تمارين عامة

إذا أعطيت دالة المنفعة التالية

$$م = ٢ ك_١^{٢} + ٤ ك_٢^{٢}$$

وأن خط الميزانية هو

$$ى = ع_١ ك_١ + ع_٢ ك_٢$$

فالمطلوب :

(ا) مستخدما مضروبات لاجرانج بيان كيفية اشتقاق دوال الطلب لكل من $ك_١ ، ك_٢$

(ب) ما هى الكمية المطلوبة من $ك_١ ، ك_٢$ عند

$ى = ٣$ ، $ع_١ = ٥$ ، $ع_٢ = ١٠$

(حـ) مستخدما محدد هاسين هل توجد نهاية كبرى أو صغرى فى (ب) .

(ء) بيان درجة التجانس بالنسبة لكل من الأسعار والدخل فى (٣) .

(و) وضح علاقة اسلتسكى .

$$\frac{\partial ك_١}{\partial ع_٢} = \frac{\partial ك_٢}{\partial ع_١}$$

(ل) ماذا يحدث لو حدث تغير قدره ١ ٪ فى الكمية على الدخل الكلى .

٢ — م = ك$_{١}$ ك$_{٢}^{٢}$

وضح كما سبق ذكره من (١) إلى (ل) فى (١) بفرض أن فى (ب) ، (حـ) هى:

ى = ٣٠٠ ، ع$_{١}$ = ٢٥ ، ع$_{٢}$ = ٥٠

٣ — م = ك$_{١}^{٣}$ ك$_{٢}^{٤}$

وضح كما سبق ذكره من (١) إلى (ل) فى (١) بفرض أن فى (ب) ، (حـ) هى:

ى = ٧٠ ، ع$_{١}$ = ٣ ، ع$_{٢}$ = ٤

٤ — بين كيفية اشتقاق دالة الطلب للسلعة ك$_{١}$ إذا علم أن :

م = ك$_{١}^{٢}$ ك$_{٢}^{٢}$ ك$_{٣}^{٢}$

هل درجة التجانس لدالة الطلب فى الدخل والأسعار مساوية للصفر .

٥ — بفرض أن دالة المنفعة هى :

م = ٨ ك$_{١}$ ك$_{٢}$

، ى = ١٠٠ جنيها وأن سعر الوحدة من السلعة الأولى ك$_{١}$ = ٢ جنيها ، سعر الوحدة من السلعة الثانية ك$_{٢}$ = ٤ جنيها . فأوجد كميات التوازن المطلوبة وكذلك المنفعة الحدية للنقود .

٦ — عرف المرونة السعرية للطلب ثم احسبها عند السعر ع = ٥ لدالة الطلب التالية .

ك = ٤٠ — ٢ ع

وبفرض أن محتكراً تكاليفه فقط هى التكاليف الثابتة وبفرض أن أن هذا المحتكر يريد معظمة إيراده فهل تعتقد أن هذا المحتكر سيمعظم عند هذه النقطة (المرونة) لدالة الطلب هذه ؟ لو كانت الإجابة بالنفى فعند أى نقطة على دالة الطلب سيقوم المحتكر ببيع إنتاجه ؟ إثبت أن ذلك لحالة العموم .

٧ — بفرض أن دالة المنفعة هى :

م = ٢ ك$_{١}$ ك$_{٢}$

ى = ٤٠٠

وأن سعر الوحدة من السلعه ك$_{١}$ = ع$_{١}$ = ٢ جنيها

» » » » ك$_{٢}$ = ع$_{٢}$ = ٤ »

مستخدما مضروبات لاجرانج أوجد كميات التوازن والمنفعة الحديه للنقود .

٨ — يتكون السوق العالمى من السوق المحلى وكذلك الأسواق الأجنبيه . فبفرض أن كميات التوازن فى السوق المحلى والأسواق الأجنبية هى ١٠ ، ١٠٠ على التوالى ، المرونة السعرية لدالة الطلب فى السوق المحلى هى — $\frac{١}{٢}$

وأن المرونه السعرية فى السوق العالمى هى - ٢,٠ فأوجد المرونه السعريه لداله الطلب فى السوق الأجنبى .

إثبت العلاقة التى استخدمتها لاشتقاق مرونة الطلب فى السوق الأجنبى لحالة العموم .

٩ — شخصان ا ، ب قال أحدهما وليكن ا لو أن دوال الطلب خطيه والهوامش السوقية ثابته فإن داله التجزئه (الموجودة أعلى داله سوق الجملة) تكون أكبر مرونه من سوق الجملة ، ولكن ب لم يوافق على هذا ، فبين تحت أى من الظروف يكون كل منهما على صواب .

١٠ — بفرض أن دالة الطلب لسوق التجزئة هى

$$ك_{١} = ٢٠ - ٥ ع_{١}$$

(ا) إحسب المرونه السعرية لداله سوق التجزئة عند السعر $ع_{١} = ٢$

(ب) بفرض أن المعادلة الهامشية

$$ع_{١} = ٢ + \frac{١}{٢} ع_{٢}$$

حيث $ع_{٢}$ = سعر الوحدة لسوق الجملة

فأحسب مرونة داله طلب سوق الجمله عند $ع_{٢} = ٢$

(ح) بفرض أن المعادلة الهامشيه $ع_{١} = ١\frac{١}{٢} ع_{٢}$ فاحسب مرونة داله طلب سوق الجملة عند $ع_{٢} = ٢$

(د) بفرض أن المعادلة الهامشية هى

$$ع_{١} = ٣ + ع_{٢}$$

فاحسب مرونة سوق الجملة عند السعر ع$_{١}$ = ٢

١١ — اشتق دوال الطلب للسلعة ك$_{١}$ للمستهلكين ١ ، ٢ إذا علم أن :

م = ك$_{١}^{\frac{1}{2}}$ ك$_{٢}^{\frac{1}{2}}$ للمستهلك ١

م = ك$_{١}^{٢}$ ك$_{٢}$ للمستهلك ٢

وأن قيد الدخل

ى = ع$_{١}$ ك$_{١}$ = ع$_{٢}$ ك$_{٢}$ لكل من ١ ، ٢

١٢ — بفرض أن ى (الدخل) ، ع$_{٢}$ ، ك$_{٢}$ كالتالى فى المسألة رقم (١١) .

ى = ٢٠ للمستهلك ١

ى = ٣٠ للمستهلك ٢

ع$_{٢}$ = ١٠٠ لكل من ١ ، ٢

فأوجد دالة الطلب الكلية للسلعة ك$_{١}$. ثم أوجد سعر التوازن ع$_{١}$ الكمية الكلية (ك) وتوزيعها بين المستهلكين ١ ، ٢ تحت حالة سوق حرة إذا علم أن ك$_{١}$ = ١ + ع$_{١}$

١٣ — إذا كانت داله الإنتاج

ك = — ٨٠ + ٥٠ س — ٥ س^{٢}

(١) أوجد النقط التى تتقاطع دالة الإنتاج مع المحور الأفقى

(محور عنصر الإنتاج) ، نقطة معظمة متوسط الإنتاج ، ونقطة معظمة دالة الإنتاج . بين هذه بيانياً موضحا المراحل الثلاث للإنتاج .

(ب) ما هى معادلة كل من متوسط الإنتاج الحدى ، ثم بين عند أى نقطه يكون الإنتاج الحدى مساوياً لمتوسط الإنتاج .

(جـ) بفرض أن ثمن الوحدة من السلعة ك هو ٢ جنيه وأن سعر الوحدة من عنصر الإنتاج هو ٢٠ جنيها وضح معادلة الربح ثم بين معظمة الربح . احسب كمية عنصر الإنتاج وكذلك كمية السلعة ك التى تعظم الربح الكلى .

(د) أوجد النقطة (قيم س ، ك) التى يكون عندها دالة الإنتاج متجانسة بدرجة الوحدة ثم بدرجة صفرية . مستخدماً نظرية أيلر . برهن على أن عائد السلعة ثابتاً عندما تكون دالة الإنتاج درجة تجانسها الوحدة .

١٤ — بفرض أن دالة الإنتاج التالية هى :

$$ك = س_1^{\frac{٢}{٤}} س_2^{\frac{١}{٤}}$$

حيث $س_1$ ، $س_2$ عناصر الإنتاج وأن ك الإنتاج

(ا) أوجد درجة التجانس لهذه الدالة مستخدما تعريف التجانس .

(ب) أوجد معادلة منحنى الإنتاج المتماثل ، المعدل الحدى للإحلال ، كذلك معادله الممر الممتد .

(حـ) مستخدما مضروبات لاجرانج أوجد أقل نفقة لإنتاج ١٠٠ وحدة والسلعة ل بفرض أن سعر الوحدة من عنصر الإنتاج س١ = ٢ جنيه ، سعر الوحدة من عنصر الإنتاج س٢ = ٤ جنيه .

(د) بفرض أن منشأة لديها ٨٠ جنيها فقط لانفاقها على كل من س١ ، س٢ . فأوجد أكبر كمية يمكن إنتاجها من السلعة ل .

١٥ — بفرض أن دالة الإنتاج التالية هى :

$$ل = ٢٠ - \frac{٢}{س_١} - \frac{١}{س_٢}$$

(ا) أوجد الربح المعظم الغير مقيد عندما يكون سعر الوحدة من السلعة ل = ١٦ جنيها ، سعر الوحدة من عنصر الإنتاج س١ = ٢ جنيها ، مصغر الوحدة من عنصر الإنتاج س٢ = ٤ جنيها .

(ب) بين الكميات لكل من س١ ، س٢ ، ل لمعظمة الربح . ما هى التكاليف الكلية والإيراد الكلى .

(حـ) بفرض أن المنشأة لديها ١٥ جنيها من رأس المال لشراء عناصر الإنتاج س$_{١}$ ، س$_{٢}$ بين الكميات التى يمكن شراؤها من س$_{١}$ ، س$_{٢}$ عرضه لهذا القيد لمعظمة الربح وكذلك الكفاءة الحدية لرأس المال .

(ء) اشرح ماذا حدث للربح الكلى تحت هذا القيد فى (حـ) .

١٦ — بفرض أن دالة الإنتاج ك$_{١}$ = د (س$_{١}$ ، س$_{٢}$) بين الأسباب التى من أجلها يجب على المنشأة أن تنتج فى المرحلة الثانية . وبناء على دالة الانتاج التالية .

$$ك_{١} = ٦ س_{١}^{٢} - س_{١}^{٣}$$

أوجد نسبة سعر عنصر الإنتاج بالنسبة إلى سعر الإنتاج $\frac{ب_{١}}{ع_{١}}$ التى يجب على المنشأة الحصول عليه قبل إيقاف استخدام عنصر الإنتاج س$_{١}$.

١٧ — بفرض أن منشأة يستخدم عناصر إنتاج هى

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ... ، س$_{ن}$

لإنتاج عدد قدره من السلع

ك$_{١}$ ، ك$_{٢}$ ، ... ، ك$_{م}$

عرف ثلاث ظواهر للكفاءة الاقتصادية التى يجب أن تتبعها المنشأة لمعظمة الربح تحت حالة المنافسة الحرة .

١٨ — بفرض أن دالة الإنتاج هى

$$ك_{1} = ١٢ س_{1}^{٢} - س_{1}^{٣}$$

(ا) أوجد نقط تقاطع هذه الدالة مع محور عنصر الإنتاج $س_{1}$

(ب) أوجد الإنتاج الحدى ومتوسط الإنتاج لهذه الدالة بين نقط معظمة كل منهما .

(حـ) بين النقطة التى يكون عندها الإنتاج الكلى معظما .

(ء) بين بالرسم الإنتاج الكلى والحدى وحدود مراحل الإنتاج الثلاث .

(هـ) مستخدما نظرية إيلر حدد درجة تجانس هذه الدالة للوحدة .

(و) بفرض أن ثمن الوحدة من عنصر الإناج يساوى لاشىء . احسب الكمية التى تستخدم من عنصر الإنتاج بفرض أن المنشأة المستخدمة لهذا العنصر تريد معظمة الربح .

(ل) إحسب نسبة سعر عنصر الإنتاج إلى سعر الإنتاج $\frac{ع_{1}}{ث}$ التى يجب أن تحصل عليه المنشأة بفرض أنها تريد معظمة الربح .

١٩ — بفرض أن دالة الإنتاج هى:

$$ك = س_1^{\frac{1}{3}} \, س_2^{\frac{2}{3}}$$

(ا) إحسب معادلة منحنى الإنتاج المتماثل لهذه الدالة

$$س_1 = د (ك ، س_2)$$

(ب) إحسب معادلة الممر الممتد ثم بين هل من الممكن استخدام الصفر $س_1$ أكثر من $س_2$ لو أن $س_2 = ٤$ جنيها ، $س_1 = ٢$ جنيها (بفرض أن المنشأة تريد تصغير التكاليف).

٢٠ — بين من المبادىء الأولية أن دالة إنتاج درجة تجانسها تساوى الوحدة فإن المرونة الإنتاجية تساوى الوحدة أيضاً.

٢١ — بفرض أن دالة الإنتاج هى:

$$ك = ١٠ - \frac{١}{س_1} - \frac{١}{س_2}$$

حيث أن ك هو الإنتاج ، $س_1$ ، $س_2$ تمثل عناصر الإنتاج وأن $ر_1$ عبارة عن سعر الوحدة من عنصر الإنتاج $س_1 = ١٤$ جنيها ، $ر_2$ عبارة عن سعر الوحدة من عنصر الإنتاج $س_2 = ١٦$ جنيها وأن ع سعر الوحدة من الإنتاج ك = ١٠ جنيها . وبفرض أن منشأة لديها ٤٨ جنيها نقدا لانفاقها

على استخدام عناصر الإنتاج س١ ، س٢ بين الكميات المستخدمة من كل من س١ ، س٢ لعظمة الإنتاج ؟ اشرح مضروب لاجرانج ثم احسب قيمته .

٢٢ — أوجد أسعار وكميات التوازن لدوال الطلب والعرض مستخدماً قاعدة كرامر .

$$ك_{ط_1} = ٢٦ - ع_1 + ع_2$$

$$ك_{ط_2} = ٨ + ع_1 + ع_2$$

$$ك_{ر_1} = - ٤ + ٣ع_1 - ع_2$$

$$ك_{ر_2} = - ٢ - ع_1 + ٥ع_2$$

حيث

$ك_{ط_1}$ ، $ك_{ط_2}$ = الكميات المطلوبة من السلعة ١ ، ٢ على التوالى .

$ك_{ر_1}$ ، $ك_{ر}$ = الكميات المعروضة من السلعة ١ ، ٢ على التوالى .

٢٣ ــ إذا كانت س ترمز إلى الدخل الممكن التصرف فيه ، س ترمز إلى مصروفات المستهلكين ، ع ترمز إلى جملة المدخرات ، ا ترمز إلى جملة الاستثمارات ، فإن النموذج التالى للتوازن الاقتصادى العام فى الولايات المتحدة قد أنشىء بمعرفة ت. هافيلمو للمدة من سنة ١٩٢٩ إلى سنة ١٩٤١ .

س = ٧١٢, ص + ٩٥,٠٥

ع = ١٥٨, (س + ا) — ٣٤,٣

ص = س + ا — ع

ا = ٩٥,٥٣

والمطلوب :

(١) لإيجاد قيمة ص ، س، ع ، ا

(٢) بافتراض أن ا = ٢٠٠ أوجد قيمة كل من ص ، س ، ع ، ا

(٣) ما هو قيمة الدخل ومصروفات المستهلكين والمدخرات إذا كانت جملة المدخرات هى ٣٠٠ .

٢٤ ــ سلعة صناعية تتكون من مواد أولية مختلطة يجب أن تحتوى على ١٥٠ وحدة من المادة ا و ٩٧,٥ وحدة من المادة ب و ١٠٢,٥ وحدة من المادة حـ . فإذا كان هناك ثلاثة أنواع من المواد الأولية تحتوى كل وحدة من المادة الأولية على الكميات ا ، ب ، حـ الموضحة بالجدول التالى :

	ا	ب	حـ
المادة الأولى س١	صفر	٣/٤	١/٤
» » س٢	١/٣	١/٣٠	٤/١٥
» » س٣	١/٣	١/٤	١/٤

والمطلوب معرفة قيمة كل من المواد الأولية التى يجب أن تخلط مع بعضها لإنتاج السلعة الصناعية .

٢٥ — إذا كان منحنى الطلب لسلعة معينة هو ط = ٢٠ — ٣ س١ — س٢ وأن منحنى العرض هو ع = ٥ س — ١ . أوجد السعر المتوازن والكمية المتبادلة . ارسم كذلك المنحنيين .

٢٦ — افترض أن ص تمثل الربح وأن الغرض هو تحقيق أكبر ربح ممكن .

ارسم وأوجد الحل الأمثل لما يأتى :

(ا) ص = ٦ س١ + ٥ س٢

وهناك القيود التالية

$$\frac{3}{4}س_1 + \frac{5}{4}س_2 \leq 10$$

$$\frac{3}{5}س_1 + 2س_2 \leq 10$$

(ب) ص = ٥ س١ + ١٥ س٢

وهناك القيود التالية :

$$س_٢ \leq ٥$$

$$س_١ + س_٢ \leq ٨$$

$$\frac{١٦}{٣} س_١ + ٢ س_٢ \leq ٣٢$$

٢٧ — افترض أن ص تمثل تكلفة سلعة معينة وأن الغرض هو خفض التكلفة إلى أقل ما يمكن ، ارسم وأوجد الحل الأمثل لما يأتى :

(ا) $ص = س_١ + س_٢$

وهناك القيود التالية :

$$س_٢ + ٢ س_١ \geq ١٦$$

$$\frac{٣}{٢} س_٢ + س_١ \geq ١٢$$

(ب) $ص = س_١ + ٤ س_٢$

وهناك القيود التالية :

$$س_١ \geq ٢$$

$$س_١ + ٤ س_٢ \geq ٨$$

$$س_١ - س_٢ \leq ٤$$

٢٨ — افترض أن نسبة الاستهلاك السنوية لآلة معينة هى ١٠ ٪ من القيمة الأصلية غير المستهلكة بتكلفة قدرها ٥٠٠٠ جنيه . ما هى

نهاية مصاريف الاستهلاك. ما هى النهاية لمجموع المصاريف السنوية عندما يقترب عدد السنوات من مالا نهاية .

٢٩ — أوجد نهاية :

(ا) $\frac{\sqrt[3]{س} - ١}{\sqrt[5]{س} - ١}$ عندما س ← ١

(ب) $\frac{ص^{٤} - ١}{ص^{٥} - ١}$ عندما ص ← ١

(حـ) $\frac{س^{٢} + ١}{س^{٢} - ١}$ عندما س ← ١

٣٠ — ما هى دالة الدخل الكلى عندما يكون السعر ثابتا ويساوى ٥ جنيهات لكل وحدة مباعة . أوجد المعامل التفاضلى لدالة الدخل الكلى بالنسبة لعدد الوحدات المباعة .

٣١ — من المعروف فى الاقتصاد أن مرونة الطلب هى :

$$\frac{(ك_{٢} - ك_{١} / ك_{١})}{(ع_{٢} - ع_{١} / ع_{١})}$$

حيث ك تمثل الكمية ، ع تمثل السعر .

ما هو أوجه التشابه بين مفهوم مرونة الطلب ومفهوم التفاضل الفروق بين المفهومين أيضاً .

٣٢ — إذا كان لديك منحنى التكلفة

$$ص = ١ + ١٣ + ١٣^{٢}$$

أوجد منحنى التكلفة الحدية

٣٣ — إذا كان لديك العلاقة الآتية :

$$١٢ + ٣ع = ١٥$$

(ا) أوجد منحنى الطلب

(ب) « « الإيراد الكلى

(حـ) « « « الحدى

٣٤ — فى دراسة عن تكلفة إنتاج ملاعق بلاستيك تنتجها آلة معينة بشركة بلاستيك وجد أن متوسط التكلفة بالقروش يمكن تمثيله بالدالة [٢ + ٢٠٠ (١٠-س)] حيث س تمثل مئات الآلاف من الملاعق المنتجة أسبوعيا . مثل العلاقة بين متوسط التكلفة لمعدل الإنتاج . ماهو معدل تغير متوسط التكلفة للعلقة الواحدة بالنسبة لمعدل الإنتاج عند إنتاج ١٠٠ر٠٠٠ معلقة أسبوعياً . أوجد أيضاً المعامل التفاضلى الثانى لدالة متوسط التكلفة بالنسبة لمعدل الإنتاج.

٣٥ — وجدت شركة شريف أنه ينتج عن حملاتها الإعلانية لسلعهم زيادة فى المبيعات ، إلا أن هذه الزيادة تتلاشى تدريجيا بعد إنتهاء هذه الحملات الإعلانية . وبالنسبة لحملة إعلانية معينة ، حددت الشركة أن الزيادة فى المبيعات نتيجة لهذه الحملة يمكن تمثيلها بالدالة الآتية :

$$ص = ٤٠٠٠ (٢-س)$$

حيث :

ص = الزيادة فى المبيعات يوميا نتيجة للحملة الإعلانية .
س = عدد الأيام بعد إنتهاء الحملة الإعلانية .

مثل العلاقة بين الزيادة فى المبيعات وعدد الأيام بعد انقضاء الحملة الإعلانية بعد ٣ أيام . ما هو معدل النقصان فى الزيادة فى المبيعات . أوجد المعامل التفاضلى الثانى لدالة الزيادة فى المبيعات بالنسبة إلى عدد الأيام .

٣٦ — افترض أن لديك دالة الإيراد الكلى الآتية حيث ص تمثل الإيراد الكلى ، س تمثل عدد الوحدات المباعة .

ص = ٤٠٠٠٠٠٠ — (س — ٢٠٠٠)^{٢}

ما هى المبيعات التى تحقق أكبر إيراد ممكن

٣٧ — افترض أن دالة التكلفة الكلية هى :

ص = ١٠٠ + ١٥ ، ٠ س^{٢}

حيث ص تمثل التكلفة الكلية ، س تمثل عدد الوحدات المنتجة وأن دالة الإيراد الكلى

ر = ٢ س

حيث ر تمثل الإيراد الكلى ، س تمثل عدد الوحدات المنتجة والمباعة . أوجد قيمة الإنتاج التى يحقق أكبر ربح ممكن للمنشأة .

٣٨ — افترض أن لديك الدالة

ص = ٢ + ٥ س + ٤ س^{٢}

هل لهذا المنحنى نقطة انقلاب

٣٩ — أوجد المعامل التفاضلي الجزئي بالنسبة إلى س ، وكذلك المعامل التفاضلي الجزئي بالنسبة إلى ص لكل من الدوال الآتية :

(ا) ع = ٥ س — ٣ ص + ١٠

(ب) ف = $\frac{١}{(س^{٤} - ص)^{\frac{١}{٣}}}$

(حـ) ك = $\frac{س^{٢}}{س - ص}$

(د) ل = س^{٤} + س^{٤} — ٤ س^{٢} ص + ٢٠

(هـ) م = هـ$^{س س}$

(و) حـ = ١٠ (٢ س^{٢} ص)

(ز) م = لو (س^{٣} + ٣ ص)

٤٠ — أوجد المعاملين التفاضليين الجزئيين الأول والثاني إذا كانت س ، ص هما المتغيرين المستقلين لكل من الدوال الآتية :

(ا) ع = س^{٣} + ٢ س ص — ٥ ص^{٢}

(ب) ع = ٤ س^{٣} ص^{٢}

(حـ) ع = ٢ س + ص + ١٠

(ء) ع = هـ س^{٢} ص^{٢}

٤١ — باعتبارك مديرا لأحد المصانع فإنك تعرف أن تكلفة الوحدة الدالة للمتغيرات الثلاثة : مستوى عمليات التشغيل ع ، عدد العمال ن ، كمية الآلات ت . فإذا كانت الدالة φ (ع ، ن ، ت) معروفة لك اشرح معنى المعاملات التفاضلية الجزئية لهذه الدالة بالنسبة إلى كل من المتغيرات المستقلة الثلاثة .

٤٢ — افترض أن الدالة الآتية تمثل ربح منشأة تجزئة وأن هناك اعتقاد بأن الربح ع دالة للمتغيرين س ، ص حيث تمثل س عدد الموظفين العاملين فى المنشأة ، ص تمثل كمية المخزون من البضاعة .

ع = ٣٥٠٠ — (٢٠ — س)^{٢} — (٦٠ — ص)^{٢}

(ا) أوجد $\frac{\partial ع}{\partial س}$ ، $\frac{\partial ع}{\partial ص}$

(ب) ما أهمية هذين المعاملين التفاضليين .

٤٣ — منشأة معينة لديها دخل صاف قدره ١٠٠٠٠٠ جنيها . وفى دراسة لتخطيط طويل الأجل أوضحت أن استثمارا إضافيا فى الآلات

والمعدات سينتج عنه دخل صاف كبير عن طريق العلاقة بين معدل الزيادة فى الدخل الصافى ومستوى الاستثمار الذى أعطى بمعرفة .

$$م = ٢ - س/١٠٠٠٠٠$$

حيث

م = معدل الزيادة فى الدخل الصافى

س = مستوى الاستثمار الإضافى

أوجد الدالة التى توضح العلاقة بين الدخل الصافى ومستوى الاستثمار الإضافى .

٤٤ — إذا كان منحنى التكلفة الحدية لمنتج معين هو

$$ص' = ١ + ٢س + ٦س^{٢}$$

أوجد منحنى التكلفة الكلية إذا كانت ص (صفر) = ١٠٠
وكذلك منحنى متوسط التكلفة .

٤٥ — إذا كانت دالة التكلفة الحدية هى $ص' = ١ + ١٠٠س - ٥س^{٢}$
أوجد منحنى التكلفة الكلية ص إذا كانت ص (١) = ٢٠٠
وكذلك أوجد ا (منحنى متوسط التكلفة)

٤٦ — إذا كان منحنى التكلفة الحدية للمبيعات فى منشأة معينة هو

ص َ = ١٫٠٥٢ — ٠٫٠٠٤ ر س

أوجد منحنى التكلفة الكلية ومنحنى متوسط التكلفة إذا كانت

ص (٠) = ١٦٫٨

٤٧ — أوجد التكامل المحدد لكل مما يأتى :

(ا) $\int_{1}^{2} س^{٣} ى \, س$

(ب) $\int_{1}^{2} ٢^{س} ى \, س$

٤٨ — تفكر شركة دينا الكبرى فى إعطاء عملائها ضمان قدره خمسة سنوات عبارة عن خدمة مجانية لمنتجاتها . ولذلك ترغب الشركة فى معرفة المبلغ الإضافى التى تحمله على سعر المنتج لهذا الضمان . وقد أوضحت التقديرات الحسنة أن تكاليف الخدمة لكل وحدة فى المتوسط عبارة عن معدل سنوى $\frac{ت^{٢}}{٤}$ حيث ت تمثل عمر الوحدة بالسنوات . ومنح دالة تكلفة الخدمة ثم أوجد بالتكامل المبلغ الإضافى الذى يجب تحميله إلى تكلفة المنتج لهذا الضمان .

٤٩ — أوجد قيمة كل من :

١ — $\int_{١}^{٥} س^{٣} ى \, س$

٢ — $\int_{-1}^{3} (1 + 3س - س^3) د س$

٣ — $\int_{0}^{2} (هـ^{س} + 10) د س$

٤ — $\int_{0}^{1} (1 + ب س) د س$

حيث ا ، ب تمثل بثابت .

٥٠ — احسب قيمة المحدد الآتى :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

٥١ — فك المحدد الآتى :

$$\begin{vmatrix} س & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

٥٢ — حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات

$$س - 2ص = 6$$

$$ص - ع = 5$$

$$س + ص - ع = 0$$

٥٣ — كانت جملة الإنتاج الزراعى فى الولايات المتحدة سنة ١٩٣٩ هى ١٨ بليون دولار ، منها ٢٫٥ بليون دولار ذهب إلى الصناعة و ١٤٫٥ بليون دولار إلى الاستعمال المنزلى . كما كان الإنتاج الصناعى هو ١٣٢ بليون دولار ، منها ١٣٫٧ بليون دولار ذهبت إلى الزراعة و ١١٩٫٣ بليون دولار إلى الاستعمال المنزلى. وكذلك كان الإنتاج للاستعمال المنزلى هو ٦٨٫٧ بليون دولار منها ٤٫٢ بليون دولار ذهبت إلى الزراعة و ٦٤٫٦ إلى الصناعة . ولتحديد الأسعار .

أولا : الأسعار الزراعية $ع_1$ و الأسعار الصناعية $ع_2$ و والأجور $ع_3$ كان لدينا المعادلات التالية :

$$-17\ ع_1 + 2٫5\ ع_2 + 14٫5\ ع_3 = \text{صفر}$$

$$13٫7\ ع_1 - 133\ ع_2 + 1193\ ع_3 = \text{صفر}$$

$$4٫2\ ع_1 + 64٫6\ ع_2 - 67٫7\ ع_3 = \text{صفر}$$

(ا) برهن أن المحدد لهذه المعادلات يساوى صفر .

(ب) افترض أن $ع_3 = 1$ و حل المعادلتين الأولى والثانية .

٥٤ — اثبت أن المصفوفة الصفرية (سواء كانت ذات عمود واحد أو صف واحد) لا تتغير إذا ضربت بأى عدد .

٥٥ — بفرض أن ك هى مصفوفة ذات ترتيب واحد . أثبت أن :

$$\text{صفر} + ك = ك$$

٥٦ — بفرض أن ٢ $\begin{pmatrix} س_{١} \\ س_{٢} \\ س_{١} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

أوجد قيم س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$

٥٧ — بفرض أن ك هى مصفوفة ذات صف واحدة مكونة من ثلاثة عناصر وأن ل هى مصفوفة ذات عمود واحد لها نفس عدد العناصر وأن ا هى عدد . أثبت أن ا (ك × ل) = (ا ك) × ل = ك (ا ل) .

٥٨ — افترض أن شركة تأمين قسمت بوالص التأمين على الحوادث إلى أربعة أنواع طبقاً للأخطار المحتملة . افترض أن عدد البوالص فى فى كل نوع هو :

س = [٥٠٠٠ ، ١٢٠٠٠ ، ١٠٠٠٠ ، ٤٠٠]

وقد أثبتت الإحصائيات أن نسبة المطالبة السنوية لكل نوع كانت كالآتى :

ص = $\begin{bmatrix} ٠٠٥ \\ ٠١٠ \\ ٠٤٠ \\ ٠٥٠ \end{bmatrix}$

(ا) أوجد عدد المطالبات التى ستقوم الشركة بسدادها فى عام واحد .

(ب) بفرض أن المطالبة تكلف الشركة ٧٠٠ جنيه فى المتوسط أوجد المصفوفة التى توضح تكاليف المطالبات سنوياً لكل مستأمن بالنسبة لكل نوع

٥٩ — بفرض أن المصفوفة الآتية تعطى محتويات الفيتامينات لثلاثة أنواع من الطعام .

الفيتامين :	ا	ب	حـ	ء
النوع الأول :	٥,	٤,	٠	٠,
النوع الثانى :	٢,	٠	٢,	١,
النوع الثالث :	١,	١,	٣,	٥,

فإذا أكل شخص ٥ وحدات من الطعام من النوع الأول ، ١٠ وحدات من الطعام من النوع الثانى ، ٩ من الطعام من النوع الثالث فكم استهلكنا من كل نوع من أنواع الفيتامينات وإذا دفعنا للفيتامينات الموجودة بكل نوع من أنواع الطعام ١٠ قروش ، ١٥ قرشا ، ٢٠ قرشا ، ٢٥ قرشا للوحدات من الأربعة أنواع من الفيتامينات فكم تتكلف كل وحدة من أنواع الطعام المختلفة .

٦٠ — بفرض أن المصفوفة س التالية توضح تكلفة العمل ، المواد الأولية ، المصاريف الثابتة بهذا الترتيب لكل وحدة من المنتجات ا ب ج د هـ

$$س = \begin{bmatrix} ٧ر & ٤ & ١ر٥ & ٩ر \\ ٣ & ٣ر٥ & ٢ر & ٣ر٧ \\ ٢ر٢ & ٧ & ١ر٤ & ١ر٤ \end{bmatrix}$$

(ا) وبفرض أن التكلفة زادت بمقدار ٥٠٪ أوجد مصفوفة التكاليف الجديدة .

(ب) وبفرض أن كمية الإنتاج من ا ، ب ، ج ، د ، هـ هى :

$$ص = \begin{bmatrix} ٢٠٠٠ \\ ٥٠٠ \\ ٧٥٠ \\ ٤٠٠٠ \end{bmatrix}$$

أوجد س ص مع شرح أو تفسير معنى المصفوفة الناتجة (ح) بفرض أن كمية الإنتاج من ا ، ب ، د فى سنة معينة موزعة كل ثلاثة شهور كانت كالآتى :

(يوضح كل عمود فى المصفوفة الإنتاج فى كل ربع سنة)

$$\text{ص س} = \begin{bmatrix} ١٠٠٠ & ٢٠٠٠ & ١٠٠٠ & ١١٠٠ \\ ٥٠٠ & ٣٥٠ & ٤٥٠ & ٠ \\ ٨٥٠ & ١٠٠ & ٥٥٠ & ٥٠٠ \\ ٤٠٠٠ & ٤٠٠٠ & ٢٠٠٠ & ٥٠٠٠ \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة التى توضح تكاليف العمل والمواد الأولية والمصاريف الثابتة فى ربع سنة .

(ى) أوجد المصفوفة ذات الترتيب الواحد التى توضح التكاليف الكلية للعمل والمواد الأولية والمصاريف الثابتة لسنة معينة من النتيجة التى حصلت عليها فى حـ .

٦١ — بفرض أن

$$\text{ا} = \begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٣ & ٠ \end{bmatrix}$$

أوجد : ا^{٢} ، ا^{٣} ، ا^{٤}

٦٢ — بفرض أن

$$\text{ا} = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \\ ٢ & ١ & ٠ \end{bmatrix}$$

أوجد : ا^{٢} ، ا^{٣} ، ا^{ن}

٦٣ — احسب معكوس كل من المصفوفات الآتية :

(أ) $\begin{bmatrix} ١ & ١ \\ ٠ & ٦ \end{bmatrix}$ (ب) $\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix}$

(حـ) $\begin{bmatrix} ٢ & ٣- \\ ٤ & ٣- \end{bmatrix}$ (د) $\begin{bmatrix} ١ & ٠ \\ ٦ & ١ \end{bmatrix}$

٦٤ — حل المعادلات الآتية باستخدام معكوس المصفوفات الرياضية :

(أ) $س_١ + ٢ س_٢ = ١$

$٣ س_١ + ٤ س_٢ = ٢$

(ب) $٣س + ص = ١$

$ص - ٣ س = ٠$

(حـ) $١٢ ا + ١٢ ب = ١٢$

$ا + ٣ ب = ٦$

(د) $ص = ٢ س + ٤$

$٢ ص = ٤ س + ٤$

(هـ) $س = ٣$

$٦ ص - ٤ س + ٢ = ٠$

(و) $٣ ص - ٣ س - ٣ = ٠$

$ص = -٣ س - ٣$

(ل) $٤ ص = ٤ س + ٨$

$ص - س - ٢ = ٠$

٦٥ — بفرض أن مصنع معين لديه ٢٠٠ ساعة تشغيل يمكن عملها فى فى أقسام الإنتاج و ٣٢٠ ساعة لحزم المنتجات كل أسبوع ، افترض أن المنتج الأول يلزمه ساعتين فى أقسام الإنتاج و ٢٥ر من الساعة للحزم لكل وحدة . افترض أيضاً أن المنتج التالى يلزمه ٤ ساعات فى أقسام الإنتاج و ٢٠ر من الساعة للحزم لكل وحدة . ما هى عدد الوحدات من النوعين التى يمكن إنتاجها باستعمال الطاقة الإنتاجية للمصنع . حل هذا النظام من المعادلات باستعمال معكوس المصفوفة الرياضية :

٢٢ — اثبت أن :

$$ت(ا+ب) = ت(ا) + ت(ب)$$

$$ق\, ت(ا) = ت(ا)$$

$$ت(ك\, ا) = ك\, ت(ا)$$

$$ت(\ ا\ ه\ ) = ن$$

٦٦ — أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} \quad ق$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٢ & ١ \\ ٢ & ١ & ٤ & -١ \\ ١ & ٤ & ٦ & -٢ \\ ٣ & ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$و \quad \begin{vmatrix} ٣ & ٠ & ١ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٤ & ٣ & ٢ & ٨ \\ ١ & ٣ & ٥ & ١ & ٧ \\ ٢ & ٧ & ٢ & ٠ & ٩ \\ ٠ & ٢ & ٦ & ٣ & ١ \end{vmatrix}$$

٦٧ — حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات

$$س + ص + ع = ٦$$

$$٣س - ٢ص - ع = ٧$$

$$س - ٤ص - ٣ع = -٥$$

و

$$س_١ + ٢س_٢ - س_٣ = ٢$$

$$٣س_١ - س_٢ + ٢س_٣ = ٥$$

$$٢س_١ + ١١س_٢ - ٧س_٣ = -٢$$

و

$$٣س + ص - ع = صفر$$

$$٢س + ٣ص - ٣ع = صفر$$

$$س - ص + ٩ص = صفر$$

٦٨ — أوجد معكوس كل من المصفوفات الرياضية فى حالة وجوده

$$\begin{bmatrix} ٢ & ١ & ١ \\ -٢ & -٣ & ٠ \\ صفر & صفر & ٢ \end{bmatrix}$$ و $$\begin{bmatrix} -١ & -١ & -١ \\ صفر & ١ & ١ \\ ٢ & ٣ & ٥ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٠ & ١ \\ ١ & -١ & ٢ & -٢ \\ ٠ & -٢ & ١ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ١ & ٣ \end{bmatrix}$$

٦٩ — حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات

س + ص + ع = ٥

٢ س + ص − ع + ل = ١

س + ٢ ص − ع + ل = ٢

ص + ٢ ع + ٣ ل = ٣

ك + ٢ ل − م = ٣

٢ ك − ل + ن = − ١

− ك + ٢ل + ٣م + ٤ن = ٤

٣ ك − ٥ ل + ٤م + ٦ن = ٥

المراجع

المراجع العربية :

١ ـ طرق التحليل الاحصائى :

دكتور أحمد عبادة سرحان — دار الكتب الجامعية

٢ ـ العينـــات :

دكتور أحمد عبادة سرحان — مكتبة النهضه المصرية

٣ ـ مقدمه الاحصاء الرياضى

دكتور أحمد عباده سرحان — دار المعارف بمصر

٤ ـ مقدمه الرياضه البحته للبحوث التجارية :

دكتور محمد فتحى محمد على — مكتبه عين شمس

٥ ـ الاحصاء التطبيقى :

دكتور محمد فتحى محمد على — » »

٦ ـ الاحصاء فى إتخاذ القرارات التجارية :

دكتور محمد فتحى محمد على — » »

المراجع الأجنبية :

1 - Baumol, W, Economic Theory and Operations Analysis, Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice - Hall, Inc, 1965

2 - Bellman, Dynamic Programming, Princeton N. J. Princeton University Press, 1957

3 - Boulding, K., Economic Analysis, New York : Harper and Brothers. 1955

4- Carlson, S., A study in the Pure Theory of Production, London : King and Son, 1939

5 - Chamberlin, E, The Theory of Monopolistic Competition Cambridge : Harvard University Press, 1948

6 - Cox, D., Planning of Experiments John Wiley Sons Inc. 1961

7 - Friedman M. ,Price Theory. A provisional Text ,Chicago: Aldine 1962

8 - Friedman M. Essays in Positive Economics ,(Chicago : University of Chicago) 1953

9 - Henderson J. and Quandt R. : Microeconomic Theory New York Mcgraw-Hill 1958

10 - Hicks G. : Value and Capital Oxford : The Clarendon Press 1959

11 - Klein L. Introduction to Econometrics , Englewood Cliffs .N J. Prentice-Hall 1962

12 - Lange Oscar, Outside Readings in Economics, New York: Crowell 1951

13 - Leftwich R. the Price and Resource Allocation, New York Holt Rinehart and Winston 1960

14 - Liebhafsky H. The Nature of Price Theory, Homewood Illinois, The Dorsey Press Inc 1963

15 - Stigler J. Theory of Price New York Macmillan, 1946

16 - Wald A. Statistical Decision Functions, New York, John Wiley & Sons 1950

تصويب الأخطاء

نأسف لورود بعض الأخطاء المطبعية والآتى بيان بحصرها تقريباً .

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
١٢	٦	حزئية	جزئية
٢٤	٤	الاحتماع	الاجتماع
٢٤	٦	Eoonowic	Economic
٢٥	١٠	الافتصادى	الاقتصادى
٥١	٦	النظرية	النظرية
٥٣	٣	(٧)	(٨)
٩٨	١٣	النأخير	التأثير
١٧٦	٤	المعونات	المرونات
٢٠٤	٥	الاشباع	الإنتاج
٢٠٤	١١	إشباع	إنتاج
٢٠٥	٣	إشباع	إنتاج
٢٠٥	١١	الإشباع	الإنتاج
٢١٥	٤	ر	د
٢١٥	٨	ر	د
٢١٦	٩	التكالف	التكاليف
٢٢٠	٤	ر	د

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
٢٢٠	٨	ر	٥
٢٢٤	١	$- = \frac{١}{\lambda}$	$= - \frac{١}{\lambda}$
٢٢٦	٦	fo	to
٢٣٢	١٢	مجموع التكالف	مجموع التكاليف
٣٢٢	١٩	New	New
٢٣٤	١	فنحنى	منحنى
٢٣٤	٣	دوو	دوال
٢٣٤	١٢	للصغر	للصفر
٢٣٥	٩	للصغر	للصفر
٢٣٦	٥	مدبر	مدير
٢٤٠	٧	ويمثل	ويمثل
٢٤٠	١٥	$_{P}(م ح)$	$(م ح)_{١}$
٢٤٤	٩	ومحط	ومحيط
٢٥١	١	غ	ع
٢٦٤	١	٤٦٣	٢٦٤
٢٧٩	٩	المستقبل	المستقل
٢٨١	١٥	$\text{نها}_{س \leftarrow ١} \Phi (س) ك$	$\text{نها}_{س \leftarrow ١} \Phi (س)$ ع

الصفحة	السطر	الخطأ	الصواب
٢٨٥	١٣	نهـا Φ (س) س ← ٥٥	نهـا Φ (س) س ← ∞
٢٨٦	٨	الدولة	الدالة
٢٩٠	٩	تغير	تغير