# القسم الثاني

يشمل :

— حل المعادلات والمتباينات والبرمجة الخطية .

— التفاضل .

— التكامل .

— المحددات .

— المصفوفات الرياضية .

# الباب الخامس

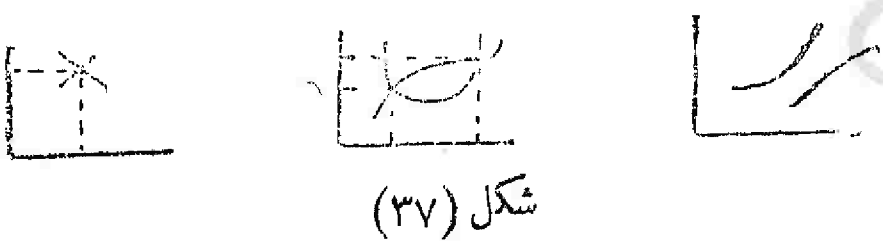
## حل المعادلات والتباينات

---

حل نظام معين من المعادلات عبارة عن مجموعة من القيم للمتغيرات التى تجعل كل معادلة فى هذا النظام صحيحة . وبعبارة أخرى فإن هذه القيم تمثل المجاهيل فى المعادلات .

ومن الممكن إيضاح ما نعنيه بحل نظام معين من المعادلات وذلك بالرجوع إلى التمثيل البيانى لهذه المعادلات . حيث أن حلول المعادلات تحدث عند تقاطع الأشكال البيانية للمعادلات . ومن الطبيعى يمكن قراءة قيم هذه الحلول من المحور السينى والصادى .

ومن الواضح أن معادلتين فى مجهولين قد يكون لها حلا واحدا أو أكثر من حل واحد أو عدم وجود حل كما هو موضح بعدد مرات التقاطع بالأشكال البيانية الآتية :



شكل (٣٧)

وتوضع كل من الأشكال السابقة نظاماً معيناً من معادلتين فى مجهولين ومن الواضح أن المعادلتين فى الشكل إلى اليمين ليس لهما حلا . أما المعادلتين فى الشكل الذى يقع فى الوسط فلهما حلين. أما الشكل إلى اليسار فله حل واحد

**حل معادلة خطية فى مجهول واحد :**

نقصد بحل المعادلة الخطية فى مجهول واحد س تحديد قيمة س التى تستوفى أو تحقق المعادلة . فإذا كان لدينا مثلا المعادلة ٥ س — ٢ + ١٢ فإنه يمكن حلها بإضافة العدد ٣ إلى جانبى المعادلة كالآتى :

٥ س — ٣ + ٣ = ١٢ + ٣

٥ س = ١٥

و إذا قسمنا جانبى المعادلة على ٥ نجد أن :

$$\frac{٥\,س}{٥} = \frac{١٥}{٥}$$

س = ٣

ولمراجعة هذا الحل فى المعادلة الأصلية نجد أن :

( ٥ × ٣ ) — ٣ = ١٢

١٥ — ٣ = ١٢

وهذا صحيح ، وذلك فإن الحل بأن س = ٣ صحيحاً :

**مثال :**

افترض أن منشأة معينة تعطى خصما لزبائنها بمقدار ٢٠ ٪ عن مشترياتهم إذا دفعوا فى ظرف مدة معينة . فإذا اشترى عميلا بضاعة بمبلغ ٥٠٠ جنيهاً على الحساب وقام بدفع المبلغ فى المدة المعينة . فما هو قيمة الخصم ؟

**الحل :**

حل هذا النظام الذى يشرح هذه المشكلة يكون بالضرب كالآتى :

الخصم = ٥٠٠ × ٠,٢٠
= ١٠٠ جنيهاً

ومن الطبيعي أن إيجاد حل هذا النظام يعتبر بسيطاً جداً ولكن هناك نظما أخرى تحتوى على مجاهيل ومعاملات كثيرة يكون حلها أكثر تعقيداً. وهذه النظم قد يكون لها حلا وحداً أو أكثر من حل واحد أو عدم وجود حل.

**حل معادلتين خطيتين فى مجهولين :**

افترض أن هناك قسمين من أقسام الإنتاج ا ، ب بمصنع معين ينتجون وحدات مشتركة بالنسب الموضحة بعد لكل ساعة عمل :

| | القسم الأول | القسم الثاني |
|---|---|---|
| | ا | ب |
| كيروسين بمئات للبرميل | ٥ | ٣ |
| بنزين « « | ٢ | ٤ |

فما هى عدد توافق تشغيل القسمين التى تسمح بتنفيذ الطلب التالى بدون زيادة إنتاج للكيروسين أو البنزين:

| | كيروسين | بنزين |
|---|---|---|
| الطلب بمئات البراميل | ١٥ | ٨ |

يمكن بالطبع تكوين معادلتين فى مجهولين للمشكلة السابقة كما يلى :

٥ ا + ٣ ب = ١٥
٢ ا + ٤ ب = ٨

حيث :

ا = عدد ساعات تشغيل القسم الأول
ب = « « « « الثانى

ويمكن حل هاتين المعادلتين بضرب المعادلة الأولى فى ٢ لمعادلة الثانية فى ٥ ثم طرح المعادلة الثانية من الأولى للتخلص من ا .

$$\text{١٠ا} + \text{٦ب} = \text{٣٠}$$
$$\text{١٠ا} + \text{٢٠ب} = \text{٤٠}$$

$$-\text{١٤ب} = -\text{١٠}$$

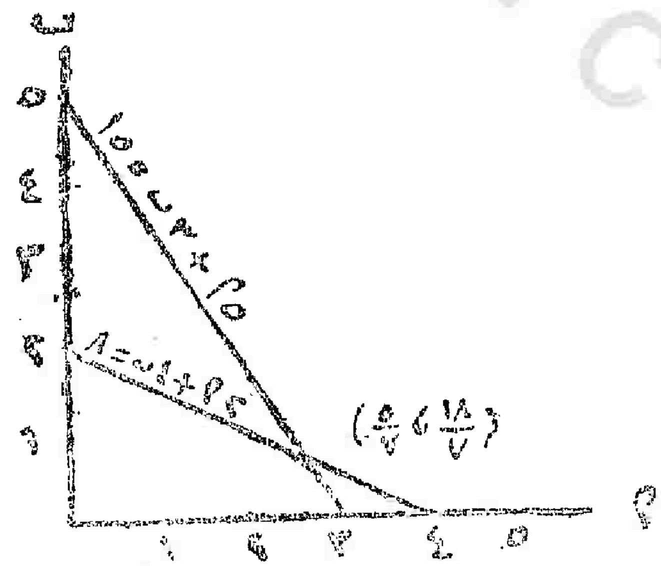
أى أن :

$$\text{ب} = \frac{-\text{١٠}}{-\text{١٤}}$$
$$= \frac{\text{٥}}{\text{٧}}$$

وبالتعويض فى المعادلة الأولى بقيمة ب تنتج قيمة ا

$$\text{٥ا} + \text{٣} \times \frac{\text{٥}}{\text{٧}} = \text{١٥}$$
$$\therefore \quad \text{ا} = \text{٢}\tfrac{\text{٤}}{\text{٧}}$$

كما يمكن إيجاد قيمتى ا ، ب بيانياً برسم المعادلتين الأصليتين كالآتى :



(شكل ٣٨)

ويلاحظ أن المعادلتين السابقتين لهما حلا واحدا يحقق المعادلتين فى آن واحد ، ولذلك يطلق على هذا النوع من المعادلات بالمعادلات المستقلة .

وإذا كان لدينا معادلتين فى مجهولين

ص = ٥ + س

٣ ص = ١٥ + ٣ س

فإن هاتين المعادلتين متساويتين حيث أن لو قسمنا المعادلة الثانية على ٣ فإننا نحصل على نفس المعادلة الأولى . ولذلك يطلق على هذا النوع من المعادلات بالمعادلات التابعة ولها عدد لانهائى من الحلول التى تحقق المعادلتين فى آن واحد .

أما إذا كان لدينا معادلتين:

ص = ٥ + س

ص = ١٠ + س

أى أن معاملى س متساويين . وبعبارة أخرى ميل كل منهما متساو مع الآخر أى أن هذين الخطين متوازيين . ولذلك نجد أن ليس لها حلا معينا ولذلك يطلق على هذا النوع من المعادلات بالمعادلات غير المتسقة .

وبصفة عامة فإن أى نظام للمعادلات يكون فيه عدد المعادلات مساو لعدد المجاهيل ولا يحتوى على معادلات تابعة أو غير متسقة فإن له حلا وحيدا .

**حل ثلاث معادلات خطية فى ثلاث مجاهيل :**

إذا كان لدينا ثلاث معادلات خطية فى ثلاثة مجاهيل فإن هذا النظام قد يكون متسقاً ومستقلا وغير متسق أو تابع . وفى هذا البند سنتناول فقط نظام المعادلات الذى يكون متسقاً ومستقلا أى له حلا وحيداً .

مثال :

افترض أن لدينا المعادلات الخطية الآتية :

٤ س − ص + ٥ ع = ١٠ ( ١ )

٦ س + ص − ٤ = − ٤ ( ٢ )

٤ س − ٢ ص + ٩ = ١٧ ( ٣ )

ولحل المعادلات الثلاث أى إيجاد س ، ص ، ع التى تحقق المعادلات الثلاثة فى آن واحد ، سنتخلص من ص من المعادلتين الأولى والثانية وذلك بإضافة المعادلة الأولى إلى الثانية كالآتى :

٤ س − ص + ٥ ع = ١٠

٦ س + ص − ٤ ع = − ٤

---

١٠ س + ع = ٦ ( ٤ )

نقوم أيضا بحذف ص من المعادلة الثانية والثالثة وذلك بضرب المعادلة الثانية فى ٢ ثم إضافتها إلى المعادلة الثالثة كالآتى :

١٢ س + ٢ ص − ٨ ع = − ٨

٤ س − ٢ ص + ٩ ع = ١٧

---

١٦ س + ع = ٩ ( ٥ )

بطرح المعادلة ( ٤ ) من المعادلة ( ٥ ) فينتج أن :

١٠ س + ع = ٦

١٦ س + ع = ٩

---

٦ س = ٣

أى س = ½

نعوض قيمة س = ½ فى المعادلة ( ٤ ) فنحصل على قيمة ع كالآتى :

١٠ × ½ + ع = ٦

٥ + ع = ٦

∴ ع = ١

وأخيراً نقوم بالتعويض بقيمة س = ½ ، ع = ١ فى المعادلة ( ١ ) فنحصل على قيمة ص كالآتى :

٤ × ½ − ص + ٥ × ١ = ١٠

٢ − ص + ٥ = ١٠

− ص = ٣

∴ ص = −٣

أى أن حل المعادلات هو ( س = ½ ، ص = − ٣ ، ع = ١ )

### حل المعادلات غير الخطية والمتباينات :

ليس المجال هنا شرح أنواع المعادلات غير الخطية ولكن سنقوم بعرض بعض الأنواع البسيطة للمعادلات غير الخطية. ولنبدأ بمعادلات الدرجة الثانية فى مجهول واحد أى التى فيها أعلى قيمة للأس للمتغير هى ٢ . والصورة العامة لهذه المعادلات هى :

ا + ب س + حـ س$^{٢}$ = صفر

حيث حـ لاتساوى صفراً .

ومن المعروف أن حل معادلات الدرجة الثانية يكون باستعمال المعادلة الآتية :

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا حـ}}{٢ حـ}$$

وتستخدم هذه المعادلة فى حل معادلات الدرجة الثانية فى مجهول واحد ولكن يجب مراجعة الحل بالتعويض فى المعادلة الأصلية للتأكد من أنه يحقق المعادلة الأصلية . وقد يتساءل البعض عن وجود معادلات كمعادلة الدرجة الثانية لحل معادلات من الدرجتين الثالثة والرابعة ، فنقول أن هناك معادلات لحل معادلات حتى الدرجة الرابعة ، ولكن لا توجد معادلات معينة لحل معادلات الدرجة الخامسة فما فوق إلا إنه يجدر القول أنه بالرغم من عدم . وجود معادلات معينة لحل معادلات الدرجة الخامسة فما فوق إلا أنه توجد طرقا مختلفة لحل هذه المعادلات .

افترض منحنى الطلب لسلعة معينة هو ص = ٢ — ع$^{٢}$ وأن منحنى العرض لهذه هو س = ع . وإذا وضعنا الطلب يساوى العرض للحصول على التوازن ، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية .

$$-٢ + ع + ع^{٢} = \text{صفر}$$

وللحصول على قيمة ع التى تحقق المعادلة نستعمل معادلة الدرجة الثانية وفى هذا المثال نجد أن :

ا = —٢ ، ب = ١ ، حـ = ١

ولذلك :

$$ع = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا حـ}}{٢ ا}$$

$$= \frac{-١ \pm \sqrt{١ + ٨}}{٢}$$

$$= \frac{-١ \pm ٣}{٢}$$

= ١ أو —٢

ومن الطبيعى أننا نهمل الحل الثانى أى أن ع = ـ ٢ حيث أن السعر لا يمكن أن يكون بالسالب . ولذلك فإن الحل الصحيح هو أن ع = ١ ، ولذلك فإن سعر التوازن هو ع = ١ حيث تكون كمية الطلب تساوى كمية العرض = ١ .

وهناك نوع آخر من المعادلات يعرف بالمعادلات المختلطة أى التى تحتوى على معادلات خطية وغير خطية . افترض أن هناك شركة تنتج نوعاً معيناً من المنتجات. وقد وجدت بالتجربة أن متوسط التكالفة ينخفض كلما ارتفع الإنتاج حتى يصل إلى نقطة معينة يرتفع بعدها متوسط التكالفة كلما زاد الإنتاج افترض أيضاً أن متوسط التكالفة لهذا المنتج يمكن تمثيله بالمعادلات الآتية :

$$م\ ت = ١٠ - ٣س + \frac{س^{٢}}{٢}$$

حيث :

م ت = متوسط التكالفة للوحدة الواحدة بالقروش .

س = متوسط الإنتاج بآلاف الوحدات يومياً .

وقد وجدت الشركة أيضاً أن متوسط الإيراد للوحدة الواحدة ينخفض كلما زادت مبيعات الوحدات لضرورة خفض السعر لبيع كميات كبيرة . وقد وجدت أن العلاقة بين متوسط الإيراد والمبيعات يمكن تمثيلها بالمعادلة الآتية :

$$م\ د = ٩ - \frac{س}{٢}$$

حيث :

م د = متوسط الإيراد للوحدة الواحدة بالقروش

س = مبيعات الوحدات بالآلاف يومياً

ويمكن إيجاد معدلات الإنتاج والمبيعات التي تحقق الربح عندما يكون $\text{م}_{\text{ن}} = \text{م}_{\text{د}}$ وذلك بحل المعادلتين السابقتين :

$$\text{م}_{\text{ن}} = ١٠ - ٣\text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$$

$$\text{م}_{\text{د}} = ٩ - \frac{\text{س}}{٢}$$

وحيث أن $\text{م}_{\text{ن}} = \text{م}_{\text{د}} = \text{ص}$ فيمكن كتابة المعادلتين السابقتين كالآتي :

$$\text{ص} = ١٠ - ٣\text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$$

$$\text{ص} = ٩ - \frac{\text{س}}{٢}$$

أي أن :

$$٩ - \frac{\text{س}}{٢} = ١٠ - ٣\text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$$

$$-\frac{\text{س}}{٢} = ١ - ٣\text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$$

$$١ - \frac{٥}{٢}\text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} = \text{صفر}$$

$$٢ - ٥\text{س} + \text{س}^{٢} = \text{صفر}$$

والآن يمكن إيجاد قيمة س وذلك باستعمال معادلة الدرجة الثانية .

$$س = \frac{- ب \pm \sqrt{ب^{٢} - ٤ ا ﺣ}}{٢ ا}$$

$$= \frac{٥ \pm \sqrt{٢٥ - ٨}}{٢}$$

$$= \frac{٥ \pm \sqrt{١٧}}{٢}$$

$$= \frac{٥ \pm ٤.١٢٣}{٢}$$

∴ س = ٥٦١, أو ٤٣٩,

ويمكن إيجاد قيمة ص وذلك بالتعويض فى المعادلة

$$ص = ٩ - \frac{س}{٢}$$

$$= ٩ - \frac{٤,٥٦١}{٢}$$

$$= ٦,٧١٩$$

، $$ص = ٩ - \frac{,٤٣٩}{٢}$$

$$= ٨,٧٨٠$$

ولذلك نجد أن هناك حلين للنظام المختلط للمعادلات هو :

س = ٤,٥٦١ ، ص = ٦٧١٩

س = ,٤٢٩ ، ص = ٨,٦٨٠

التباينات والبرامج الخطية :

إن كثير من المشاكل الاقتصادية يمكن عرضها مشاكلها بسهولة ووضوح باستعمال التباينات . وقد زاد فى السنوات الأخيرة بعد الحرب العالمية الثانية الاهتمام بحل أنواعا معينة من المشاكل التى تحتوى على المتساويات والتباينات والعلم الذى يدرس هذه النظم قد سمى بالبرمجة الخطية Linear programming أو البرمجة الرياضية programming Mathematical

ونود أن نعطى فكرة بسيطة عن هذا الموضوع وخاصة لأنه يتصل بمناقشتنا للنظم المختلفة للمعادلات .

افترض شركة معينة ترغب فى تخطيط إنتاجها الشهر القادم . وتقوم هذه الشركة بإنتاج نوعين من المنتجات يحتاج كل منهما إلى عمليات صناعية داخل ثلاثة أقسام وهى السبك ، الآلات ، التشطيب كما هو موضح بالجدول التالى

| المنتج | السبك | الآلات | التشطيب |
|---|---|---|---|
| $س_1$ | ٦ ساعات للوحدة | ٣ ساعات للوحدة | ٤ ساعات للوحدة |
| $س_2$ | ٦ ساعات للوحدة | ٦ ساعات للوحدة | ٢ ساعة للوحدة |

افترض أن الطاقة الإنتاجية للأقسام السابقة فى الشهر القادم هى كالآتى .

| | | |
|---|---|---|
| السبك | ٤٢٠ | ساعة |
| الآلات | ٣٠٠ | ساعة |
| التشطيب | ٢٤٠ | ساعة |

وبهذه المعلومات يمكن عرض العلاقة بين الكمية التى يمكن إنتاجها بين كل منتج فى الشهر القادم والطاقة الإنتاجية ( التى نعتبرها قيود ) لكل قسم من ثلاثة تباينات كالآتى :

٦ س$_1$ + ٦ س$_2$ ≤ ٤٢٠ المسبك

٣ س$_1$ + ٦ س$_2$ ≤ ٤٢٠ الآلات

٤ س$_1$ + ٦ س$_2$ ≤ ٢٤٠ التشطيب

حيث أنه لا يمكن أن تكون س$_1$ أو س$_2$ لها قيمة سالبة ، فمعنى ذلك أن لدينا القيود الضمنية التالية :

س$_1$ ≥ صفر

س$_2$ ≥ صفر

لذلك نجد أن لدينا نظام معينا من التباينات مكونا من خمسة قيود التالية والتى يجب أن تحقق فى آن واحد إذا ما رغبنا فى إيجاد حل أمثل .

٦ س$_1$ + ٦ س$_2$ ≤ ٤٢٠

٣ س$_1$ + ٦ س$_2$ ≤ ٣٠٠

٤ س$_1$ + ٢ س$_2$ ≤ ٢٤٠

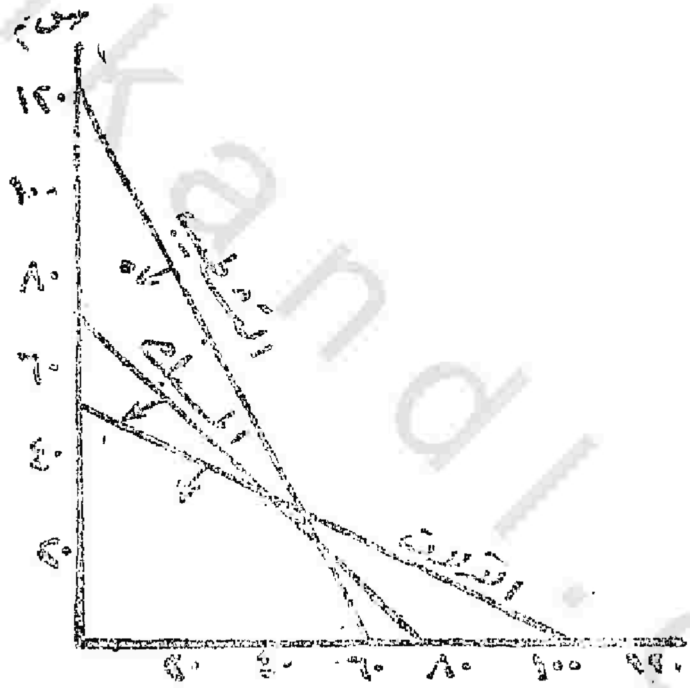
س$_1$ ≥ صفر

س$_2$ ≥ صفر

ومن الواضح أن أحد الحلول التى نسعى إليها وهى معرفة كمية الإنتاج من كل نوع هى :

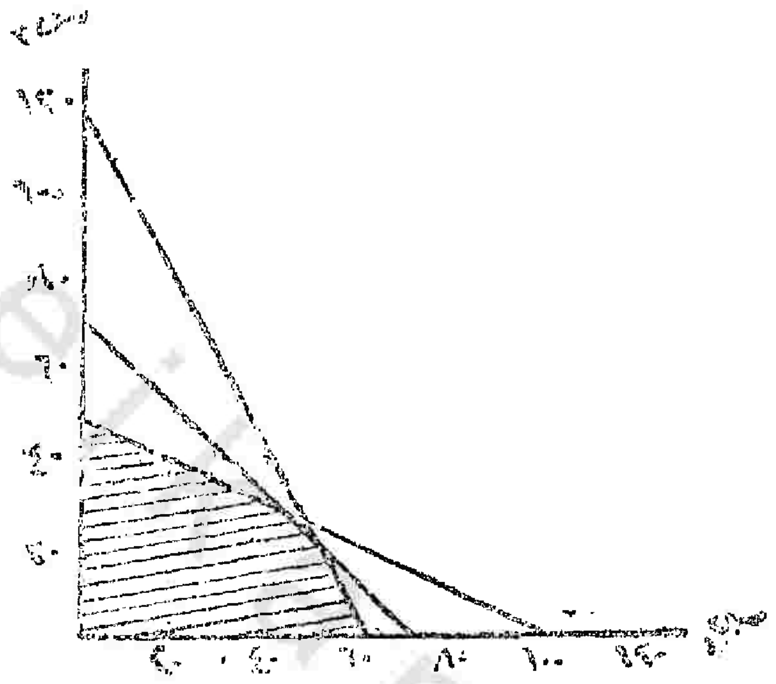
$$س_١ = صفر$$
$$س_٢ = صفر$$

حيث أنها تحقق التباينات الخمسة فى آن واحد . ولكن هناك طبعا حلولا كثيرة نستطيع الحصول عليها برسم التباينات كالآتى:



( شكل ٢٩ )

ولرسم التباينات بيانيا نحولها إلى معادلات ونقوم برسمها كما هو موضح بالشكل السابق . وفى هذا الشكل نجد أن مجموعة النقط التى تحقق كل من هذه التباينات تقع فى اتجاه السهم الصغير فى نهاية كل خط ، أما النقط التى تحقق التباينات الخمسة فى آن واحد فهى عبارة عن الجزء المظلل فى الشكل التالى :



(شكل ٤٠)

ويشمل الجزء المظلل على التوافيق المختلفة من المنتجين $س_١$ ، $س_٢$ التى تستطيع الشركة إنتاجها فى الشهر القادم دون أن تتجاوز الطاقة الإنتاجية لكل قسم . ولكن قد ترغب الشركة فى إنتاج أكثر ما يمكن فى حدود هذه القيود أى قيود الطاقة الانتاجية لكل قسم . ففى الحالة نجد أن الشركة يجب أن تقوم بإنتاج كمية من $س_١$ ، $س_٢$ تقع على الحد الخارجى أو الأقصى لمجموعة الحلول المبينة فى شكل ٣٩ ولكن يواجهنا سؤال آخر هو ماهو الحد الخارجى الذى يكون أكثر ربحا فى النهاية.

فى هذه الحالة يلزمنا معرفة ربحية كل نوع من هذين المنتجين، افترض أن النوع الأولى $س_١$ يربح من كل وحدة ثلاثين قرشا وأن النوع الثانى يربح عشرين قرشا . ويمكن عرض ذلك رياضياً بالمعادلة الآتية :

$$س = ٣,س_١ + ٢,س_٢$$

حيث ص تمثل الربح

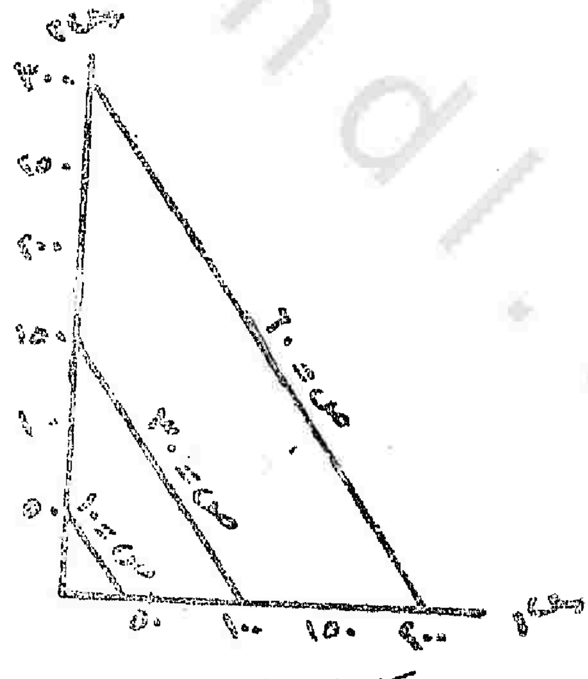
إلا أن الشركة ترغب فى تحقق أكبر ربح ممكن ، ولمعرفة الحل الذى يعطى هذا الربح نفترض القيم التالية للأرباح حتى نرى سلوك معادلة الربح :

ص = ١٠

ص = ٣٠

ص = ٦٠

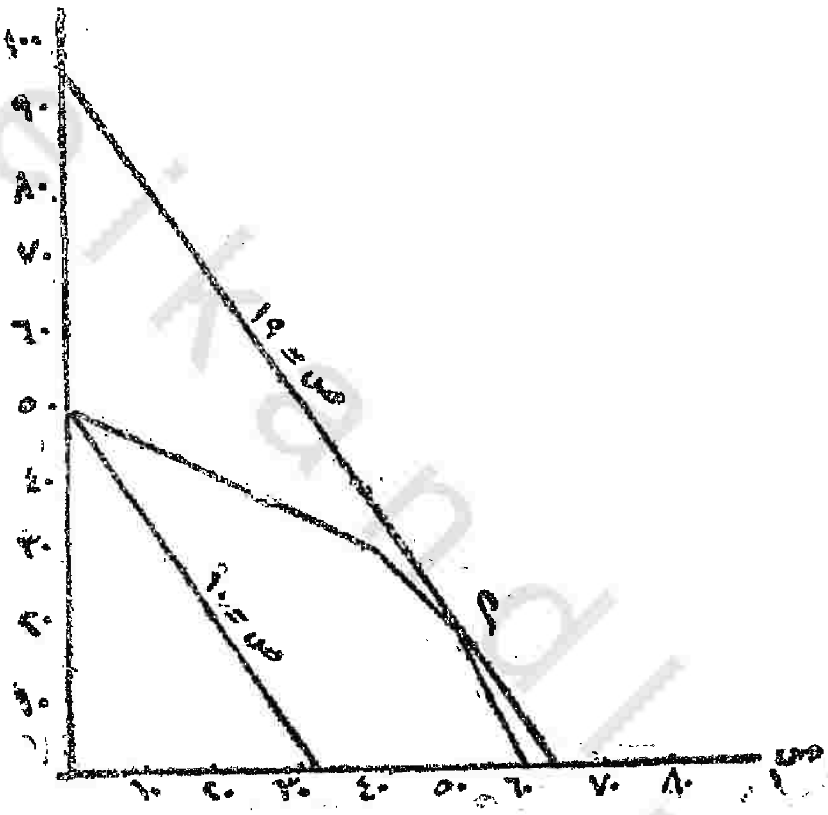
ومن الطبيعى يمكننا رسم معادلة الربح لهذا القيم كما هو موضح بالشكل التالى :




شكل ( ٤١ )

ومن الواضح فى هذا الشكل أنه كلما زادت قيمة ص فإن الخط يبتعد عن نقطة الأصل ولكن ميل الخط لايعتبر . ويتضح الآن أنه يمكن حل

هذه المشكلة الآن وذلك بضم الشكلين ٤٠ ، ٤١ مع بعضهما . ولذلك نستطيع إيجاد الحل الأمثل من الشكل ٤٢ باختيار النقطة على حدود مجموعة الحلول للتباينات التى تعطى أكبر قيمة للمتغير ص .




(شكل ٤٢)

ويلاحظ من الشكل ٤٢ أن النقطة التى تحقق أكبر قيمة للتغير ص أى النقطة التى تحقق أكبر ربح ممكن هى التى رمزنا لها فى شكل بالرمز ا وهى نقطة تقاطع حدود معادلتى المسبك والتشطيب . ومن الطبيعى يمكن إيجاد قيمتى س$_1$ ، س$_2$ بقراءة قيمتها من على المحورين فى شكل ٤١ أو بحل المعادلتين الآتيتين

$$٦ س_1 + ٦ س_2 = ٤٢٠$$

$$٤ س_1 + ٢ س_2 = ٢٤٠$$

اللتين تعطيان القيمتين الآتيتين :

$$س_1 = ٥٠ \quad ، \quad س_2 = ٣٠$$

لذلك نقول أن هاتين القيمتين تحقق القيود الخمسة السابقة وكذا تحقق أكبر ربح ممكن .

وأخيرا نقول أن هـذا المثال يعتبر من الأمثلة السهلة البسيطة فى البرامج الرياضية ، إلا أن المسألة تتعقد قليلا عند وجود أكثر من متغيرين . وفى هـذه الحالة يلزم إستعمال طرقا أخرى منها طريقة السمبلكس Simplex Method أو طريقة النقل أو التـوزيـع Transportation Method .