# الباب الرابع

## التوازن

يمثل التوازن حالة من الثبات حيث تكون جميع القوى المؤثرة فى حالة استاتيكية ولا تكون هناك ميل لهذه القوى فى التغيير وإذا تغيرت هذه القوى أو إحداها فإنه نقطة التوازن ستتغير إلى نقطة أخرى ، وينقسم التوازن من ناحية دراسة إلى :

١ — التوازن العام ويمثل حالة التوازن التى تكون فيها جميع الوحدات الاقتصادية فى حالة توازن .

٢ — التوازن الجزئى ويمثل حالة التوازن التى تكون فيها الوحدة الاقتصادية فى حالة توازن وتنقسم إلى :

(ا) توازن المستهلك حيث يكون المستهلك فى حالة توازن كما بينا سلفا إذا كان المستهلك ينفق دخله فى الصورة التالية :

$$\frac{(م\ ح)_1}{ع_1} = \frac{(م\ ح)_2}{ع_2} = \cdots\cdots = \frac{(م\ ح)_ن}{ع_ن}$$

أى أن المنفعة الحدية لوحدة الجنيه لجميع السلع متساوية حيث أن :

$$(م\ ح)_ا = \frac{\partial م}{\partial ك_ا}$$ حيث تبدأ ا م ١ إلى ن .

(ب) توازن المنشأة حيث تكون المنشأة فى حالة توازن إذا كان عرضها النهائى هو منظمة الربح أى أن :

الإيراد الحدى = النفقة الحدية

٣ — توازن السوق : ويمثل التوازن الذى تكون فيه قوى الطلب مساوية لقوى العرض حيث يكون هناك سعر عند نقطة تلاقى قوى بقوى العرض يطلق عليه سعر التوازن . وتوضح الأمثلة التالية توازن السوق :

١ — إذا كانت دالتى الطلب والعرض كالتالى :

$$ك_ط = ٢٠٠٠ - ١٠٠ ع$$

$$ك_ر = -١٠٠ + ٥٠ ع$$

احسب سعر التوازن فى السوق :

الحل : من المعلوم عند نقطة التوازن تكون

$$ك_ط = ك_ر$$

$$٢٠٠٠ - ١٠٠ ع = -١٠٠ + ٥٠ ع$$

$$١٥٠ ع = ٢١٠٠$$

$$ع = ١٤$$

$$\text{ك}_{\text{ط}} = 2000 - 100\ (4) = 600$$

$$\text{ك}_{\text{ر}} = -100 + 50\ (14) = 600$$

٣ — إذا كانت دوال الطلب والعرض فى السوق للسلعتين ١ ، ٢ هما كالتالى :

$$\text{ك}_{\text{ط}1} = 100 - 10\,\text{ع}_1 - 20\,\text{ع}_2$$

$$\text{ك}_{\text{ر}1} = -30 + 10\,\text{ع}_1 + 10\,\text{ع}_2$$

$$\text{ك}_{\text{ط}2} = 60 - 10\,\text{ع}_1 - 10\,\text{ع}_2$$

$$\text{ك}_{\text{ر}2} = -20 + 10\,\text{ع}_2$$

فأوجد سعر التوازن للسلعتين ١ ، ٢

الحل : عند التوازن تكون

$$\text{ك}_{\text{ط}1} = \text{ك}_{\text{ر}1}$$

$$100 - 10\,\text{ع}_1 - 20\,\text{ع}_2 = -30 + 10\,\text{ع}_1 + 10\,\text{ع}_2$$

$$-20\,\text{ع}_1 - 30\,\text{ع}_2 = -130$$

$$20\,\text{ع}_1 + 30\,\text{ع}_2 = 130 \qquad (1)$$

$$\text{ك}_{\text{ط}٢} = \text{ك}_{\text{ر}٢}$$

$$٦٠ - ١٠\,\text{ع}_{١} - ١٠\,\text{ع}_{٢} = -٢٠ + ١٠\,\text{ع}_{٢}$$

$$-١٠\,\text{ع}_{١} - ٣٠\,\text{ع}_{٢} = -٨٠$$

$$١٠\,\text{ع}_{١} + ٢٠\,\text{ع}_{٢} = ٨٠ \qquad (٢)$$

وباستخدام قاعدة كرامر لحل مجاهيل المعادلتين ١ ، ٢

$$\text{ع}_{١} = \frac{\begin{vmatrix} ١٣٠ & ٣٠ \\ ٨٠ & ٢٠ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٢٠ & ٣٠ \\ ١٠ & ٢٠ \end{vmatrix}} = \frac{٢٦٠٠ - ٢٤٠٠}{٤٠٠ - ٣٠٠} = \frac{٢٠٠}{١٠٠} = ٢$$

$$\text{ع}_{٢} = \frac{\begin{vmatrix} ٢٠ & ١٣٠ \\ ١٠ & ٨٠ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٢٠ & ٣٠ \\ ١٠ & ٢٠ \end{vmatrix}} = \frac{١٦٠٠ - ١٣٠٠}{٤٠٠ - ٣٠٠} = \frac{٣٠٠}{١٠٠} = ٣$$

وعليه تكون أسعار التوازن هى $\text{ع}_{١} = ٢$ ، $\text{ع}_{٢} = ٣$

وتكون كميات التوازن

$$\text{ك}_{\text{ط}١} = ٢٠ \qquad \text{ك}_{\text{ط}٢} = ١٠$$

$$\text{ك}_{\text{ر}١} = ٢٠ \qquad \text{ك}_{\text{ر}٢} = ١٠$$

٣ — بفرض أن منشأة اقتصادية لبيع الأسمدة للمزارعين كان الطلب الواحد الذى تبيعه هو

$$\text{ك} = ٢٤ - \text{ع} + \text{ا}$$

حيث أن ع سعر الطن من السماد وأن ا هو عبارة عن محيط الدائرة الذى تبيع فيه المنشأة سمادها وتوصيله للمزارعين بدون مقابل . وأن التكاليف يمكن تمثيلها بالدالة :

$$\text{ت ل} = \tfrac{١}{٢}\,\text{ك}^{٢} + \text{ا}^{٢}$$

فإذا كان هدف المنشأة هو معظمة الربح أوجد سعر التوازن الذى يعظم ذلك الربح ومحيط الدائرة الذى تبيع فيه المنشأة سمادها وتوصيله دون مقابل .

__الحـل :__

$$\pi = \text{ع ك} - \text{ت ل}$$

$$= \text{ع}\,(٢٤ - \text{ع} + \text{ا}) - \tfrac{١}{٢}\,(٢٤ - \text{ع} + \text{ا})^{٢} -$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \text{ع}} = \text{ع}\,(-١) + (٢٤ - \text{ع} + \text{ا}) - \tfrac{١}{٢} \times ٢ \times (٢٤ - \text{ع} + \text{ا})\,(-١)$$

$$= -\text{ع} + ٢٤ - \text{ع} + \text{ا} + ٢٤ - \text{ع} + \text{ا}$$

$$= ٤٨ - ٣\text{ع} + ٢\text{ا}$$

ولإيجاد سعر التوازن الذى ينظم الربح توضع المعادلة ( ١ ) مساوية صفر

٤٨ − ٣ع + ٢ا = صفر (١)

∂π / ∂ا = ع − ½ × ٣ × (٢٤ − ع + ا) − ٢ا

= ع − ٢٤ + ع − ا − ٢ا

∂π / ∂ا = ٢ع − ٢٤ − ٣ا

ولإيجاد محيط الدائرة الذى يعظم الربح توضع هذه المعادلة مساوية للصفر

٤٢ − ٢٤ − ٣ا = صفر (٢)

ومن المعادلتين ( ١ ) ، ( ٢ ) يمكن حساب المجهولين ع ، ا

٤٨ − ٤٣ + ٢ا = صفر (١)

٢ع − ٤٢ − ٣ا = صفر (٢)

٣ع ٢ا = ٤٨ (٣)

٢ع − ٣ا = ٢٤ (٤)

وباستخدام قاعدة كرامر

$$ع = \frac{\begin{vmatrix} ٤٨ & -٢ \\ ٢٤ & -٣ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٢ & -٣ \end{vmatrix}} = \frac{-١٤٤ + ٤٨}{-٩ + ٤} = \frac{-٩٦}{-٥} = ١٩,٢$$

وبإحلال هذه القيمة فى المعادلة رقم (٣)

$$٣\left(\frac{٩٦}{٥}\right) - ٢\text{ا} = ٤٨$$

$$٢\text{ا} = \frac{٢٨٨}{٥} - ٤٨$$

$$\text{ا} = ٤,٨$$

وتكون كمية التوازن عند معظمة الربح هى :

$$ك = ٢٤ - \frac{٩٦}{٥} + \frac{٢٤}{٥}$$

$$ك = \frac{١٤٤ - ٩٦}{٥} = \frac{٤٨}{٥} = ٩,٦$$

الإيراد الكلى = ع ك

$$ك = ٢٤ - ع + \text{ا}$$

$$ع = ٢٤ + \text{ا} - ك$$

الإيراد الكلى = ٢٤ ك + ا ك − ك

ونظراً لأن الإيراد الكلى يكون معظما عندما يكون الإيراد الحدى مساويا للصفر .

$$\frac{\text{ء(الإيراد الكلى)}}{\text{ء ك}} = ٢٤ + ١ - ٢\text{ك}$$

$$٢٤ + ١ - ٢\text{ك} = \text{صفر}$$

$$٢\text{ك} = ٢٤ + \frac{٢٤}{٥}$$

$$= \frac{١٢٠ + ٢٤}{٥} = \frac{١٤٤}{٥}$$

$$\text{ك} = \frac{١٤٤}{٥} = ١٤٫٤$$

أى أن الكمية عندما يكون الإيراد الكلى معظما هى :

$$\text{ك} = ١٤٫٤$$

وهى نقطة توازن تختلف عندما يكون الربح معظما . ولبيان أن الإيراد الكلى يكون معظما عند تلك النقط يتضح من الجدول التالى :

$\text{ا} = \frac{٢٤}{٥}$

| ك | الإيراد الكلى |
|---|---|
| صفر | صفر |
| ٥ | ١١٩ |
| ١٠ | ١٨٨ |
| ١٤ر٤ | ٢٠٧ر٤٦ |
| ٢٠ | ١٧٦ |
| ٢٥ | ٩٥ |
| ٢٨ر٨ | صفر |

$$\text{ت ل} = \frac{١}{٢}\,\text{ك}^{٢} + \text{ا}^{٢}$$

| ك | ت ل |
|---|---|
| صفر | ٢٣ر٠٤ |
| ١٠ | ٧٣ر٠٤ |
| ١٥ | ١٣٥ر٥٤ |
| ٢٠ | ٢٣٣ر٠٤ |

وكما بينا أن الربح سيكون معظما عند الكمية ك = ٩ر٦

الإيراد الكلى = ٢٤ (٩٫٦) + ٤٫٨ (٩٫٦) − (٩٫٦)$^{٢}$

= ٢٣٠٫٤٠ + ٤٦٫٠٨ − ٩٢٫١٦

التكاليف الكلية = $\frac{١}{٢}$ ل$^{٢}$ + ا$^{٢}$

= $\frac{١}{٢}$ (٩٢٫١٥) + ٢٣٫٠٤

= ٤٦٫٠٨ + ٢٣٫٠٤

= ٦٩٫١٢

= ١٨٤٫٣٢ − ٦٩٫١٢ = ١١٥٫٢

وهى نقطة توازن لمعظمة الربح .

ويجب ملاحظة أن أى تغير فى سعر التوازن ومحيط الدائرة الذى يعطى فيه السماد بدون مقابل حتى ولو أعطوا نفس الكمية فإن هذا يودى إلى تقليل الربح ويمكن إثبات ذلك كالآتى :

ل = ٢٤ − ع + ا

فبفرض أن ع = ١٥ ، ا = ٠٫٥

فإن :

ل = ٢٤ − ١٥ + ٠٫٦ = ٩٫٦

$\pi$ = ع ل − ت ل

= ١٥ (٩ر٦) − [ ½ (٩ر٦)$^{٢}$ + (ر٦)$^{٢}$ ]

= ١٤٤ − [ ½ × ٩٢ر١١ + ٠ر٣٦ ]

= ١٤٤ − ٤٦ر٤٤ = ٩٧ر٥٦

*نماذج التوازن للمنشأة :*

أرجأنا الإشارة إلى نماذج التوازن للمنشأة إلى هذا الباب حيث أنها تمثل التوازن الاستاتيكى . وفى نفس لوقت فإنها تمثل التصرف الأمثل للمنشأة والتوازن الاستاتيكى هذا سيبنى على فروض معينة هى :

(ا) أن الإنتاج متصل بمعنى أن الإنتاج لا يتوقف على مدة معينة أو وقت معين .

(ب) أن الهدف الأساسى للمنشأة هو معظمة الربح .

(ح) أن دالة الإنتاج معروفة لدى المنشأة وأن هدفها هو معظمة الإنتاج بأقل التكاليف .

(ى) جميع الأسعار بالنسبة لعناصر الإنتاج والسلع مقفلة .

وتنقسم نماذج التوازن للمنشأة إلى ثلاثة أقسام هى :

(١) النموذج العنصرى Factor—Factor Model

لقد سبق اشتقاق أن :

$$\text{د ح} = \text{غ} \left( ١ + \frac{١}{\ni \text{ع}} \right)$$

حيث د ع = الإيراد الحدى

$\ni$ ع = المرونة السعرية = مرونة الطلب

أى أنه يمكن كتابة

$\ni$ ع = $\ni$ ط مرونة الطلب

ونظراً لأن تحت المنافسة الحرة $\ni$ ع = $\infty$ فإن الإيراد الحدى سيكون مساويا للسعر .

$$\text{د ح} = \text{ع} \left( ١ + \frac{١}{\ni \text{ط}} \right) = \text{ع} \left( ١ + \frac{١}{\infty} \right) = \text{ع}$$

وبفرض أن دالة الإنتاج هى

$$\text{ك} = (\text{س}_1 \text{ ، } \text{س}_2)$$

أى المنشأة لكى تنتج السلعة ك تستخدم عنصرى الإنتاج $\text{س}_1$ ، $\text{س}_2$ ولمعظمة الربح وبفرض عدم وجود سوق المنافسة الحرة فإن معادلة التكاليف ستكون كالتالى :

$$\text{ت ل} = \text{س}_1 \text{د}_1 \left( ١ + \frac{١}{\ni \text{س}_1} \right)$$

$$+ \text{س}_2 \text{د}_2 \left( ١ + \frac{١}{\ni \text{س}_2} \right) \quad (١)$$

حيث $س_1$ ، $س_2$ = الكميات المستخدمة من عناصر الإنتاج

$ر_1$ ، $ر_2$ = أسعار عناصر الإنتاج

$\ni س_1$ ، $\ni س_2$ = المرونة السعرية للعرض من عناصر الإنتاج

$س_1$ ، $س_2$

ومن الجدير بالملاحظة أن الكميات المستخدمة من $س_1$ تعتمد على الكميات من $س_2$ أى أن :

$$س_1 = د\,(س_2)$$

ولإيجاد علاقة التوازن فى هذا النموذج الذى يبين التصرف الأمثل للمنشأة بأخذ التفاضل الجزئى بالنسبة إلى $س_1$ ثم توضع المعادلة مساوية للصفر لتقليل النفقة إلى أقل ما يمكن كالتالى :

$$\frac{\partial\,(ت\ ل)}{\partial\, س_1} = ر_1\left(1 + \frac{1}{\ni س_1}\right) + ر_2\left(1 + \frac{1}{\ni س_2}\right)\frac{د\,س_2}{د\,س_1}$$

$$ر_1\left(1 + \frac{1}{\ni س_1}\right) + ر_2\left(1 + \frac{1}{\ni س_2}\right)\frac{د\,س_2}{د\,س_1} = صفر$$

$$- \frac{\text{د س}_2}{\text{د س}_1} = \frac{\text{ر}_1 \left( 1 + \frac{1}{\text{ع س}_1} \right)}{\text{ر}_2 \left( 1 + \frac{1}{\text{ع س}_2} \right)}$$

$$= \frac{\text{النفقة الحدية المنفقة على عنصر الإنتاج س}}{\text{النفقة الحدية المنفقة على عنصر الإنتاج س}_1}$$

وبفرض وجود حالة منافسة حرة بالنسبة إلى شراء $\text{س}_1$ ، $\text{س}_2$ ، فإنه :

$$- \frac{\text{د س}_2}{\text{د س}_1} = \frac{\text{ر}_1}{\text{ر}_2}$$

أى أن حالة التوازن الاستاتيكى لمنشأة ما تعرفها الأمثل يجب أن يكون المعدل الحدى للاحلال بين $\text{س}_1$ ، $\text{س}_2$ مساوية لنسبة النفقة الحدية المنفقة على عنصر الإنتاج $\text{س}_1$ والنفقه الحدية المنفقة على عنصر الإنتاج $\text{س}_2$ فى حالة عدم وجود منافسة حرة أو مساويا لنسب أسعار عناصر الإنتاج فى حالة وجود سوق المنافسة الحرة.

## (٢) نموذج عنصر الإنتاج Factor — Product Model

لإيجاد علاقة التوازن بين السلعة المنتجة وعناصر الإنتاج وهو أيضاً التصرف الأمثل للمنشأة الذى هدفها معظمة الربح كالتالى :

$$\text{ك} = \text{د}\,(\text{س}_{١}\,،\,\text{س}_{٢})$$

$$\pi = \text{ك}\,\text{ع}\left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\ni_{\text{ط}}}\right) - \text{س}_{١}\,\text{ر}_{١}\left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\ni_{\text{س}_{١}}}\right) - \text{س}_{٢}\,\text{ر}_{٢}\left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\ni_{\text{س}_{٢}}}\right)$$

ولمضاعفة الربح يأخذ التفاضل الجزئى لهذه المعادلة بالنسبة إلى $\text{س}_{١}$ ثم توضع المعادلة مساوية للصفر كالتالى :

$$\frac{\partial \pi}{\partial \text{س}_{١}} = \frac{\partial\, \text{د}\,(\text{س}_{١}\,،\,\text{س}_{٢})}{\partial \text{س}_{١}}\,\text{ع}\left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\ni_{\text{ط}}}\right) - \text{ر}_{١}\left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\ni_{\text{س}_{١}}}\right)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \text{س}_{١}} = \frac{\partial \text{ك}}{\partial \text{س}_{١}}\,\text{ع}\left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\ni_{\text{ط}}}\right) - \text{ر}_{١}\left(\text{١} + \frac{\text{١}}{\ni_{\text{س}_{١}}}\right) = \text{صفر}$$

$$\frac{\partial ك}{\partial س_1} = \frac{ر_1 \left( 1 + \frac{1}{\text{ه}_{س_1}} \right)}{ع \left( 1 + \frac{1}{\text{ه}_{ط}} \right)}$$

$$= \frac{\text{النفقة الحدية على } س_1}{\text{الإيراد الحدى من } ك}$$

وبفرض وجود منافسة حرة فى سوق شراء عنصر الإنتاج $س_1$ وبيع السلعة ك فإن

$$\frac{\partial ك}{\partial س_1} = \frac{ر_1}{ع}$$

ومن الجدير بالملاحظة أن $\frac{\partial ك}{\partial س_1}$ هى عبارة عن الإنتاج الحدى لعنصر الإنتاج $س_1$ وعادة يكتب فى الصورة $\frac{ى ك}{ى س_1}$ إذا كان $س_1$ العنصر الوحيد.

أى أن :

$$\frac{ى ك}{ى س_1} = \frac{ر_1}{ع}$$

وعلى هذا فى حالة نموذج عنصر الإنتاج يجب أن الإنتاج الحدى لعنصر الإنتاج فى حالة المنافسة الحرة مساويا لنسبة سعره وسعر الكمية المنتجة .

## (٣) النموذج السلعى Pooduct — product Model

بفرض أن منشأة تنتج سلعتين مكملتين

أى أن :

$$ك_1 = د\,(ك_2) \qquad ، \qquad ك_2 = د\,(ك_1)$$

وأن :

$$\pi = \text{الإيراد الكلى} - \text{التكلفة الكلية}$$

وأن :

$$ك_1 = د\,(س_1 \text{ ، } س_2)$$
$$ك_2 = د\,(س_1 \text{ ، } س_2)$$

وعلى هذا فإن نموذج الإيراد الكلى بفرض عدم وجود منافسة حرة هو :

$$ر\,ل = ك_1\,ع_1 \left(1 + \frac{1}{\ni\,ط_1}\right)$$
$$+\; ك_2\,ع_2 \left(1 + \frac{1}{\ni\,ط_2}\right)$$

وحيث ر ل = الإيراد الكلى

ولإيجاد علاقة التوازن بين السلعتين $ك_1$ ، $ك_2$ يأخذ التفاضل الجزئى لدالة الإيراد الكلى ثم توضع مساوية للصفر لمظمتها كالتالى :

$$\frac{\partial\,(د\,ل)}{\partial\,ك_1} = ع_1 \left( 1 + \frac{1}{ه\,ط_1} \right)$$

$$+\, ع_2 \left( 1 + \frac{1}{ه\,ط_2} \right) \frac{د\,ك_2}{د\,ك_1}$$

$$= ع_1 \left( 1 + \frac{1}{ه\,ط_1} \right) + ع_2 \left( 1 + \frac{1}{ه\,ط_2} \right)$$

$$\frac{د\,ك_2}{د\,ك_1} = \text{صفر}$$

$$- \frac{د\,ك_2}{د\,ك_1} = \frac{ع_1 \left( 1 + \frac{1}{ه\,ط_1} \right)}{ع_2 \left( 1 + \frac{1}{ه\,ط_2} \right)}$$

$$= \frac{\text{الإيراد الحدى من السلعة } ك_2}{\text{الإيراد الحدى من السلعة } ك_2}$$

وبفرض وجود منافسة حرة فإن :

$$- \frac{د\,ك_2}{د\,ك_1} = \frac{ع_1}{ع_2}$$

وتعرف $\frac{د\,ك_2}{د\,ك_1}$ بالمعدل الحدى لإحلال السلعة $ك_1$ بدلاً من $ك_2$ وتحت المنافسة الحرة يجب أن تكون مساوية لنسبة أسعار هذه السلع .

ويمكن إيجاز نماذج التوازن للمنشأة الذى هدفها معظمة الربح فى حالة عدم وجود المنافسة الحرة ووجود المنافسة الحرة كالتالى :

## عدم وجود منافسة حرة

$$(١) \quad \frac{\text{ى}\,\text{س}_٢}{\text{ى}\,\text{س}_١} = \frac{\text{ر}_١ \left( ١ + \frac{١}{\ni\,\text{س}_١} \right)}{\text{ر}_٢ \left( ١ + \frac{١}{\ni\,\text{س}_٢} \right)}$$

$$(٢) \quad \frac{\text{ى}\,\text{ك}}{\text{ى}\,\text{س}_١} = \frac{\text{ر}_١ \left( ١ + \frac{١}{\ni\,\text{س}_١} \right)}{\text{ع} \left( ١ + \frac{١}{\ni\,\text{ط}} \right)}$$

$$(٣) \quad \frac{\text{ى}\,\text{ك}_٢}{\text{ى}\,\text{ك}_١} = \frac{\text{ع}_١ \left( ١ + \frac{١}{\ni\,\text{ط}_١} \right)}{\text{ع}_٢ \left( ١ + \frac{١}{\ni\,\text{ط}_٢} \right)}$$

## وجود منافسة حرة

$$(١) \quad \frac{\text{ى}\,\text{س}_٢}{\text{ى}\,\text{س}_١} = \frac{\text{ر}_١}{\text{ر}_٢}$$

$$(٢) \quad \frac{\text{ى}\,\text{ك}}{\text{ى}\,\text{س}_١} = \frac{\text{ر}_١}{\text{ع}}$$

$$(٣) \quad \frac{\text{ى}\,\text{ك}_٢}{\text{ى}\,\text{ك}_١} = \frac{\text{ع}_١}{\text{ع}_٢}$$