، تحوي G زمرة جزئية ناظرية H من الرتبة 5، ويجب أن تكون H دورية. ليكن a مولداً لـ H ، إذا G/H من الرتبة 2، وبذلك تكون مماثلة لـ \mathbb{Z}_2 ، فإذا كانت $b \in G$ و $b \notin H$ ، فيجب أن يكون $b^2 \in H$ ، ولأن كل عنصر في H ما عدا 1 له رتبة 5، وإذا كانت b^2 لا تساوي 1، فإن b^2 ستكون من الرتبة 5، وبذا تكون رتبة b تساوي 10، سيعني هذا أن G دورية، ما يناقض الفرض بأن G ليست إبدالية؛ إذن، $b^2 = 1$.

أخيراً، لأن H زمرة جزئية ناظرية في G ، فإن $Hb^{-1} = H$ ، ولأن المرافقة بـ b تعطي تمثلاً ذاتياً على H ، فإن $ba b^{-1}$ يجب أن يكون عنصراً آخر في H من الرتبة 5، وهكذا، فإن $ba b^{-1}$ تساوي a ، a^3 ، أو a^4 ، ولكن $ba b^{-1} = a$ ستعطي $ba = ab$ ، وعندها ستكون G إبدالية؛ لأن a و b تولد G ؛ إذن، احتمالات التمثيلات لـ G هي:

$$1. (a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

$$2. (a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

$$3. (a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^4b)$$

لاحظ أن التمثيلات الثلاثة هذه يمكن أن تعطي زمراً رتبها على الأكثر 10؛ لأن العلاقة الأخيرة $ba = a^i b$ تمكننا من التعبير عن كل ضرب لـ a و b في G على الشكل $a^s b^t$ ؛ إذن، $a^5 = 1$ و $b^2 = 1$ تثبت أن المجموعة

$$S = \{a^0b^0, a^1b^0, a^2b^0, a^3b^0, a^4b^0, a^0b^1, a^1b^1, a^2b^1, a^3b^1, a^4b^1\}$$

تتضمن عناصر G كلها.

إنه ليس واضحاً بعد أن هذه العناصر في S كلها مختلفة، ما يعني أن لدينا في الحالات الثلاث كلها زمرة رتبها 10، على سبيل المثال: تمثيل الزمرة

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

يعطي زمرة فيها - وباستخدام قانون التجميع -

$$\begin{aligned} a &= b^2 a = (bb)a = b(ba) = b(a^2 b) = (ba)(ab) \\ &= (a^2 b)(ab) = a^2 (ba)b = a^2 (a^2 b)b = a^4 b^2 = a^4 \end{aligned}$$

إذن، في هذه الزمرة $a^4 = a$ ، وهكذا $a^3 = 1$ ، ما يؤدي بالترافق مع $a^5 = 1$ ، أن $a^2 = 1$. ولكن $a^2 = 1$ وبالترافق مع $a^3 = 1$ ، يعني أن $a = 1$ ؛ إذن، كل عنصر في الزمرة ذات التمثيل

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2 b)$$

يساوي إما 1 أو b ؛ أي إن الزمرة تماثل \mathbb{Z}_2 . دراسة مماثلة لـ

$$(bb)a = b(ba)$$

في

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^3 b)$$

تثبت أن $a = a^4$ مرة أخرى، وهذا يؤدي كذلك إلى زمرة تماثل \mathbb{Z}_2 .

يترك هذا فقط

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^4 b)$$

بوصفه مرشحاً لزمرة غير إبدالية من الرتبة 10. في هذه الحالة يمكن إثبات أن عناصر S جميعها مختلفة، وبهذا فإن هذا التمثيل يعطي زمرة غير إبدالية G من الرتبة 10. كيف يمكن إثبات أن العناصر في S كلها تمثل عناصر مختلفة في G ؟ الطريقة السهلة، وهي ملاحظة أننا نعلم أنه توجد على الأقل زمرة غير إبدالية واحدة من الرتبة 10، الزمرة الزوجية D_5 ، ولأن G هي المرشحة الوحيدة المتبقية، فيجب أن نحصل على $G \cong D_5$.

وطريقة أخرى للمعادلة كما يأتي: لنحاول جعل S زمرة بتعريف $(a^s b^t) (a^u b^v)$ لتكون $a^x b^y$ ، حيث x هو الباقي من قسمة $(4^t) s + u$ على 5، و y هي باقي قسمة $t + v$ على 2، بمفهوم خوارزمية القسمة (المبرهنة 3.6)، وبكلمات أخرى، نستخدم العلاقة $ba = a^4 b$ بوصفها دليلاً في تعريف حاصل ضرب $(a^s b^t) (a^u b^v)$ لعنصرين في S ، حيث نرى أن $a^0 b^0$ تؤدي دور العنصر المحايد، وإذا أعطينا $a^u b^v$ ، فيمكننا تحديد t و s بالتوالي بجعل:

$$t \equiv -v \pmod{2}$$

ثم

$$s \equiv -u(4^t) \pmod{5}$$

ما يعطي $a^s b^t$ ، المعكوس من اليسار لـ $a^u b^v$ ، وهكذا سنحصل على بنية للزمرة على S ، إذا وفقط إذا تحقق قانون التجميع. يسألنا التمرين 13 تنفيذ الحسابات المباشرة لقانون التجميع واكتشاف شرط على S لتكون زمرة مع مثل هذا التعريف للضرب.

المعيار في التمرين في هذه الحالة يوصل إلى صحّة التكافؤ.

$$4^2 \equiv 1 \pmod{5}$$

وهكذا، فإننا نحصل فعلاً على زمرة من الرتبة 10. لاحظ أنّ
 $2^2 \neq 1$ (مقياس 5).

و

$$3^2 \neq 1 \text{ (مقياس 5).}$$

وبهذا، فإنّ التمرين 13 يثبت كذلك أنّ:

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

و

$$(a, b : a^5 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$



لا تعطي زمراً من الرتبة 10.

لنحدد الزمر كلها من الرتبة 8 تبعاً للتماثل. نعرف الزمر الإبدالية الثلاثة:

$$\mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

6.40 مثال

باستخدام المولدات والعلاقات، وسنعطي تمثيلات للزمر غير الإبدالية. لتكن G زمرة غير إبدالية من الرتبة 8، ولأنّ G ليست إبدالية، فإنها لا تحوي عناصر من الرتبة 8؛ إذن، فإنّ العناصر كلها ما عدا العنصر المحايد لها رتبة إما 2 أو 4. فإذا كان كل عنصر له رتبة 2، فإنّ $a, b \in G$ سنحصل على $(ab)^2 = 1$ ، أي إنّ $abab = 1$ ؛ إذن، ولأنّ $a^2 = 1$ و $b^2 = 1$ كذلك، فنحصل على:

$$ba = a^2bab^2 = a(ab)^2b = ab,$$

ما يناقض فرضيتنا أنّ G غير إبدالية؛ إذن، يجب أن تحوي G عنصراً من الرتبة 4. لتكن $\langle a \rangle$ زمرة جزئية من G من الرتبة 4. فإذا كانت $b \notin \langle a \rangle$ ، فإنّ المجموعتين المشاركتين $\langle a \rangle$ و $\langle b \rangle$ تستهلك كل G ؛ إذن، a و b مولدات لـ G و $a^4 = 1$ ، ولأنّ $\langle a \rangle$ ناظمية في G (بحسب مبرهنة سيلو، أو لأن دليلها 2)، $\langle a \rangle$ تماثل \mathbb{Z}_2 ولدينا $b^2 \in \langle a \rangle$. وإذا كانت $b^2 = a$ أو $b^2 = a^3$ ، فإنّ رتبة b ستكون 8؛ إذن، $b^2 = 1$ أو $b^2 = a^2$.

أخيراً، لأنّ $\langle a \rangle$ ناظمية، فسيكون لدينا $bab^{-1} \in \langle a \rangle$ ، ولأنّ $b \langle a \rangle b^{-1}$ زمرة جزئية ترافق $\langle a \rangle$ وبذلك تكون تماثل $\langle a \rangle$ ، نرى أنّ bab^{-1} يجب أن يكون عنصراً من الرتبة 4؛ إذن، $bab^{-1} = a$ أو $bab^{-1} = a^3$. وإذا كان $bab^{-1} = a$ ، فإنّ ba ستساوي ab ، وهذا سيجعل G إبدالية؛ إذن، $bab^{-1} = a^3$.

وبهذا، فإنّ $ba = a^3b$. وهكذا يصبح لدينا احتمالان لـ G ، وهما:

$$G_1 : (a, b : a^4 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

و

$$G_2 : (a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3b).$$

لاحظ أنّ $a^{-1} = a^3$ ، وأنّ b^{-1} هي b في G_1 وهي b^3 في G_2 . هذه الحقائق، مع العلاقة $ba = a^3b$ ، تمكننا من التعبير عن كل عنصر في G_i على الصورة $a^m b^n$ ، كما في المثالين 3.40 و 5.40، ولأنّ $a^4 = 1$ وإما $b^2 = 1$ أو $b^2 = a^2$ ، فاحتمالات العناصر في كل زمرة، هي:

$$1, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b.$$

إذن، G_1 و G_2 له رتبة على الأكثر 8. لأن G_1 زمرة من الرتبة 8، فيمكن رؤيته من التمرين 13، وبمناقشة شبيهة لتلك المستعملة في التمرين 13 تثبت أن G_2 لها رتبة 8 كذلك.

لأن $ba = a^3b \neq ab$ ، نرى أن G_1 و G_2 كليهما غير إبدالية؛ لأن الزمرتين غير متماثلتين، فينتج عن حقيقة أن الحسابات تثبت أن G_1 تحوي عنصرين فقط من الرتبة 4، وهما a و a^3 . وعلى الجانب الآخر، في G_2 العناصر كلها عدا 1 و a^2 لها رتبة 4، حيث ندع حسابات الجداول لهاتين الزمرتين للتمرين 3. وللتوضيح، افترض أننا نود حساب $(a^2b)(a^3b)$ ، فباستخدام $ba = a^3b$ بصورة متكررة، نحصل على:

$$(a^2b)(a^3b) = a^2(ba)a^2b = a^5(ba)ab = a^8(ba)b = a^{11}b^2$$

إذن، نحصل في G_1 على:

$$a^{11}b^2 = a^{11} = a^3,$$

ولكن إذا كنا في G_2 ، فإننا نحصل على

$$a^{11}b^2 = a^{13} = a.$$

الزمرة G_1 هي الزمرة الثمانية، (octic group) وتماثل صديقتنا القديمة، الزمرة D_4 لتماثلات المربع، والزمرة G_2 هي الزمرة المرباعية (quaternion group)؛ إنها تماثل زمرة الضرب $\{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ للمرباعيات. نوقشت المرباعيات في الفصل 24. ▲

■ تمارين 40

حسابات

1. أعط تمثيلاً لـ \mathbb{Z}_4 يتضمّن مولداً واحداً؛ مولدين؛ ثلاثة مولدات.

2. أعط تمثيلاً لـ S_3 يتضمّن ثلاثة مولدات.

3. أعط الجداول للزمرة الثامنة.

$$(a, b : a^4 = 1, b^2 = 1, ba = a^3b)$$

والزمرة المرباعية

$$(a, b : a^4 = 1, b^2 = a^2, ba = a^3b).$$

في كلتا الحالتين، اكتب العناصر على الترتيب $a^3b, a^2b, ab, a^2, a^3, b, a, 1$. لاحظ أننا لن نحتاج إلى حساب كل حاصل ضرب، نعلم أن هذين التمثيلين يعطيان زمرتين من الرتبة 8، وبمجرد أن نحسب عدداً كافياً من حواصل الضرب، فإن البقية ستكون حتماً أن كل صف وكل عمود في الجدول يحوي العنصر مرة واحدة فقط).

4. عيّن الزمر جميعها من الرتبة 14 تبعاً للتماثل. [مساعدة: تتبع خطوات حل المثال 5.40، واستخدم التمرين 13، الفرع (ب)].

5. عيّن الزمر جميعها من الرتبة 21 تبعاً للتماثل. [مساعدة: تتبع خطوات حل المثال 5.40، واستخدم التمرين 13، الفرع (ب). قد يظهر أن هناك تمثيلين يعطيان زمرتين غير إبداليتين. أثبت أنهما متماثلتان].

مفاهيم

في التمرينين 6 و 7، صحّح تعريف الحد المكتوب بخط مائل دون الرجوع إلى الكتاب - إن كانت هناك حاجة للتصحيح - بحيث يكون بصيغة قابلة للنشر.

6. النتيجة لمجموعة من العلائق، هي حاصل ضرب منته من العلائق مرفوعة لقوى.

7. يكون تمثيلاً زمرتين متماثلًا، إذا وفقط إذا وجد تقابل بين مولدات التمثيل الأول ومولدات الثاني، الذي ينتج - بعد إعادة تسمية المولدات - تقابلاً بين علائق التمثيل الأول مع تلك التي تخص الثاني.

8. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:

أ. لكل زمرة تمثيل.

ب. لكل زمرة كثير من التمثيلات المختلفة.

ج. لكل زمرة تمثيلان غير متماثلين.

د. لكل زمرة تمثيل منته.

هـ. كل زمرة ذات تمثيل منته تكون ذات رتبة منتهية.

و. لكل زمرة دورية تمثيل بمولد واحد فقط.

ز. كل مرافق لعلائقي يكون نتيجة لعلائقي.

ح. أي تمثيلين بالعدد نفسه من المولدات يكونان دائماً متماثلين.

ط. في تمثيل لزمرة إبدالية، مجموعة النتائج للعلائق تحوي الزمرة الجزئية لمبدلات زمرة حرة على المولات.

ي. في كل تمثيل لزمرة حرة يكون أ لـ 1 العلائقي الوحيد.

براهين

استخدم طرق هذا الفصل والتمرين 13، الفرع (ب) في إثبات عدم وجود زمرة غير إبدالية من الرتبة 15. (ارجع كذلك للمثال 10.37).

9. أثبت - مستخدمًا التمرين 13 - أن

$$(a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

يعطي زمرة من الرتبة 6. أثبت أنها غير إبدالية.

10. أثبت أن التمثيل

$$(a, b : a^3 = 1, b^2 = 1, ba = a^2b)$$

في التمرين 10 يعطي (تبعًا للتماثل) الزمرة غير الإبدالية الوحيدة من الرتبة 6، وبهذا يعطي زمرة تماثل S_3 .

11. أثبتنا في المثال 6.15 أن A_4 لا تحوي زمرة جزئية من الرتبة 6، ويثبت التمرين السابق أن مثل هذه الزمرة

الجزئية من A_4 ستكون مماثلة إما لـ \mathbb{Z}_6 أو S_3 . أثبت أن هذا مستحيل أخذًا رتب العناصر في الحساب.

12. لتكن:

$$S = \{a^i b^j \mid 0 \leq i < m, 0 \leq j < n\},$$

أي إن S تتألف من الضرب الشكلي $a^i b^j$ بدءًا بـ $a^0 b^0$ وانتهاءً بـ $a^{m-1} b^{n-1}$. ليكن r عددًا صحيحًا موجبًا، وعرف الضرب على S بـ

$$(a^s b^t)(a^u b^v) = a^x b^y,$$

حيث x باقي قسمة $(r^s + u)$ على m ، و y لباقي قسمة $t + v$ على n ، باستخدام خوارزمية القسمة (المبرهنة 3.6).

أ. أثبت أن الشرط الضروري والكافي لتحقيق قانون التجميع و S لتصبح زمرة مع هذا الضرب، أن تكون r^m

$$\equiv 1 \pmod{m}.$$

ب. استنتج من الفرع (أ) أن تمثيل الزمرة:

$$(a, b : a^m = 1, b^n = 1, ba = a^r b)$$

يعطي زمرة من الرتبة mn ، إذا وفقط إذا كان $r^m \equiv 1 \pmod{m}$.

13. (انظر النبذة التاريخية في صفحة 449). أثبت أنه إذا كان $n = pq$ ، حيث p و q عدنان أوليان و $q > p$ و $q \equiv 1$

(مقياس p) فتوجد بالضبط زمرة غير إبدالية واحدة (تبعًا للتماثل) من الرتبة n . تذكر أن $q - 1$ عنصر غير صفري

في \mathbb{Z}_q يولد زمرة دورية \mathbb{Z}_q^* مع الضرب مقياس q . [مساعدة: تشكل حلول $x^p \equiv 1$ (مقياس q) زمرة جزئية من

\mathbb{Z}_q^* ذات عناصر $1, r, r^2, \dots, r^{p-1}$. في الزمرة ذات التمثيل $(a, b : a^q = 1, b^p = 1, ba = a^r b)$ ، نحصل على

$bab^{-1} = a^r$ ، وبهذا يكون $b^j a b^{-j} = a^{r^j}$ ؛ إذن، ولأن b^j تولد $\langle b \rangle$ لـ $j = 1, \dots, p-1$ ، وهذا التمثيل يماثل

$$(a, b^j : a^q = 1, (b^j)^p = 1, (b^j)a = a^{(r^j)}(b^j)),$$

إذن، التمثيلات $(a, b : a^q = 1, b^p = 1, ba = a^{(r^j)} b)$ كلها متماثلة.]