

الزمر في الطوبولوجيا¹ Groups in Topology

الفصل 41	مركب المبسطات والزمر الشباهية Simplicial Complexes and Homology Groups
الفصل 42	حساب الزمر الشباهية Computations of Homology Groups
الفصل 43	المزيد من الحسابات والتطبيقات على علم الشباه More Homology Computations and Applications
الفصل 44	الجبر الشباهي Homological Algebra

الوحدة الثامنة

¹ الوحدة الثامنة ليست متطلبًا لبقية الكتاب.

مركب المبسطات والزمر الشباهية Simplicial Complexes and Homology Groups

تحفيز

تهتم الطوبولوجيا بالمجموعات التي نملك عنها فكرة كافية، وإلى أي حد يجب أن تكون نقطتان فيها قريبتين من بعضهما؛ لنتمكن من تعريف دالة متصلة، فنقول عن اثنتين من هذه المجموعات - أو الفضاءات الطوبولوجية إن لها البنية نفسها، إذا وجدت دالة أحادية غامرة من إحدهما للآخرى، بحيث إن كلا الدالة ومعكوسها متصل، وببساطة، فهذا يعني أن أحد الفضاءين يمكن أن يوسع، أو يلوى، أو يشوه بطريقة أخرى من غير أن يشق أو يقطع، ل يبدو تمامًا مثل الآخر؛ إذن، الكرة الكبرى طوبولوجيًا لها البنية نفسها لكرة أصغر، ومحيط الدائرة له بنية محيط المربع نفسها، وهكذا، حيث تسمى الفضاءات ذات البنية المتشابهة بهذا المعنى متماثلة استمراريًا (*homeomorphic*). نأمل أن يدرك الطالب أن مفهوم التماثل المستمر في الطوبولوجيا بوصفه مفهوم التماثل (حيث المجموعات لها البنية الجبرية نفسها) في الجبر.

المشكلة الرئيسية في الطوبولوجيا هي إيجاد شروط ضرورية وكافية ومفيدة - مختلفة عن مجرد التعريف - لفضاءين ليكونا متماثلين استمراريًا، بوجه عام، يصعب إيجاد الشروط الكافية، بينما الشروط الضرورية متوافرة وسهلة، ولكن بعضها مهمة جدًا ومفيدة، والفضاء "الظريف" تربط به أنواع متعددة من الزمر، مثل: زمرة الشباه، وزمر الشباه المقابلة، وزمر التحاول، وزمر التحاول المقابلة.

إذا كان الفضاءان متماثلين استمراريًا، فيمكن إثبات أن زمر أحدهما تماثل الزمر المقابلة لها المرتبطة بالآخر؛ إذن، شرط ضروري للفضاءات لتكون متماثلة استمراريًا، أن تكون زمرها متماثلة، ويمكن أن تعكس بعض هذه الزمر صفات مفيدة لهذه الفضاءات، إضافة إلى ذلك، تنشئ الدالة المتصلة من أحد الفضاءين إلى الآخر تشاكلًا من زمر أحدهما إلى زمر الآخر، ويمكن أن تظهر تشاكلات الزمر هذه خصائص مفيدة للدوال.

إذا لم يستطع الطالب فهم الفقرات السابقة، فلا داعي للقلق، فقد كان هدف الفقرات السابقة مجرد تحفيز لما سيأتي، وهدف هذا الفصل هو وصف بعض الزمر - زمر الشباه - المرتبطة ببعض الفضاءات البسيطة - في عملنا - وهي عادة بعض المجموعات الجزئية من الفضاء الإقليدي المعروف³.

أفكار تمهيدية

أولاً، نقدم فكرة المبسط من الرتبة n الموجه في الفضاء الإقليدي، حيث $n = 0, 1, 2, 3$ المبسط الصفري الموجه (*oriented 0-simplex*) هو مجرد النقطة P ، والمبسط الأحادي الموجه (*oriented 1-simplex*) هو القطعة المستقيمة الموجهة $P_1 P_2$ ، التي تصل بين النقطتين P_1 و P_2 ، وتظهر وكأنها تتحرك من P_1 إلى P_2 ، أما المبسط الثنائي الموجه (*oriented 2-simplex*) فهو المنطقة المثلثة $P_1 P_2 P_3$ - كما في الشكل 1.41 - مع اتجاه محدد للحركة حول المثلث بوصفه مثالاً، وهو محدد بالسهم في الشكل 1.41 كالترتيب $P_1 P_2 P_3$ ، من الواضح أن الترتيب $P_1 P_2 P_3$ مثل الترتيب $P_2 P_3 P_1$ و $P_3 P_1 P_2$ ، ولكنه معاكس للترتيب $P_1 P_3 P_2$ ، $P_1 P_2 P_3$ و $P_2 P_1 P_3$.

سننتفك على أن:

$$P_1 P_2 P_3 = P_2 P_3 P_1 = P_3 P_1 P_2 = -P_1 P_3 P_2 = -P_3 P_2 P_1 = -P_2 P_1 P_3$$

لاحظ أن $P_i P_j P_k$ يساوي $P_1 P_2 P_3$ إذا كانت:

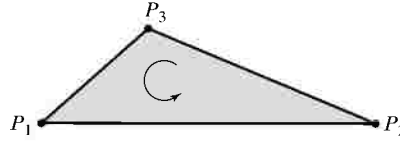
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$$

تبديلة زوجية، وتساوي $-P_1P_2P_3$ إذا كانت التبديلة فردية، كذلك يمكن القول عن المبسط الأحادي الموجه P_1P_2 ، لاحظ كذلك أنه لـ $n = 0, 1, 2$ ، المبسط من الرتبة n الموجه هو شيء له بعد n .

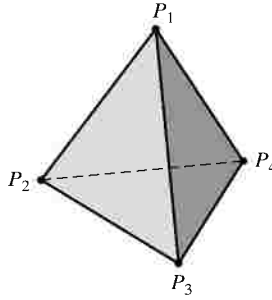
يجب أن يكون تعريف المبسط الثلاثي الموجه واضحًا الآن، حيث يُعطى المبسط الثلاثي الموجه (*oriented 3-simplex*) بوصفه متتالية مرتبة $P_1P_2P_3P_4$ لـ أربعة رؤوس لرباعي السطوح المجسم، كما في الشكل 2.41، حيث نتفق على أن $P_1P_2P_3P_4 = \pm P_iP_jP_rP_s$ بحسب ما إذا كانت التبديلة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & r & s \end{pmatrix}$$

زوجية أم فردية، وتنطبق تعريفات مماثلة لـ $n > 3$ ، ولكن سنتوقف هنا مع الأبعاد التي يمكن أن نجسدها، فهذه المبسطات موجهة (*oriented*)، أولها توجه (*orientation*)، أي، نحن مهتمون بترتيب الرؤوس تمامًا، كما نحن مع النقاط الحقيقية، حيث تقع هذه الرؤوس، مبسطاتنا كلها ستكون موجهة، وسوف نسقط الصفة من الآن فصاعدًا.



الشكل 1.41



الشكل 2.41

سنعرف الآن حدود المبسط ذي البعد $n = 0, 1, 2, 3$. المصطلح حدود حدسي، نعرف حدود المبسط الصفري (*boundary of a 0-simplex*) ليكون المبسط الخالي، الذي سنرمز له في هذه المرة بـ "0". الرمز هو:

$$\partial_0(P) = 0$$

حدود المبسط 1- (*boundary of a 1-simplex*) P_1P_2 معرّف بـ:

$$\partial_1(P_1P_2) = P_2 - P_1$$

أي، الفرق الصوري بين نقطة النهاية ونقطة البداية، ومثلها حدود المبسط الثنائي (*boundary of a 2-simplex*) معرّف بـ:

$$\partial_2(P_1P_2P_3) = P_2P_3 - P_1P_3 + P_1P_2$$

الذي يمكن تذكره بالقول: إنه الجمع الشكلي للحدود التي نحصل عليها بإسقاط كل P_i بالتتابع من المبسط الثنائي $P_1P_2P_3$ وجعل الإشارة + إذا أسقط الحد الأول، - إذا أسقط الثاني، و+ إذا أسقط الثالث، وبالرجوع إلى الشكل 1.41، نرى أنّ هذا يقابل الحركة حول ما نسميه عادة الحدود في الاتجاه المحدد للسهم، لاحظ كذلك أنه يمكن

تذكر المعادلة $\partial_1(P_1P_2) = P_2 - P_1$ بالطريقة نفسها؛ إذن، نحن نتجه إلى تعريف حدود المبسط الثلاثي (*boundary of a 3-simplex*) الآتي:

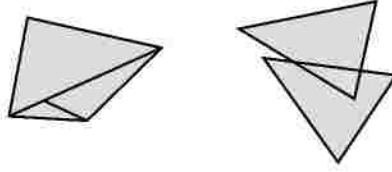
$$\partial_3(P_1P_2P_3P_4) = P_2P_3P_4 - P_1P_3P_4 + P_1P_2P_4 - P_1P_2P_3$$

تتحقق تعريفات مشابهة لـ ∂_n حيث $n > 3$ ، وكل فرد من المجمعات في حدود المبسط يسمى وجهًا للمبسط (*face of a simplex*)؛ إذن، $P_2P_3P_4$ وجه $P_1P_2P_3P_4$ ، ولكن $P_1P_3P_4$ ليس وجهًا، وعلى أي حال، فإن $P_1P_4P_3 = P_1P_3P_4$ وجه لـ $P_1P_2P_3P_4$.

افترض أنّ لديك مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ مقسمة "بصورة رائعة" إلى مبسطات، على سبيل المثال سطح رباعي السطوح S في الشكل 2.41، الذي يمكن تقسيمه إلى أربعة مبسطات ثنائية منسجمة مع بعضها بصورة رائعة؛ إذن، توجد لدينا في سطح رباعي السطوح، بعض المبسطات الصفيرية، أو الرؤوس لرباعي السطوح، بعض المبسطات الأحادية أو حواف رباعي السطوح، بعض المبسطات الثنائية، أو المثلثات في رباعي السطوح، بوجه عام، لتقسيم فضاء ما "بصورة رائعة" إلى مبسطات، نحتاج إلى الحقائق الآتية:

1. كل نقطة في الفضاء تنتمي على الأقل إلى مبسط واحد.

2. كل نقطة في الفضاء تنتمي فقط إلى عدد منتهٍ من المبسطات.



الشكل 3.41

3. لكل مبسطين مختلفين (تبعاً للاتجاه)، إما ألا توجد بينهما نقاط مشتركة أو أحدهما (ربما ما عدا الاتجاه) وجه للآخر أو وجه لوجه في الآخر... إلخ، أو أن مجموعة النقاط المشتركة (ربما ما عدا الاتجاه) وجه، أو وجه لوجه... إلخ، ولكل مبسط، يستثنى الشرط (3) الصور مثل تلك المعروضة في الشكل 3.41، حيث يسمّى الفضاء المقسم إلى مبسطات تبعاً لهذه المتطلبات مركب مبسطات (*simplicial complex*).

السلاسل، والدورات، والحدود

لنصف بعض الزمر المرتبطة بمبسط مركب X ، سنوضح كل تعريف بحالة سطح رباعي السطوح S في الشكل 2.41، الزمرة $C_n(X)$ للسلاسل ذات الرتبة n (الموجهة) $C_n(X)$ (group of oriented n -chains)، هي الزمرة الإبدالية الحرة المولدة بالمبسطات ذات الرتبة n (الموجهة) $C_n(X)$ ؛ إذن، كل عنصر في $C_n(X)$ مجموع منته على الصورة $\sum_i m_i \sigma_i$ ، حيث σ_i مبسطات ذات رتبة n و $m_i \in \mathbb{Z}$ ، وننجز الجمع للسلاسل بأخذ الجمع الجبري لمعاملات كل ظهور في السلاسل لمبسط محدد.

4.41 مثال في سطح رباعي السطوح S ، كل عنصر في $C_2(S)$ يكون على الصورة:

$$m_1 P_2 P_3 P_4 + m_2 P_1 P_3 P_4 + m_3 P_1 P_2 P_4 + m_4 P_1 P_2 P_3$$

حيث $m_i \in \mathbb{Z}$ ، وبوصفه توضيحاً للجمع، لاحظ أن:

$$(3P_2 P_3 P_4 - 5P_1 P_2 P_3) + (6P_2 P_3 P_4 - 4P_1 P_3 P_4) = 9P_2 P_3 P_4 - 4P_1 P_3 P_4 - 5P_1 P_2 P_3$$

ويكون العنصر في $C_1(S)$ على الصورة:

$$m_1 P_1 P_2 + m_2 P_1 P_3 + m_3 P_2 P_4 + m_4 P_2 P_3 + m_5 P_2 P_4 + m_6 P_3 P_4$$

ويكون العنصر في $C_0(S)$ على الصورة:

$$\blacktriangle m_1 P_1 + m_2 P_2 + m_3 P_3 + m_4 P_4$$

الآن، إذا كان σ مبسطاً ذا رتبة n ، فإن $\partial_n(\sigma) \in C_{n-1}(X)$ لكل $n = 1, 2, 3$. لنعرّف $C_{-1}(X) = \{0\}$ الزمرة التافهة في عنصر واحد؛ وهكذا، سنحصل على $\partial_0(\sigma) \in C_{-1}(X)$ ، ولأن $C_n(X)$ إبدالية حرة، ولأننا نستطيع تعيين التشاكل لمثل هذه الزمرة بإعطاء قيمها على المولدات، فنرى أن ∂_n تعطي تشاكل حدود (boundary homomorphism) وحيداً، الذي سنرمز له مرة أخرى بـ " ∂_n " ويربط $C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ ، حيث $n = 0, 1, 2, 3$. لدينا:

5.41 مثال

$$\partial_n \left(\sum_i m_i \sigma_i \right) = \sum_i m_i \partial_n(\sigma_i)$$

على سبيل المثال:

$$\begin{aligned} \partial_1(3P_1P_2 - 4P_1P_3 + 5P_2P_4) &= 3\partial_1(P_1P_2) - 4\partial_1(P_1P_3) + 5\partial_1(P_2P_4) \\ &= 3(P_2 - P_1) - 4(P_3 - P_1) + 5(P_4 - P_2) \\ &= P_1 - 2P_2 - 4P_3 + 5P_4 \end{aligned}$$



يُذكر الطالب مرة أخرى، أنه في أي وقت يكون لديه فيه تشاكل، فإن هناك شيئين مهمين جداً، هما: النواة ومجموعة الصور، حيث تتألف نواة ∂_n من تلك السلاسل ذات الحدود 0 والبعد n ، أما عناصر النواة فهي الدورات ذات الرتبة n (cycles) n ، والرمز المعتاد لنواة - أي زمرة ∂_n الدورات ذات البعد n (group of n cycles) - هي " $Z_n(X)$ ".

6.41 مثال

إذا كان $z = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$ ، فإن

$$\partial_1(z) = (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + (P_1 - P_3) = 0$$

إذن، z دورة أحادية، وعلى أي حال، إذا جعلنا $c = P_1P_2 + 2P_2P_3 + P_3P_1$

$$\partial_1(c) = (P_2 - P_1) + 2(P_3 - P_2) + (P_1 - P_3) = -P_2 + P_3 \neq 0$$



إذا $c \notin Z_1(X)$

لاحظ أن $z = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$ في المثال 6.41 تقابل دائرة واحدة - أو دورة - حول المثلث ذي الرؤوس P_1, P_2, P_3 .

مجموعة صور ∂_n - زمرة الحدود ذات الرتبة $(n-1)$ (group of $(n-1)$ - boundaries) - تتألف بالضبط من السلاسل ذات البعد n ، التي تكون حدود السلاسل ذات البعد n ، ويرمز لهذه الزمرة بـ:

$$B_{n-1}(X)$$

7.41 مثال

بالرجوع إلى المثال 6.41، نرى أنه إذا كان:

$$P_1P_2 + 2P_2P_3 + P_3P_1$$

سلسلة أحادية في $C_1(X)$ ، فإن $P_3 - P_1$ تكون حدوداً صفرية، لاحظ أن $P_3 - P_2$ تحدّ P_2P_3 .



لنحسب الآن $Z_n(X)$ و $B_n(X)$ لمثال أكثر تعقيداً، ففي الطوبولوجيا، إذا كانت الزمرة هي الزمرة التافهة المكوّنة فقط من العنصر المحايد 0، فإننا نرمز لها في العادة بـ "0" بدلاً من $\{0\}$. سنتبع هذه العادة فيما يأتي.

لنحسب لـ $n = 0, 1, 2$ الزمر $Z_n(S)$ و $B_n(S)$ لسطح رباعي السطوح S في الشكل 2.41.

8.41 مثال

أولاً - للحالات الأسهل - لأنّ المبسط ذا البعد الأكبر في المسطح هو المبسط الثنائي، فإننا نحصل على $C_3(S) = 0$ ؛ إذن،

$$B_2(S) = \partial_3 [C_3(S)] = 0$$

وكذلك، لأنّ $C_1(S) = 0$ بحسب تعريفنا، فنرى أنّ:

$$Z_0(S) = C_0(S)$$

إذن، $Z_0(S)$ الإبدالية الحرّة لها أربعة مولدات، P_1 ، و P_2 ، و P_3 ، و P_4 ، ومن السهل ملاحظة أنّ صورة الزمرة بالتشاكل مولدة بصور المولدات في الزمرة الأصلية، ولأنّ $C_1(S)$ مولدة بـ P_1P_2 ، و P_1P_3 ، و P_1P_4 ، و P_2P_3 ، و P_2P_4 ، و P_3P_4 ، فنرى أنّ $B_0(S)$ مولدة بـ:

$$P_2 - P_1, P_3 - P_1, P_4 - P_1, P_3 - P_2, P_4 - P_2, P_4 - P_3$$

وعلى أيّ حال، فإنّ $B_0(S)$ ليست إبدالية حرّة على هذه المولدات، على سبيل المثال:

$$P_3 - P_2 = (P_3 - P_1) - (P_2 - P_1) \\ P_4 - P_1, P_3 - P_1$$

لننّسّع - الآن - خلف الزمرة الأصعب $Z_1(S)$. العنصر c في $C_1(S)$ هو الجمع الشكلي

للمضاعفات الصحيحة للحواف P_iP_j ، من الواضح أنّ $\partial_1(c) = 0$ إذا وفقط إذا كان كل رأس تبدأ به ما مجموعها (بحساب التكرار) r من الحواف في c ، فهو كذلك نقطة النهاية لـ r من الحواف بالضبط؛ إذن:

$$z_1 = P_2P_3 + P_3P_4 + P_4P_2,$$

$$z_2 = P_1P_4 + P_4P_3 + P_3P_1,$$

$$z_3 = P_1P_2 + P_2P_4 + P_4P_1,$$

$$z_4 = P_1P_3 + P_3P_2 + P_2P_1$$

كلها دورات أحادية، وهذه هي بالضبط حدود المبسطات الثنائية المفردة، نزع أن z_i تولد $Z_1(S)$. ليكن $z \in Z_1(S)$ ، واختر رأساً محدداً، وليكن P_1 ؛ لنعمل على الحواف التي تكون P_1 نقطة نهاية لها، فهذه الحواف هي: P_1P_2 ، و P_1P_3 ، و P_1P_4 . ليكن m_j معامل P_iP_j في z ؛ إذن:

$$z + m_2z_4 - m_4z_2$$

هو دورة كذلك، ولكن لا تحوي الحواف P_1P_2 أو P_1P_4 ؛ إذن، الحافة الوحيدة التي يكون فيها P_1 رأساً في الدورة $z + m_2z_4 - m_4z_2$ هي ربما P_1P_3 ، ولكن هذه الحافة لا يمكن أن تظهر بمعامل لا يساوي صفراً؛ لأنها في هذه الحالة ستشارك في مضروب غير صفري للرأس P_1 للحدود، ما يناقض حقيقة أن حدود الدورة تساوي صفراً. إذن $z + m_2z_4 - m_4z_2$ تتألف من حواف المبسط الثنائي $P_2P_3P_4$ ، ولأنه في أي دورة أحادية يظهر كل من P_2 ، و P_3 و P_4 عدداً متساوياً من المرات بوصفها نقاط بداية ونهاية للحواف في الدورة - عادداً التكرار -، فنرى أن:

$$z + m_2z_4 - m_4z_2 = rz_1$$

حيث r عدد صحيح؛ إذن، تولد $Z_1(S)$ بأل z_i - في الحقيقة بأي ثلاثة من أل z_i - لأن أل z_i هي الحدود المختلفة لـ المبسطات الثنائية - كما لاحظنا - فإننا نرى أن:

$$Z_1(S) = B_1(S)$$

على الطالب أن يرى ماذا تعني هذه الحسابات هندسياً باستخدام الشكل 2.41.

أخيراً، نصف $Z_2(S)$ ، حيث يتولد - الآن - $C_2(S)$ بالمبسطات $P_2P_3P_4$ و $P_3P_1P_4$ و $P_1P_2P_4$ و $P_2P_1P_3$ ، فإذا كان لـ $P_2P_3P_4$ معامل r_1 ولـ $P_3P_1P_4$ معامل r_2 في دورة ثنائية، فإن للحافة المشتركة P_3P_4 معاملاً $r_1 - r_2$ في حدودها.

إذن، يجب أن يكون $r_1 = r_2$ ، وبمناقشة مشابهة، نرى أنه في أي دورة تكون كل من المبسطات الثنائية الأربعة لها المعاملات نفسها؛ إذن، يتولد $Z_2(S)$ بـ:

$$P_2P_3P_4 + P_3P_1P_4 + P_1P_2P_4 + P_2P_1P_3$$

بمعنى أن $Z_2(S)$ دوري غير منته، مرة أخرى، على الطالب أن يترجم هذه الحسابات هندسياً باستخدام الشكل 2.41، لاحظ أن اتجاه كل مجمع يربط بالذهاب حول المثلث في اتجاه عقارب الساعة، عندما ينظر لها من خارج رباعي السطوح. ▲

$$\partial^2 = 0 \text{ والزمر الشباهية}$$

نصل الآن إلى واحدة من أكثر المعادلات أهمية في الرياضيات، سننصّ عليها فقط في حالة $n = 1, 2, 3$ ، ولكنها متحققة لكل $n > 0$.

9.41 مبرهنة

لتكن X مبسطة مركبة، ولتكن $C_n(X)$ السلسلة ذات الرتبة n لـ X ، حيث $n = 0, 1, 2, 3$ ؛ إذن، يربط تركيب التشاكل ∂_n من $C_n(X)$ إلى $C_{n-1}(X)$ كل شيء مع 0، حيث $n = 1, 2, 3$ بمعنى أنه لكل $c \in C_n(X)$ ، $\partial_n(\partial_n(c)) = 0$ ، نستخدم الرمز " $\partial_n \partial_n = 0$ "، أو باختصار أكثر " $\partial^2 = 0$ ".

البرهان

لأن التشاكل يتحدد تمامًا بقيمه على المولدات، فمن الكافي أن نتحقق أنه لكل مبسط σ ذي رتبة n ، يكون $\partial_n(\partial_n(\sigma)) = 0$ ، فإذا كانت $n = 1$ ، فالنتيجة واضحة؛ لأن ∂_0 تربط كل شيء بـ 0. عندما $n = 2$ ،

$$\begin{aligned} \partial_1(\partial_2(P_1P_2P_3)) &= \partial_1(P_2P_3 - P_1P_3 + P_1P_2) \\ &= (P_3 - P_2) - (P_3 - P_1) + (P_2 - P_1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

♦ ستكون حالة $n = 3$ تمرينًا ممتازًا للطالب في تعريف مشغل الحدود (انظر التمرين 2).

10.41 نتيجة

لـ $n = 0, 1, 2, 3$ ، زمرة جزئية من $Z_n(X)$.

البرهان

لـ $n = 0, 1, 2$ ، يكون $B_n(X) = \partial_{n+1}[C_{n+1}(X)]$ ؛ ولذلك، إذا كان $b \in B_n(X)$

فيجب أن نحصل على $b = \partial_{n+1}(c)$ ، حيث $c \in C_{n+1}(X)$ ؛ إذن:

$$\partial_n(b) = \partial_n(\partial_{n+1}(c)) = 0,$$

وهكذا، فإن $b \in Z_n(X)$.

إذا كانت $n = 3$ ، ولأننا غير مهتمين بالمبسطات ذات البعد الأكبر من 3،

♦ فإن $B_3(X) = 0$.

11.41 تعريف

تسمى زمرة العامل $H_n(X) = Z_n(X) / B_n(X)$ الزمرة الشباهية ذات البعد n لـ X .
■ $(n - \text{dimensional homology group of } X)$

12.41 مثال

لنحسب $H_n(S)$ لـ $n = 0, 1, 2, 3$ ، حيث S هو سطح رباعي السطوح في الشكل 2.41.

لقد أوجدنا $Z_n(S)$ و $B_n(S)$ في المثال 8.41، الآن، $C_3(S) = 0$ ، وهكذا، فإن كلاً من $Z_3(S)$ و $B_3(S)$ يساوي 0، وهذا يؤدي إلى أن

$$H_3(S) = 0$$

وكذلك، فإنَّ $Z_2(S)$ دورية غير منتهية، وقد رأينا أنَّ $B_2(S) = 0$ ؛ إذن، $H_2(S)$ دورية غير منتهية، أي إنَّ

$$H_2(S) \simeq \mathbb{Z}$$

رأينا أنَّ $Z_1(S) = B_1(S)$ ، وهذا يؤدي إلى زمرة العامل $Z_1(S)/B_1(S)$ وهي الزمرة التافهة من عنصر واحد، أي إنَّ:

$$H_1(S) = 0$$

أخيراً، كانت $Z_0(S)$ إبدالية حرّة على P_1, P_2, P_3 و P_4 ، بينما تولدت $B_0(S)$ من

$$P_4 - P_3, P_4 - P_2, P_3 - P_1, P_4 - P_1, P_3 - P_2, P_4 - P_2$$

ونزعم أنَّ كل مجموعة مشاركة في $Z_0(S)/B_0(S)$ ، تحوي فقط عنصراً واحداً على الصورة P_1 .

ليكن $z \in Z_0(S)$ ، وافترض أنَّ معامل P_2 في z هو s_2 ، ومعامل P_3 هو s_3 ، ومعامل P_4 هو s_4 ؛ إذن:

$$z - [s_2(P_2 - P_1) + s_3(P_3 - P_1) + s_4(P_4 - P_1)] = rP_1$$

حيث r عدد صحيح، وهكذا، فإنَّ $z \in [rP_1 + B_0(S)]$ ، أي إنَّ كل مجموعة مشاركة تحوي عنصراً على صورة rP_1 ، وإذا احتوت المجموعة المشاركة كذلك على $r'P_1$ ، فإنَّ $r'P_1 \in [rP_1 + B_0(S)]$ ، وهذا يؤدي إلى أنَّ $(r' - r)P_1$ تنتمي لـ $B_0(S)$ ، ومن الواضح أنَّ المضروب الوحيد لـ P_1 بحيث يكون حدوداً، هو الصفر؛ وإذن، $r = r'$ والمجموعة المشاركة تحوي فقط عنصراً وحيداً على صورة rP_1 ؛ إذن، يمكننا اختيار rP_1 بوصفها ممثلاً للمجموعات المشاركة في حسابات $H_0(S)$ ؛ إذن، $H_0(S)$ دورية غير منتهية - أي إنَّ

$$\blacktriangle \quad H_0(S) \simeq \mathbb{Z}$$

قد تبدو هذه التعريفات والحسابات معقدة للطالب، فالأفكار طبيعية جداً، ولكننا نعترف بأنها مربكة بعض الشيء في الكتابة، وعلى أي حال، فإنَّ المناقشة المستخدمة في هذه الحسابات نموذجية في مبرهنة الشباه، بمعنى أنك إذا فهمتها، فإنك ستفهم حساباتنا الأخرى كلها، إضافة إلى ذلك، يمكننا أن نجعلها هندسية، تظهر في صورة الفضاء.

سيكرس الفصل المقبل لمزيد من الحسابات للزمر الشباهية لبعض الفضاءات البسيطة المهمة.

■ تمارين 41

تمارين مقترحة

1. افترض أن $c = 2P_1P_3P_4 - 4P_3P_4P_6 + 3P_3P_2P_4 + P_1P_6P_4$ سلسلة ثنائية في مبسطة مركبة معينة X .
 أ. احسب $\partial_2(c)$ ب. هل c دورة ثنائية؟ ج. هل $\partial_2(c)$ دورة أحادية؟
2. احسب $\partial_2(\partial_3(P_1P_2P_3P_4))$ ، وأثبت أنها 0، مكملاً لإثبات المبرهنة 9.41.
3. صف $C_i(P)$ ، و $Z_i(P)$ ، و $B_i(P)$ ، و $H_i(P)$ للفضاء المكوّن فقط من المبسط الصفري P . (في الحقيقة هذه مسألة سهلة).
4. صف $C_i(X)$ ، و $Z_i(X)$ ، و $B_i(X)$ ، و $H_i(X)$ للفضاء X المكوّن من المبسطتين الصفريتين المختلفتين P و P' . (ملاحظة: القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين ليست جزءاً من الفضاء).
5. صف $C_i(X)$ ، و $Z_i(X)$ ، و $B_i(X)$ ، و $H_i(X)$ للفضاء X المكوّن من المبسطة الأحادية P_1P_2 .
6. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:
 أ. كل حدود تكون دورة.
 ب. كل دورة تكون حدوداً.
 ج. $C_n(X)$ زمرة إبدالية حرّة دائماً.
 د. $B_n(X)$ زمرة إبدالية حرّة دائماً.
 هـ. $Z_n(X)$ زمرة إبدالية حرّة دائماً.
 و. $H_n(x)$ إبدالية دائماً.
 ز. المبسط الثنائي هو حدود المبسط الثلاثي.
 ح. السلسلة الأحادية هي حدود المبسط الثنائي.
 ط. السلسلة الثنائية هي حدود الدورة الثلاثية.
 ي. إذا كان $Z_n(X) = B_n(X)$ ، فإن $H_n(X)$ هي الزمرة التافهة بعنصر واحد.

المزيد من التمارين

7. عرّف المصطلحات الآتية لتعمم بصورة طبيعية تعريفات الكتاب المعطاة للأبعاد 0، 1، 2، و 3.
 أ. المبسط ذو الرتبة n الموجه.
 ب. حدود المبسط ذي الرتبة n الموجه.
 ج. وجه في مبسط ذي الرتبة n موجه.
8. بالاستمرار في فكرة التمرين 7، ما الطريقة السهلة التي يمكن بها الإجابة عن سؤال عن تعريف

9. $C_n(X)$ ، $\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$ ، $Z_n(X)$ و $B_n(X)$ لمركب المبسطات X ، الذي ربما حوى بعض المبسطات ذات بعد أكبر من 3؟

9. باتباع الأفكار في التمرينين 7 و 8، برهن على أن $\partial^2 = 0$ بوجه عام، أي إن $\partial_{n-1}(\partial_n(c)) = 0$ لكل $c \in C_n(X)$ ، حيث يمكن أن تكون n أكبر من 3.

10. ليكن X مركب مبسطات. لمبسط σ ذي رتبة n (موجه) $\perp X$ ، الحدود المقابلة $(\perp^n)$ (coboundary) هي السلسلة ذات الرتبة $(n+1)$ ، $\sum \tau$ ، بحيث إن الجمع مأخوذ على المبسطات τ كلها ذوات الرتبة $(n+1)$ ، التي يكون σ وجهًا لها. بمعنى أنها المبسطات τ التي تظهر في المجموع، وهي بالضبط تلك التي تكون σ أحد مجاميع $\partial_{n+1}(\tau)$ الاتجاه مهم هنا. إذن، P_2 وجه $\perp P_1 P_2$ ، ولكن P_1 ليس كذلك. على أي حال، P_1 وجه $\perp P_2 P_1$. ليكن X مركب مبسطات يتكوّن من الجسم رباعي السطوح في الشكل 2.41.

أ. احسب $\delta^{(0)}(P_1)$ و $\delta^{(0)}(P_4)$.

ب. احسب $\delta^{(1)}(P_3 P_2)$.

ج. احسب $\delta^{(2)}(P_3 P_2 P_4)$.

11. باتباع فكرة التمرين 10، ليكن X مركب مبسطات، ولتكن الزمرة $C^{(n)}(X)$ المكوّنة من السلاسل ذات الرتبة n المقابلة (n - cochains) مثل الزمرة $C_n(X)$.

أ. عرّف $C^{(n+1)}(X) \rightarrow C^{(n)}(X) : \delta^{(n)}$ بطريقة موازية لتلك التي عرّفنا بها

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$$

ب. أثبت أن $\delta^2 = 0$ ، أي إن $\delta^{(n+1)}(\delta^{(n)}(c)) = 0$ لكل $c \in C^{(n)}(X)$.

12. باتباع الأفكار في التمرينين 10 و 11، عرّف الزمرة $Z^{(n)}(X)$ المكوّنة من الدورات ذات الرتبة n المقابلة $\perp X$ ،

الزمرة $B^{(n)}(X)$ المكوّنة من الحدود ذات الرتبة n المقابلة $\perp X$ ، وأثبت أن: $B^{(n)}(X) \leq Z^{(n)}(X)$.

13. باتباع الأفكار في التمارين 10، 11، و 12، عرّف الزمرة الشباهية المقابلة ذات البعد n ، $H^{(n)}(X) \perp X$ احسب $H^{(n)}(S)$ لسطح رباعي السطوح S في الشكل 2.41.

حساب الزمر الشباهية Computations of Homology Groups

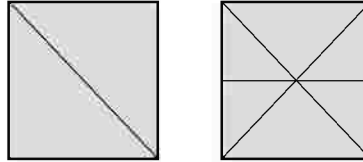
الفصل 42

المثالية

افترض أنك تود حساب الزمر الشباهية لسطح كرة، فأول ما يحتمل أن تقوله – إذا كنت منتبهًا – إن سطح الكرة ليس مركب مبسطات؛ لأن هذا السطح منحني والمثلث سطح مستو، تذكر أن الفضاءين يكونان متماثلين طبولوجيًا إذا أمكن الحصول على أحدهما من الآخر بالثني، بالفتل وهكذا، تخيل أن للمبسط الثلاثي، رباعي السطوح، سطحًا مطاطيًا، وأنه مملوء بالهواء، فإذا كان السطح المطاطي مرناً، مثل مطاط البالون، فسيحول نفسه فوراً إلى كرة، وستظهر الوجوه الأربعة لرباعي السطوح "كمثلثات" رسمت على سطح الكرة، وهذا يوضح ما نعنيه بمثالية الفضاء، فمصطلح المثالية لا يشير بالضرورة إلى التقسيم لمبسطات ثنائية فقط، بل أيضاً يستخدم في التقسيم إلى مبسطات من الرتبة n لأي $n \geq 0$ ، فإذا قُسم الفضاء إلى أجزاء، بحيث إنه بالقرب من كل نقطة يمكن للفضاء أن يشوه، ليبدو مثل جزء من الفضاء الإقليدي n ، والأجزاء التي قُسم إليها الفضاء تظهر بعد هذا التشوه بوصفها جزءاً من مركب مبسطات، فإن التقسيم الأصلي للفضاء هو مثالية للفضاء (triangulation of the space). تعرّف الزمر الشباهية للفضاء رسمياً تماماً، كما في الفصل السابق.

الخصائص الثابتة

هناك اثنتان من الخصائص الثابتة المهمة جداً للزمر الشباهية، تحتاج براهينها إلى آليات كثيرة جداً، ولكن من السهل علينا شرحها بصورة تقريبية. أولاً، تعرّف الزمر الشباهية لفضاء بدلالة المثالية، ولكن في الحقيقة هي زمر متساوية (أي متماثلة) بغض النظر كيف تمت مثالية الفضاء، على سبيل المثال: يمكن مثالية المنطقة المربعة بطرق عدة، تعرض اثنتان منها في الشكل 1.42. الزمر الشباهية هي نفسها بغض النظر عن أي مثالية استخدمت في حسابها. هذا ليس واضحاً!



الشكل 1.42

للصفة الثابتة الثانية، إذا كان فضاء مثالية يماثل باستمرار فضاء آخر (على سبيل المثال، يمكن أن يحول للآخر من غير تمزيق أو قطع)، فإن زمري الشباه للفضاءين متساويتان (أي متماثلتين) لكل بعد n ، هذا ليس واضحاً مرة أخرى، سنستخدم هاتين الحقيقتين من غير برهان.

الزمر الشباهية لسطح كرة تساوي تلك التي تخص سطحاً رباعي السطوح في المثال 12.41؛ لأن كلاً من الفضاءين متماثلان استمرارياً.

2.42 مثال

الكرات والخلايا نوعان مهمان من الفضاءات في الطوبولوجيا، لنقدّمهما ونقدم الرموز المعتادة، فالكرة ذات البعد n (n - sphere) S^n ، هي مجموعة النقاط كلها على بعد وحدة واحدة من نقطة الأصل في الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^{n+1}$ ذي البعد $(n+1)$ ، إذن، الكرة الثنائية S^2 هي ما يدعى عادة سطح الكرة في $\mathbb{R}^3$ ، S^1 هي حدود دائرة، و S^0 هي نقطتان، وبالطبع، اختيار 1 للبعد عن نقطة الأصل ليس مهماً، الكرة الثنائية ذات نصف القطر 10 تماثل استمرارياً تلك ذات نصف القطر 1، وتماثل استمرارياً سطح مجسم القطع الناقص للسبب نفسه، أمّا الخلية ذات البعد n (n - cell or n - ball) E^n وهي مجموعة النقاط كلها في $\mathbb{R}^n$ على بعد 1 عن نقطة الأصل؛ إذن، E^3 هي ما ننظر إليه عادة بوصفها كرة مصمتة، E^2 منطقة دائرية، و E^1 قطعة مستقيمة. الملاحظات في الأعلى والحسابات في المثال 2.41 تثبت أن كلتا $H_0(S^2)$ و $H_2(S^2)$ تماثل $\mathbb{Z}$ ، و $H_1(S^2) = 0$.

3.42 مثال

الفضاءات المتصلة والمتقلصة

هناك تفسير لطيف جداً لـ $H_0(X)$ لفضاء مثالته X . يكون الفضاء متصلاً إذا أمكن ربط أيّ نقطتين بطريق (مفهوم لن نعرّفه) يقع تماماً في الفضاء، فإذا كان الفضاء غير متصل، فيمكن تقسيمه إلى أجزاء، كل منها متصل، ولكن لا يمكن ربط أيّ اثنين منها بطريق في الفضاء، حيث تسمى هذه الأجزاء مركبات متصلة (connected components of the space).

4.42 مبرهنة

إذا كان الفضاء X مثالثياً إلى عدد منته من المبسطات، فإن $H_0(X)$ يماثل $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$ ، ورقم بيتي (Betti number) m لعدد العوامل $\mathbb{Z}$ هو عدد المركبات في X . الآن، $C_0(X)$ زمرة إبدالية حرّة مولدة بعدد منته من الرؤوس P_i في مثالته X ، وكذلك $B_0(X)$ مولدة بتعابير على صورة:

البرهان

$$P_{i2} - P_{i1},$$

حيث $P_{i1}P_{i2}$ حافة في المثالته.

نثبت P_{i1} . أي رأس P_{ir} في المركبة نفسها المتصلة في X لـ P_{i1} يمكن ربطها مع P_{i1} بسلسلة منتهية.

$$P_{i1}P_{i2}, P_{i2}P_{i3}, \dots, P_{i_{r-1}}P_{ir}$$

من الحواف؛ إذن:

$$P_{ir} = P_{i1} + (P_{i2} - P_{i1}) + (P_{i3} - P_{i2}) + \dots + (P_{ir} - P_{i_{r-1}}),$$

مثبتاً أن $P_{ir} \in [P_{i1} + B_0(X)]$. من الواضح أنه إذا كانت P_{is} ليست في المركبة نفسها المتصلة مع P_{i1} ، فإن $P_{is} \notin [P_{i1} + B_0(X)]$ ؛ لأنه لا توجد حافة تصل المركبتين. وهكذا، إذا اخترنا رأساً واحداً من كل مركبة متصلة، فإن كل مجموعة مشاركة لـ $H_0(X)$ تحوي بالضبط ممثلاً واحداً، الذي يكون مضاعفاً صحيحاً لأحد الرؤوس المختارة. تم إثبات المبرهنة. ♦

5.42 مثال

لدينا مباشرة

$$H_0(S^n) \simeq \mathbb{Z}$$

حيث $n > 0$: لأن S^n متصلة عندما $n > 0$ ، وعلى أي حال:

$$H_0(S^0) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

(انظر الفصل 41، تمرين 4). وكذلك

$$H_0(E^n) \simeq \mathbb{Z}$$

حيث $n \geq 1$.



يكون الفضاء متقلصًا (Contractible) إذا أمكن ضغطه إلى نقطة من غير تمزيق أو قطع، ولكن تبقى دائماً في الحيز الذي تشغله بالأصل. سنذكر فقط نصّ المبرهنة الآتية:

6.42 مبرهنة

7.42 مثال

إذا كان X فضاء متقلصًا ومثالثًا إلى عدد منتهٍ من المبسطات، فإن $H_n(X) = 0$ لكل $n \geq 1$. من الحقائق المعروفة أن S^2 ليست متقلصة، وليس من السهل إثبات هذه الحقيقة، على أي حال، ربما ينوي الطالب أن يأخذها بوصفها حقيقة واضحة، أنه لا يمكن ضغط "سطح الكرة" لتصبح نقطة دون تمزيقها، مبقياً إياها دائماً في الفضاء الأصلي S^2 الذي تشغله، إذ إنه ليس من العدل ضغطها جميعها إلى "مركز الكرة". لقد رأينا أن $H_2(S^2) \neq 0$ ولكنها تماثل $\mathbb{Z}$.

افترض - على أي حال - أننا أخذنا $H_2(E^3)$ ، حيث يمكننا أن نعدّ E^3 مجسماً رباعي السطوح في الشكل 2.41؛ لأنه تماثل استمرارياً مع E^3 . السطح S لرباعي السطوح هذا تماثل استمرارياً مع S^2 ، والمبسطات هنا لـ E^3 هي نفسها لـ S (أو S^2)، التي اختبرناها في المثالين 8.41 و 12.41، ما عدا المبسط الثلاثي S الذي ظهر الآن. تذكر أن مولد $Z_2(S)$ ، وعليه، $Z_2(E^3)$ كان بالضبط حدود S جميعها بالنظر إليها في E^3 ، إنها $\partial_3(\sigma)$ ، عنصر في $B_2(E^3)$ ، وهكذا، فإن:

$$H_2(E^3) = 0 \text{ و } Z_2(E^3) = B_2(E^3)$$


لأنه من الواضح أن E^3 متقلص، فإن هذا متوافق مع المبرهنة 6.42.

بوجه عام، E^n متقلص لكل $n \geq 1$ ، وهكذا وباستخدام المبرهنة 6.42:

$$H_i(E^n) = 0$$

لكل $i > 0$.

مزید من الحسابات

رأينا تفسيراً جميلاً لـ $H_0(X)$ في المبرهنة 4.42، وكما وضّحت الأمثلة السابقة، فإنّ الدورة الأحادية في فضاء مثالي تتولد بمنحنيات مغلقة في الفضاء المشكل من الحواف في المثالته، ويمكن التفكير في الدورات الثنائية على أنها مولدة من الكرات الثنائية، أو أيّ سطوح ثنائية البعد مغلقة في الفضاء. تشكيل زمرة العامل:

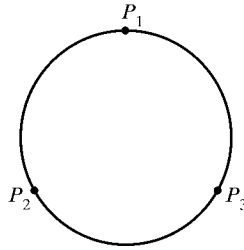
$$H_1(X) = Z_1(X) / B_1(X)$$

تقريباً يؤدي إلى عدّ المنحنيات المغلقة التي تظهر في الفضاء، ولم تكن هناك ببساطة؛ لأنها تظهر بوصفها حدوداً لقطعة ثنائية البعد (أي مجموعة المبسطات الثنائية كلها) في الفضاء، وبالمثل، تشكيل $H_2(X) = Z_2(X) / B_2(X)$ يؤدي تقريباً لعدّ السطوح ثنائية البعد المغلقة في الفضاء، التي لا يمكنها أن "تملاً في الجسم" ضمن الفضاء، بمعنى أنها ليست حدوداً لمجموعة بعض المبسطات الثلاثية؛ إذن، لـ $H_1(S^2)$ ، كل منحنى مغلق مرسوم على سطح كرة ثنائية يحدّ قطعة ثنائية البعد في الكرة، وإذن، $H_1(S^2) = 0$ ، وعلى أي حال، السطح ثنائي البعد المغلق المحتمل الوحيد، S^2 ، نفسها، لا يمكن أن "تملاً الجسم" ضمن كامل الفضاء S^2 نفسه، وهكذا، فإنّ $H_2(S^2)$ إبدالية حرّة بمولد واحد.

8.42 مثال

تبعاً للمناقشة في الأعلى، يمكن أن يتوقع المرء أنّ $H_1(S^1)$ إبدالية حرّة بمولد واحد، أي تماثل $\mathbb{Z}$ ؛ لأنّ الدائرة نفسها ليست حدّاً لجزء ثنائي البعد من S^1 ، حيث ترى أنه لا يوجد جزء ثنائي البعد في S^1 . سنحسب، ونرى ما إذا كان هذا صحيحاً حقاً.

مثالته S^1 معطاة في الشكل 9.42. الآن $C_1(S^1)$ مولد بـ P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1 ، فإذا كانت السلسلة الأحادية دورة، فإنّ حدودها صفر، وهكذا، فيجب أن تحوي P_1P_2 .



الشكل 9.42

و P_2P_3 العدد نفسه من المرات، وإلا فإن حدودها ستحتوي مضاعفاً غير صفري لـ P_2 . مناقشة مشابهة تتحقق لأي حافتين؛ إذن، $Z_1(S^1)$ تولد بـ $P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$ ، ولأن $B_1(S^1) = \partial_2[C_2(S^1)] = 0$ ، فلا توجد مبسطات ثنائية، ونرى أن $H_1(S^1)$ إبدالية حرة بمولد واحد. أي إن:

$$\blacktriangle H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

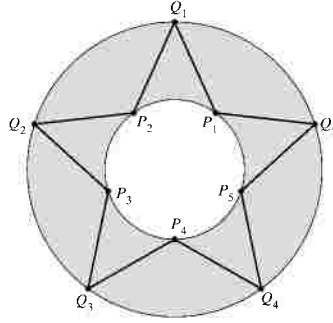
يمكن برهان أنه لـ $n > 0$ ، $H_n(S^n)$ و $H_0(S^n)$ تماثل $\mathbb{Z}$ ، بينما $H_i(S^n) = 0$ لـ $0 < i < n$.

للتوافق مع مصطلحات الطوبولوجيا، سنسمي العنصر في $H_n(X)$ الذي هو - مجموعة مشاركة لـ $B_n(X)$ في $Z_n(X)$ "فصلاً شباهياً" (homology class). والدورات في الفصل الشباهي نفسه شباهيات (homologous).

لنحسب الزمر الشباهية لمنطقة طوقية مستوية X بين دائرتين لهما المركز نفسه. تظهر المثالفة في الشكل 11.42، وبالطبع؛ لأن X متصلة، فإننا نستنتج أن:

10.42 مثال

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$



الشكل 11.42

إذا كانت z أي دورة أحادية، وإذا كان r معامل P_1P_2 في z ، فإن $z - r\partial_2(P_1P_2Q_1)$ دورة من غير P_1P_2 شباهي لـ z ، وبلا استمرار في هذه المناقشة، نرى أنه توجد دورة أحادية شباهية لـ z ولا تحوي حواف على الدائرة الداخلية للطوق، وباستخدام المثلثات "الخارجية"، نستطيع أن نضبط أكثر بمضاعفات $\partial_2(Q_iP_iQ_j)$ ، ونصل إلى z' التي لا تحوي حواف Q_iP_i . ولكن إذا كانت Q_5P_1 تظهر في z' بمعامل لا يساوي صفراً، فإن P_1 ستظهر بمعامل لا يساوي صفراً في $\partial_1(z')$ ، مناقضاً حقيقة أن z' دورة، وبالمثل، فلا حافة Q_iP_{i+1} يمكن أن تظهر حيث $i=1,2,3,4$ ، إذن، z شباهي لدورة مكوّنة من حواف فقط في الدائرة الخارجية، وبمناقشة مألوفة، مثل هذه الدورة يجب أن تكون على الصورة:

$$n(Q_1Q_2 + Q_2Q_3 + Q_3Q_4 + Q_4Q_5 + Q_5Q_1)$$

وعندئذٍ، فمن الواضح أن $H_1(X) \simeq \mathbb{Z}$

أظهرنا أننا نستطيع "دفع" أي دورة أحادية إلى الدائرة الخارجية، وبالمثل، كان بإمكاننا أن ندفعها إلى الدائرة الداخلية على حد المساواة.

لـ $H_2(X)$ ، لاحظ أن $Z_2(X) = 0$ ؛ لأن كل مبسط ثنائي يحوي في حدوده حافة في كلتا الدائرتين الداخلية والخارجية للطوق، التي لا تظهر في أي مبسط ثنائي، وحدود أي سلسلة ثنائية غير صفرية يجب أن تحوي بعض المضاعفات غير الصفرية لهذه الحواف.



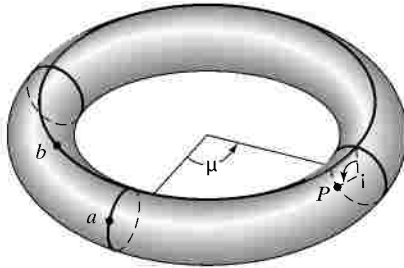
$$H_2(X) = 0 \quad \text{إذن}$$

12.42 مثال

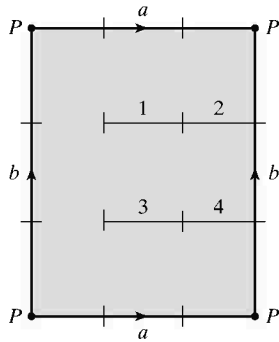
سنحسب الزمر الشباهية لسطح طارة X ، التي تبدو مثل سطح الكعكة المحلاة، كما في الشكل 13.42، ولتخيل المثالثة في الطارة، تصوّر أنك قطعتها عند الدائرة المعلمة a ، ثم اقطع كامل الدائرة المعلمة b ، ثم مهّدها كما في الشكل 14.42، وبعد ذلك ارسم المثلاث، ولاستعادة الطارة من الشكل 14.42، صل الحافة اليسرى b مع الحافة اليمنى b ، بحيث تسير الأسهم في الاتجاه نفسه، هذا يعطي أسطوانة مع الدائرة a عند كل نهاية، ثم اطوِ الأسطوانة، وصل الدائرتين a ، ومرة ثانية محافظاً على سير الأسهم في الاتجاه نفسه حول الدائرتين.

لأن الطارة متصلة، فإن $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$

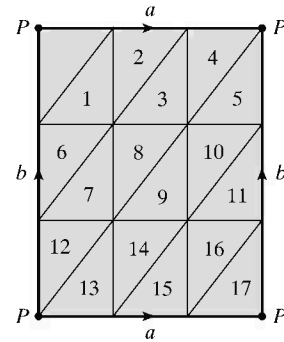
في $H_1(X)$ ، لتكن z دورة أحادية، فبتغيير z بمضاعف حدود المثلث رقم 1 في الشكل 14.42، نستطيع أن نحصل على دورة شباهية لا تحوي الجانب / من المثلث 1، ثم بتغيير الدورة الأحادية الجديدة بمضاعف مناسب لحدود المثلث 2، يمكنك أيضاً أن تزيل الجانب 1 من 2، وبالأستمرار يمكننا عندها



الشكل 13.42



الشكل 15.42



الشكل 14.42

إزالة / من 3، 4، / من 5، - من 6، / من 7، 8، 9، 10، / من 11، - من 12، / من 13، 14، / من 15، 16، و / من 17. الدورة الناتجة - شباهية لـ z - يمكنها فقط أن تحوي الحواف الظاهرة في الشكل 15.42، ولكن لا يمكن لمثل هذه الدورة أن تحوي - بمعامل لا يساوي صفرًا - أيًا من الحواف التي رَقَمناها في الشكل 15.42، أولن يكون لها حدود 0؛ إذن، z شباهية لدورة أحادية لها حواف فقط على الدائرة a أو الدائرة b (ارجع إلى الشكل 13.42).

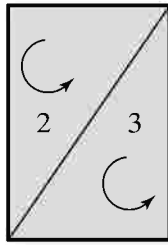
من المأمول بمناقشة مشابهة، أن كل حافة على الدائرة a يجب أن تظهر عددًا متساويًا من المرات، وكذلك الحال صحيح بالنسبة إلى الحواف على الدائرة b ؛ وعلى أي حال، الحافة على الدائرة b ليس من الضروري إظهارها عددًا مساويًا من المرات لتلك الحواف التي تظهر على a . إضافة إلى ذلك، إذا كان لسلسلة ثنائية فقط حدود تحتوي a و b ، فإن المثلثات كلها الموجهة عكس عقارب الساعة يجب أن تظهر بالمعاملات نفسها، بحيث تشطب الحواف الداخلية، وحيث إن حدود مثل هذه السلسلة الثنائية تساوي 0؛ إذن، كل فصل شباهي (مجموعة مشاركة) يحوي فقط عنصرًا واحدًا.

$$ra + sb,$$

حيث r و s أعداد صحيحة؛ إذن، $H_1(X)$ إبدالية حرة بمولدين ممثلين بالدائرتين a و b ؛ ولذلك:

$$H_1(X) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

أخيرًا، $H_2(X)$ ، يجب أن تحوي الدورة الثنائية المثلث 2 في الشكل 14.42، في اتجاه معاكس لعقارب الساعة، وبالعقد نفسه من المرات التي تحوي فيها المثلث 3 - كذلك في اتجاه عكس عقارب الساعة - لكي لا تكون الحافة المشتركة / لهذين المثلثين حدودًا، فهذه الاتجاهات موضحة في الشكل 16.42، ويتحقق مثل هذا لأيي مثلثين متجاورين، وكذلك أي مثلث في اتجاه عكس عقارب الساعة يجب أن يظهر بالعقد نفسه من المرات في دورة ثنائية، ومن الواضح أن أي مضاعف للجمع الشكلي للمبسطات الثنائية كلها - في اتجاه عكس عقارب الساعة - يكون دورة ثنائية؛ إذن، $Z_2(X)$ دورية غير منتهية، مماثلة لـ $\mathbb{Z}$. وكذلك $B_2(X) = 0$ ، ولا توجد هناك مبسطات ثلاثية، وهكذا $H_2(X) \simeq \mathbb{Z}$



الشكل 16.42

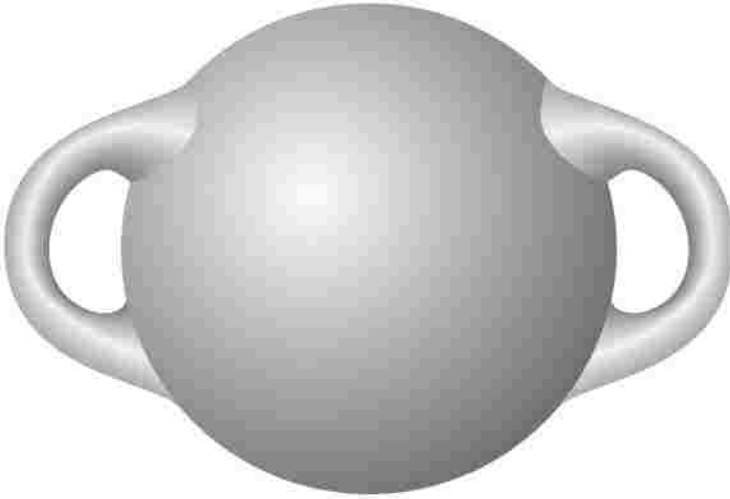
■ تمارين 42

في هذه التمارين، لا تحتاج إلى كتابة تفاصيل حساباتك ومناقشاتك.

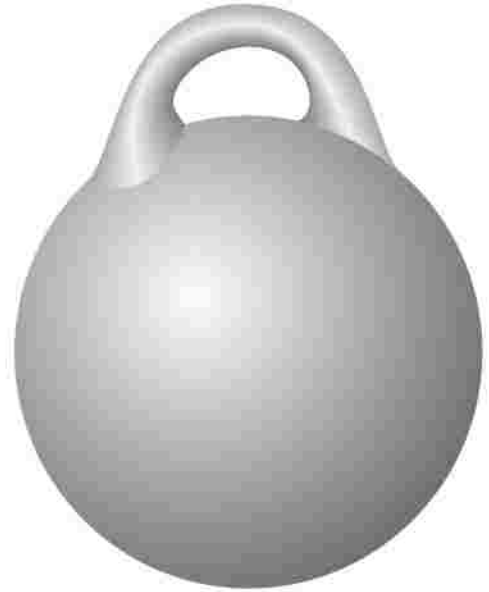
حسابات

1. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرتين أحاديتين متماسّتين، أي الشكل الثامن.
2. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرتين ثنائيتين متماسّتين.
3. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرة ثنائية مع حلقة طوقية (كما في الشكل 11.42) التي لا تمسّ الكرة الثنائية.
4. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرة ثنائية مع حلقة طوقية دائرتها الداخلية هي الدائرة العظمى للكرة الثنائية.
5. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من دائرة تلامس كرة ثنائية بنقطة واحدة.
6. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرة ثنائية ذات مقبض (انظر الشكل 17.42).
7. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:
 أ. مركبات المبسطات المتماثلة استمرارياً لها زمر شباهية متماثلة.
 ب. إذا كان لمركبي مبسطتين زمر شباهية متماثلة، فإنّ الفضاءين متماثلان استمرارياً.
 ج. S^n تماثل E^n استمرارياً.
 د. $H_n(X)$ تافهة لـ $n > 0$ ، إذا كان X فضاءً متصلًا مع مثالثة منتهية.
 هـ. $H_n(X)$ تافهة لـ $n > 0$ ، إذا كان X فضاءً متقلصًا مع مثالثة منتهية.
 و. $H_n(S^n) = 0$ لـ $n > 0$.
 ز. $H_n(E^n) = 0$ لـ $n > 0$.
 ح. الطارة تماثل S^2 استمرارياً.
 ط. الطارة تماثل E^2 استمرارياً.
 ي. الطارة تماثل استمرارياً كرة عليها مقبض (انظر الشكل 17.42).

8. احسب الزمر الشباهية لفضاء مكوّن من سطحي طارتين بلا نقاط مشتركة.



الشكل 18.42



الشكل 17.42

9. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من سطحي طورتين مكدّستين، مكدّسة كما قد يُكدّس أنبوبان داخليان.

10. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من طارة مماسّة لكرة ثنائية عند نقاط الدائرة العظمى جميعها للكرة الثنائية، أي بالون يرتدي أنبوباً داخلياً.

11. احسب الزمر الشباهية للسطح المكوّن من كرة ثنائية بمقبضين (انظر الشكل 18.42).

12. احسب الزمر الشباهية للسطح المكوّن من كرة ثنائية مع n من المقابض (تعميم للتمرينين 6 و 11).

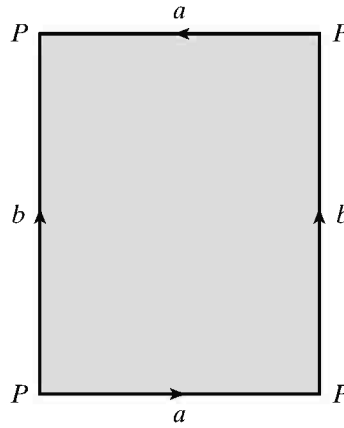
المزيد من الحسابات والتطبيقات على علم الشباه More Homology Computations and Applications

السطوح أحادية الجانب

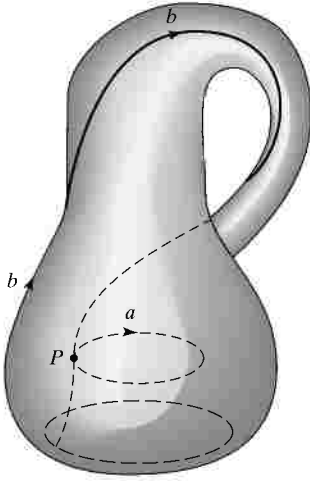
الزمر الشباهية التي أوجدناها حتى الآن كلها كانت إبدالية حرّة، بحيث لم تكن هناك عناصر غير صفريّة ذات رتب منتهية، ويمكن برهان أنّها الحالة دائماً للزمر الشباهية لسطوح مغلقة (أي سطح مثل S^2 ، التي لا حدود لها)، التي يكون لها جانبان، ومثالنا الآتي سيكون لسطح مغلق أحادي الجانب، قارورة كلاين (*Klein bottle*)، وسيكون لزمرة الشباه ذات البعد 1 زمرة جزئية ملتوية غير تافهة تعكس الفتل في السطح.

لنحسب زمر الشباه لقارورة كلاين X ، حيث يصور الشكل 2.43 قارورة كلاين مقطعة إلى أجزاء، تماماً كما صوّر الشكل 13.42 الطارة مقطعة إلى أجزاء، والفرق الوحيد أنّ الأسهم في أعلى وأسفل الحافة a للمستطيل في اتجاهات متعاكسة هذه المرة، ولاستعادة قارورة كلاين من الشكل 2.43 مرة أخرى، اثن المستطيل الواصل بين الحافتين المعلمتين بـ b ، بحيث تتطابق اتجاهات الأسهم، ما يعطي أسطوانة تظهر مشوّهة بدفع الجزء الأسفل منها قليلاً لأعلى داخل الأسطوانة، كما في الشكل 3.43، فمثل هذا التشوّه مشروع في الطوبولوجيا، ويجب - الآن - وصل الدائرتين a بحيث تدور الأسهم في الاتجاه نفسه. لا يمكن فعل هذا في $\mathbb{R}^3$. يجب أن تتخيل أنك في $\mathbb{R}^4$ ، بحيث يمكنك ثني عنق القارورة من حول و"خلال" الجانب من غير التقاطع مع الجانب، كما هو ظاهر في الشكل 4.43، ومع القليل من التفكير، بإمكانك أن ترى أنّ السطح الناتج له في الحقيقة جانب واحد، بمعنى أنك لو بدأت من أيّ مكان، ثم أصبحت تطلي "جانباً واحداً" فستنتهي بطلاء كل شيء. لا يوجد مفهوم الداخل في قارورة كلاين.

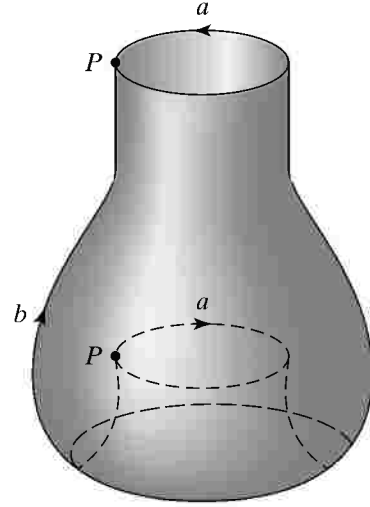
1.43 مثال



الشكل 2.43



الشكل 4.43



الشكل 3.43

نستطيع حساب الزمر الشباهية لقارورة كلاين تمامًا كما حسبنا الزمر الشباهية للطارة في المثال 12.42، بتقسيم الشكل 2.43 إلى مثلثات بالضبط كما فعلنا بالطارة. بالطبع،

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$

لأن X متصلة. وكما أوجدنا للطارة، إذا قمنا بمثلثة قارورة كلاين بتقسيم الشكل 2.43 إلى مثلثات، تكون كل دورة أحادية شباهية لدورة على الصورة:

$$ra + sb$$

حيث r و s أعداد صحيحة، فإذا كانت لسلسلة ثنائية حدود تحوي a و b فقط، فمرة أخرى، المثلثات كلها الموجهة عكس عقارب الساعة يجب أن تظهر بالمعاملات نفسها، بحيث إن الحواف الداخلية ستلغي بعضها، وقد كانت حدود مثل هذه السلسلة الثنائية في حالة الطارة تساوي 0، ولكنها هنا $k(2a)$ ، حيث k عدد مرات ظهور كل مثلث؛ إذن، $H_1(X)$ زمرة إبدالية مولدة بالفصلين الشباهيين a و b والعلاقتين $a + b = b + a$ و $2a = 0$ ؛ لذلك:

$$H_1(X) \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$$

زمرة مع معامل ملتو 2 وعدد بيتي 1. مناقشتنا السابقة بخصوص السلاسل الثنائية تبرهن على عدم وجود دورات ثنائية هذه المرة، وهكذا، فإنّ

$$H_2(X) = 0$$

ليس بالضرورة ظهور المعامل الملتوي في بعض الزمر الشباهية لسطح أحادي الجانب ذي حدود. ولإكمال الموضوع، سنعطي هذا المثال التقليدي لشريط موبايوس (*Möbius strip*).

5.43 مثال

ليكن X شريط موبايوس، الذي يمكن تكوينه بأخذ مستطيل ورقي وربط النهايتين المعلمتين بـ a بنصف ثنية، بحيث تنطبق الأسهم كما هو موضح بالشكل 6.43. لاحظ أن شريط موبايوس سطح له حدود، وأن حدوده مجرد منحنى مغلق (متماثل استمراريًا مع الدائرة) مكون من l و l' ، من الواضح أن شريط موبايوس - تمامًا مثل قارورة كلاين - له فقط وجه واحد، بمعنى أنه لو طلب منك تلوين وجه واحد فقط منه، فستنتهي بتلوين كامل السطح، بالتأكيد؛ لأن X متصلة

$$H_0(X) \simeq \mathbb{Z}$$

لتكن z أي دورة أحادية، وبالطرح بصورة متتالية لمضاعفات مناسبة للمثلثات 2، و 3، و 4 في الشكل 6.43، يمكننا حذف حواف من المثلث 2، من المثلث 3، و من المثلث 4؛ إذن، z شباهية. لدورة z' التي تكون حوافها فقط على l و l' و a ، وكما في السابق يجب أن يظهر كلا الحدين على l' العدد نفسه من المرات؛ ولكن، إذا كانت c سلسلة ثنائية مكونة من الجمع الشكلي للمثلثات الموجهة كما هو ظاهر في الشكل 6.43، فإننا نرى أن $\partial_2(c)$ تتألف من الحواف على l و l' إضافة إلى a ، ولأن كلتا الحافتين على l' ، فيجب أن تظهر في z' بالعدد نفسه من المرات، وبطرح مضاعف مناسب لـ $\partial_2(c)$ نرى أن z شباهية لدورة حوافها تقع فقط على l و a ، وبمناقشة شبيهة، فإن هذه الحواف كلها الموجهة بصورة ملائمة، يجب أن تظهر بعدد المرات نفسه في هذه الدورة الجديدة، وهكذا، فإن الفصل الشباهي الذي يحوي الجمع الشكلي لها يولد $H_1(X)$ ؛ إذن:

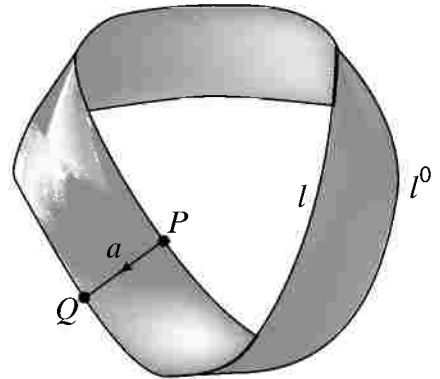
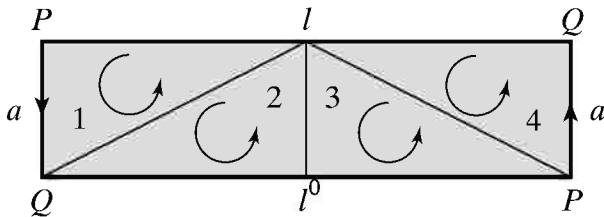
$$H_1(X) \simeq \mathbb{Z}$$

تبدأ هذه الدورة المولدة عند Q ، وتذهب حول الشريط، ثم تقطعه عند P من خلال a ، ثم تصل إلى نقطة بدايتها.

فإذا كانت z'' دورة ثنائية، فيجب أن تحوي المثلثات 1، و 2، و 3، و 4 في الشكل 6.43 بعدد متساوٍ من المرات وفي الاتجاه المعين؛ ولكن، عندها تصبح $\partial_2(z'')$ تساوي $0 \neq r(2a + l + l')$ ، إذن، $Z_2(X) = 0$.



$$H_2(X) = 0$$



الشكل 6.43

مميز أويلر

لنتحول من حساب الزمر الشباهية إلى القليل من الحقائق والتطبيقات الممتعة. ليكن X مركب مبسطات منتهياً (أو فضاءً مثالياً) مكوناً من مبسطات ثلاثية البعد أو أقل. ليكن n_0 العدد الكلي للرؤوس في المثالية، و n_1 عدد الحواف، و n_2 عدد المبسطات الثنائية، و n_3 عدد المبسطات الثلاثية، فيمكن إظهار العدد

$$n_0 - n_1 + n_2 - n_3 = \sum_{i=0}^3 (-1)^i n_i$$

بصورة متساوية بغض النظر عن طريقة مثاللة الفضاء X ، حيث يسمى هذا العدد مميز أويلر (Euler characteristic) $\chi(X)$ للفضاء. سننص فقط على المبرهنة المدهشة الآتية:

ليكن X مركب مبسطات منتهياً (أو فضاءً مثالياً) بعده ≥ 3 . وليكن $\chi(X)$ مميز أويلر للفضاء X ، وليكن β_j عدداً بيتياً لـ $H_j(X)$ ، فإن:

7.43 مبرهنة

$$\chi(X) = \sum_{j=0}^3 (-1)^j \beta_j$$

تتحقق هذه المبرهنة كذلك لفضاء X بعده أكبر من 3، بتعميم واضح لتعريف مميز أويلر لبعد أكبر من 3.

افترض أن المجسم رباعي السطوح E^3 في الشكل 2.41، هنا $n_0 = 4$ ، $n_1 = 6$ ، $n_2 = 4$ ، و $n_3 = 1$ ، وهكذا فإن:

8.43 مثال

$$\chi(E^3) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$$

تذكر أننا رأينا أن $H_1(E^3) = H_2(E^3) = H_3(E^3) = 0$ و $H_0(E^3) \cong \mathbb{Z}$.

إذن، $\beta_3 = \beta_2 = \beta_1 = 0$ و $\beta_0 = 1$ ، وهكذا

$$\sum_{j=0}^3 (-1)^j \beta_j = 1 = \chi(E^3)$$

للسطح S^2 في رباعي السطوح في الشكل 2.41، لدينا $n_0 = 4$ ، $n_1 = 6$ ، $n_2 = 4$ ، و $n_3 = 0$ ، وإذن:

$$\chi(S^2) = 4 - 6 + 4 = 2$$

وكذلك، $H_1(S^2) = H_3(S^2) = 0$ ، وكلا $H_2(S^2)$ و $H_0(S^2)$ يماثل $\mathbb{Z}$ ؛ إذن، $\beta_3 = \beta_1 = 0$ ، و $\beta_2 = \beta_0 = 1$ ، وهكذا

$$\sum_{j=0}^3 (-1)^j \beta_j = 2 = \chi(S^2)$$

أخيرًا، لـ S^1 في الشكل 9.42، $n_0 = 3$ ، $n_1 = 3$ ، و $n_2 = n_3 = 0$ ، وإذن:

$$\chi(S^1) = 3 - 3 = 0$$

هنا، كلا $H_1(S^1)$ و $H_0(S^1)$ يماثل $\mathbb{Z}$ ، و $H_2(S^1) = H_3(S^1) = 0$ ، إذن، $\beta_0 = \beta_1 = 1$ ،

و $\beta_2 = \beta_3 = 0$ ، ما يعطي:

$$\sum_{j=0}^3 (-1)^j \beta_j = 0 = \chi(S^1)$$

▲

دوال الفضاءات

تصنع الدالة المتصلة f التي تربط الفضاء X بالفضاء Y تشاكلًا f_{*n} تربط $H_n(X)$ مع $H_n(Y)$ لـ $n \geq 0$ ، حيث يحتاج برهان وجود هذا التشاكل إلى آليات أكثر مما نود تطويره هنا، ولكن لنحاول وصف كيفية حساب هذه التشاكلات لبعض الحالات الخاصة، إذ يمثل الآتي حقيقة:

إذا كانت $z \in Z_n(X)$ ، وإذا كانت $f(z)$ - مفترضة بوصفها نتيجة لاختيار z ، ووضعها في Y بصورة واضحة - يتعين أن تكون دورة من الرتبة n في Y ، فإن

$$f_{*n}(z + B_n(X)) = f(z) + B_n(Y)$$

بمعنى أنه إذا كانت z تمثل فصلًا شباهيًا في $H_n(X)$ ، و $f(z)$ دورة ذات رتبة n في Y ، فإن $f(z)$ تمثل صورة الفصل الشباهي تحت f_{*n} للفصل الشباهي الذي يحوي z .

لنوضح هذا، ونحاول أن نرى فقط ما نعينه هنا بـ $f(z)$.

افترض دائرة الوحدة

9.43 مثال

$$S^1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

في $\mathbb{R}^2$ ، لأي نقطة في S^1 إحداثيات $(\cos \theta, \sin \theta)$ ، كما شاهدنا في الشكل 10.43. لتكن $f: S^1 \rightarrow S^1$ معطاة بـ:

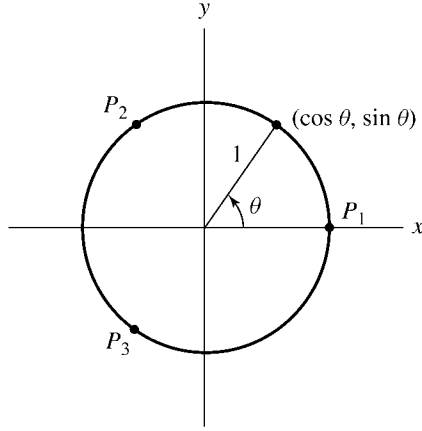
$$f((\cos \theta, \sin \theta)) = (\cos 3\theta, \sin 3\theta)$$

من الواضح أن الدالة f متصلة، يجب - الآن - أن تولد f

$$f_{*1}: H_1(S^1) \rightarrow H_1(S^1)$$

هنا، $H_1(X^1)$ تماثل $\mathbb{Z}$ ، وتولد بالفصل الشباهي $P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$ ، كما رأينا في المثال 8.42، والآن، إذا كانت P_1 ، و P_2 ، و P_3 موزعة على أبعاد متساوية حول الدائرة، فإن f تربط كلاً من الأقواس P_1P_2 ، و P_2P_3 ، و P_3P_1 مع محيط الدائرة كله، أي إن

$$f(P_1P_2) = f(P_2P_3) = f(P_3P_1) = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$$



الشكل 10.43

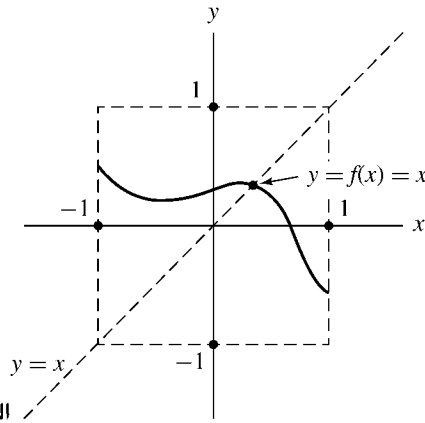
إذن:

$$\begin{aligned} f_{*1}(z + B_1(S^1)) &= 3(P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1) + B_1(S^1) \\ &= 3z + B_1(S^1) \end{aligned}$$

أي إن f_{*1} تربط مولد $H_1(S^1)$ بثلاثة أمثاله، وهذا يعكس بوضوح حقيقة أن f تلف S^1 حول نفسها ثلاث مرات. ▲

يوضح المثال 9.43 زعمنا السابق بأن تشاكلات الزمر الشباهية المرتبطة بدالة متصلة f ، يمكن أن تعكس صفات مهمة للدالة.

أخيراً، سنستخدم هذه المفاهيم في الاستدلال على برهان مبرهنة برور للنقطة الثابتة المشهورة (Brouwer Fixed – Point Theorem)، حيث تنص هذه المبرهنة على أن: للدالة المتصلة f من E^n إلى نفسها نقطة ثابتة، أي إنه يوجد $x \in E^n$ بحيث إن $f(x) = x$ ، لنرى ماذا يعني هذا لـ E^2 ، منطقة دائرية. تصوّر أن لديك صفحة رقيقة من المطاط سُدت على طاولة لتكوّن قرصاً دائرياً، علّم الحدود الخارجية لدائرة المطاط على الطاولة بقلم الرصاص، ثم شدّ، واضغط، واثّن، وافتل، واطو المطاط بأي صورة من غير تمزيقه، ولكن اتركه دائماً داخل الدائرة التي رسمتها بالرصاص على الطاولة، عندما تنتهي من ذلك، فإن نقطة على المطاط ستبقى تماماً النقطة نفسها على الطاولة التي بدأت بها.



الشكل 11.43

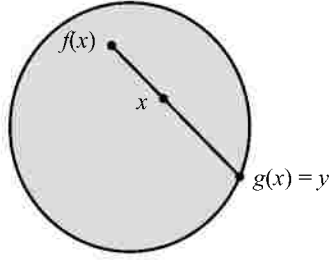
البرهان الذي سنوجزه مناسب لأي $n > 1$ في حالة $n = 1$ ، بالنظر إلى رسمة الدالة $f: E^1 \rightarrow E^1$ ، نجد أن المبرهنة تنص ببساطة على أنه لأي ممر متصل يصل الجانبين الأيمن والأيسر للمربع، يجب أن يقطع القطر في مكان ما، كما هو موضح في الشكل 11.43، وعلى الطالب أن يتخيل بناء برهاننا مع E^3 وحدودها S^2 و E^2 وحدودها S^1 ، حيث يحتوي البرهان شكلاً يوضح البناء في حالة E^2 .

(مبرهنة برور للنقطة الثابتة) للدالة المتصلة f من E^n إلى نفسها نقطة ثابتة، حيث $n \geq 1$.

مبرهنة 12.43

البرهان

عُدَّت حالة $n = 1$ في الأعلى. لتكن f دالة من E^n إلى E^n ، حيث $n > 1$ ، وسنفترض أن f من غير نقاط ثابتة وتتوصل إلى تناقض.



الشكل 13.43

إذا كان $f(x) \neq x$ لكل $x \in E^n$ ، فبإمكاننا أن نعد القطعة المستقيمة من $f(x)$ إلى x ، لنمد هذه القطعة المستقيمة في الاتجاه من $f(x)$ إلى x حتى تصل إلى S^{n-1} حدود E^n عند النقطة y ، هذا يعرف لنا دالة $g: E^n \rightarrow S^{n-1}$ ، حيث $g(x) = y$ ، كما هو موضح في الشكل 13.43، لاحظ أنه إذا كانت y على الحدود، فإن $g(y) = y$ ، الآن، ولأن f متصلة، فإن g متصلة كذلك بصورة واضحة وجميلة. (الدالة المتصلة (continuous function) هي - تقريباً - دالة تربط النقاط القريبة كفاية من بعضها بنقاط قريبة من بعضها، فإذا كانت x_1 و x_2 قريبتين كفاية من بعضهما، فإن $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قريبتان كفاية من بعضهما كذلك، بحيث إن القطعة المستقيمة التي تصل $f(x_1)$ و $f(x_2)$ قريبة من القطعة المستقيمة التي تصل $f(x_2)$ و $f(x_1)$ ، وهكذا، فإن $y_2 = g(x_2)$ قريبة من $y_1 = g(x_1)$ ؛ إذن، g متصلة، وتربط E^n بـ S^{n-1} ، وهكذا، فهي تولد تشاكلاً

$$g_{*(n-1)}: H_{n-1}(E^n) \rightarrow H_{n-1}(S^{n-1})$$

قلنا: إن $H_{n-1}(E^n) = 0$ ، حيث $n > 1$: لأن E^n متقلصة، وتحققنا من ذلك لـ $n = 2$ و $n = 3$ ، ولأن $g_{*(n-1)}(0) = 0$ ، فيجب أن نحصل على $g_{*(n-1)}(0) = 0$ ، ولكن الدورة من الرتبة $(n-1)$ التي تمثل الفصل الشباهي 0 في $H_{n-1}(E^n)$ هو كامل المركب S^{n-1} مع الاتجاه الصحيح للمبسطات، و $g(S^{n-1}) = S^{n-1}$ ؛ لأن $g(y) = y$ لكل $y \in S^{n-1}$ ؛ إذن:

$$g_{*(n-1)}(0) = S^{n-1} + B_{n-1}(S^{n-1}).$$

الذي هو مولد $0 \neq H_{n-1}(S^{n-1})$ ، تناقض.

وجدنا البرهان السابق جميلاً جداً، ونأمل أن تجده كذلك.

■ تمارين 43

تمارين مقترحة

1. تحقق بالحسابات المباشرة أن كلتا المثالثتين للمنطقة المربعة X في الشكل 1.42 تعطي القيمة نفسها لمميز أويلر $\chi(X)$.
2. وضح المبرهنة 7.43 - كما فعلنا في المثال 8.43 - لكل من الفضاءات الآتية:
 - أ. المنطقة الحلقية في المثال 10.42.
 - ب. الطارة في المثال 12.42.
 - ج. قارورة كلاين في المثال 1.43.
3. هل لكل دالة متصلة من منطقة مربعة إلى نفسها نقطة ثابتة؟ لماذا نعم؟ أو لماذا لا؟ هل لكل دالة متصلة من فضاء مكوّن من خليتين ثنائيتين غير متقاطعتين إلى نفسه نقطة ثابتة؟ لماذا نعم؟ أو لماذا لا؟
4. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من كرتين ثنائيتين تمسّان قارورة كلاين بنقطة واحدة.
5. احسب الزمر الشباهية للفضاء المكوّن من قارورتين كلاين وبلا نقاط مشتركة.
6. ضع إشارة صح أو إشارة خطأ:
 - أ. كل زمرة شباهية لفضاء متقلص زمرة تافهة بعنصر واحدة.
 - ب. كل دالة متصلة من مركب مبسطات X إلى مركب مبسطات Y ، يولد تشاكلاً من $H_n(X)$ إلى $H_n(Y)$.
 - ج. الزمر الشباهية كلّها إبدالية.
 - د. الزمر الشباهية كلّها إبدالية حرّة.
 - هـ. الزمر الشباهية ذات البعد 0 كلّها إبدالية حرّة.
 - و. إذا كان للفضاء X مبسطات من الرتبة n ، وليس لأيّ منها بعد أكبر من n و $H_n(X) \neq 0$ فإنّ $H_n(X)$ إبدالية حرّة.
 - ز. حدود سلسلة ذات رتبة n ، سلسلة ذات رتبة $(n-1)$.
 - ح. حدود سلسلة ذات رتبة n ، دورة ذات رتبة $(n-1)$.
 - ط. الحدود ذات الرتبة n تشكل زمرة جزئية من الدورات ذات البعد n .
 - ي. تكون الزمرة الشباهية ذات البعد n لمركب مبسطات دائماً زمرة جزئية من السلاسل ذات الرتبة n .

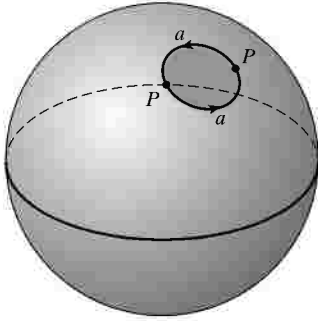
المزيد من التمارين

7. أوجد مميز أويلر لكرة ثنائية لها n من المقابض. (انظر الفصل 42، تمرين 12).

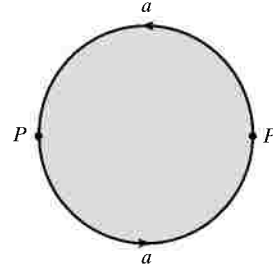
8. يمكننا صنع مستوى إسقاطي حقيقي طوبولوجياً X ، باستخدام الشكل 14.43 بربط أنصاف الدوائر a ، بحيث تجمع النقاط المتقابلة حول القطر معاً، وتتطابق اتجاهات الأسهم، ولا يمكن عمل هذا في الفضاء الإقليدي الثلاثي $\mathbb{R}^3$ ؛ لذا، يجب على المرء الذهاب إلى $\mathbb{R}^4$ ، ونقوم بمثلثة هذا الفضاء X بدءاً بالنموذج المعروض في الشكل 14.43، وحساب زمرة الشباهية.

9. يمكن تشكيل القرص الدائري المعروض في الشكل 14.43 طوبولوجياً ليظهر بوصفه كرة ثنائية لها ثقب، كما هو معروض في الشكل 15.43. نكون مستوى إسقاطياً حقيقياً من هذه الصورة بخياطة الثقب، بحيث تُخاط نقاط حافة الثقب المتقابلة حول القطر معاً، لا يمكن عمل هذا في $\mathbb{R}^3$.

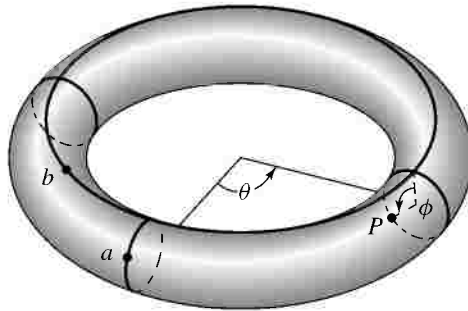
بتعميم هذه الفكرة، تعطي الكرة الثنائية ذات q ثقباً، التي تُخاط بنقاط حواف الثقوب المتقابلة حول القطر مع بعضها بوصفها كرة ثنائية ذات q من القبعات المتقاطعة. أوجد الزمر الشباهية لكرة ثنائية ذات q من القبعات المتقاطعة. (لرؤية المثلثة، اعرض الفضاء مثل القرص في الشكل 14.43، ولكن مع $q - 1$ من الثقوب اللازم خياطتها، كما وصف في الأعلى. ثم قم بمثلثة القرص مع هذه الثقوب).



الشكل 15.43



الشكل 14.43



الشكل 16.43

ملاحظة: يمكن إثبات أن كل سطح مغلق لطيف بما فيه الكفاية - منطو ثنائي مغلق (*closed 2-manifold*) - متماثل استمراريًا مع كرة ثنائية بعدد $h \geq 0$ من المقابض إذا كان السطح ثنائي الجوانب، ومتماثلًا استمراريًا مع كرة ثنائية مع $q > 0$ من القبعات المتقاطعة إذا كان أحادي الجانب، والعدد h أو q - كما قد تكون الحالة - يسمى جنس السطح (*genus of the surface*).

10. يمكن وصف كل نقطة P على طارة منتظمة X عن طريق زاويتين θ و ϕ ، كما هو مبين في الشكل 16.43، أي إنه بإمكاننا ربط الإحداثيين (θ, ϕ) بـ P . صف الدالة المتولدة f_{*n} من $H_n(X)$ إلى $H_n(X)$ لكل من الدوال f المعرفة على الطارة X إلى نفسها المعطاة في الأسفل، بإيجاد صور مولدات $H_n(X)$ الموصوفة في المثال 12.42. ترجم تشاكلات الزمر هذه هندسيًا، كما فعلنا في المثال 9.43.

$$أ. \quad f : X \rightarrow X \text{ المعطى بـ } f((\theta, \phi)) = (2\theta, \phi)$$

$$ب. \quad f : X \rightarrow X \text{ المعطى بـ } f((\theta, \phi)) = (\theta, 2\phi)$$

$$ج. \quad f : X \rightarrow X \text{ المعطى بـ } f((\theta, \phi)) = (2\theta, 2\phi)$$

11. بالرجوع إلى التمرين 10، يمكن ربط الطارة X بصورة غامرة بدائرتها b (التي تماثل استمراريًا S^1) بتشكيلة من الدوال. لكل من هذه الدوال $f : X \rightarrow b$ المعطاة في الأسفل، صف التشاكل $f_{*n} : H_n(X) \rightarrow H_n(b)$ حيث $n = 0, 1, 2$ بوصف صور مولدات $H_n(X)$ كما في التمرين 10.

$$أ. \quad f : X \rightarrow b \text{ المعطى بـ } f((\theta, \phi)) = (\theta, 0)$$

$$ب. \quad f : X \rightarrow b \text{ المعطى بـ } f((\theta, \phi)) = (2\theta, 0)$$

12. كرر التمرين 11، ولكن بإظهار الدالة f بوصفها دالة من الطارة X إلى نفسها، مولدة الدوال

$$f_{*n} : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$$

13. افترض الدالة f على قارورة كلاين في الشكل 2.43، المعطاة بربط النقطة Q على المستطيل في الشكل 2.43 بصورة غامرة بالنقطة على b المقابلة لها مباشرة (الأقرب لها). لاحظ أن b كرة أحادية طوبولوجيًا. احسب الدوال المتولدة $f_{*n} : H_n(X) \rightarrow H_n(b)$ حيث $n = 0, 1, 2$ بوصف صور مولدات $H_n(X)$.

سلسلة المركبات والدوال

كانت الطوبولوجيا الجبرية مسؤولة عن الاندفاع في اتجاه جديد في الجبر، حيث ترى، أنه لو كان لديك مركب مبسطات X ، فإنك تحصل على سلسلة من الزمر $C_k(X)$ ودوال ∂_k بصورة طبيعية، كما هو مبين في المخطط

$$C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{\partial_0} 0$$

حيث $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ ، ثم يمكنك تجريد الجزء الجبري البحث في هذا الموقف، وتعد أي متتالية من الزمر الإبدالية A_k والتشاكلات $\partial_k: A_k \rightarrow A_{k-1}$ ، بحيث إن $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ لكل $k \geq 1$ ، ولكي لا تحتاج دائماً إلى $k \geq 1$ في $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ ، فمن المناسب أن تُعد متواليات "ثنائية اللانهاية" من الزمر A_k لكل $k \in \mathbb{Z}$ ، وقد جرت العادة في التطبيقات أن تكون $A_k = 0$ لكل $k < 0$ و $k > n$. دراسة مثل هذه المتتاليات والدوال لمثل هذه المتتاليات هو موضوع الجبر الشباهي.

السلسلة المركبة (A, ∂) (Chain Complex) متتالية ثنائية اللانهاية

1.44 تعريف

$$A = \{\dots, A_2, A_1, A_0, A_{-1}, A_{-2}, \dots\}$$

من الزمر الإبدالية A_k ، مع مجموعة $\partial = \{\partial_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ من التشاكلات، بحيث إن $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ و $\partial_k: A_k \rightarrow A_{k-1}$.

بوصفه تشابهاً ملائماً لترميزنا في مبرهنة الزمر، سنكون مهملين، وندع "A" ترمز للسلسلة المركبة (A, ∂) نستطيع الآن التقليد بوضع جبري كامل لبنائنا وتعريفاتنا في الفصل 4.1.

إذا كانت A سلسلة مركبة، فإن الصورة تحت تأثير ∂_k زمرة جزئية من نواة ∂_{k-1} . افترض

2.44 مبرهنة
البرهان

$$A_k \xrightarrow{\partial_k} A_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} A_{k-2}$$

الآن، $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ ، لأن A سلسلة مركبة، بمعنى أن $\partial_k[A_k] \subseteq \partial_{k-1}^{-1}(0) = 0$ ، وهذا يخبرنا مباشرة بأن $\partial_k[A_k] \subseteq \partial_{k-1}^{-1}(0)$ محتواة في نواة ∂_{k-1} ، وهو ما نودّ برهانه.

إذا كانت A سلسلة مركبة، فإن النواة $Z_k(A) = \partial_k^{-1}(0)$ هي زمرة الدورات ذات الرتبة k (group of k -cycles)، والصورة $B_k(A) = \partial_{k+1}[A_{k+1}]$ هي زمرة الحدود ذات الرتبة k (group of k -boundaries)، وزمرة العامل $H_k(A) = Z_k(A) / B_k(A)$ هي زمرة الشباه k (k-th homology group of A). $A \perp k$

3.44 تعريف

ذكرنا في الفصل السابق أنه لمركبتي مبسطات X و Y ، تولد الدالة المتصلة من X إلى Y تشاكلاً من $H_k(X)$ إلى $H_k(Y)$ ، حيث تنتج هذه الدالة للزمر الشباهية كالاتي:

لمثالثات مناسبة لـ X و Y ، تولد الدالة f تشاكلاً f_k من $C_k(X)$ إلى $C_k(Y)$ ، التي تتمتع بخاصية مهمة، وهي أنها تتبدل مع ∂_k ، أي إنَّ

$$\partial_k f_k = f_{k-1} \partial_k$$

لنعد إلى حالة الجبر المجرد، ونرى كيف يولد هذا دالة على الزمر الشباهية.

4.44 مبرهنة

(التمهيدية الأساسية): لتكن A و A' مع المجموعتين ∂ و ∂' من التشاكلات سلسلتين مركبتين، وافترض وجود مجموعة f من التشاكلات $f_k: A_k \rightarrow A'_k$ ، كما هو موضح في الرسم التخطيطي.

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{\partial_{k+2}} & A_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{\partial_k} & A_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \dots \\ & & \downarrow f_{k+1} & & \downarrow f_k & & \downarrow f_{k-1} \\ \dots & \xrightarrow{\partial'_{k+2}} & A'_{k+1} & \xrightarrow{\partial'_{k+1}} & A'_k & \xrightarrow{\partial'_k} & A'_{k-1} \xrightarrow{\partial'_{k-1}} \dots \end{array}$$

افترض - زيادة على ذلك - أن كل مربع منها تبديلي، بمعنى أن:

$$f_{k-1} \partial_k = \partial'_k f_k$$

لكل k ، فإنَّ f_k تولد تشاكلاً طبيعياً $f_{*k}: H_k(A) \rightarrow H_k(A')$

لتكن $(A)_k \in Z$ ، الآن:

البرهان

$$\partial'_k(f_k(z)) = f_{k-1}(\partial_k(z)) = f_{k-1}(0) = 0$$

وهكذا، فإنَّ $f_k(z) \in (A')_k$ ، لنحاول تعريف $f_{*k}: H_k(A) \rightarrow H_k(A')$

$$(1) \quad f_{*k}(z + B_k(A)) = f_k(z) + B_k(A')$$

يجب علينا أولاً إثبات أن f_{*k} حسنة التعريف، أي إنها مستقلة عن خيارنا لممثل $z + B_k(A)$ ، افترض أن $(z + B_k(A))$ ، وهكذا $(z_1 - z) \in B_k(A)$ ، يوجد $c \in A_{k+1}$ يجب أن $z_1 - z = \partial_{k+1}(c)$ ولكن حينها

$$f_k(z_1) - f_k(z) = f_k(z_1 - z) = f_k(\partial_{k+1}(c)) = \partial'_{k+1}(f_{k+1}(c))$$

وهذا الحد الأخير هو عنصر في $B_k(A')$ $\left[A'_{k+1} \right] = \partial'_{k+1}$ ؛ إذن،

$$f_k(z_1) \in (f_k(z) + B_k(A'))$$

إذن، الممثلان للمجموعة نفسها المشاركة في $H_k(A) = Z_k(A) / B_k(A)$ يرتبطان بممثلين لمجموعة مشاركة واحدة في $H_k(A') = Z_k(A') / B_k(A')$ ، وهذا يثبت أن $f_{*k} : H_k(A) \rightarrow H_k(A')$ حسنة التعريف كما في المعادلة (1).

الآن، نحسب: f_{*k} بأخذ f_k على ممثلات المجموعات المشاركة، ونعرّف عملية الزمرة على زمرة العامل بتطبيق عملية الزمرة للزمرة الأصلية على ممثلات المجموعات المشاركة، وينتج مباشرة عن حقيقة أن تأثير f_k في $Z_k(A)$ هو تشاكل من $Z_k(A)$ إلى $Z_k(A')$ ، أن f_{*k} تشاكل من $H_k(A)$ إلى $H_k(A')$.

إذا كانت مجموعات الدوال f ، و ∂ ، و ∂' تحقق خاصية - المعطاة في المبرهنة 4.44 - أن المربعات تبديلية، فإن f تتبدل مع ∂ (commutes with).

بعد تعريف آخر، سنعطي ما يبدو تافهًا، ولكنه توضيح مهم جدًا لمبرهنة 4.44.

السلسلة المركبة $\langle A', \partial' \rangle$ هي مركب جزئي من السلسلة المركبة $\langle A, \partial \rangle$

5.44 تعريف

(subcomplex of a chain complex)، إذا كان لكل k زمرة جزئية من A_k و $\partial'_k(c) = \partial_k(c)$ لكل $c \in A'_k$ ، أي إن ∂'_k و ∂_k لهما التأثير نفسه في عناصر الزمرة الجزئية A'_k من A_k .

6.44 مثال

لتكن A سلسلة مركبة، ولتكن A' مركبة جزئية من A . لتكن i مجموعة دوال الإدخال كلها $i_k : A'_k \rightarrow A_k$ المعطاة بـ $i_k(c) = c$ لكل $c \in A'_k$. من الواضح أن i تتبدل مع ∂ ؛ إذن، نتولد لدينا تشاكلات $i_k : A'_k \rightarrow A_k$ ، ومن الطبيعي أن يظن المرء أن i_{*k} يجب أن تكون دالة تماثل من $H_k(A')$ إلى $H_k(A)$.

ولكن هذا ليس بالضرورة صحيحًا، على سبيل المثال: افترض الكرة الثنائية S^2 بوصفها مركبًا جزئيًا من الخلية الثلاثية E^3 . يعطي هذا $i_2 : C_2(S^2) \rightarrow C_2(E^3)$ ، ما يولد

$$i_{*2} : H_2(S^2) \rightarrow H_2(E^3)$$

إلا أننا رأينا أن $H_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$ ، بينما $H_2(E^3) = 0$ ؛ إذن، فمن الممكن ألا تكون i_{*2} دالة تماثل.

علم الشباه النسبي

افترض أن A' مركب جزئي من السلسلة المركبة A . الوضع الطوبولوجي الذي جاء منه هذا هو عد المركب الجزئي للمبسطات Y (بالمعنى الواضح) من مركب المبسطات X ، عندها، يمكننا ببساطة أن نعد $C_k(Y)$ بوصفها زمرة

جزئية من $C_k(X)$ ، تمامًا مثل الحالة في الجبر أن لدينا A'_k زمرة جزئية من A_k ، ومن الواضح أن لدينا

$$\partial_k [C_k(Y)] \leq C_{k-1}(Y)$$

لنتعامل الآن مع حالة الجبر، ونتذكر أنه بإمكاننا تطبيقه على حالة الطوبولوجيا في أي وقت.

إذا كان A' مركبًا جزئيًا من السلسلة المركبة A ، فيمكننا تكوين المجموعة A' / A من زمر العامل A'_K / A_K ، حيث ندعى أن A' / A تعطي مرة أخرى سلسلة مركبة بطريقة طبيعية، ويجب علينا أن نصنع مجموعة $\bar{\partial}$ من التشاكلات

$$\bar{\partial}_k : (A'_k / A_k) \rightarrow (A'_{k-1} / A_{k-1})$$

بحيث إن $\bar{\partial}_{k-1} \bar{\partial}_k = 0$. محاولة تعريف $\bar{\partial}_k$ واضحة، أي عرف

$$\bar{\partial}_k(c + A'_k) = \partial_k(c) + A'_{k-1}$$

لكل $c \in A_k$. يجب علينا إثبات ثلاثة أمور، هي: أن $\bar{\partial}_k$ حسنة التعريف، وأنها تشاكل، وأن $\bar{\partial}_{k-1} \bar{\partial}_k = 0$

أولاً، لإثبات أن $\bar{\partial}_k$ حسنة التعريف، ليكن c_1 كذلك ينتمي إلى $c + A'_k$ ؛ إذن، $(c_1 - c) \in A'_k$ ، وهكذا، فإن:

$$\bar{\partial}_k(c_1 - c) \in A'_{k-1}$$

$$\bar{\partial}_k(c_1) \in (\partial_k(c) + A'_{k-1})$$

كذلك. يثبت هذا أن $\bar{\partial}_k$ حسنة التعريف.

تثبت المعادلة

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_k((c_1 + A'_k) + (c_2 + A'_k)) &= \bar{\partial}_k((c_1 + c_2) + A'_k) \\ &= \partial_k(c_1 + c_2) + A'_{k-1} \\ &= (\partial_k(c_1) + \partial_k(c_2)) + A'_{k-1} \\ &= \bar{\partial}_k(c_1 + A'_k) + \bar{\partial}_k(c_2 + A'_k) \end{aligned}$$

أن $\bar{\partial}_k$ تشاكل.

أخيراً،

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_{k-1}(\bar{\partial}_k(c + A'_k)) &= \bar{\partial}_{k-1}(\partial_k(c) + A'_{k-1}) \\ &= \partial_{k-1}(\partial_k(c)) + A'_{k-2} = 0 + A'_{k-2} \end{aligned}$$

وإذن، $\bar{\partial}_{k-1} \bar{\partial}_k = 0$.

المناقشة السابقة نموذج للحسابات الاعتيادية للعاملين بالجبر الشباهي، إضافة إلى أن جمع الأعداد الصحيحة وضربها اعتيادي لك، وقد قدمناها بتفصيل كبير، على المرء أن يكون حذرًا بعض الشيء في متابعة البعد، أي متابعة الدليل السفلي، وفي الحقيقة، لا يكتب المحترفون في الجبر الشباهي عادة هذه الأدلة، ولكنهم يعرفون تمامًا مع أي زمرة يعملون، لقد أعطينا الأدلة السفلية كلها لتبقى متابعًا أي الزمر بالضبط قيد الحساب، لنلخص العمل السابق بمبرهنة.

7.44 مبرهنة

إذا كان A' مركبًا جزئيًا من السلسلة المركبة A ، فإن المجموعة A / A' من زمر العامل

$$A_k / A'_k \text{ مع المجموعة } \bar{\partial} \text{ من التشاكلات، بحيث تعرف } \bar{\partial}_k \text{ بـ}$$

$$\bar{\partial}_k(c + A'_k) = \bar{\partial}_k(c) + A'_{k-1}$$

لكل $c \in A_k$ ، تشكل سلسلة مركبة.

لأن A / A' سلسلة مركبة، فبإمكاننا صنع زمر شباهية $H_k(A / A')$.

8.44 تعريف

زمرة الشباه $H_k(A / A')$ هي الزمرة k الشباهية النسبية لـ A مقياس A' .

■ (k th relative homology group of A modulo A')

في حالة الطوبولوجيا، حيث Y مركب جزئي من مركب المبسطات X ، سنستعمل المصطلحات العادية في الطوبولوجيا، ونرمز للزمرة k الشباهية النسبية المتولدة من المركب الجزئي $C(Y)$ من السلسلة المركبة $C(X)$ بـ " $H_k(X, Y)$ ". سلاسل Y كلها ستوضع لتساوي 0، وهذا يقابل هندسيًا تقلص Y إلى نقطة.

9.44 مثال

ليكن X مركب مبسطات مكوّنًا من حواف (مستثنى الداخل) للمثلث في الشكل 10.44، وليكن Y مركبًا جزئيًا مكوّنًا من الحافة P_2P_3 . لقد رأينا أن $H_1(X) \simeq H_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ ، حيث إن تقلص P_2P_3 إلى نقطة يؤدي إلى إنهاء حافة المثلث، كما هو مشاهد في الشكل 11.44، لا يزال الناتج يساوي S^1 طوبولوجيًا؛ إذن، نتوقع مرة أخرى أن نحصل على $H_1(X, Y) \simeq \mathbb{Z}$.

مولدات $C_1(X)$ هي P_1P_2 ، و P_2P_3 و P_3P_1 ، ولأن $P_2P_3 \in C_1(Y)$ ، فنرى أن مولدات

$$C_1(X)/C_1(Y) \text{ هي } P_1P_2 + C_1(Y) \text{ و } P_3P_1 + C_1(Y)$$

لإيجاد $Z_1(X, Y)$ ، نحسب:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_1(nP_1P_2 + mP_3P_1 + C_1(Y)) &= \bar{\partial}_1(nP_1P_2) + \bar{\partial}_1(mP_3P_1) + C_0(Y) \\ &= n(P_2 - P_1) + m(P_1 - P_3) + C_0(Y) \\ &= (m - n)P_1 + C_0(Y) \end{aligned}$$

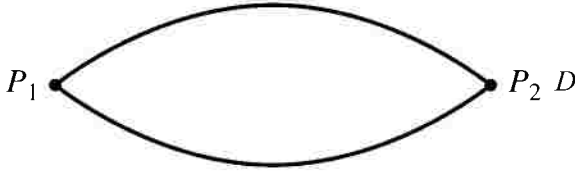
لأن $P_2, P_3 \in C_0(Y)$ ؛ إذن، يجب أن تكون $m=n$ لدورة، وهكذا، فإن مولد $Z_1(X, Y)$ هو

$$H_1(X, Y) \simeq \mathbb{Z} \text{ فنرى بالتأكد أن } B_1(X, Y) = 0 \text{ ولأن } (P_1P_2 + P_3P_1) + C_1(Y)$$

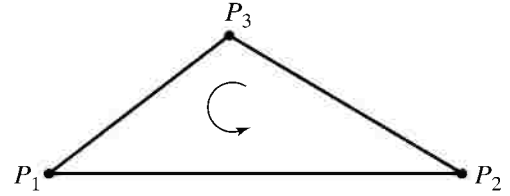
$$\text{لأن } (P_1 + C_0(Y)) \text{ تولد } Z_0(X, Y)$$

$$\bar{\partial}_1(P_2P_1 + C_1(Y)) = (P_1 - P_2) + C_0(Y) = P_1 + C_0(Y) \text{ و}$$

نرى أن $H_0(X, Y) = 0$. هذا مميز للزمر الشباهية النسبية ذات البعد 0 لمركب مبسطات متصل ▲



الشكل 11.44

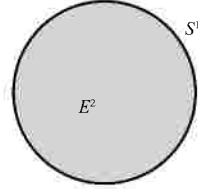


الشكل 10.44

لنعد S^1 بوصفها مركباً جزئياً (حدود) من E^2 ، ونحسب $H_2(E^2, S^1)$. تذكر أن E^2 قرص دائري، وبهذا يمكن أن نعد S^1 حدوده (انظر الشكل 13.44). يمكنك تبين تقلص S^1 إلى نقطة بتثبيت خيط مطاط على حواف قطعة دائرية من القماش، ثم تسحب الخيط، بحيث تتجمع حواف الدائرة في نقطة واحدة. يكون الفضاء الناتج كيساً مغلقاً أو S^2 ؛ إذن بينما $H_2(E^2) = 0$ لأن فضاء متقلص، فننتوقع أن

$$H_2(E^2, S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

مثال 12.44



الشكل 13.44

لغايات الحساب، يمكننا أن نعد E^2 طبولوجياً كالمنطقة المثلثة في الشكل 10.44 و S^1 كحافة

$$\text{للمثلث؛ إذن، يتولد } C_2(E^2, S^1) \text{ بـ } P_1P_2P_3 + C_2(S^1)$$

$$\begin{aligned} \bar{\partial}_2(P_1P_2P_3 + C_2(S^1)) &= \partial_2(P_1P_2P_3) + C_1(S^1) \text{ و} \\ &= (P_2P_3 - P_1P_3 + P_1P_2) + C_1(S^1) \end{aligned}$$

$$\text{ولكن } (P_2P_3 - P_1P_3 + P_1P_2) \in C_1(S^1) \text{، ما يؤدي إلى أن}$$

$$\bar{\partial}_2(P_1P_2P_3 + C_2(S^1)) = 0$$

$$\text{إذن، } P_1P_2P_3 + C_2(S^1) \text{ عنصر في } Z_2(E^2, S^1) \text{، ولأن}$$

$$B_2(E^2, S^1) = 0$$

فنرى أن

$$H_2(E^2, S^1) \simeq \mathbb{Z}$$

كما توقعنا



المتتالية الشباهية المضبوطة لزوج

ننصف الآن المتتالية الشباهية المضبوطة لزوج، ونعطي تطبيقاً.

لن نعمل تفاصيل الحسابات جميعها، فالحسابات عادية ومباشرة، وسنعطي التعريفات اللازمة كلها، وسنترك للطالب إكمال التفاصيل في التمارين.

14.44 تمهيدية ليكن A' مركباً جزئياً من السلسلة المركبة A . لتكن j مجموعة التشاكلات الطبيعية

$$j_k : A_k \rightarrow (A_k / A'_k) \text{، فإن}$$

$$j_{k-1} \partial_k = \bar{\partial}_k j_k \text{،}$$

بمعنى أن j يتبدل مع ∂ .

سندع هذه الحسابات السهلة للتمارين. (انظر التمرين 12).

تولد الدالة j_k في التمهيدية 14.44 تشاكلاً طبيعياً

البرهان

15.44 مبرهنة

$$j_{*k} : H_k(A) \rightarrow H_k(A / A')$$

ينتج هذا مباشرة من التمهيدية 14.44 والمبرهنة 4.44.

البرهان

ليكن A' مركباً جزئياً من السلسلة المركبة A . لتكن $h \in H_k(A / A')$ ، فإن

$$h = z + B_k(A / A') \text{، حيث } z \in Z_k(A / A') \text{، وتبعاً لذلك، } z = c + A'_k \text{، حيث } c \in A_k.$$

(لاحظ أننا وصلنا إلى c من h بخيارين متتابعين للممثلات). الآن $\bar{\partial}_k(z) = 0$ ، وهذا يؤدي

$$\text{إلى أن } \partial_k(c) \in A'_{k-1} \text{، هذا وبالترافق مع } \partial_{k-1} \partial_k = 0 \text{، يعطينا } \partial_k(c) \in Z_{k-1}(A') \text{.$$

عرّف

$$\partial_{*k} : H_k(A / A') \rightarrow H_{k-1}(A')$$

بـ

$$\partial_{*k}(h) = \partial_k(c) + B_{k-1}(A')$$

يبدو هذا التعريف لـ ∂_{*k} معقداً جداً. فكّر فيه كما يأتي: ابدأ بعنصر من $H_k(A / A')$ ،

مثل هذا العنصر يمثل - الآن - بدورة نسبية من الرتبة k مقياس A' ؛ وبالقول: إنها دورة نسبية

من الرتبة k مقياس A' يكافئ قولنا: إن حدودها في A'_{k-1} ، لأن حدودها في A'_{k-1} وهي حدود

شيء ما في A_k ، فهذه الحدود يجب أن تكون دورة من الرتبة $(k-1)$ في A'_{k-1} ؛ إذن، بدءاً بـ

$$h \in H_k(A / A') \text{، نصل إلى دورة من الرتبة } (k-1) \text{ تمثل فصلاً شباهياً في } H_{k-1}(A')$$

16.44 تمهيدية الدالة $\partial_{*k} : H_k(A/A') \rightarrow H_{k-1}(A')$ التي عرّفناها توًّا - حسنة التعريف، وهي تشاكل من $H_k(A/A')$ إلى $H_{k-1}(A')$.

◆ سنترك هذا البرهان للتمارين (انظر التمرين 13).

لتكن i_{*k} الدالة في المثال 6.44. يمكننا الآن بناء المخطط الآتي:

$$\begin{aligned} & \dots \xrightarrow{\partial_{*k+1}} H_k(A') \xrightarrow{i_{*k}} H_k(A) \xrightarrow{j_{*k}} H_k(A/A') \\ (1) \quad & \xrightarrow{\partial_{*k}} H_{k-1}(A') \xrightarrow{i_{*k-1}} H_{k-1}(A) \xrightarrow{j_{*k-1}} H_{k-1}(A/A') \xrightarrow{\partial_{*k-1}} \dots \end{aligned}$$

تشكل الزمرة في المخطط (1) مع الدوال المعطاة سلسلة مركبة.

نحتاج فقط إلى التحقق من أنّ أيّ متتالية من الدالتين متتاليتين تعطي دائماً 0. نترك هذا للتمارين (انظر التمرين 14).

◆

لأنّ المخطط (1) يعطي سلسلة مركبة، فبإمكاننا (برعب!) أن نسأل عن الزمر الشباهية لهذه السلسلة المركبة، فقد كنا نهدف إلى هذا السؤال، والإجابة عنه في الحقيقة سهلة جداً، إذ إنّ الزمر الشباهية لهذه السلسلة المركبة كلها تساوي 0، وقد تظن أنّ مثل هذه السلسلة المركبة غير مهمّة. ولكن وعلى خلاف المتوقع، فإنّ لمثل هذه السلسلة المركبة اسم خاص.

تسمى متتالية الزمر A_k والتشاكلات ∂_k المكوّنة لسلسلة مركبة متتالية مضبوطة (*exact sequence*)، إذا كانت الزمر الشباهية للسلسلة المركبة كلها تساوي 0، أي إنه لكل k صورة ∂_k تساوي نواة ∂_{k-1} .

■

المتتاليات المضبوطة مهمّة جداً في الطوبولوجيا، وسنعطي بعض الخصائص الأولية لها في التمارين.

تشكل الزمر والدوال في السلسلة المركبة في المخطط (1) متتالية مضبوطة.

◆

سنترك هذا البرهان للتمارين. (انظر التمرين 15).

20.44 تعريف المتتالية المضبوطة في المخطط (1)، هي متتالية شباهية مضبوطة للزوج (A, A') . (*exact homology sequence of the pair*).

■

لنعطي تطبيقاً للمبرهنة 9.44 في الطوبولوجيا، فقد ذكرنا من غير برهان أنّ:

$H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ و $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ، ولكن $H_k(S^n) = 0$ ، حيث $k \neq 0, n$. وكذلك ذكرنا من غير برهان أنّ:

$H_k(S^E) = 0$ ، حيث $k \neq 0$: لأن E^n متقلصة. لنفترض صحّة النتيجة بالنسبة إلى E^n ، ونستنتج منها النتيجة لـ S^n .

يمكننا أن نعدّ S^n بوصفها مركباً جزئياً من مركب المبسطات E^{n+1} ، على سبيل المثال: تكافئ طوبولوجياً المبسط من الرتبة $(n+1)$ ، وتكافئ S^n طوبولوجياً حدودها، لنصنع

متتالية شباهية مضبوطة من الزوج (E^{n+1}, S^n) ، لدينا:

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{H_{n+1}(S^n)}_{=0} \xrightarrow{i_{*n+1}} \underbrace{H_{n+1}(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*n+1}} \underbrace{H_{n+1}(E^{n+1}, S^n)}_{\simeq \mathbb{Z}} \xrightarrow{\partial_{*n+1}} \\
 & \underbrace{H_n(S^n)}_{=?} \xrightarrow{i_{*n}} \underbrace{H_n(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*n}} \underbrace{H_n(E^{n+1}, S^n)}_{=0} \xrightarrow{\partial_{*n}} \dots \xrightarrow{j_{*k+1}} \\
 & \underbrace{H_{k+1}(E^{n+1}, S^n)}_{=0} \xrightarrow{\partial_{*k+1}} \underbrace{H_k(S^n)}_{=?} \xrightarrow{i_{*k}} \underbrace{H_k(E^{n+1})}_{=0} \xrightarrow{j_{*k}} \dots
 \end{aligned} \quad (2)$$

حيث $1 \leq k < n$ ، وحقيقة أن E^{n+1} متقلصة تعطي $H_k(E^{n+1}) = 0$ ، حيث $k \geq 1$.
 أشرنا إلى هذا في المخطط (2). باعتبار E^{n+1} مبسطاً من الرتبة $(n+1)$ و S^n
 بوصفها حدوداً لها، فإننا نرى أن $C_k(E^{n+1}) \leq C_k(S^n)$ ، حيث $k \leq n$ ؛ ولذلك،
 $H_k(E^{n+1}, S^n) = 0$ ، حيث $k \leq n$ ، وقد أشرنا كذلك إلى هذا في المخطط (2). تماماً كما
 في المثال 12.44، يرى المرء أن $H_{n+1}(E^{n+1}, S^n) \simeq \mathbb{Z}$ ، مولدة بالفصل الشباهي الذي يحوي
 بوصفه ممثلاً

$$P_1 P_2 \dots P_{n+2} + C_{n+1}(S^n)$$

لـ $1 \leq k < n$ ، تخبرنا المتتالية المضبوطة في الصف الأخير في المخطط (2) أن

$$H_k(S^n) = 0؛ لأننا نرى من$$

$$H_k(E^{n+1}) = 0 \text{ أن}$$

$$H_k(S^n) = (i_{*h} \text{ نواة})$$

ولكن من $H_{k+1}(E^{n+1}, S^n) = 0$ ، نرى أن (صورة ∂_{*K+1}) = 0 ومن أن المتتالية مضبوطة

$$- (i_{*k} \text{ نواة}) = (\partial_{*K+1} \text{ صورة}) - \text{ نحصل على } H_k(S^n) = 0 \text{ لكل } 1 \leq k < n.$$

سلسلة التبريرات الآتية تؤدي إلى أن $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ بالرجوع إلى المخطط (2) في الأعلى.

$$1. \text{ لأن } H_{n+1}(E^{n+1}) = 0، \text{ نحصل على (صورة } j_{*n+1} \text{) } = 0.$$

$$2. \text{ إذن، ومن الضبط نحصل على (نواة } \partial_{*n+1} \text{) } = (\text{صورة } j_{*n+1}) = 0، \text{ أي إن } \partial_{*n+1} \text{ دالة تماثل.}$$

$$3. \text{ لذلك، (صورة } \partial_{*n+1} \text{) } \simeq \mathbb{Z}.$$

$$4. \text{ لأن } H_n(E^{n+1}) = 0، \text{ نحصل على (نواة } i_{*k} \text{) } = H_n(S^n).$$

5. ومن أن المتتالية مضبوطة، (نواة i_{*n}) = (صورة ∂_{*n+1})، وهكذا $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. إذن، نرى

$$\text{أن } H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \text{ و } H_k(S^n) = 0 \text{ حيث } 1 \leq k < n.$$

لأنَّ S^n متصلة، $H_0(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ، يمكن استنتاج هذه الحقيقة كذلك من المتتالية المضبوطة

$$\underbrace{H_1(E^{n+1}, S^n)}_{=0} \xrightarrow{\partial_*} H_0(S^n) \xrightarrow{i_*} \underbrace{H_0(E^{n+1})}_{\cong \mathbb{Z}} \xrightarrow{j_*} \underbrace{H_0(E^{n+1}, S^n)}_{=0}$$

▲

■ تمارين 44

تمارين مقترحة

1. لتكن A و B زميرتين مع الجمع، وافترض أن المتتالية:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$$

مضبوطة. فأثبت أن $A \simeq B$.

2. لتكن A, B, C زمراً مع الجمع، وافترض أن المتتالية:

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \rightarrow 0$$

مضبوطة. فأثبت أن:

أ. زدالة غامرة من B إلى C .

ب. i تماثل من A إلى B .

ج. C تماثل $[A] / i$.

3. لتكن A, B, C و D زمراً، ولتكن

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} D$$

متتالية مضبوطة. فأثبت أن الشروط الثلاثة الآتية متكافئة.

أ. i غامرة $\perp B$.

ب. j تربط بصورة غامرة B كلها بـ 0 .

ج. k دالة أحادية.

4. أثبت أنه إذا كان

$$A \xrightarrow{g} B \xrightarrow{h} C \xrightarrow{i} D \xrightarrow{j} E \xrightarrow{k} F$$

متتالية مضبوطة من زمر الجمع، فإن العبارات الآتية متكافئة:

أ. تربط كل من h و j كل شيء بـ 0 بصورة غامرة.

ب. i تماثل من C غامرة $\perp D$.

ج. g غامرة $\perp B$ و k أحادية.

لمزيد من التمارين

5. المبرهنتان 4.44 و 7.44 مرتبطتان جدًا بالتمرين 39 في الفصل 14 أظهر هذا الارتباط.
6. بحسابات مشابهة للمثالين 9.44 و 14.44 في الكتاب، أوجد الزمر الشباهية النسبية $H_n(X, a)$ للطارة X والمركب الجزئي a - كما هو مبين في الشكلين 13.42 و 14.42. (لأنه بإمكاننا أن نعدّ هذه الزمر الشباهية بوصفها زمراً شباهية للفضاء الناتج عن X بتقليص a إلى نقطة، يتعين أن تكون هي الزمر الشباهية للطارة المتلاشية).
7. لمركب المبسطات X والمركبة الجزئية a في التمرين 6، كَوْن متتالية شباهية مضبوطة للزوج (X, a) ، وأثبت بحسابات مباشرة أن هذه المتتالية مضبوطة.
8. كرّر التمرين 6، حيث X قارورة كلاين في الشكل 2.43 والشكل 3.43. (يتعين أن يعطي هذا الزمر الشباهية لقارورة كلاين المتلاشية).
9. لمركب المبسطات X والمركب الجزئي a في التمرين 8، كَوْن متتالية شباهية مضبوطة للزوج (X, a) ، وأثبت بحسابات مباشرة أن هذه المتتالية مضبوطة.
10. أوجد الزمر الشباهية النسبية $H_n(X, Y)$ ، حيث X المنطقة الحلقية في الشكل 11.42 و Y المركب الجزئي المكوّن من دائرتي الحدود.
11. لمركب المبسطات X والمركب الجزئي Y في التمرين 10، كَوْن متتالية شباهية مضبوطة للزوج (X, Y) ، وأثبت بحسابات مباشرة أن هذه المتتالية مضبوطة.
12. أثبت التمهيدية 14.44
13. أثبت التمهيدية 16.44
14. أثبت التمهيدية 17.44
15. أثبت المبرهنة 19.44 باستخدام الخطوات الآتية:
- أ. أثبت أن $(i_{*k}) \supseteq (نواة j_{*k})$.
- ب. أثبت أن $(نواة j_{*k}) \supseteq (صورة i_{*k})$.
- ج. أثبت أن $(صورة j_{*k}) \supseteq (نواة \partial_{*k})$.
- د. أثبت أن $(نواة \partial_{*k}) \supseteq (صورة j_{*k})$.
- هـ. أثبت أن $(صورة \partial_{*k}) \supseteq (نواة i_{*k-1})$.
- و. أثبت أن $(نواة i_{*k-1}) \supseteq (صورة \partial_{*k})$.
16. لتكن $\langle A, \partial \rangle$ و $\langle A', \partial' \rangle$ سلسلتي مركبات، ولتكن f و g مجموعتي تشاكلات $f_k : A_k \rightarrow A'_k$ و $g_k : A_k \rightarrow A'_k$ ، بحيث إن كلا f و g تبدل مع ∂ . التحاول الجبري (algebraic homotopy) بين f و g هي المجموعة D من التشاكلات $D_k : A_k \rightarrow A'_{k+1}$ بحيث إنه لكل $c \in A_k$ ، نحصل على:

$$f_k(c) - g_k(c) = \partial'_{k+1}(D_k(c)) + D_{k-1}(\partial_k(c))$$

(يمكن اختصار هذا الشرط بـ $f - g = \partial D + D \partial$). أثبت أنه إذا وجد تحاول جبري بين f و g ، أي إذا كانت f و g

متحاولة (homotopic)، فإن f_{*k} و g_{*k} هو التشاكل نفسه من $H_k(A)$ إلى $H_k(A')$.