

الباب التاسع

المصفوفات الرياضية

عقودته وتعاريف :

يلاحظ أن كثير من المشاكل الاقتصادية الرياضية يمكن فهمها واستخدامها بسهولة في حالة عرضها في صورة مصفوفات رياضية والتي يمكن اعتبارها أنها تمثل طريقة مختصرة تستخدم تعبيرات سهلة لكتابة العلاقات الجبرية التي تتضمن كثير من المتغيرات . إذ من المعروف أن الجبر العادي بإشارات ودلالاته ورموزه يعتبر نظاماً مناسباً ومختصراً لعرض العلاقات المنطقية للأعداد ، أما المصفوفات الرياضية بإشاراتهما ورموزها فتعرض التطور الحديث لهذا الاختصار ، إذ أنه بواسطة إجراء عمليات معينة يمكن عرض النظام القديم في صورة أكثر اختصاراً ومؤدية إلى نفس النتائج المتحصل عليها سابقاً .

ومن الواضح أن موضوع المصفوفات الرياضية محتويماً النظرية وتطبيقاتها هو موضوع كثير من المؤلفات المتخصصة إلا أننا سنناقش في هذا الباب أساساً تلك النواحي من المصفوفات الرياضية التي نحتاجها لشرح الظواهر الاقتصادية كما سبق ذكره عند شرح نظرية سلوك المستهلك ونظرية المنشأة .

ولذلك يمكن تعريف المصفوفة الرياضية بأنها عبارة عن منظوم عمومي Rectangular Array لمجموعة من العناصر أو المكونات عادة ما تكون

في صورة رموز أو أعداد مرتبة في صفوف وأعمدة في قوسين مربعين .
ويحدد كل عنصر بموقعة في المصفوفة الرياضية أو بمعنى آخر في أى صف
وعמוד (بهذا الترتيب) يقع العنصر أو المكون . وعادة ما يشار إلى المصفوفة
الرياضية بحرف كبير وإلى العناصر أو المكونات بنفس الحرف يذيل كل
منها بدليل يبين موقعة . ومن ثم فإن المصفوفة الرياضية :

$$\begin{bmatrix} ١١ & ٢١ & ٣١ & ٤١ \\ ١٢ & ٢٢ & ٣٢ & ٤٢ \\ ١٣ & ٢٣ & ٣٣ & ٤٣ \end{bmatrix} = A$$

وكذلك ففي المصفوفة :

$$\begin{bmatrix} ١ & ٥ \\ ٢ & ١٤ \\ ٥٧ & \text{صفر} \end{bmatrix} = B$$

نجد أن :

$$١ = ١١ \quad ٦ = ١٢$$

$$٥ = ٢١ \quad ٦ = ٥٧$$

$$١٤ = ٢٢ \quad ٦ = \text{صفر}$$

ويمكن القول بصفة عامة أن المصفوفة الرياضية A لها عناصر أو

مكونات a_{ij} حيث تمثل i الصف وتمثل j العمود .

وتعرف أيضاً المصفوفة الرياضية بمجموعها أو ترتيبها أى بعدد صفوفها

وأعمدها. ولذلك فإن المصفوفة A السابقة تعرف بأنها مصفوفة 3×4 حيث أنها مكونة من ثلاثة صفوف وأربعة أعمدة ، وكذلك الحال فإن المصفوفة والموضحة بعاليه عبارة عن مصفوفة 3×2 . ويطلق على المصفوفة الرياضية التي لها عدد متساو من الصفوف والأعمدة « المصفوفة المربعة » Square Matrix والتي لها أهمية خاصة كما سنرى ، كما يطلق على المصفوفة التي تتكون من عمود واحد « المصفوفة ذات العمود » Column Vector والمصفوفة التي تتكون من صف واحد « المصفوفة ذات الصف » Row Vector وكذلك يطلق على المصفوفة التي تكون من صف واحد وعمود واحد « المعامل العددي » Scalar .

ويجب أن نشير الآن أن المصفوفة الرياضية ليس لها قيمة بداخلها أو في حد ذاتها ولكن المصفوفة الرياضية تمدنا ببساطة بوسيلة سهلة للإشارة إلى منظوم عمودي أو جدول أرقام أو رموز .

ويقال لمصفوفتين بأنهما متساويتين إذا كانت فقط كل العناصر أو المكونات في المصفوفه الأولى مساويه لكل العناصر أو المكونات المناظرة في المصفوفه الثانيه أي أن :

$$A = B$$

إذا كانت $a_{ij} = b_{ij}$ بالنسبه لكل i, j أو بمعنى آخر إذا كانت $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, \dots, a_{m1} = b_{m1}$. أي أنه يجب أن يكون كل عنصر في المصفوفه A مساو لنفس العنصر في المصفوفه

ب و بنفس ترتيب العنصر . ومن الطبيعي فإن المصفوفتين يجب أن يكونا بنفس الترتيب .

ويطلق على العناصر أو المكونات التي تساوى a_{ij} بالمكونات القطرية « Diagonal Elements » حيث تقع هذه المكونات على القطر الرئيسى الذى يبدأ من أعلى اليمين إلى أدنى اليسار . كما يطلق على المصفوفة المربعة $n \times n$ التى فيها $a_{ij} = 0$ صفر وأن $a_{ij} = 1$ صفر $i \neq j$ بالمصفوفة القطرية Diagonal Matrix . وكذلك يطلق على المصفوفة القطرية $n \times n$ التى فيها $a_{ii} = 1$ بمصفوفة الوحدة أو المصفوفة المتطابقة Identity Matrix ويرمز إليها بالرمز I . وتلعب المصفوفة المتطابقة نفس الدور الذى يلعبه المعامل العددى 1 . وإذا كانت كل عناصر أية مصفوفة (وليس من الضروري أن تكون مصفوفة مربعة) عبارة عن أصفار فيطلق عليها المصفوفة الصفرية أو مصفوفة العدم Null Matrix .

ومن المصطلحات المستخدمة أيضاً هى تغيير Transpose المصفوفة أى جعل الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف ويرمز إليها بالرمز A^T .

أى أن :

$$a_{ij} = a_{ji}^T$$

فتبعا إذا كان لدينا :

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = A^T$$

فإن :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن :

$$A = A^T$$

ويطلق على المصفوفة المربعة A التي فيها $A = A^T$ بالمصفوفة المنتظمة أو المتماثلة Symmetric Matrix . ولذلك فإن :

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 2 \\ 20 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

تمثل مصفوفة منتظمة أو متماثلة .

والعمليات الجبرية :

سنناقش في هذا البند العمليات الجبرية الأساسية للمصفوفات الرياضية .

ويمكن تعريف عملية جمع المصفوفات الرياضية كالتالي :

$$C = A + B$$

إذا كانت :

$$A_{ij} = B_{ij} = C_{ij}$$

وهكذا إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix} = ٦ \begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ٩ & ٤ \\ ٤ & ٥ \end{bmatrix} = ١$$

ومن ثم فإن :

$$\begin{bmatrix} ٥ & \text{صفر} \\ ١١ & ٥ \\ ٢ & \text{صفر} \end{bmatrix} = ٦ + ١ = ٧$$

ومن الواضح أنه من الضروري أن تكون المصفوفتين من نفس الترتيب حتى يمكن جمعهما أى لا بد أن يكون لها نفس عدد الصفوف والأعمدة . ومن خصائص جمع المصفوفات هي ما يأتي :

$$١ + ٦ = ٦ + ١$$

$$٦ + (٦ + ١) = (٦ + ١) + ٦$$

وتتبع نفس القواعد بالنسبة لطرح المصفوفات الرياضية . أما عملية ضرب المصفوفات الرياضية فيمكن تعريفها كالتالي :

$$١ = ١$$

إذا كانت :

$$٦ \times ١ = ١ \times ٦$$

حيث ٦ تمثل عدد الأعمدة للمصفوفة ١ وعدد الصفوف للمصفوفة ٦

أى أنه لإجراء عملية ضرب المصفوفات الرياضية يجب أن يكون عدد الأعمدة في المصفوفة ١ مساويا لعدد الصفوف في المصفوفة ٢ .
وأن ترتيب المصفوفة ح سيساوى عدد الصفوف في المصفوفة ١ وعدد الأعمدة في المصفوفة ٢ .

افترض مثلا أن :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ٤ & ٥ & ١ \\ ٦ & ٢ & ١ \end{bmatrix} = ب \quad \begin{bmatrix} ٦ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} = ١$$

ويلاحظ أن ١ لها ثلاثة أعمدة وأن ب لها ثلاثة صفوف ، ومن ثم فإن ١ ب يمكن ضربهما . وبذلك تكون عناصر ح = ١ + ب يمكن الحصول عليها كالتالى :

$$\begin{aligned} \text{ح} = ١١ &= ١١ \text{ب} + ١٢ \text{ب} + ١٣ \text{ب} \\ &= ٤ \times ٢ + ١ \times ١ + ٦ \times ١ \\ &= ١٥ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ح} = ٢١ &= ٢١ \text{ب} + ٢٢ \text{ب} + ٢٣ \text{ب} \\ &= ١ \times ٢ + ٥ \times ١ + ٢ \times ٦ \\ &= ١٩ \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \text{ح} = ٣٢ &= ٣١ \text{ب} + ٣٢ \text{ب} + ٣٣ \text{ب} \\ &= (٢- \times ٤) + ٤ \times ٢ + ٦ \times ١ \\ &= ٦ \end{aligned}$$

وتكون المصفوفة الناتجة C التي ترتيبها 2×3 كالتالي :

$$C = \begin{bmatrix} 36 & 19 & 10 \\ 6 & 16 & 19 \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن خصائص ضرب المصفوفات الرياضية هي كالتالي :

$$a \neq b$$

6

$$(a) \neq (b)$$

6

$$(a + b) = (a) + (b)$$

6

$$(a + b) = (a) + (b)$$

وهذا إجراء بسيط يساعد في معرفة إمكان إجراء عملية ضرب المصفوفات وتحديد ترتيب مصفوفه حاصل الضرب الأخيرة . فلو وضعنا تحت كل مصفوفه ترتيبها (الصف فالعمود) كالتالي:

$$a = \begin{matrix} 1 \times 2 \\ 2 \times 3 \end{matrix} \quad b = \begin{matrix} 2 \times 3 \\ 3 \times 4 \end{matrix} \quad c = \begin{matrix} 2 \times 3 \\ 3 \times 4 \end{matrix}$$

فإنه لإجراء عملية الضرب يجب أن تكون : $2 = 3$ و $3 = 4$ وأن ترتيب المصفوفه a يساوي (2×3) . يلاحظ أيضاً أن حاصل ضرب مصفوفه رياضيه في مصفوفه ذات عمود Column Vector سيكون عبارة عن مصفوفه ذات عمود وأن حاصل ضرب مصفوفه ذات صف

ومصفوفة رياضية ستكون مصفوفة ذات صف وأن حاصل ضرب مصفوفة ذات صف في مصفوفة ذات عمود ستكون عبارة عن معامل عددي Scalar.

وتعرف عملية ضرب المعامل العددي بضرب كل عنصر أو مكون في المصفوفة الرياضية بقيمة ثابتة (المعامل العددي). ويجب ملاحظة أن هذه الحالة لا تمثل حالة خاصة من ضرب المصفوفات ولكن إذا ضربنا مصفوفة رياضية بهذا المعامل العددي فإن جميع مكونات أو عناصر المصفوفة يجب ضربها بهذا المعامل.

ومن المهم أن نوضح أنه لم تظهر طريقة الآن يمكننا من قسمة المصفوفات الرياضية ولكن سنستخدم بدلا منها مفهوم معكوس المصفوفة الرياضية Inversion of Matrices. ويعرف معكوس المصفوفة المربعة A والذي سنرمز إليه بالرمز A^{-1} بحيث يكون:

$$I = A^{-1} A$$

أي أن التعبير A^{-1} الذي يمثل معكوس المصفوفة الرياضية A إذا ضربناه في A سيطينا المصفوفة المتطابقة I

ويجب ملاحظه أن :

$$A^{-1} A = I \quad (1)$$

(٢) إذا كانت A مربعة فإن A^{-1} وحيدة Unique.

(٣) إذا كانت A غير مربعة فإن يمكن إيجاد المصفوفة B بحيث

أب = ١ ولكن ب لا تكون وحيدة Unique ولا يطلق عليها المعكوس وليس مجالنا في هذا المؤلف استخدام هذه المصفوفة .

(٤) إذا كانت $a = ab$ (المصفوفة كلها مربعه) فإن .

$$a^{-1}b = a^{-1}$$

(٥) إذا كانت $b = a^{-1}$ فإن $b^{-1} = a$

(٦) إذا كانت a متماثلة Symmetrie فإن a^{-1} متماثلة أيضاً . وسنناقش الإجراءات تحديد معكوس المصفوفة الرياضية لطورها في بند مستقل .

المعادلة المستقيمة :

إن المعادلات الرياضية التي تتضمن نظم المعادلات المستقيمة الآتية يمكن القيام بها باستخدام التعاريف والعمليات الجبرية الخاصة بالمصفوفات السابق مناقشتها فإذا فرضنا أن a تمثل المصفوفة الرياضية $a \times b$ وأن s b تمثل كل منها مصفوفة ذات عمود واحد مكونة من b من العناصر لذلك فإن المعادلة الآتية :

$$\underline{a} = \underline{s} \underline{b}$$

تمثل نظاماً مكوناً من b من المعادلات المستقيمة في b من المتغيرات غير المعروفة s بالشكل الآتي :

$$\begin{aligned} a_1 s_1 &= a_1 s_1 + 000 + a_2 s_2 + a_3 s_3 \\ a_2 s_2 &= a_2 s_2 + 000 + a_3 s_3 + a_4 s_4 \\ &\vdots \\ a_n s_n &= a_n s_n + 000 + a_{n+1} s_{n+1} + a_{n+2} s_{n+2} \end{aligned}$$

وهكذا نجد أن المصفوفة A تمثل المعادلات للمتغيرات في المعادلات ويطلق عليها مصفوفة المعادلات. ومن البديهي يمكن حل هذا النظام من المعادلات بالجبر العادي عن طريق حذف المتغيرات بسلسلة من ضرب وجمع المعادلات حتى نصل إلى معادلة تحتوي على متغير واحد فقط ثم التحويل لإيجاد قيم باقي المتغيرات.

ولكن باستخدام المصفوفات الرياضية يمكن حل مصفوفة المعادلات

$$\begin{aligned} A^{-1} &= A^{-1} \\ I &= A^{-1} A \\ S &= A^{-1} B \end{aligned}$$

إلا إننا سنرى أن ذلك لن يساعد حقيقة في الحل الحقيقي للمصفوفة S حيث إن إيجاد A^{-1} يتضمن 'بصفة عامة' مجرود مماثل المجهود المطلوب في حل المعادلات بالطريق العادي ومع ذلك حيث أنه يمكن استخدام الرموز سنجد أن الحل يمكن أن يكون نافعا. كما يلاحظ أنه إذا كان لدينا مجموعات مختلفة من المعادلات.

$$\underline{a} = \underline{b}$$

$$\underline{a} = \underline{c}$$

$$\underline{a} = \underline{d}$$

فسنحتاج إلى معكوس المصفوفة أفقط مرة واحدة . أى أن :

$$\underline{a}^{-1} = \underline{b}$$

$$\underline{a}^{-1} = \underline{c}$$

$$\underline{a}^{-1} = \underline{d}$$

معكوس المصفوفات الرياضية : Inversion of Matrices

أوضحنا سابقاً أن تعريف معكوس المصفوفة الرياضية لا يتضمن في حد ذاته إجراءات حسابية . وتقتصر أحد النظريات الأساسية الخاصة بوجود معكوس المصفوفة الرياضية تلك الإجراءات (طريقة العوامل المشتركة Cofactors) ولو أنها مطولة بعض الشيء . ولذلك يوجد عدد كبير من الخوارزميات Algorithms لحساب معكوس المصفوفة الرياضية . وفي الحقيقة يمكن القول أن Algorithm لحساب معكوس المصفوفة الرياضية عبارة عن إجراء ينتج مصفوفة التي سيكون لها طبيعياً الخصائص الأساسية لمعكوس المصفوفة الرياضية . وفي الحقيقة . لا يمكن ضمان هذا المعكوس ، فمثلاً فإن الأخطاء التقريبية Roundoff Errors تنتج دائماً مصفوفة والتي لن يكون لها خصائص معكوس المصفوفة الرياضية .

وسنعرض الآن الماكوس الأليوريثمي Inversion Algorithm ويعرف
بطريقة دوليتل المختصرة Abbreviated Doolittle والتي يقتصر تطبيقها على
المصفوفات المتماثلة . ويجب ملاحظة أن معظم مشاكل الانحدار يجرى حلها
على العقول الإلكترونية ذات السرعة العالية والتي بصفة عرضية لا تستخدم
عادة طريقة دوليتل المختصرة . ومع ذلك فإننا نوصى بحل بعض المشاكل
باليد باستخدام هذه الطريقة ، وسنرى أن طريقة دوليتل المختصرة
تؤدي إلى نتائج مشجعة مثل المحصلات الجانبية by — Products ومن
أمثلة ذلك حل معادلة المصفوفات .

$$\underline{1} = \underline{S} = \underline{V}$$

والتي يكون حلها عبارة عن :

$$\underline{S} = \underline{1} = \underline{V}$$

وسنوضح الآن هذه الإجراءات بالنسبة للمصفوفات 4×4 وليست
هناك صعوبة بالنسبة للمصفوفات ذات الأحجام الكبيرة . فإذا رمزنا إلى
عناصر المصفوفة 1 بالرمز $11z$ وإلى عناصر المصفوفة v بالرمز $11v$ أي
لعمود الصادى للمصفوفة 1 . ويكتب الجزء الأعلى على اليمين لهذه
المصفوفة على ورقة عادية كما هو موضح بعد مع عمود المجموع للمراجعة
ويرمز إليه $11r$. ويلاحظ أن هذا العمود يمثل مجموع كل الأعمدة
للمصفوفة 1 متضمنًا العناصر التي لم تكتب على الورقة العادية . ويمكن
بعد ذلك اتباع الإجراءات المبينة . ومن الواضح أن عمود المراجعة قد

حسب بنفس الصورة التي تم بها حسب العناصر في الجدول . ويلاحظ أن المراجعة هي أن مجاميع الصفوف الموضحة مساوية (عرضة إلى خطأ التقريب Roundoff Error) للعناصر المحسوبة . فإذا لم تكن كذلك فإن ذلك يعنى وجود خطأ حسابي .

ولذلك فإن هذه الإجراءات هي عبارة عن تحويل المجموعة الأصلية للمعادلات إلى مجموعة جديدة من المعادلات ولكن بصنوفة معاملات مثلثية Triangular Coefficient Matrix . وكما هو موضح من الورقة العادية فإن مجموعة المعادلات بمعاملاتها هي :

$$\begin{aligned} s_1 &= b_1 + s_2 a_{21} + s_3 a_{31} + s_4 a_{41} \\ s_2 &= b_2 + s_3 a_{32} + s_4 a_{42} \\ s_3 &= b_3 + s_4 a_{43} \\ s_4 &= b_4 \end{aligned}$$

ومن الواضح أنه ليست هناك صعوبة للحصول على الحل للمتغيرات s .

$$\begin{aligned} s_4 &= b_4 \\ s_3 &= b_3 - s_4 a_{43} \\ s_2 &= b_2 - s_3 a_{32} - s_4 a_{42} \\ s_1 &= b_1 - s_2 a_{21} - s_3 a_{31} - s_4 a_{41} \end{aligned}$$

وسنرى مؤخرًا أنه من الضروري دائما الحصول فقط على الحل ولكن

طبقا لهذه الإجراءات فإننا نحصل على الحل دون الحصول على معكوس المصفوفة الرياضية.

وللهصول على معكوس المصفوفة الرياضية والتي سنرمز له بالرمز H والذي يتكون من العناصر h_{ij} سنتبع الإجراءات التالية . ويجب ملاحظة أن H يجب أن تكون متماثلة ومن ثم فإنه يجب حساب النصف الأيمن إلى أعلى فقط.

$$h_{44} = \frac{1}{1}$$

$$h_{33} = h_{44}^{-1}$$

$$h_{22} = h_{33}^{-1} - h_{34} h_{44}^{-1}$$

$$h_{11} = h_{22}^{-1} - h_{23} h_{33}^{-1} - h_{24} h_{44}^{-1}$$

برنامج طريقة دوليتل المختصرة

(الجزء المتقدم Forward Portion)

المراجعة	المصفوفة
٧-١	أ١١ أ٢١ أ٣١ أ٤١ أ٥١
٧-٢	أ٢٢ أ٣٢ أ٤٢ أ٥٢
٧-٣	أ٣٣ أ٤٣ أ٥٣
٧-٤	أ٤٤ أ٥٤
٧-١	أ١١ أ٢١ أ٣١ أ٤١ أ٥١
٧-٢	ب١١ ب٢١ ب٣١ ب٤١ ب٥١
٧-٣	أ٢٢ أ٣٢ أ٤٢ أ٥٢
٧-٤	ب٢٢ ب٣٢ ب٤٢ ب٥٢
٧-٤	أ٣٣ أ٤٣ أ٥٣
٧-٤	ب٣٣ ب٤٣ ب٥٣
٧-٤	أ٤٤ أ٥٤
٧-٤	ب٤٤ ب٥٤

المعادلات :

$$\begin{aligned}
 a_{1j} &= a_{j1} \\
 b_{1j} / a_{1j} &= b_j \\
 a_{2j} - a_{21} a_{1j} &= a_{2j} \\
 b_{2j} / a_{2j} &= b_j \\
 a_{3j} - a_{31} a_{1j} - a_{32} a_{2j} &= a_{3j} \\
 b_{3j} / a_{3j} &= b_j \\
 a_{4j} - a_{41} a_{1j} - a_{42} a_{2j} - a_{43} a_{3j} &= a_{4j} \\
 b_{4j} / a_{4j} &= b_j
 \end{aligned}$$

ملاحظات :

١- $a_{ij} = 0$ ، $i < j$ = صفر بالتعريف . ولذلك لم تحسب هذه القيمة كما توضح .

$$a_{ii} = 1 \text{ ، لكل } i$$

٣- وفي كل المصفوفات الإحصائية $a_{ii} \leq$ صفر .

ويلاحظ أن الصف الأخير في $a = 1$. وبالتعريف الخاص بمعكوس المصفوفة الرياضية فإن مجموع حواصل الضرب لهذه العناصر مع العناصر في الصف الأخير (أو العمود حيث أن المصفوفات متماثلة) يجب أن تساوي واحد صحيح وإلا فإن هناك خطأ حسابيا .

$$ح_{٣٣} = ١ / ١ - ح_{٣٣} ح_{٣٣} - ح_{٣٣} ح_{٣٣}$$

$$ح_{٣٢} = - ح_{٣٣} ح_{٣٢} - ح_{٣٢} ح_{٣٣} - ح_{٣٢} ح_{٣٢}$$

$$ح_{٣١} = - ح_{٣٢} ح_{٣١} - ح_{٣٣} ح_{٣١} - ح_{٣١} ح_{٣٣} - ح_{٣١} ح_{٣١}$$

وللمراجعة مرة أخرى عن طريق الضرب في الصف الثالث للمصفوفة ١.

$$ح_{٢٢} = ١ / ١ - ح_{٢٢} ح_{٢٢} - ح_{٢٢} ح_{٢٢} - ح_{٢٢} ح_{٢٢}$$

$$ح_{٢١} = - ح_{٢٢} ح_{٢١} - ح_{٢٣} ح_{٢١} - ح_{٢١} ح_{٢٣} - ح_{٢١} ح_{٢١}$$

وللمراجعة مرة أخرى عن طريق الضرب بالعناصر في الصف الثاني

للمصفوفة ١.

$$ح_{١١} = ١ / ١ - ح_{١١} ح_{١١} - ح_{١١} ح_{١١} - ح_{١١} ح_{١١} - ح_{١١} ح_{١١}$$

وكذلك يمكن المراجعة عن طريق الضرب بالعناصر في الصف الأول

للمصفوفة ١ . وليس بعيدا عن الاحتمال (رغم إمكان حدوثه) أن

المراجعات الموضحة بعاليه تسمح باكتشاف الأخطاء الحسابية ولكن ننصح

بالمراجعة إذا كانت العناصر غير القطرية للمصفوفات ح ١ تساوى صفرا

(عرضة إلى الخطأ التقريبي) .

عمليات مصفوفات التقسيم : Partitioned Matrices

يمكن اعتبار أن المصفوفة الرياضية تشتمل على مصفوفات فرعية ،

أو بمعنى آخر يمكن القول أن المصفوفة الرياضية يمكن تجزئتها . ولذلك

فإن المصفوفة الرياضيه الآتية يمكن تجزئتها كما هو موضح :

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ ٥ & ١ \\ ٢ & ٢ \\ \hline ٢ \text{ صفر} \end{bmatrix} = ٦ \text{ ب} \quad \begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٩ & ٤ \\ ٥ & ٤ & ٢ & ١ \\ \hline ١ & ٢ & ٦ & ٩ \end{bmatrix} = ١$$

ويمكن الإشارة إلى المصفوفات الفرعية للمصفوفة ١ بالرمز م
وللمصفوفات الفرعية للمصفوفة ب بالرمز ل. لإيضاح موقع المصفوفة
الفرعية كما لو كانت عنصرا مع عدم ضرورة حذف المزيلات .

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٩ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ١ \end{bmatrix} = ١١٢$$

$$\begin{bmatrix} ٦ \\ ٥ \end{bmatrix} = ٢١٢$$

$$\text{ل} = (٢, \text{صفر}) \text{ الخ} .$$

ويمكن القيام بكل عمليات المصفوفات الرياضية الكاملة باستخدام
المصفوفات الفرعية كما لو كانت عناصر ، وستكون النتائج مشابهة كما لو
كان القيام بها على المصفوفات الكاملة . ولذلك فإن المصفوفتين ١ و ٦
تصلبان لعملية الضرب وكذلك المصفوفات الفرعية . ومن ثم فإن .

$$\begin{bmatrix} \text{ل} ١١٢ + \text{ل} ٢١٢ \\ \hline \text{ل} ٢١٢ + \text{ل} ٢١٢ \end{bmatrix} = \text{ص}$$

ونود ملاحظة أننا نرغب في تجزئة المصفوفة المربعة إلى أربعة مصفوفات
فرعية بحيث تكون المصفوفات الفرعية على القطر الرئيسي أيضا
مربعة أى أن

$$\begin{bmatrix} ٢١م & ١١م \\ ٢٢م & ١٢م \end{bmatrix} = ١$$

حيث م ١١م م ٢٢م مصفوفات مربعة . وباستخدام هذه التجزئة سنبحث
خصائص معكوس المصفوفة ١ وتطبيقاتها لنظم المعادلات المستقيمة .
فإذا رمزنا إلى :

$$\begin{bmatrix} ٢١ل & ١١ل \\ ٢٢ل & ١٢ل \end{bmatrix} = ب \begin{bmatrix} ٢١م & ١١م \\ ٢٢م & ١٢م \end{bmatrix} = ١$$

حيث ا ب م ١١م م ١٢م م ١١ل م ١٢ل م ٢٢ل م مصفوفات مربعة م
ا ب م ١١م م ١٢م م ١١ل م ١٢ل م ٢٢ل م ٠٠٠ م إلخ من نفس الترتيب ، ويلاحظ أنه
إذا كانت ب = ١^{-١} فإن :

$$١ = ب$$

أو

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢١ل & ١١ل \\ ٢٢ل & ١٢ل \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ٢١م & ١١م \\ ٢٢م & ١٢م \end{bmatrix}$$

وباستخدام القواعد العادية لضرب المصفوفات الرياضية فإن :

$$١ = ١١م + ١١ل$$

$$111 \text{ ل} + 21 \text{ ل} + 22 \text{ ل} = \text{صفر}$$

$$111 \text{ ل} + 11 \text{ ل} + 22 \text{ ل} = \text{صفر}$$

$$1 = 22 \text{ ل} + 21 \text{ ل}$$

ويمكن حل هذه المعادلات الأربعة لقيم ل_{١١} ل_{٢١} ل_{١٢} ل_{٢٢} (ومن ثم ب) كالتالي :

$$\text{ل} = 111 - (22 \text{ ل} + 21 \text{ ل}) = 111 - 43 \text{ ل}$$

$$\text{ل} = 22 - (22 \text{ ل} + 11 \text{ ل}) = 22 - 33 \text{ ل}$$

$$\text{ل} = 111 - (22 \text{ ل} + 11 \text{ ل}) = 111 - 33 \text{ ل}$$

$$\text{ل} = 22 - (22 \text{ ل} + 11 \text{ ل}) = 22 - 33 \text{ ل}$$

ويجب ملاحظة أن إيجاد المعكوس بالتجزئة لن ينتج وفر في زمن العقل الإلكتروني (سواء باليد أو تومانيكيا) ولذلك لا ننصح باستخدامها كطريقة للحساب فيما عدا :

١ - إذا كانت المصفوفة كلها كبيرة جدا لدرجة يمكن تناولها أو تخزينها في العقل الإلكتروني .

٢ - وإذا كانت أو إذا كانت المصفوفة الرياضية لها خصائص معينة أو أنماط معينة ، فمثلا إذا كانت $111 = \text{صفر}$ فإن إيجاد المعكوس بالتجزئة يصبح أكثر سهولة .

ومع ذلك فإننا نرغب في تطبيقات التجزئة للمصفوفات إلى نظم المعادلات المستقيمة . وبصفة خاصة سندرس التأثير على حل ذلك النظام إذا حذفنا معادلات ومتغيرات مختلفة من النظام .

افترض أن لدينا الحل لكل النظام $(n \times n)$ أي لدينا المعادلة :

$$\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$$

والحل :

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1} \underline{b}$$

ونود الآن إيجاد الحل للمصفوفة الفرعية :

$$\underline{A}_{11} \underline{x}_1 = \underline{b}_1$$

وبكلام آخر ، نرغب في إيجاد \underline{x}_1 بدون إيجاد معكوس \underline{A}_{11} مباشرة . ويلاحظ أن الحل \underline{x}_1 لن يساوى الجزء الأول للمصفوفة \underline{x} ، أي \underline{x}_1 . وباستخدام معادلة معكوس التجزئة فإن :

$$\underline{e}_1 = (\underline{A}_{11}^{-1} \underline{A}_{11} - \underline{A}_{11}) \underline{e}_1$$

والتي يمكن استنتاج التحويل Converse

$$\underline{e}_1 = (\underline{A}_{11} - \underline{A}_{11} \underline{A}_{11}^{-1}) \underline{e}_1$$

ومن ثم :

$$\underline{e}_1 = \underline{A}_{11}^{-1} (\underline{A}_{11} - \underline{A}_{11} \underline{A}_{11}^{-1}) \underline{e}_1$$

تمثل تعبيراً يتضمن معكوس \underline{A}_{11} فقط . ويمثل ذلك تخفيضاً كافياً في الحساب إذا كانت \underline{A}_{11} (وهي \underline{e}_1) صغيرة . وبصفة خاصة افترض

الحالة التي يكون فيها ترتيب m_{21} (ومن ثم e_{22} ، b_{21} ، s_{21}) هو (1×1) أى معاملات عدديا Scalar . ولذلك فإن :

e_{22} هى $[1 - (1 - 1) \times 1]$ مصفوفة ذات عمود واحد ويشار إليها بالرمز b_{21} بعناصر b_{ji}

e_{22} هى $[1 \times (1 - 1)]$ مصفوفة صف واحد ويشار إليها بالرمز b_{21} بعناصر b_{ij}

e_{22} معاملا عدديا ويشار إليه بالرمز b_{21} والتي معكوسها هو $1/b_{21}$

وأصبح معادلة m_{11} الآن هى :

$$m_{11} = 1 - 1/b_{21} [b_{21} b_{12}]$$

وكذلك العناصر الفردية للمعكوس m_{11} يشار إليه بالرمز .

b_{ji}^* ستكون .

$$b_{ji}^* = 1 - (b_{ij} b_{21}) / b_{21}$$

وهى معادلة سهلة جدا فى حسابها .

ويمكن كذلك توفير إجراءات حسابية للحصول على الحل s_{21}

للمعادلة :

$$m_{11} s_{21} = 1$$

ونعرض الآن طريقة اشتقاق هذا الإجراء بالتفصيل لتوضيح بعض مبادئ العمليات الجبرية للمصفوفات . فمثلا سبق أن كان لدينا .

$$\underline{S}_1^* = \underline{M}_{11}^{-1}$$

$$= (\underline{E}_{11} - \underline{E}_{21} \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12})^{-1}$$

$$= \underline{E}_{11}^{-1} - \underline{E}_{21} \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12}^{-1}$$

وبجمع وطرح $\underline{E}_{21} \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12}^{-1}$ نكتب

$$\underline{S}_1^* = \underline{E}_{11}^{-1} + \underline{E}_{21} \underline{E}_{22}^{-1} - \underline{E}_{21} \underline{E}_{22}^{-1} - \underline{E}_{21} \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12}^{-1} \underline{E}_{12}$$

ولكن من حل النظام كله نعرف أن :

$$\underline{S}_1 = \underline{E}_{11}^{-1} + \underline{E}_{21} \underline{E}_{22}^{-1}$$

ومن ثم يمكن كتابة

$$\underline{S}_1^* = \underline{S}_1 - \underline{E}_{21} \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12}^{-1} \underline{E}_{12}$$

ويمكن تبسيط التعبير بضرب العناصر داخل القوسين في $(\underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12})$

$I = 0$ ومن ثم فإن :

$$\underline{S}_1^* = \underline{S}_1 - \underline{E}_{21} \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12}^{-1} \underline{E}_{12} \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12}$$

وبتحليل $\underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12}$ فإن :

$$\underline{S}_1^* = \underline{S}_1 - \underline{E}_{21} \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12}^{-1} \underline{E}_{12} \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12} = \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12}^{-1} \underline{E}_{12} \underline{E}_{22}^{-1} \underline{E}_{12}$$

ونرغب في معرفة الحل لقيم s_1 و s_2 فقط باستخدام المعادلتين الأولىين . أى :

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

وباستخدام المعادلات المنخفضة نحتاج إلى :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} = s_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = s_2 \begin{bmatrix} 3/7 \end{bmatrix}$$

ومن ثم فإن :

$$s_1 = 11 = s_2 - 11 = s_1 - 11 = 22 / 11$$

$$\frac{4}{7} = \frac{(1-)(1-)}{3/7} - 1 =$$

$$\frac{4}{7} = (3/7) / (1-)(1-) - 2 =$$

$$s_1 = 21 = s_2 - 21 = s_1 - 21 = 42 / 21$$

$$\frac{1}{7} = (3/7) / (2-)(1-) - 1 =$$

وتتكون عناصر مصفوفة الحل (s_1) هي :

$$s_1 = 1 = s_2 - 1 = s_1 - 1 = 4 / 3$$

$$(3/7) / (1)(1-) - 4 =$$

$$= 7/31$$

وتكون النتائج النهائية هي :

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1} & \sqrt{4} \\ \sqrt{2} & \sqrt{1} \end{bmatrix} = {}^*L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{21} \\ \sqrt{20} \end{bmatrix} = \underline{\underline{S}} \quad 6$$

معادلات الدرجة الثانية : Quadratic Forms

إذا كان لدينا مصفوفة متماثلة A ($n \times n$) ومصفوفة ذات ترتيب واحد V فإنه يمكن تعريف معادلة الدرجة الثانية كالاتي :

$$L = \underline{\underline{V}}^T A \underline{\underline{V}}$$

والتي يمكن كتابتها جبريا كالاتي :

$$L = \sum_i \frac{a_{ii}}{i} v_i^2 + \sum_{j < i} \frac{a_{ij}}{j} v_i v_j$$

أو

$$L = \sum_i \frac{a_{ii}}{i} v_i^2 + \sum_{j < i} \frac{a_{ij}}{j} v_i v_j$$

وتمثل ذلك فقط مجموع كل التوليفات الممكنة المربعة وحواصل

الضرب Cross Products للكمية v_i بأوزان معينة تعطى في مصفوفة A .

وإذا كانت A تمثل مصفوفة قطرية Diagonal Matrix فإن الشكل التربيعي

Quadratic Form هو مجموع المربعات .

وتوجد فئة أو مجموعة من المصفوفات المتماثلة يطلق عليها المصفوفات

الموجبة المحددة Positive Definite Matrices بحيث تكون

ل موجبة لأى (ليست أصلية) مصفوفة ذات ترتيب واحد ص . ولسوء الحظ لا توجد اختبارات بسيطة لهذه الخاصية ، وأحد هذه الاختبارات هو نتيجة طريقة دوليتل المختصرة إذا كانت Leading Terms (ص) (ii) للحل المتقدم موجبة فإن المصفوفة ص تكون موجبة محددة :

ويلاحظ أنه إذا كانت ص موجبة محدودة فستكون كذلك ص - ١ وكذلك حالة خاصة فإن مصفوفة معينة تكون موجبة وشبه محدودة Semi-definite إذا كانت ل ليست سالبة (أى أن الصفر ممكنا) لأى ص .

وقد يكون من المرغوب فيه فى بعض الأحيان الحصول على الشكل التربيعى Quadratic Form من نوع :

$$ل = \underline{\underline{ص}} \quad \underline{\underline{ص}} \quad \underline{\underline{ص}}$$

ويمكن إجراء ذلك بدون إيجاد معكوس ص . وللحصول (عن طريق الجزء المتقدم لطريقة دوليتل) على الحل ص للمعادلة ص = ص . ونعرف أن ص = ص - ١ ومن ثم تمثل ص ص الكمية المرغوبة .