

# الباب الثالث

## نظرية سلوك المنشأة

أوضحنا سلفاً أن علم الإقتصاد أحد العلوم الإجتماعية التي تدرس كيفية سلوك الفرد سواء كان هذا الفرد شخصاً بذاته (المستهلك) أو معنوي (مؤسسة أو منشأة) ولذلك فإن هدف علم الإقتصاد هو قيادة هذا الفرد ورشده إلى التصرف الأمثل Optimum Behavior . ويهتم علم الإقتصاد أيضاً بتصرف المجتمع وأفراده من حيث الاستهلاك والإنتاج والاستثمار والإدخار... إلخ.

وقد أوضحنا في الباب السابق تصرف المستهلك ، وسنقوم بشرح التصرف الأمثل للوحدة الإنتاجية أو المنشأة في هذا الباب .

وتعرف المنشأة بأنها الوحدة الفنية Technical Unit التي تنتج السلع والخدمات . ومن ثم فإن المشاكل الفنية للإنتاج تهتم دائماً وأبداً بالعلاقات المختلفة بين عناصر الإنتاج والسلع المنتجة من استخدام هذه العناصر . ويعرف عنصر الإنتاج بأنه السلعة أو الخدمة التي تضيف إلى الإنتاج . ويجب أن تستخدم هذه العوامل بكل كفاءة ممكنة حتى يمكن الوصول إلى مجتمع الرفاهة إذ كلما استخدمت مثل هذه العناصر بغير كفاءة فإن النتيجة الحتمية هي كثرة التكاليف وقلة الإنتاج وبالتالي زيادة الأعباء على المجتمع .

وإذ لك لا بد أن يكون للوحدة المنتجة مرشد أو مدير يعمل على تنظيم هذه العناصر وإدارتها وربطها ببعضها إلى أن يصل إنتاجه إلى أقصى درجة من الإنتاج بأقل التكاليف الممكنة . ويتوقف الوصول إلى هذا الهدف على عوامل معينة :

- ( ١ ) معرفة كيفية استخدام عناصر الإنتاج .
  - ( ٢ ) المعرفة الفنية للمدير بوحده الإنتاجية .
  - ( ٣ ) كيفية حل مشاكل الإنتاج بسرعة وبدقة .
  - ( ٤ ) معرفة مدير المنشأة ماهية المطلوب من الإنتاج وإلى من سيرسل ذلك الإنتاج وفي أى وقت حتى لا يتعرض مشالاً لمشاكل التخزين .
- وتقسم عناصر الإنتاج بالنسبة إلى الوقت أو المدى الذى تستخدم فيه إلى ثابتة ومتغيرة .

ففى المدى القصير تعتبر مشالاً مبانى المؤسسة ثابتة ولكن تعتبر أجور العمال وتكاليف الشحن . . . إلخ متغيرة . ولكن يعرف المدى الطويل بأنه ذلك المدى الذى يعتبر جميع عناصر الإنتاج متغيرة .

وقد تختلف الأهداف التى تقوم على أساسها المنشأة إلا أنه بصفة عامة فإن الهدف الأساسى لمدير المؤسسة هو معظمة الإنتاج بالنسبة إلى تكاليف معينة ، أى الوصول بالإنتاج إلى أكبر ما يمكن تحقيقه وتقليل النفقة إلى أقل ما يمكن حتى يمكن معظمة الربح Profit Maximization .

وستناقش في هذا الباب مشا كل مدير المنشأة الذي يستخدم عنصرى إنتاج بمستويات مختلفة لإنتاج سلعة معينة . ولذلك سنقوم بتعريف دالة الإنتاج وكيفية اشتقاق منحنيات الإنتاج Productivity Curves ، منحنيات تماثل الإنتاج Isoquant ثم نماذج التصرف الأمثل للمنشأة .

### دالة الإنتاج :

تعرف دالة الإنتاج بأنها العلاقة الفنية Technical Relationship بين عوامل الإنتاج والإنتاج نفسه . فيفرض أن منشأة ما تستخدم إثنين من عوامل الإنتاج وتنتج سلعة معينة فيمكن كتابتها رياضيا كالتالى :

$$Q = f(S_1, S_2)$$

حيث  $Q$  = الكمية المنتجة

$S_1$  = عوامل الإنتاج

حيث  $a$  تأخذ القيم ١ ، ٢ ، ٣

أى أن السلعة المنتجة  $Q$  تعتمد على عناصر الإنتاج  $S_1$  ،  $S_2$  .

### منحنيات الإنتاج :

يعرف الإنتاج الكلى (  $Q$  ) لعامل من عوامل الإنتاج  $S_1$  لإنتاج سلعة ما (  $Q$  ) بأنها عبارة عن الكمية المنتجة من استخدام ذلك العامل بفرض ثبات العوامل الأخرى . ورياضيا يرمز لها بالعلاقة التالية :

$$L = D (S_1, S_2, \dots, S_n)$$

حيث  $L =$  الكمية المنتجة .

$$S_1, S_2, \dots, S_n = \text{عناصر الإنتاج.}$$

وبفرض استخدام عنصر الإنتاج  $S_1$  بسكميات متساوية مع ثبات  
عنصر الإنتاج الأخرى فإن الإنتاج يمر بمراحل مختلفة فيزداد الإنتاج  
بزيادة متزايدة (المرحلة الأولى) ثم بزيادة متناقصة (المرحلة الثانية) ثم  
يقلص الإنتاج بزيادة ذلك العامل (المرحلة الثالثة) وهذا ما يعرف  
بقانونه بتناقص العائد . Law of Diminishing Returns . ويطلق عليه  
بعض الاقتصاديون قانون النسب المتغيرة Law of Variable Proportions .  
ويمكن أيضاً تعريف متوسط الإنتاج Average Pradactivity لذلك العامل  
 $S_1$  بأنه عبارة عن الإنتاج الكلي لذلك العامل مقسوماً على الكمية  
المستخدمة منه .

$$M = \frac{L}{S_1} = \frac{D (S_1, S_2, \dots, S_n)}{S_1}$$

حيث  $M =$  متوسط الإنتاج .

كذلك يعرف الإنتاج الحدي Marginal Productivity لعنصر  
الإنتاج  $S_1$  بأنه عبارة عن نسبة التغير في الإنتاج الكلي بالنسبة إلى التغير  
في الكمية المستخدمة من عامل الإنتاج وحدة واحدة . ورياضياً هو عبارة  
عن التفاضل الجزئي للدالة الإنتاج بالنسبة لعامل الإنتاج  $S_1$  .

$$\frac{دك (س١ س٢)}{دس١} = \frac{دك}{دس١} = اح$$

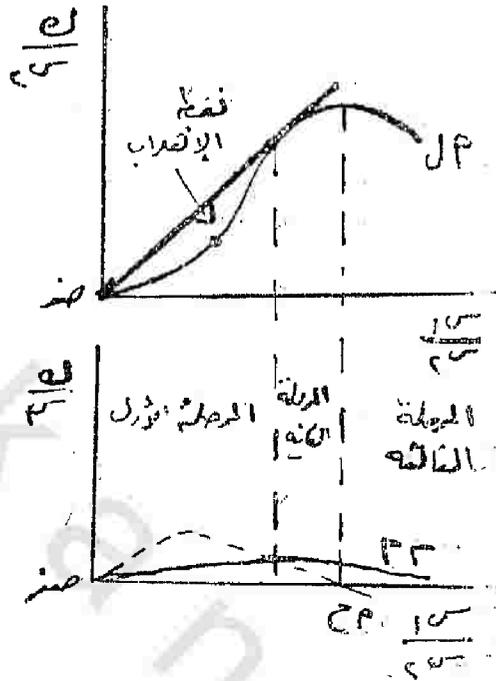
حيث اح = الإنتاج الحدى .

ويمكن من الجدول التالى اشتقاق العلاقات المختلفة بين الإنتاج الكلى والمتوسط والحدى . فبفرض أن المتغير الوحيد هو عنصر العمل مع ثبات العوامل الأخرى .

جدول الإنتاج الكلى والحدى والمتوسط لعنصر العمل

الارض	العمل	الإنتاج الكلى	الإنتاج الحدى	متوسط الإنتاج	بيان
١	١	٥	٥	٥	المرحلة الأولى {
١	٢	١٢	٧	٦	
١	٣	٢١	٩	٨	
١	٤	٢٨	٧	٧	اح = ٧
١	٥	٣٢	٥	٦.٤	المرحلة الثانية {
١	٦	٣٦	٣	٦	
١	٧	٣٧	١	٥.٢٥	
١	٨	٣٧	٥	٤.٦٢٥	المرحلة الثالثة {
١	٩	٣٦	١-	٤	
١	١٠	٣٠	٦-	٣	

ويبين الشكل التالي العلاقات المختلفة بين منحنيات الإنتاج .



شكل (٢٣) الإنتاج الكلي والحدى والمتوسط حيث عند نقطة الانقلاب يكون الإنتاج الحدى معظماً

ويتضح من الشكل السابق أن منحنى متوسط الإنتاج يأخذ في الزيادة حتى نهاية المرحلة الأولى حيث يصل إلى أقصى ما يمكن أن يصل إليه متوسط الوحدة الإنتاجية . وفي هذه المرحلة أيضاً يزداد الإنتاج الحدى بزيادة الوحدات المستخدمة إلا أنه يصل إلى نقطة المعظمة قبل نهاية المرحلة الأولى عند نقطة الانقلاب لمنحنى الإنتاج الكلي وعندما يكون متوسط الإنتاج في نقطة المعظمة يكون متوسط الإنتاج مساوياً للإنتاج الحدى وهي نهاية المرحلة الأولى وبداية المرحلة الثانية ويقع منحنى الإنتاج الحدى فوق منحنى متوسط الإنتاج . وفي المرحلة الثانية يكون منحنى متوسط الإنتاج فوق

الإنتاج الحدى وتتناقص قيمتهما بزيادة الوحدات من عنصر العمل من ١ .  
ومن الجدير بالذكر أن تلك القيم تكون موجبة في تلك المرحلة .  
وعندما يكون الإنتاج السكلى مبعظما يكون الإنتاج الحدى مساويا للصفر .  
وهي نهاية المرحلة الثانية وبزيادة عنصر العمل يبدأ الإنتاج السكلى فى النقصان .  
ويكون الإنتاج الحدى أقل من الصفر .

وبفرض أن دالة الإنتاج<sup>(١)</sup> هي :

$$L = D (S_1, S_2)$$

$$L = S_1^2 S_2^2 - S_1^3 S_2^3$$

حيث  $S_1, S_2$  ثوابت

$S_1, S_2$  عناصر الإنتاج

ولإيجاد قيمة متوسط الإنتاج حينما يكون مبعظما يأخذ التفاضل الجزئى له  
بالنسبة إلى عنصر الإنتاج من ١ وتوضع المعادلة مساوية للصفر .

$$\frac{D (S_1, S_2)}{S_1} = 0$$

---

(1) J. E. Henderson and R. C. Quandt , Microeconomic Theory  
A Mathematical Approach • Mcgraw - Hill Book Company ,  
Inc . , New york 1958 .

$$\frac{D_{1,2} - D_{1,1}}{S_1} = \frac{1}{2}$$

حيث أن  $D_{1,2}$  عبارة عن تفاضل دالة الإنتاج بالنسبة لعنصر الإنتاج  $S_1$ .

$$D_{1,2} - D_{1,1} = 0$$

$$\frac{D_{1,2}}{S_1} = D_{1,1}$$

ومن الجدير بالذكر هنا أن :

$$D_{1,2} = \frac{D_{1,2}}{S_1} = D_{1,1}$$

أى عندما يكون متوسط الإنتاج معمظما يكون الإنتاج الحدى مساويا له .  
ويجب ملاحظة أنه بإختلاف الكميات الثابتة من  $S_2$  يمكن اشتقاق دوال إنتاج مختلفة ، فمن دوال الطلب السابقة :

$$L = 1 S_1^2 S_2 - 2 S_1 S_2^2$$

$$\text{بفرض أن } L = 1 \text{ و } S_2 = 6 \text{ و } S_1 = 2 \text{ هـ}$$

$$\therefore L = 1 \text{ و } S_1 = 2 \text{ هـ}$$

وتعتمد قيم كل من  $S_1$  ،  $S_2$  على الكميات الثابتة المعطاة من  $L$

حيث بإختلاف هذه الكميات الثابتة يمكن اشتقاق دوال إنتاج مختلفة .

$$١م = هـ١ س١ - هـ٢ س١$$

$$١ح = هـ٢ س١ - هـ٢ س١$$

ويكون متوسط الانتاج معمظا عند النقطة :

$$١م = \frac{(١م)٢}{١س١} = هـ٢ س١ - هـ٢ س١$$

$$١ح = هـ٢ س١ - هـ٢ س١ = صفر$$

$$\frac{١هـ}{١س١} = هـ٢$$

$$(١) \quad ١هـ٢ = \frac{(١م)٢}{١س١} \quad \text{حيث أن}$$

ويكون الانتاج الحدي معمظا عند النقطة :

$$١ح = \frac{(١ح)٢}{١س١} = هـ٢ س١ - هـ٢ س١$$

$$١م = هـ٢ س١ - هـ٢ س١ = صفر$$

$$١ح = هـ٢ س١ - هـ٢ س١ = صفر$$

$$\frac{١هـ}{١س١} = هـ٢$$

$$(٢) \quad ١هـ٢ = \frac{(١ح)٢}{١س١} \quad \text{حيث أن}$$

ونظراً لأن  $ه_1, ه_2, س_1 < صفر$  فيمكن استنتاج من المعادلتين (١) ، (٢) أن الانتاج الحدى يصل إلى نقطة المعظمة عند كمية من العنصر  $س_1$  أقل من عند نقطة المعظمة لمتوسط الانتاج . ويمكن إيجاد النقطة التي يتساوى عندها الايراد الحدى بنقطة معظمة متوسط الانتاج كالتالى :

$$م = ١ ح$$

$$ه_1 س_1 - ه_2 س_1 = ه_2 س_1 - ه_3 س_1$$

$$ه_1 - ه_2 س_1 = ه_2 - ه_3 س_1$$

$$ه_1 = ه_2 س_1$$

$$\frac{ه_1}{ه_2} = س_1$$

وهي النقطة التي يكون عندها متوسط الانتاج معظماً اشتقت سابقاً .

أمثلة لدوال الانتاج .

$$(١) ك = ١٠ س_1 - س_2$$

$$(٢) ك = ١٦ - ٢٠ س_1 + س_2$$

أوجد قيم كل من  $س_1$  التي تقسم الدالة إلى مراحلها الثلاثة .

$$(١) ك = ١٠ س_1 - س_2$$

$$\frac{د ك}{د س_1} = ١٠ - ٢٠ س_2$$

$$س_1 = (٢٠ - ١٠ س_2) = صفر$$

$$\text{س} = \text{صفر أو س} = \frac{٢٠}{٣}$$

نقطة معظمة الإنتاج الكلى  
نهاية المرحلة الثانية وبداية المرحلة الثالثة

حيث أن :

$$\text{س} = \frac{٢٠}{٣} = ٦ \text{ س} - ٢٠ = ٦ \text{ س} - ٢٠ = \frac{٢٠}{٣} \text{ س}$$

$$٦ \text{ س} - ٢٠ = \text{صفر}$$

$$\frac{١٠}{٣} = \frac{٢٠}{٦} = \text{س}$$

نقطة معظمة الإنتاج الحدى

$$١٠ \text{ س} = ١٠ \text{ س} = ١٠ \text{ س}$$

$$\frac{(١٠) \text{ س}}{\text{س}} = ١٠ - ١٠ = ٢ \text{ س}$$

$$١٠ - ٢ \text{ س} = \text{صفر}$$

$$\text{س} = ٥$$

نقطة معظمة متوسط الإنتاج ونهاية  
المرحلة الأولى وإبتداء المرحلة الثانية

أو

$$٢٠ \text{ س} - ٣ \text{ س} = ١٠ \text{ س} - ١٠ \text{ س}$$

— ٢٠٣ —

$$٢٠ - ٢ = ١٨ \text{ س}$$

$$١٠ = ٢ \text{ س} \quad ٥ = ١ \text{ س}$$

$$(٢) \quad \text{ك} = ١٦ + ٢٠ \text{ س} - ٢ \text{ س}$$

$$\frac{\text{ك}}{\text{س}} = ٢٠ - ٢ = ١٨$$

$$٢٠ - ٢ = ١٨ \text{ س} \quad \text{صفر} = ١٠ \text{ س}$$

عندما يكون الإنتاج الكلي ممتصا بداية  
المرحلة الثالثة ونهاية المرحلة الثانية.

$$\frac{\text{ك}}{\text{س}^2} = ٢ - \text{صفر} > ٢ \text{ أى أن عندما تكون } ٢ = ٢ \text{ يكون الإنتاج ممتصا.}$$

$$\text{م} = ١ = \frac{\text{ك}}{\text{س}} = \frac{١٦ + ٢٠ \text{ س} - ٢ \text{ س}}{\text{س}} = ١٦ + ١٨ \text{ س}$$

$$\text{س} (١ م) = \frac{١٦}{٢ \text{ س}} = ٨$$

$$\frac{١٦}{٢ \text{ س}} = ٨ \text{ صفر} = ١ \text{ س} \quad ١٦ = ٢ \text{ س} \quad ٨ = ١ \text{ س}$$

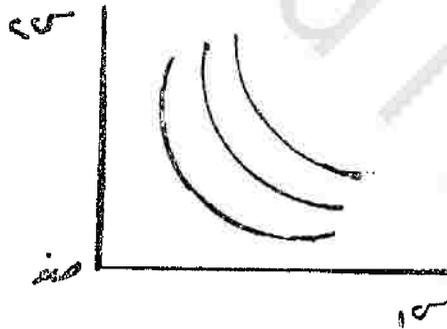
نقطة ممتصا متوسط الإنتاج نهاية المرحلة  
الأولى وبداية المرحلة الثانية

### منحنيات الإنتاج المتماثل والمعدل الحدي للإحلال :

بيننا سلفاً طبيعة منحنيات السواء وعرضنا منحنى السواء بأنه المنحنى الذى يوضح مختلف التوليفات من السلعتين  $L_1$  و  $L_2$  التى يعطى كل منها إشباع متساو للمستهلك . ومنحنيات الإنتاج المتماثل تشابه منحنيات السواء فى طبيعتها ويعرف منحنى الاشباع المتماثل Isoquant بأنه عبارة عن مختلف التوليفات من عنصرى الإنتاج  $S_1$  و  $S_2$  التى يعطى كل منها نفس الإنتاج . ويمكن كتابة دالتها الرياضية فى الصورة التالية :

$$L_2 = D (S_1, S_2)$$

ويوضح الشكل التالى خريطة منحنيات الإنتاج المتماثل :



شكل (٣٤) خريطة منحنيات الإنتاج المتماثل

ونظراً لأن دالة الإنتاج متصلة فإنه يوجه على كل منحنى إشباع متماثل حدوداً نهائى من التوليفات من عنصرى الإنتاج  $S_1$  و  $S_2$  . ويكون ميل منحنى الإشباع المتماثل عند أى نقطة عليه تمثل النسبة التى يحل بها عنصر من عناصر الإنتاج بدلا من الآخر ، ويطلق عليها الافتصاديون المعدل الحدى

للإحلال . وقد يطلق عليه بعض الاقتصاديون النسبة الفنية للإحلال .  
 Rate of Technical Substitution ونظراً لأن التغير يكون في التوليفات  
 لكل منحى اشباع متماثل مع ثبات الكمية المنتجة فيمكن حساب ذلك  
 التغير كما يلي :

$$\text{كمية الإنتاج المفقود} = y_2 \times (ح ٢)$$

$$\text{كمية الإنتاج المكتسب} = y_1 \times (ح ١)$$

ونظراً لأن المنشأة على نفس منحى الاشباع المتماثل أى الإنتاج  
 ثابتاً فإن :

$$\text{كمية الإنتاج المفقود} = \text{كمية الإنتاج المكتسب}$$

$$y_2 \times (ح ٢) = y_1 \times (ح ١)$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{(ح ١)}{(ح ٢)}$$

ونظراً لأن ميل منحى الاشباع المتماثل سالباً فإن :

$$\frac{y_2}{y_1} = - \frac{(ح ١)}{(ح ٢)}$$

وتعرف  $\frac{y_2}{y_1}$  بالمعدل الحدى للإحلال ( م ح ل ) س<sub>١</sub> بدلاً من

س<sub>٢</sub> . أو هي عبارة عن الكمية من عنصر الإنتاج س<sub>٢</sub> التي تريد المنشأة  
 إعطاؤها لأخذ كمية أخرى من عنصر الإنتاج س<sub>١</sub> مساوية لها في إعطاء  
 الإنتاج .

وبأخذ التفاضل الكلي لدالة الإنتاج يمكن اشتقاق المعدل الحدي للاحتلال  
بين عنصري الإنتاج  $s_1$  و  $s_2$ .

$$L = f_1 s_1 + f_2 s_2$$

$$\text{حيث أن } f_1 = \frac{\partial L}{\partial s_1} = (ح ١)$$

$$f_2 = \frac{\partial L}{\partial s_2} = (ح ٢)$$

ونظراً لأن التغير على طول منحنى الإنتاج المتماثل بالنسبة للسكمية  
يساوي الصفر فإن :

$$f_1 s_1 + f_2 s_2 = \text{صفر}$$

$$(م ح ل) = \frac{s_2}{s_1} = \frac{f_1}{f_2}$$

أي أن المعدل الحدي للاحتلال يساوي الإنتاج الحدي لعنصر الإنتاج  
 $s_1$  مقسوماً على الإنتاج الحدي لعنصر الإنتاج  $s_2$  . ويمكن اشتقاق منحنى  
الإنتاج المتماثل من دالة الإنتاج . فبفرض أن دالة الإنتاج في الصورة التالية :

$$L = D(s_1, s_2)$$

$$s_2 = D(s_1, L)$$

حيث  $L$  ثابتة عند مستوى معين .

وبفرض أن دالة الإنتاج في صورة دالة الإنتاج لكوب دوغلاس

Cobb - Douglas فإن :

$$K = A S_1^\alpha S_2^\beta$$

وتبين المعالم  $\alpha$  Coefficients ،  $\beta$  العائد إلى السعة Returns to Scale

فإذا كان مجموع  $\alpha + \beta = 1$  فإن زيادة كل من عنصرى الإنتاج من  $S_1$  ،

من  $S_2$  بنسبة واحدة  $\lambda$  (حيث  $\lambda < 1$  صفر) فإن ذلك يؤدي إلى زيادة الإنتاج بنفس

النسبة  $\lambda$  أو العائد إلى السعة يكون ثابتا Constant Returns to scale

وحينما يكون  $\alpha + \beta < 1$  أو  $\alpha + \beta > 1$  فإن السكمية المنتجة من

استخدام عنصر الإنتاج تزيد أو تقل على التوالي عن النسبة التي زاد بها

كل من عنصرى الإنتاج ويمكن اشتقاق المعدل الحدي للاحلال من دالة

الإنتاج التالية كالتالى :

$$K = A S_1^\alpha S_2^\beta$$

$$\frac{F_1}{F} = \frac{\frac{\partial K}{\partial S_1}}{\frac{\partial K}{\partial S_2}} = \frac{\alpha S_1^{\alpha-1} S_2^\beta}{\beta S_1^\alpha S_2^{\beta-1}}$$

$$\beta S_1^{\alpha-1} S_2^\beta = \frac{\partial K}{\partial S_1}$$

$$\alpha S_1^\alpha S_2^{\beta-1} = \frac{\partial K}{\partial S_2}$$

$$= \frac{\beta_2 \alpha_1 (1 - \alpha_1) \alpha_1}{1 - \beta_2 \alpha_1 \beta_1} = \frac{\beta_2 \alpha_1}{1 - \beta_2 \alpha_1 \beta_1}$$

$$\left( \frac{\beta_2 \alpha_1}{1 - \beta_2 \alpha_1 \beta_1} \right) = (\beta_2) \left( \frac{1}{1 - \beta_2 \alpha_1 \beta_1} \right) \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right)$$

ساوك المعظمة :

بفرض أن المنشأة تستخدم عنصرى الإنتاج  $s_1$  ،  $s_2$  لإنتاج السلعة  $l$  وبفرض ثبات الأسعار ووجود سوق حره لشراء تلك العناصر ، يمكن كتابة دالة التكاليف فى الصورة التالية :

$$ت ل = r_1 s_1 + r_2 s_2 + ت ث$$

حيث :

ت ل = التكاليف الكلية

$r_1$  = أسعار عناصر الإنتاج حيث تأخذ القيم ١ ، ٢ ، ٣

ت ث = التكاليف الثابتة

ويعرف خط التكاليف المتماثل Isocost بأنه عبارة عن التوليفات المختلفة

من عناصر الإنتاج التى يمكن شراؤها بقدر معين من التكاليف . وبفرض

أن (ت ل) تمثل هذا القدر من التكاليف الكلية فيمكن كتابة الدالة ثابتا

فى الصورة الآتية :

$$(ت ل) = r_1 s_1 + r_2 s_2 + ت ث$$

$$\frac{ت ت}{٢} - \frac{١ س ١}{٢} - \frac{(ت ل)}{٢} = ٢ س$$

$$١ س \frac{١}{٢} - \frac{(ت ل) - ت ت}{٢} = ٢ س$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{٢ س ١}{١ س ١}$$

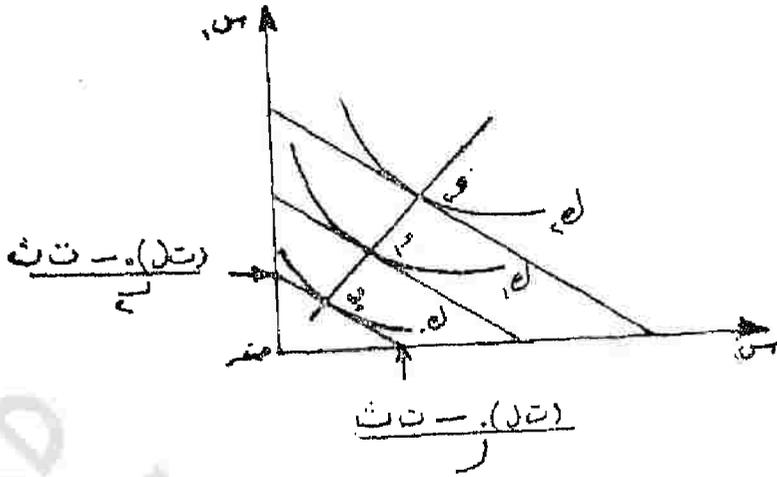
أى أن ميل خط التكاليف المتماثل مساويا لنسبة أسعار سلع عناصر الإنتاج في صورة سالبة . ويكون المقطع لخط التكاليف المتماثل على محور

كميات عنصر الإنتاج  $١ س$  هو  $\frac{(ت ل) - ت ت}{١}$  ، أى عبارة عن

الكمية من  $١ س$  لو أنفقت المؤسسة جميع التكاليف على العنصر  $١ س$  . وكذلك يكون المقطع على محور كميات عنصر الإنتاج  $٢ س$  هو  $\frac{(ت ل) - ت ت}{٢}$

أى عبارة عن الكمية من  $٢ س$  لو أنفقت المؤسسة جميع التكاليف على العنصر  $٢ س$  . ويلاحظ في حالة زيادة دخل المؤسسة ورغبتها في إنتاج كميات أكبر من السلعة ، كلما زادت تكاليف الإنتاج لشراء كميات أكبر من عناصر الإنتاج وكلما زادت التقاطعات على محور الكميات  $١ س$  ،  $٢ س$  . ويمكن

إيضاح ذلك بالشكل التالى :



شكل (٣٥) نقط التوازن بين منحنى الإنتاج المتماثل  
وخط التكاليف المتماثل للمؤسسة

وتمثل النقط و، و١، و٢، ونقط التوازن بين منحنى الإنتاج المتماثل وخط

التكاليف المتماثل للمؤسسة حيث :

$$\frac{ر}{٢} = \frac{س٢}{س١}$$

وإذا تم توصيل نقط التوازن المشار إليها في الشكل السابق فإن هذا

الخط أو المنحنى يسمى بالممر الممتد للمنشأة Firm Expansion Path .

معظمه الإنتاج عرضة لقيود التكاليف :

بينما سلفنا كيفية حصول المستهلك على معظمه الإشباع عرضة لقيود الدخل .

وفي هذا المجال سنبين كيفية معظمه المنشأة لإنتاجها بالنسبة إلى قدر معين

من التكاليف أو قيد التكاليف Cost Constraint فمن دالة الإنتاج السابقة .

$$ل = د (س_١ ، س_٢)$$

$$ت ل = د_١ س_١ + د_٢ س_٢ + ت ث$$

$$ت ل - د_١ س_١ - د_٢ س_٢ = ت ث = صفر$$

يمكن استخدام مضروبوات لاجرانج لبيان كيفية معظمة دالة الإنتاج  
عرضة إلى قيد التكاليف . ويمكن كتابة دالة لاجرانج في الصورة التالية :

$$م = ل + \delta (ت ل - د_١ س_١ - د_٢ س_٢ - ت ث)$$

حيث أن  $\delta \neq$  صفر وأن  $\delta$  عبارة عن مضروب لاجرانج غير المحدد ،  
وبأخذ التفاضل الجزئي لدالة لاجرانج بالنسبة إلى  $س_١$  ،  $س_٢$  ،  $\delta$  ومساواة  
المعادلات بالصفر نستنتج التالي :

$$(١) \quad \frac{\partial م}{\partial س_١} = ف_١ - \delta د_١ = صفر$$

$$(٢) \quad \frac{\partial م}{\partial س_٢} = ف_٢ - \delta د_٢ = صفر$$

$$(٣) \quad \frac{\partial م}{\partial \delta} = ت ل - د_١ س_١ - د_٢ س_٢ - ت ث = صفر$$

$$\frac{\partial د (س_١ ، س_٢)}{\partial س_١} = ف_١ \quad \text{حيث أن}$$

حيث تأخذ القيم ١ ، ٢ ، ٣

ومن المعادلتين ١ و ٢ يمكن اشتقاق العلاقة التالية :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{f_1}{f_2}$$

أى أن المعدل الحدى للاحتلال بين  $r_1$  و  $r_2$  يكون مساويا للنسبة أسعار عناصر الإنتاج ، ويمكن أيضاً من المعادلتين (١) ، (٢) استنتاج أن :

$$\frac{f_2}{r_2} = \frac{f_1}{r_1} = \delta$$

ويعنى هذا أن الإضافة للإنتاج من آخر جنبيه (الوحدة النقدية) منقولة على كل عنصر من عناصر الإنتاج يجب أن يكون متساويا . وتكون مضرروب لاجرانج عبارة عن التفاضل الكلى للإنتاج بالنسبة للتكاليف . ويمكن إثبات ذلك رياضياً بفرض أن التكاليف متغيرة كالتالى :

بأخذ التفاضل الكلى لمعادلة التكاليف نستنتج التالى :

$$r_1 + r_2 = \delta$$

وبإحلال العلاقات  $r_1 = \delta - r_2$  في المشتقات الأولى ،

في المعادلات السابقة

$$(1) \quad \dots = (ت ل) \frac{1}{\delta} = (ف_١ و س_١ + ف_٢ و س_٢) \dots$$

ومن التفاضل الكلي لدالة الإنتاج سبق استنتاج أن :

$$(2) \quad \dots = ف_١ و س_١ + ف_٢ و س_٢ \dots$$

وبقسمة العلاقة (٢) على العلاقة (١) :

$$\delta = \frac{ف_١ و س_١ + ف_٢ و س_٢}{ف_١ و س_١ + ف_٢ و س_٢} \delta = \frac{و (ت ل)}{و (ت ل)}$$

ويتضح من المشتقات الأولى السابقة أن سلوك المعظمة بالنسبة للمنشأة

يكون عند نقطة تساوى المعدل الحدى لإحلال عناصر الإنتاج لنسبة أسعارها . أى أن العلاقات التالية أو إحداها تحدد سلوك المعظمة وهى :

$$(1) \quad \frac{ر_١}{ر_٢} = \frac{ف_١}{ف_٢}$$

$$(2) \quad \frac{ف_٢}{ر_٢} = \frac{ف_١}{ر_١} = \delta$$

$$(3) \quad \frac{ر_١}{ر_٢} = (م ح ل)$$

ويمكن شرح العلاقة التالية بالشكل السابق حيث تكون أفضل توليفة

من عناصر الإنتاج هى التى تمثل نقطة التماس بين منحنى الإنتاج المتماثل وخط التكاليف المتماثل .

وسلوك المعظمة بالنسبة للمنشأة يتطاب أن يكون محدد هامسين موجب القيمة . أي أن :

$$\begin{vmatrix} 11\text{ف} & 21\text{ف} & 1\text{ر} \\ 12\text{ف} & 22\text{ف} & 2\text{ر} \\ 1\text{ر} & 2\text{ر} & \text{صفر} \end{vmatrix} < \text{صفر}$$

أو بمعنى آخر يمكن استخدام المشتقات الثانية لايضاح أن نسبة التغير لميل المماس لمنحنى الإنتاج المتماثل يجب أن يكون موجبا  $\left( \frac{2\text{س}^2}{1\text{س}} < \text{صفر} \right)$  عند نقطة التماس مع خط التكاليف المتماثل . ويعنى ذلك أن منحنيات الإنتاج المتماثل يجب أن تكون محدبة اتجاه نقطة الأصل . ويمكن إيضاح سلوك المعظمة بالنسبة للمنشأة . بفرض أنها تستخدم عنصري إنتاج س<sub>١</sub> ، س<sub>٢</sub> . لإنتاج ساعة واحدة من المعظمة ذلك الإنتاج بأقل نفقة ممكنة . فمن دالة التكاليف بفرض أن التكاليف كلها متغيرة نجد أن :

$$1\text{ر} + 2\text{ر} = \text{ت}$$

$$2\text{ر} = \text{ت} - 1\text{ر}$$

$$2\text{س} = \frac{\text{ت}}{2} - \frac{1\text{ر}}{2}$$

$$\frac{1\text{ر}}{2} = \frac{2\text{س} + 1\text{ر}}{2} \quad \text{أو} \quad \frac{1\text{ر}}{2} = \frac{2\text{س} + 1\text{ر}}{2}$$

ويمكن إيضاح ذلك بالنسبة لمشاة تستخدم عدد قدره  $n$  من عناصر الإنتاج لإنتاج سلعة معينة  $Q$ .

دالة الإنتاج:

$$Q = f(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

وقيد الدخل:

$$(ت ل) = r_1 s_1 + r_2 s_2 + \dots + r_n s_n$$

وتكون دالة لاجرائج هي:

$$M = f(s_1, s_2, \dots, s_n) + \delta$$

$$\left\{ (ت ل) - r_1 s_1 - r_2 s_2 - \dots - r_n s_n \right\}$$

$$(١) \quad \frac{\partial M}{\partial s_1} = \frac{\partial Q}{\partial s_1} - r_1 \delta = \text{صفر}$$

$$(٢) \quad \frac{\partial M}{\partial s_2} = \frac{\partial Q}{\partial s_2} - r_2 \delta = \text{صفر}$$

⋮

$$(ن) \quad \frac{\partial M}{\partial s_n} = \frac{\partial Q}{\partial s_n} - r_n \delta = \text{صفر}$$

$$\dots - \text{ر}_٢ \text{س}_٢ - \text{ر}_١ \text{س}_١ = \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{ت}}$$

$$- \text{ر}_٢ \text{س}_٢ = \text{صفر}$$

$$\frac{\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_٢}}{\text{ر}_٢} = \delta \quad \dots \quad \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_١}}{\text{ر}_١} = \delta \quad \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_١}}{\text{ر}_١} = \delta$$

ولقد اثبت أن  $\delta$  مضروب لاجرانج الغير محدد هو عبارة عن التغير في الإنتاج بالنسبة للتغير في التكاليف وحدة واحدة . وتعرف التكاليف الحدية بأنها عبارة عن التغير في التكاليف الكلية نتيجة تغير الإنتاج وحدة واحدة ، ونظراً لأن :

$$\delta = \frac{\partial \text{ك}}{\partial (\text{ت ل})} \text{ فنكون } \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{ك}} = \frac{1}{\delta} = \text{ت ح حيث ت ح}$$

هي عبارة عن التكاليف الحدية . ومن المشتقات الأولى لدالة لاجرانج يكون سلوك المعظمة بالنسبة للمنشأة كالتالى :

$$\frac{1}{\text{ت ح}} = \delta = \frac{\frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_٢}}{\text{ر}_٢} = \dots = \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_١}}{\text{ر}_١} = \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_١}}{\text{ر}_١}$$

$$\frac{1}{T} = \delta = \frac{F_1}{R_1} = \dots = \frac{F_2}{R_2} = \frac{F_1}{R_1}$$

ويتضح من هذه العلاقة أنه لكي تقلل المنشأة التكاليف إلى أقل ما يمكن

يجب أن يكون الإنتاج الحدي لعناصر الإنتاج بالنسبة لوحدة النقود متساو .  
ومن المعادلتين (١) ، (٢) يمكن استنتاج أن :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Y_1}{Y_2} = \frac{\frac{\partial L}{\partial S_1}}{\frac{\partial L}{\partial S_2}}$$

وبأخذ الميل السالب لمنحنى الإنتاج المتماثل في الإعتبار :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Y_1}{Y_2}$$

وبصفة عامة :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{Y_1}{Y_2}$$

حيث تأخذ القيم ١ ، ٢ من ١ إلى ٣

مثال :

إذا كانت دالة الإنتاج لمنشأة معينة هي  $L = S_1 P_1 + S_2 P_2$  لها دخل معين تريد إنفاقه مقدراً بالمبلغ ١٢٠ جنيتها على عناصر الإنتاج  $S_1$  و  $S_2$ .  
وضح كيف يمكن لهذه المنشأة تمظيم الإنتاج عرضه إلى تقبل النفقة إلى أقل ما يمكن باستخدام طريقة مضروبات لاجرانج إذا علم أن سعر الوحدة من  $S_1 = ٢$  و  $S_2 = ٤$ .

$$L = S_1 P_1 + S_2 P_2$$

$$١٢٠ = ٢ S_1 + ٤ S_2$$

$$M = S_1 P_1 + S_2 P_2 + \delta (١٢٠ - ٢ S_1 - ٤ S_2)$$

$$(١) \quad \frac{\partial M}{\partial S_1} = P_1 - 2\delta = 0$$

$$(٢) \quad \frac{\partial M}{\partial S_2} = P_2 - 4\delta = 0$$

$$(٣) \quad \frac{\partial M}{\partial \delta} = ١٢٠ - ٢ S_1 - ٤ S_2 = 0$$

وبتقسمة المعادلة (٢) على (١) :

$$\frac{٤}{٢} = \frac{P_2 - 4\delta}{P_1 - 2\delta}$$

$$\frac{2}{1} = \frac{2 \text{ س } 1}{2 \text{ س}}$$

∴ س<sub>١</sub> = س<sub>٢</sub> (٤) وتعرف هذه بمعادلة المعر الممتد للمنشأة

وبتعويض المعادلة رقم (٤) في المعادلة رقم (٣) يتضح ما يلي:

$$120 = 2 \text{ س } 1 - 4 \text{ س } 1 = \text{صفر}$$

$$20 = 6 \text{ س } 1 \quad 20 = 2 \text{ س } 1$$

$$20 = 2 \text{ س } 2 \quad \text{حيث أن س } 1 = \text{س } 2$$

$$20 = \overset{2}{P}(20) \overset{1}{P}(20) = \text{ك}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{\overset{2}{P}(20) \overset{1}{P}(20) \left(\frac{1}{6}\right)}{2} = \frac{\overset{2}{P} 2 \text{ س } 1 \overset{1}{P} 2 \text{ س } 1}{2} = \delta$$

$$\frac{1}{6} = \frac{\overset{1}{P}(20) \overset{1}{P}(20) \left(\frac{2}{6}\right)}{4} = \frac{\overset{1}{P} 2 \text{ س } 1 \overset{1}{P} 2 \text{ س } 1}{4} = \delta$$

ومن هنا يتضح أن النفقة الحدية:

$$ت ح = \frac{1}{\delta} = 6$$

تقليل التكاليف : Cost Minimization

قد يكون هدف المنشأة تقليل أو تصغير التكاليف عرضه إلى إنتاج قدر معين من الإنتاج . وبفرض أن دالة الإنتاج هي :

$$(1) \quad Q = D(S_1, S_2)$$

$$(2) \quad C = P_1 S_1 + P_2 S_2$$

أى هدف المنشأة تصغير التكاليف (٢) عرضه إلى (١) . وتكون دالة لاجرانج هي :

$$L = P_1 S_1 + P_2 S_2 + \lambda [Q - D(S_1, S_2)]$$

وبوضع التفاضلات الجزئية مساوية للصفر بالنسبة إلى  $S_1$  ،  $S_2$  ،

يستنتج التالي :

$$(1) \quad \frac{\partial L}{\partial S_1} = P_1 - \lambda \cdot D_{S_1} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial L}{\partial S_2} = P_2 - \lambda \cdot D_{S_2} = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = Q - D(S_1, S_2) = 0$$

ومن المعادلتين (١) ، (٢) :

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{D_{S_1}}{D_{S_2}} = \frac{1}{\lambda} \quad \text{أو} \quad \frac{P_1}{P_2} = \frac{f_1}{f_2}$$

$$\text{او } م ح ل = \frac{r_1}{r_2}$$

وتشبه المشتقات الأولى لتصغير التكاليف عرضه إلى قدر معين من الإنتاج معظمة الإنتاج عرضه إلى قيد الدخل ويكون المحدد  $\lambda$  هو مقلوب المحدد  $\delta$  أو التفاضل الكلي لدالة التكاليف بالنسبة للإنتاج وهذا ما يعرفه بالنفقة الحدية . وعموما لتصغير التكاليف يجب أن يكون المعدل الحدي للإحلال مساويا لنسبة أسعار عناصر الإنتاج أو

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{y_{s_1}}{y_{s_2}}$$

حيث تأخذ القيم  $a, b$  من ١ إلى  $n$ .

مثال :

بين كيف يمكن لمنشأة دالة إنتاجها  $ل = س_1 س_2$  أن تقلل النفقة إلى أصغر ما يمكن عرضه إلى إنتاج ذلك القدر المعين من الإنتاج إذا علم أن القدر المطلوب من الإنتاج هو ١٦ وحدة وأن سعر الوحدة من  $س_1 = ٢$  و ٦ سعر الوحدة من  $س_2 = ٨$ .

$$م ح ل = ٢ س_1 + ٨ س_2 + \lambda \{ ١٦ - س_1 س_2 \}$$

$$\frac{\partial م ح ل}{\partial س_1} = ٢ - س_2 = ٠ \quad (١)$$

$$(٢) \quad \text{صفر} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \text{س}_١ \text{س}_٢ - ٨ = \frac{\text{س}_٢}{\lambda \text{س}_٢}$$

$$(٢) \quad \text{صفر} = \frac{1}{\lambda} \text{س}_٢ - \frac{1}{\lambda} \text{س}_١ - ١٠ = \frac{\text{س}_٢}{\lambda \cdot \text{س}_٢}$$

$$\frac{٨}{٢} = \frac{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \text{س}_١ \text{س}_٢}{\frac{1}{\lambda} \text{س}_٢ - \frac{1}{\lambda} \text{س}_١}$$

$$\text{س}_١ = ٤ \text{س}_٢ \quad \frac{٤}{١} = \frac{\text{س}_١}{\text{س}_٢}$$

وبالتعويض في المعادلة رقم (٣)

$$\text{س}_٢ = ٢ = \left(\frac{1}{\lambda} \text{س}_٢\right) \frac{1}{\lambda} (٤ \text{س}_٢) = ١٦$$

$$\text{س}_١ = ٢٢ \quad \text{س}_٢ = ٨$$

ومن ثم لكي تنتج المنشأة هذا القدر من الإنتاج يجب أن تكون التكاليف هي:

$$\text{ت} = ١٢٨ = ٦٤ + ٦٤ = ٨ \times ٨ + ٢٢ \times ٢$$

أما عن المشتقات الثانية لمحدد هاسين فيجب أن يكون أقل من الصفر

أي أن:

$$\text{صفر} > \begin{vmatrix} -\lambda f_1 & -\lambda f_{21} & -\lambda f_{11} \\ -\lambda f_2 & -\lambda f_{22} & -\lambda f_{12} \\ -\lambda f_3 & -\lambda f_4 & -\lambda f_5 \end{vmatrix}$$

وبإحلال العلاقات  $-\lambda f_1 = -\lambda f_{21} - \lambda f_{11}$  و  $-\lambda f_2 = -\lambda f_{22} - \lambda f_{12}$  وبضرب

المعادين (١)، (٢) بالمعامل  $-\frac{1}{\lambda}$  ثم ضرب الصف الثالث بالمعامل

$-\lambda$  والصف الثالث بالمعامل  $\lambda$  يستنتج التالي :

$$\begin{vmatrix} -\frac{\lambda f_1}{\lambda} & -\lambda f_{21} & -\lambda f_{11} \\ -\frac{\lambda f_2}{\lambda} & -\lambda f_{22} & -\lambda f_{12} \\ \text{صفر} & \frac{\lambda f_3}{\lambda} & \frac{\lambda f_4}{\lambda} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{\lambda f_1}{\lambda} & f_{21} & f_{11} \\ -\frac{\lambda f_2}{\lambda} & f_{22} & f_{12} \\ \text{صفر} & \frac{\lambda f_3}{\lambda} & \frac{\lambda f_4}{\lambda} \end{vmatrix} \quad \lambda =$$

$$\text{صفر} > \left| \begin{array}{ccc} \text{ر}_1 - & \text{ف}_{٢١} & \text{ف}_{١١} \\ \text{ر}_2 - & \text{ف}_{٢٢} & \text{ف}_{١٢} \\ \text{صفر} & \text{ر}_1 - & \text{ر}_2 - \end{array} \right| \frac{\theta}{\lambda} = -$$

حيث أن  $\lambda < \text{صفر}$

وإذا كانت المشتقات الثانية تتطابق مع محدد هامين تكون كل نقطة تماس بين منحنى الإنتاج المتماثل وخط التكاليف المتماثل نقط معظمة الإنتاج وتصغير التكاليف في آن واحد .

### معظمة الربح : Profit Maximization

إن الهدف الأساسي للمنشأة هو معظمة الربح ويعرف بأنه الفرق بين إيراد المنشأة وتكاليفها . فالإيراد تحت حالة المنافسة الحرة بالنسبة للمنشأة هو عبارة عن حاصل ضرب الكميات المباعة في سعر الوحدة وعلى هذا فيعرف الربح ( $\pi$ ) بالمعادلة التالية .

$$\pi = ع ك - ت ل$$

$$ك = د (س_١ ، س_٢)$$

$$ت ل = ر_١ س_١ + ر_٢ س_٢$$

$$\pi = ع د (س_١ ، س_٢) - ر_١ س_١ - ر_٢ س_٢$$

ومعظمة دالة الربح حيث أنه يعتمد على  $س_١$  ،  $س_٢$  تأخذ التفاضلات

الجزئية بالنسبة لها ثم تساوى بالصفر كالتالى :

$$(1) \quad \frac{\partial \pi}{\partial s_1} = E F_1 - R_1 = \text{صفر}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \pi}{\partial s_2} = E F_2 - R_2 = \text{صفر}$$

ومن المعادلتين (١) ، (٢) يمكن استنتاج التالي :

$$E F_1 = R_1 \quad \text{و} \quad E F_2 = R_2$$

أى أن المشتقات الأولى لمعظمة الربح تتطلب أن يكون استخدام عنصر الإنتاج حتى يكون قيمة الإنتاج الحدى (ع ف<sub>١</sub>) لهذا العنصر مساويا لسعر الوحدة منه . وعلى هذا فإن مدير المنشأة يمكنه زيادة ربحه طالما زيادة استخدام ذلك العنصر تؤدي إلى زيادة في الدخل أكبر من التكاليف . ويجب أن تكون محددات هاسين متبادلة الإشارة أى أن :

$$\begin{array}{|c|} \hline \frac{\partial^2 \pi}{\partial s_1 \partial s_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial s_1 \partial s_2} \\ \hline \frac{\partial^2 \pi}{\partial s_2 \partial s_1} & \frac{\partial^2 \pi}{\partial s_2 \partial s_2} \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} < \text{صفر} \\ > \text{صفر} \end{array}$$

وقيمة هذا المحدد هي :

$$< \text{صفر} \quad \left( \frac{\partial^2 \pi}{\partial s_1 \partial s_1} \times \frac{\partial^2 \pi}{\partial s_2 \partial s_2} - \left( \frac{\partial^2 \pi}{\partial s_1 \partial s_2} \right)^2 \right)$$

حيث أن :

$$\text{صفر} > \frac{\pi^2 \partial}{\partial s_1 \partial^2} \quad \text{وكذلك} \quad \frac{\pi^2 \partial}{\partial s_1 \partial \partial s_2} = \frac{\pi^2 \partial}{\partial s_1 \partial s_2 \partial}$$

$$\text{صفر} > \frac{\pi^2 \partial}{\partial s_2 \partial^2} \quad \text{صفر} < \left( \frac{\pi^2 \partial}{\partial s_1 \partial s_2 \partial} \right)^2$$

ومن الجدير بالذكر هنا إذا وصلت المنشأة لهذه النقطة ومطابقة محدد هامسين فإن زيادة استخدام  $s_1$  ،  $s_2$  يؤدي إلى نقص الربح .

استخدام نظرية إيلر : Uses of Euler's Theorem

(١) يمكن استخدام نظرية إيلر لبيان هل عائدا السمة Return fo Scale

ثابتا متزايدا أم متناقصا كما سبق شرحه . فإذا كانت دالة الإنتاج :

$$Q = D(s_1, s_2)$$

$$Q = s_1^{\alpha} s_2^{\beta}$$

فمن نظرية إيلر :

$$Q = \alpha s_1 \times \frac{\partial Q}{\partial s_1} + \beta s_2 \times \frac{\partial Q}{\partial s_2} + \dots$$

$$s_n \times \frac{\partial Q}{\partial s_n}$$

حيث و = درجة التجانس .

وبفرض أن و = ١ وحساب الإنتاج الحدي لكل من  $s_1$  ،  $s_2$

يتضح التالي :

$$L = \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2 + (s_1) \frac{1}{2} s_2 = \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2 + s_1 s_2$$

فإذا كانت درجة تجانس دالة الإنتاج الوحدة فإن عائد السعة يكون

ثابتا :

$$L = \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2 + s_1 s_2 = \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2 + s_1 s_2$$

وبفرض أن و > ١

نحن نظرية إيلر :

$$L = \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2 + s_1 s_2 = \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2 + s_1 s_2$$

و > ١

$$L = \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2 + s_1 s_2$$

$$L = \frac{1}{2} s_1 + \frac{1}{2} s_2 + s_1 s_2$$

حيث تأخذ القيم ١ إلى ١

وبضرب الطرفين في ع-

$$ع ك > \frac{ع}{١} \frac{ك}{١}$$

ونظراً لأن:

$$ف١ ع = ر١ \quad ٦ \quad ف٢ ع = ر٢$$

$$\text{أى أن : } ف١ ع = ر١$$

حيث تأخذ التقييم ١ إلى ص

$$ر١ = ع \times \frac{ك}{١}$$

$$ع ك > \frac{ع}{١} \frac{ك}{١}$$

أى أن العائد لاسعة أقل من المنفق على الإنتاج.

(٢) يمكن استخدام نظرية إيلر لإيجاد النقاط التي تكون فيها

الاسعة ثابتاً: Constant Return to Scale.

فبفرض أن دالة الإنتاج هي:

$$ك = ٢ س١ س٢ س٣ - ٤ س١ س٢ س٣$$

$$\frac{ك}{١} = \frac{٢ س١ س٢ س٣ - ٤ س١ س٢ س٣}{١}$$

$$D_k = \frac{6 \text{ من } 1^2 \text{ من } 2 - 12 \text{ من } 2^2 \text{ من } 3}{2}$$

$$- 12 \text{ من } 3^2 \text{ من } 4 - 20 \text{ من } 4^2 \text{ من } 5 = (6 \text{ من } 1^2 \text{ من } 2 - 12 \text{ من } 2^2 \text{ من } 3) / 2 +$$

$$+ (6 \text{ من } 1^2 \text{ من } 2 - 12 \text{ من } 2^2 \text{ من } 3) / 2 +$$

$$= 12 \text{ من } 1^2 \text{ من } 2 - 24 \text{ من } 2^2 \text{ من } 3 =$$

$$9 \text{ من } 1^2 \text{ من } 2 - 20 \text{ من } 2^2 \text{ من } 3 = \text{صفر}$$

$$\text{صفر} = 9 \text{ من } 1^2 \text{ من } 2 - 20 \text{ من } 2^2 \text{ من } 3$$

$$9 = 20 \text{ من } 1^2 \text{ من } 2$$

$$\frac{9}{20} = \frac{1}{2}$$

٣) يمكن استخدام نظرية إيار لتقسيم دالة الإنتاج إلى مراحلها المختلفة

بفرض أن الكمية المنتجة تستخدم عنصراً واحداً من عناصر الإنتاج

و يفرض أن عائد السعة ثابتا فيستنتج التالي :

$$D = D(1)$$

ومن نظرية إيار :

$$D = \frac{D}{1} \times X$$

وبقسمة الطرفين على  $ك$  :

$$(٥) \quad \frac{ح}{١٢} = \frac{١س}{ك} \times \frac{دك}{١س١} = ١$$

$$١٢ = ح \quad \Rightarrow \quad \frac{ح}{١٢} = ١ \quad \Rightarrow \quad كس١ = ١$$

أى أنه حينما يكون الإنتاج الحدى يساوى متوسط الإنتاج تكون مرونة الإنتاج تساوى الوحدة وهى بداية المرحلة الثانية ونهاية المرحلة الأولى . ويمكن أيضاً إيجاد نهاية المرحلة الثالثة كالتالى :

$$\Rightarrow كس١ = ١ = \frac{دك}{١س١} \times \frac{١س}{ك} = \text{صفر} = \frac{١س}{ك}$$

ومن الجدير بالملاحظة أن فى المرحلة الأولى :

(\*) ويمكن إثبات ذلك رياضياً كالتالى عند نهاية المرحلة الأولى

وبداية المرحلة الثانية تكون :

$$١٢ = ح$$

$$\therefore \frac{دك}{١س١} = \frac{ك}{١س} = \frac{دك}{١س١}$$

$$\Rightarrow كس١ = ١ = \frac{١س}{ك} \times \frac{دك}{١س١}$$

$$1 < m < 1$$

$$1 < \frac{1}{m}$$

$$1 < \frac{1}{m} \Rightarrow 1 < \frac{1}{m} \times \frac{1}{m} < \frac{1}{m}$$

(٤) تحت حالة المنافسة الحرة تعتبر نظرية إيلر نظرية توزيع

Theory of Distribution بفرض أن درجة تجانس دالة الإنتاج تساوى

الوحدة فمن نظرية إيلر:

$$L = s_1 \times \frac{\partial L}{\partial s_1} + s_2 \times \frac{\partial L}{\partial s_2} + \dots$$

$$s_n \times \frac{\partial L}{\partial s_n}$$

وبضرب الطرفين في سعر السلعة  $L$  وهو  $C$

$$C = s_1 \times C \times \frac{\partial L}{\partial s_1} + s_2 \times C \times \frac{\partial L}{\partial s_2} + \dots$$

$$s_n \times C \times \frac{\partial L}{\partial s_n}$$

ومن المعلوم أن  $1 = C \times \frac{\partial L}{\partial s_1}$

### دوال التكاليف :

تعرف التكاليف بأنها إجمالي النفقة التي تتكبدها المنشأة لإنتاج السلع والخدمات وتختلف التكاليف حسب طبيعتها<sup>(١)</sup> وكذلك من حيث المدى الزمني فالمدى قصير الأجل كما بينا سلفاً هو ذلك المدى الذي لا يكون هناك وقت كاف للمنشأة لتغيير هيكلها الثابت Scale of Plant أما المدى طويل الأجل فهو ذلك المدى الذي يكون هناك وقت طاف للمنشأة لتغيير جميع موارد إنتاجها ثابتاً أم متغيراً .

### دوال التكاليف في المدى قصير الأجل وطويل الأجل

تشمل الدوال في المدى قصير الأجل دوال التكاليف الثابتة والمتغيرة والكلية . تكاليف الموارد الثابتة لا بد وأن تتكبدها المنشأة سواء أنتجت أم لم تنتج سلع وخدمات أما التكاليف المتغيرة فهي إجمالي نفقة المنشأة على موارد الإنتاج المتغيرة وتمثل التكاليف الكلية مجموع التكاليف الثابتة والمتغيرة . وتشمل دوال التكاليف في المدى قصير الأجل متوسطات التكاليف الثابتة والمتغيرة والكلية .

$$\frac{م ت ث}{ل} = م ت ث$$

حيث م ت ث = متوسط التكاليف الثابتة

( ١ ) أنظر المرجع التالي

$$\frac{ت غ}{ل} = م ت غ$$

م ت غ = متوسط التكاليف المتغيرة

$$\frac{ت ل}{ل} = م ت ل$$

حيث م ت ل = متوسط التكاليف الكلية

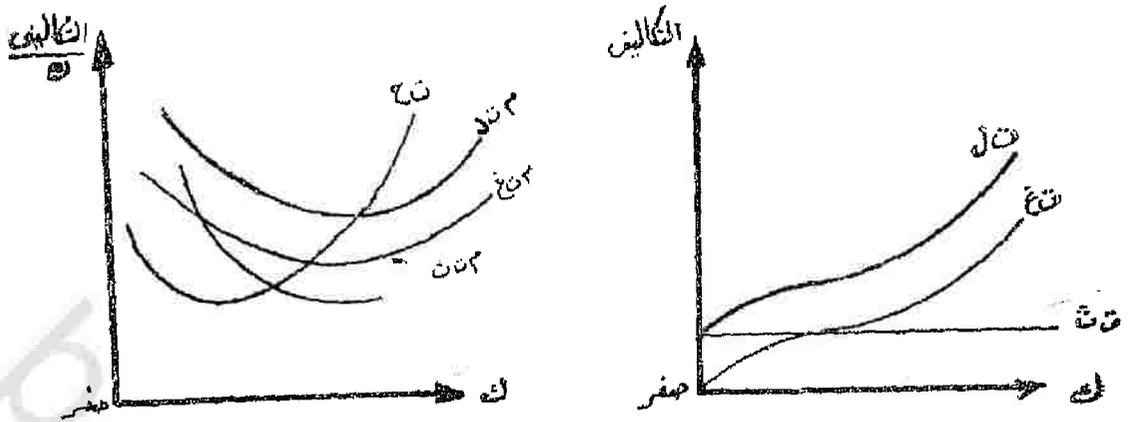
وتعرف التكاليف الحدية بأنها التغير في التكاليف الكلية أو المتغيرة بالنسبة للتغير في الإنتاج وحدة واحدة ورياضيا هي عبارة عن التفاضل لدالة التكاليف الكلية أو المتغيرة بالنسبة للتغير في الإنتاج وحدة واحدة أى أن :

$$\frac{وت ث}{ل} + \frac{وت غ}{ل} = \frac{(ت غ + ت ث)}{ل} = \frac{وت ل}{ل} = ت ح$$

$$\frac{وت غ}{ل} = \text{صفر} + \frac{وت غ}{ل}$$

حيث ت ح = التكاليف الحدية

وقد تأخذ دوال التكاليف أشكال مختلفة ولكن الشكل العام يمكن إيضاحه بالشكلين الآتيين :



شكل (٥٥) منحنيات التكاليف المختلفة متوسطاتها وكذلك فنحنى التكاليف الحدية .

وينضح أن دالة التكاليف دالة تكعيبية ، أما عن متوسطات التكاليف الكلية والمتغيرة ودالة التكاليف الحدية فهى دوة تربيعية حيث تأخذ فى القفصان بزيادة الانتاج ثم يصل كل منها إلى نقطة تصغير Minimum Point ثم تزداد بزيادة الانتاج ، ويصل منحنى التكاليف الحدية إلى نقطة تصغيره قبل أن يصل منحنى متوسطات التكاليف الكلية والمتغيرة إلى نقطتي تصغيرهما ، ولكن يصل منحنى التكاليف المتغيرة قبل منحنى متوسط التكاليف الكلية وأن منحنى التكاليف الحدية يقطع منحنى متوسط التكاليف الكلية والمتغيرة عند نقطتي تصغيرهما ويمكن إثبات ذلك رياضيا كالتالى :

$$\frac{ت\ ل}{ك} = \text{متوسط التكاليف الكلية}$$

$$(١) \quad \frac{ت\ ل - \frac{د(ت\ ل)}{دك} ك}{ك^2} = \frac{\left(\frac{ت\ ل}{ك}\right) د}{دك}$$

ولتصغير المعادلة (١) نضع مساويه للصفر :

$$(٢) \quad \text{صفر} = \frac{\text{ك} \frac{\text{و} (\text{ت ل})}{\text{ل}} - \text{ت ل}}{\text{ك}^2}$$

وبضرب الطرفين في الوسطين يستنتج التالي :

$$\text{ك} \frac{\text{و} (\text{ت ل})}{\text{ل}} - \text{ت ل} = \text{صفر}$$

$$\text{ك} (\text{ت ح}) - \text{ت ل} = \text{صفر}$$

$$(٣) \quad \text{ت ح} = \frac{\text{ت ل}}{\text{ك}} = \text{م ت ل}$$

وأيضاً

$$\frac{\text{ت غ}}{\text{ك}} = \text{متوسط التكاليف المتغيرة}$$

$$\frac{\text{ك} \frac{\text{و} (\text{ت غ})}{\text{ل}} - \text{ت غ}}{\text{ك}^2} = \frac{\left( \frac{\text{ت غ}}{\text{ك}} \right) \text{و}}{\text{ك}}$$

ولتصغير المعادله (٤) نوضع مساويه للصفر :

$$\text{ك} \frac{\text{و} (\text{ت غ})}{\text{ل}} - \text{ت غ} = \text{صفر}$$

$$ل (ت ح) - ت غ = \text{صفر}$$

$$(٥) \quad ت ح = \frac{ت غ}{ل} = م ت غ$$

ومن العلاقات (٢) ، (٥) يتضح أن التكاليف الحدية،  $\tau$ ، بتغطّي تصغير كل من متوسط التكاليف الكلية والمتغيرة :

ومن الجدير بالملاحظة أن مدير المنشأة الذي هدفه معظمة الربح يريد أن يحصل على ذلك القدر من الإنتاج الذي يحقق ذلك الهدف ، وباعتبار العلاقات الثلاثة التالية وهي دالة الإنتاج ومعادلة التكاليف ودالة الممر الممتد للمنشأة وهي على التوالي :

$$ل = د (س_١ ، س_٢)$$

$$ت ل = ر_١ س_١ + ر_٢ س_٢ + ت ث$$

$$\text{صفر} = و (س_١ ، س_٢)$$

ويمكن إختصار العلاقات السابقة بالمعادلة التالية حيث أن التكاليف عبارة عن دالة ضمنية للإنتاج مضافا إلى هذه الدالة الضمنية التكاليف الثابتة أي أن :

$$ت ل = د (ل) + ت ث$$

ويتضح من ذلك أن إيراد المنشأة يتوقف على الكميات المباعة وبفرض ثبات سعر الوحدة من السلعة المباعة يتوقف الربح أيضا هي تلك الكمية من السلعة .

$$\pi = \text{ع} - \text{د} (\text{ل}) - \text{ت}$$

ولمظمة الربح يؤخذ التفاضل بالنسبة إلى  $\text{ل}$  وتوضع المعادلة مساوية للصفر كالتالي:

$$\text{صفر} = \text{ع} - \text{د}' (\text{ل}) = \frac{\pi \text{ د}}{\text{ل}}$$

$$\text{صفر} = \text{ع} - \text{د}' (\text{ل})$$

$$\text{ع} = \text{د}' (\text{ل})$$

ويتضح مما سبق لمظمة الربح يجب أن تتساوى التكاليف الحدية بسعر الوحدة المباعة (الإيراد الحدي). ولمظمة الربح يجب تكون المشتقات الثانية كالتالي:

$$\text{صفر} > \frac{\text{د}'' (\text{ل})}{\text{ل}^2} = \frac{\pi \text{ د}''}{\text{ل}^2}$$

$$\text{صفر} > \frac{\text{د}'' (\text{ل})}{\text{ل}^2}$$

وبضرب كل من الحدي الأيمن والأيسر للعلاقة السابقة بـ ١ -

$$\text{صفر} < \frac{\text{د}'' (\text{ل})}{\text{ل}^2}$$

أما عن المدى أطول الأجل فيمكن للمنشأة أن تغير من هيكلها وبناء وحدات إنتاجية أخرى لإنتاج الساع حيث تهبط كل وحدة إنتاجية أقل

ما يمكن بالنسبة لوحدة الإنتاج عند ذلك المستوى المعين ويأخذ أيضاً متوسط التكاليف الكلية في المدى طويل الأجل شكل حرف U ويعنى تناقصه أن هناك إقتصاديات السلعة Economies of Scale أما تزايد به بعد يصل إلى نقطة تصغيره فمضى عدم وجود إقتصاديات السلعة diseconomies of Scale وقد أمزى الأولى إلى الكفاءة الإقتصادية (التي تسبب في تناقص متوسط التكاليف الكلية) التي تتناقص بزيادة الإنتاج أما الثانية فقد أمزى أن هناك مقدرة إنتاجية محده تصل الكفاءة أقصاها ثم تتناقص بزيادة الإنتاج (وهذا ما يسبب في زيادة متوسط التكاليف الكلية). أما عن التكاليف الحدية فهي عبارة عن التغير في التكاليف الكلية نتيجة تغير في الإنتاج وحدة واحدة في المدى طويل الأجل.

مثال :

١ - بفرض أن الدالة<sup>(١)</sup> التالية هي دالة التكاليف وأن سعر الوحدة هو أربعة جنيهات فأوجد كمية الإنتاج الذي يعظم الربح .

$$ت ل = ٤٠٠ - ١٠٠٠٠ ت + ١٠٠ ت^٢$$

ولمظمة الربح يجب أن :

$$ت ح = ع$$

(١) J.M. Henderson And R. E. Quandt 'Microeconomic Theory. A Mathematical Approach . ' McGraw - Hill Book Company , Inc .

- ٢٣٩ -

$$١٢ ل = ١٠ + ل - ١٨٨ ل$$

$$ل = ١٥ - ل + ٥٠ = صفر$$

$$ل = ٥ \quad ٦ \quad ل = ١٠$$

$$١٨٨ ل - ٠.٢٤ ل = \frac{(ل)^2}{ل}$$

وعند الكمية ل = ٥ تكون  $\frac{(ل)^2}{ل} > صفر$

الكمية ل = ١٠ تكون  $\frac{(ل)^2}{ل} < صفر$

وعليه فإن الإنتاج الذي يعطى معظم الربح هو ل = ١٠ .