الباب السادس

التفاضل

أولا : تفاضل الدوال

الدوال الصريحة والدوال الضمنية :

نود فى هذا الباب أن نشرح بعض خصائص الدوال إلا أننا بدلا من استخدام رمزاً للدالة سنستخدم رمزاً آخر وهو Φ .

فقد سبق أن أوضحنا أن ص = Φ (س) تعنى أن ص هى دالة س وأن قيمة ص تعتمد أو تتوقف على قيمة س . وأطلقنا على ص المتغير التابع وعلى س المتغير المستقبل . ولذلك نقول أنه إذا كان هناك متغيرين س، ص مثلا وأن قيمة ص تتوقف على قيمة س فإن هذه الدالة تسمى دالة صريحة فمثلا إذا كانت ص تمثل الربح الذى يحصل عليه صاحب المنشأة لعدد س من الوحدات المبيعة عندما يكون ربح الوحدة المبيعة هو ٤ قروش ، فإن المعادلة الآتية :

$$ص = ٤ س$$

تمثل دالة صريحة للمتغير ص بالنسبة للمتغير س

أما إذا وضعنا المعادلة السابقة فى الصورة الآتية :

$$٤ = \frac{ص}{س}$$

فإنه يطلق عليها دالة ضمنية إذ أن الفرق بين الدالة الضمنية والدالة الصريحة هو أن الدالة الضمنية لا تعطى ما يساوى ص إلا إذا عملنا بعض التغيرات فى المعادلة . أى أننا إذا لم نتمكن من وضع الدالة على الصورة ص = Φ (س) بل وضعت على الصورة .

$$\Phi\ (س ، ص) = \text{صفر}$$

أطلق على الدالة دالة ضمنية . فمثلا الدالة $\sqrt{س^{٣} - ص^{٣}} = \text{صفر}$ تعتبر دالة ضمنية . وقد يكون من الصعوبة فى بعض الأحيان تغير الدوال الضمنية إلى دوال صريحة والعكس . فمثلا نجد أن فى المعادلة الآتية :

$$ص = س^{٦} ص^{٧} + س$$

لا يمكن تحويلها إلى دالة صريحة بالنسبة لأى من المتغيرين . ولكن فى معظم الأحيان نجد أنه يمكن تحويل الدالة الضمنية إلى دالة صريحة فبالنسبة للمعادلة :

$$\frac{س}{ص} = ٤$$

يمكن تحويلها إلى معادلة صريحة بالنسبة لأى من المتغيرين . فمثلا نستطيع إيجاد قيمة ص بالنسبة للمتغير س كالآتى :

$$ص = ٤ س$$

أو أنه إذا كان لدينا العلاقة الضمنية الآتية :

$$\Phi\ (س ، ص) = ٣ س - ص - ٥ = \text{صفر}$$

فإنه يمكن تحويلها إلى دالة صريحة باعتبار أن ص دالة س كالآتى :

$$٣ س - ص - ٥ = \text{صفر}$$

$$- ص = ٥ - ٣ س$$

$$ص = ٣ س - ٥$$

ولذلك فإن :

$$\Phi\ (٢) = ٣ \times ٢ - ٥$$

$$= ١$$

$$\Phi\ (٠) = ٣ \times ٠ - ٥$$

$$= -٥$$

وهكذا . ومن المفهوم طبعاً أن الأعداد داخل الأقواس عبارة عن قيم المتغير المستقل س .

إلا أنه ليس من الضرورى استبدال قيمة س بعدد باستمرار ولكن يمكن طبعاً استبدال قيمتها بقيمة غير معينة ولتكن ب مثلا . وفى هذه الحالة فإن :

$$\Phi\ (ب) = ٣ ب - ٥$$

نهايات الدوال :

إذا رمزنا إلى نهاية دالة بالرمز ل ، فاننا نستطيع كتابة نهاية الدالة Φ (س) عندما تقرب س من قيمة معينة ا كالآتى :

$$\text{نهاس} \leftarrow ا\ \Phi\ (س) = ل$$

ويعنى هذا التعبير أن الدالة Φ (س) تقرب من قيمة محددة ل كلما قربت س من ا . وبكلام آخر فإذا كانت س هى عدد قريب من ا ولكنه يختلف عنه فإن قيمة الدالة Φ (س) تقرب من ل .

مثال :

افترض أن الدالة الآتية .

$$\Phi(س) = ٣س + ٢$$

وأننا نرغب فى حساب نهاية الدالة عندما تقرب س القيمة ٤ .

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٤} \Phi(س)$$

نستطيع أن نبدأ بقيم مختلفة للمتغير س إما بقيم تكون أكبر أو أقل من ٤ كما هو موضح بالجدول التالى حتى نتبين نهاية الدالة .

س	$\Phi(س) = ٢س + ٣$
١	٥
٢	٧
٣	٩
٣,٥	١٠
٣,٩	١٠,٨
٤,١	١١,٢
٤,٥	١٢
٥,٥	١٣
٦	١٥
٧	١٧

من الواضح طبعاً من ملاحظة سلوك الدالة أن نقول أن نهاية الدالة ف (س) عندما تقترب ٤ هى ١١ . أى أنه إذا كان .

$$ف(س) = ٢س + ٣$$

فإن $\quad$ نهـا $= ١١$

$$س \leftarrow ٤$$

ولا نود أن يفهم أن طريقة إيجاد نهاية الدالة هو بإيجاد ف (٤) بدلا من استعمال الجدول السابق . إذا أن ذلك يخالف مفهوم نهاية الدالة السابق شرحه إلا أن فى مثالنا الحالى نجد أن ف (٤) نتج عنها فعلا النهاية الصحيحة وقد يحدث فى كثير من الأمثلة ، ولكن من المفهوم أن هناك حالات كثيرة لن يصلح فيها استخدام هذه الطريقة كما هو موضح بالمثال التالى :

افترض أن لدينا الدالة $ف(س) = \frac{س^٢ - ٤}{س - ٢}$

وأننا نرغب فى حساب نهاية الدالة عندما تقترب س من ٢ . أى

$$نهـا\ ف$$

$$س \leftarrow ٢$$

فى هذه الحالة إذا قمنا بالتعويض عندما تكون س = ٢ فإن

$$\frac{س^٢ - ٤}{س - ٢} = \frac{٤ - ٤}{٢ - ٣} = \frac{صفر}{صفر}$$

= أى عدد

ولذلك نجد أنه بالتعويض لا يمكن إيجاد الكسر .

ويمكن بالطبع حساب نهاية الدالة وذلك بفرض أن س = ٢ — م حيث م تمثل قيمة صغيرة صغراً لا نهائياً . وذلك نجد أن :

$$\frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \frac{٤ - (٢ - م)^{٢}}{٢ - (٢ - م)} = \frac{٤ - ٤م + م^{٢}}{٢ - م - ٢}$$

$$= \frac{-٤م + م^{٢}}{-م}$$

$$= ٤ - م$$

∴ نهـا Φ (س) = ٤

س ← ٢

وذلك لأن عندنا س ← ٢ فإن Φ (س) ← ٤ ويتضح ذلك من الجدول الآتى :

س	Φ (س)
١	٣
١,٤	٣,٤
١,٥	٣,٥
١,٦	٣,٦
١,٨	٣,٨
١,٩	٣,٩
١,١	٤,١
١,٢	٤,٢
١,٤	٤,٤
١,٦	٤,٦
٣	٥

أن أنه يتضح من الجدول اقتراب قيمة Φ (س) من ٤ عندما تقترب س من ٢

ولنقوم بشرح النهايات لدالة أخرى . فإذا كانت الكمية ا تمثل الكميات الثابتة المستخدمة سنوياً فى الإنتاج وأن ص تمثل عدد الشحنات السنوية التى ترد لمصنع معين فإن س تمثل حجم الشحنة الواحدة ، فيكون لدينا المعادلة الآتية :

$$ا = س ص$$

وبتحويل هذه المعادلة إلى معادلة صريحة بالنسبة للمتغير س فإنها تساوى :

$$ص = \frac{ا}{س}$$

أى أن ص هى دالة للمتغير س ويمكن كتابة ذلك بصورة أخرى كالآتى:

$$\phi(س) = \frac{ا}{س}$$

فإذا زاد حجم الشحنات بدرجة كبيرة جداً أى لا تصل إلى اللانهاية فى الكبر فإن :

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow \infty} \phi(س) = \frac{ا}{\infty}$$

$$= \text{صفر}$$

وفى هذه الحالة نجد أن هناك قيمة محددة أى أن عدد الشحنات يقرب من الصفر كلما كبر حجم الشحنات إلى اللانهاية فى الكبر .

أى أنه إذا زادت قيمة س زيادة كبيرة إلى أن تقرب من اللانهاية فإن قيمة الدالة تصغر لانهائيا إلى أن تقرب من الصفر .

أما إذا صغر حجم الشحنات بدرجة كبيرة جداً أى تصغر قيمة س صفرا لا نهائيا إلى أن تقرب من الصفر فإن :

$$\text{نهـا}_{\text{صفر}} \Phi(\text{س}) = \frac{\text{ا}}{\text{صفر}}$$

$$= \infty$$

وحيث أنه لاتعرف قيمة هذا الكسر حيث أنه لاتوجد طريقة لقسمة ثابت على صفر ، فإن نهاية الكسر ∞ فيه حينما تصل س إلى الصفر .

الدوال المتصلة وغير المتصلة :

تعرف الدولة بأنها متصلة عندما يكون خطها البيانى لايوجد تقطع فيه. ويلاحظ أن معظم الدوال التى درسناها هى عبارة عن دوال متصلة . ومن المفهوم أن قيم الدالة المتصلة تتغير بانتظام . وبالاضافة إلى ذلك فإنه لا يمكن أن تتغير قيمة الدالة المتصلة من السالب إلى الموجب دون أن تمر على الصفر. ولذلك نقول أن ص $= \Phi$ (س) دالة متصلة إذا كانت قيمة ص حقيقة معينة لجميع قيم س الحقيقية أى أنه يقال أن Φ (س) دالة متصلة عند النقطة س $=$ ا إذا كان Φ (ا) يمكن تعرفها عند هذه النقطة وكانت نهـا $_{\text{س} \leftarrow \text{ا}} \Phi(\text{س}) = \Phi(\text{ا})$. وبكلام آخر فإن الدالة Φ (س) دالة متصلة

عند النقطة س $=$ ا إذا استبدلنا س بالقيمة ا فى الدالة وكانت الدالة تعطى قيمة معينة وليس قيمة غير محددة مثل صفر أو ثابت على صفر بالاضافة إلى ذلك فإن الدالة Φ (س) يجب أن ينتج عنها قيمة محددة للدالة Φ (ا) عندما تقرب س من ا من أى اتجاه

ويقال للدالة بأنها غير متصلة إذا أعطيناها قيمة معينة للمتغير س ونتج عنها قيمة لانهائية للمتغير ص فمثلا إذا كان لدينا دالة :

$$\text{ص} = \Phi(\text{س}) = \frac{\text{٥} - \text{٢ س}}{\text{س} - \text{٢}}$$

فإن ص $= \infty$ عندما تكون س $=$ ٢

ولذلك يقال لهذه الدالة أنها غير متصلة ويكون الخط البيانى غير متصل عند س = ٢

التفاضل :

أوضحنا فى فصل سابق تعريف ميل المستقيم وقلنا أنه يوضح كمية التغير فى ص لكل وحدة تغير فى المتغير المستقل س . فإذا كانت لدينا المعادلة :

$$ف = ٥ + ٢ ج$$

حيث :

ف = التكاليف الكلية للإنتاج

ج = عدد الوحدات المنتجة

٥ = التكاليف الثابتة حتى حالة عدم إنتاج أية وحدات

٢ = تكلفة الوحدة

فإن ميل هذه الدالة هو ٢ أى أنه لكل وحدة تغير فى عدد الوحدات المنتجة فإن التكاليف الكلية تتغير بمقدار ٢ .

ويرمز عادة للتغير بالرمز △ بدون تحديد قيمة هذا التغير . ولذلك فإن أى تغير فى ج سواء كان كبيراً أو صغيراً فنرمز له بالرمز △ ج وكذلك التغير فى ف نرمز له بالرمز △ ف . هذا ويقرأ (△ ج) بدلتا ج وكذا △ف بدلتا ف . وهذا الرمز لا يمكن تجزئته فهو لا يدل على حاصل ضرب △ × ج أو △ × ف .

وبالنظر إلى المعادلة السابقة ف = ٥ + ٢ ج فإننا نلاحظ أن أى تغير فى ج يجب أن يحدث تغير فى ف حتى تكون المعادلة حقيقة فإذا لم نعرف مقدار الغير فى ج أى △ ج ، فمن الطبيعى لا يمكن معرفة التغير المناظر

Δ ف الذى يجب أن يكون ولكن من الواضح أننا نعرف لهذه المعادلة بالذات أن النسبة بين Δ ف ، Δ ج يجب أن تكون ٢ : ١

أى أن :

$$\frac{\Delta \text{ ف}}{\Delta \text{ ج}} = ٢$$

وهذه النسبة أى نسبة التغير فى ف والتغير فى ج ماهى إلا عبارة عن ميل المعادلة نفسها . ولو غيرنا قليلا الرموز المستعملة كالآتى :

$$\text{ف} = \phi(\text{ج}) = ٥ + ٢\text{ج}$$

فإننا نقول أن أى تغير بسيط Δ ف المناظر للتغير Δ ج يمكن إيجاده بطرح قيمة الدالة ϕ (ج) عند قيمتها الأولى للمتغير ج من قيمة الدالة عند القيمة المتغيرة للمتغير ج أى عند ج + Δ ج . ولذلك .

فإن :

$$\Delta \text{ ف} = \phi(\text{ج} + \Delta \text{ ج}) - \phi(\text{ج})$$

وحيث أن :

$$\frac{\Delta \text{ ف}}{\Delta \text{ ج}} = ٢$$

فإن :

$$\frac{\phi(\text{ج} + \Delta \text{ ج}) - \phi(\text{ج})}{\Delta \text{ ج}}$$

هذا ونود الآن معرفة نهاية $\frac{\Phi(ج + \Delta ج) - \Phi(ج)}{\Delta ج}$

عندما تقرب $\Delta ج$ من الصفر . ويتضح أنه بصرف النظر عن صغر $\Delta ج$ فإن التغير المناظر $\Delta ف$ أو $\Phi(ج + \Delta ج) - \Phi(ج)$ ستكون قيمته ضعف هذا التغير . وبينما $\Delta ج$ تصغر صغراً لانهائياً فإن النسبة السابقة تبقى ثابتة وتساوى ٢ .

ولذلك فإن :

$$\text{نهـــا}_{\Delta ج \leftarrow 0} \frac{\Phi(ج + \Delta ج) - \Phi(ج)}{\Delta ج} = ٢$$

أى أن نهايتها قيمة محددة ونهاية هذه النسبة يعرف بتفاضل الدالة $\Phi(ج)$ بالنسبة إلى ج .

وبصفة عامة إذا كان لدينا معادلة من الصورة الآتية :

$$ص = \Phi(س)$$

فإن تفاضل هذه الدالة بالنسبة إلى س يمكن حسابه بإيجاد النهاية :

$$\text{نهـــا}_{\Delta س \leftarrow 0} \frac{\Phi(س + \Delta س) - \Phi(س)}{\Delta س}$$

وهناك صور كثيرة للتعبير عن تفاضل دالة . فمن الرموز المستحقة هى ص َ أو Φ َ (س) أو الرمز الذى سنسير عليه فى هذا الكتاب وهو :

$$\frac{د\ ص}{د\ س}$$

وهذا الرمز كما هو واضح من شرحنا السابق ليس خارج قسمة كمية

على أخرى . وهذا الرمز يسمى المعامل التفاضلى الأول للدالة بالنسبة إلى س أو المشتقة الأولى للدالة للتغير س

هذا وقد وجدنا أن تفاضل الدالة ف = ٥ + ٢ج أو Φ (ج)
= ٥ + ٢ ج يساوى ٢ وبالرمز .

$$\frac{د ف}{د ج} = ٢$$

وهذا التفاضل يمكن تفسيره على أنه عبارة عن ميل الخط عند نقطة محدودة أو عبارة عن معدل التغير فى ف بالنسبة إلى ج . لاحظ أن التفاضل ثابت أو محدد أى أنه بصرف النظر عن القيمة الأولى للمتغير ج فإن التغير الصغير فى ج سيؤدى إلى تغير فى ف يساوى ضعفه . ولذلك نقول أن الدوال الخطية أو المستقيمة لها باستمرار تفاضل ثابت .

وقد سبق أن عرفنا ميل المنحنى عند أية نقطة معينة بأنه ميل المستقيم الذى يمس المنحنى عند هذه النقطة . ولذلك نقول أن ميل المنحنى يتغير عند كل النقط الموجودة على المنحنى . فإذا كان الميل لا يتغير فمعنى ذلك أنه خط مستقيم أو أن العلاقة الموجودة هى علاقة خطية ولإيجاد ميل منحنى توجد نهاية الدالة عندما يقرب التغير فى س من الصفر . أى

$$\text{نهـ}_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

وحيث أن Δ ص = Φ (س + Δ س) — Φ (س) فإن :

$$\text{نهـ}_{\Delta س \leftarrow ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$= \lim_{\Delta س \leftarrow 0} \frac{\Phi (س + \Delta س) - \Phi (س)}{\Delta س}$$

= ميل المنحنى عند النقطة س

ولذلك فإن تفاضل معادلة غير خطية عند نقطة معينة هو عبارة عن ميل المنحنى عند النقطة . وبمعنى آخر فإن التفاضل يعبر عن معدل التغير لقيمة الدالة بالنسبة إلى المتغير المستقل . وحيث أن معدل التغير على المنحنى يتغير باستمرار فإن المعامل التفاضلي سيتغير باستمرار وقيمته ستعتمد على النقطة على المنحنى المقصود .

مثال :

افترض أن قسم الإنتاج بشركة معينة يوضح العلاقة بين إنتاج آلة معينة والوقت المستخدم فى الإنتاج ومعدل إنتاج الآلة فى الدقيقة بالدالة الآتية :

$$ص = \frac{س^{٢}}{٥}$$

حيث :

ص = الإنتاج الكلى للآلة

س = الوقت المستخدم فى الإنتاج

٥ = معدل الإنتاج الآلى (كمية ثابتة) بالدقيقة

ونود معرفة المعامل التفاضلي الأول وذلك بإيجاد نهاية هذه الدالة .

الخطوة الأولى هى إيجاد $\lim_{\Delta س \to 0} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ مع الأخذ فى الاعتبار أن $\Delta ص = \phi(س + \Delta س) - \phi(س)$. أى نفرض أنه قد حدث تغيرا قدره $\Delta س$ نتج عنه تغيرا صغيرا فى ص قدره $\Delta ص$. أى أن المتغير المستقل يصبح $س + \Delta س$ والمتغير التابع $ص + \Delta ص$.

وحيث أن $ص = \frac{س^٢}{٥}$

فإن :

$$ص + \Delta ص = \frac{(س + \Delta س)^٢}{٥}$$

وبالطرح :

$$\Delta ص = \frac{(س + \Delta س)^٢}{٥} = \frac{س^٢}{٥}$$

$$\Delta ص = \frac{س^٢ + ٢ س \Delta س + (\Delta س)^٢}{٥} - \frac{س^٢}{٥}$$

$$\Delta ص = \frac{٢ س \Delta س}{٥} + \frac{(\Delta س)^٢}{٥}$$

وبالقسمة على $\Delta س$ فإن .

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٢ س \Delta س}{٥ \Delta س} + \frac{(\Delta س)^{٢}}{٥ \Delta س}$$

$$= \frac{٢ س}{٥} + \frac{\Delta س}{٥}$$

ولذلك فإن :

$$\frac{د ص}{د س} = \text{نهـــا}_{\Delta س \leftarrow \Delta} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$= \text{نهـــا}_{\Delta س \leftarrow .} \left(\frac{٢ س}{٥} + \frac{\Delta س}{٥} \right)$$

$$= \frac{٢ س}{٥}$$

مثال .

أوجد المعامل التفاضلي الأول للدالة ص = ١٠ س

الحل :

$$ص + \Delta ص = ١٠ (س + \Delta س)$$

$$\Delta ص = ١٠ (س + \Delta س) - ١٠ س$$

$$= ١٠ س + ١٠ \Delta س - ١٠ س$$

$$= ١٠ \Delta س$$

وبالقسمة على $\Delta س$ فإن :

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{١٠ \Delta س}{\Delta س}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = \text{نهـــــا}_{\Delta \text{س} \leftarrow 0} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي الأول للدالة ص = ٥ + ٤ س^{٢}

الحل :

$$\text{ص} + \Delta\text{ص} = ٥ + ٤ (\text{س} + \Delta \text{س})^{٢}$$

$$\Delta\text{ص} = ٥ + ٤ (\text{س} + \Delta \text{س})^{٢} - (٥ + ٤ \text{س}^{٢})$$

$$= ٥ + ٤ (\text{س}^{٢} + ٢\text{س}\Delta\text{س} + (\Delta\text{س})^{٢}) - (٥ + ٤\text{س}^{٢})$$

$$\Delta\text{ص} = ٥ + ٤ \text{س}^{٢} + ٨ \text{س} \Delta \text{س} + ٤ (\Delta \text{س})^{٢}$$

$$- ٥ - ٤ \text{س}^{٣}$$

$$\Delta\text{ص} = ٨ \text{س} \Delta \text{س} + ٤ (\Delta \text{س})^{٢}$$

وبالقسمة على Δ س فإن :

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{٨ \text{س} \Delta \text{س}}{\Delta \text{س}} + \frac{٤ (\Delta \text{س})^{٢}}{\Delta \text{س}}$$

$$= ٨ \text{س}$$

$$\therefore \frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}} = ٨ \text{س}$$

مثال :

افترض أن منحنى التكاليف الكلية هو ص = س^{٢}

ما هو منحنى التكلفة الحدية ، حيث ص تمثل التكاليف الكلية و س تمثل عدد الوحدات المنتجة .

الحـل :

من المعروف فى الإقتصاد أن التكلفة الحدية عبارة عن خارج قسمة الزيادة فى التكاليف الكلية الناتجة من الزيادة فى الكميات المنتجة على الزيادة فى الكميات المنتجة . أى أن التـكلفة الحدية عبارة عن نهاية النسبة .

$$\frac{\text{الزيادة فى التكاليف الكلية}}{\text{الزياد فى الإنتاج}}$$

عندما تقرب الزيادة فى الإنتاج إلى الصفر . وبالرموز فإن التكلـفة الحدية هى :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{نهـــــا}_{\Delta \text{س} \leftarrow 0} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

$$\text{ص} + \Delta \text{ص} = (\text{س} + \Delta \text{س})^{2}$$

$$\Delta \text{ص} = (\text{س} + \Delta \text{س})^{2} - \text{س}^{2}$$

$$= \text{س}^{2} + 2\text{س}\,\Delta\,\text{س} + (\Delta \text{س})^{2} - \text{س}^{2}$$

$$= 2\,\text{س}\,\Delta\,\text{س} + (\Delta \text{س})^{2}$$

$$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{2\,\text{س}\,\Delta\,\text{س}}{\Delta \text{س}} + \frac{(\Delta \text{س})^{2}}{\Delta \text{س}}$$

$$= 2\,\text{س} + \Delta \text{س}$$

$$\therefore \frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = 2\,\text{س}$$

ويوضح هذا منحنى التـكلفة الحدية . فمثلا عند إنتاج ٤ وحدات

فإن $\frac{\text{د ص}}{\text{د}\Delta} (٤) = ٨$

مثـال :

افترض أن منحنى الطلب لسلعة معينة هو

$$ص = \Phi(ع) = ١٠ - ٢ع$$

ماهو منحنى الإيراد الحدى

الحـل :

يمكن تعريف الإيراد الكلى بأنه عبارة عن حاصل ضرب السعر فى الكميات المباعة . ولذلك فإن ر عبارة عن المتحصلات الكلية للبائعين أو مجموع المصاريف للمشترين ، أما الإيراد الحدى فهو عبارة عن النسبة بين الزيادة فى الإيراد الكلى والزيادة فى الكميات المباعة . أى أن الإيراد الحدى عبارة عن نهاية النسبة :

$$\frac{\text{الزيادة فى الإيراد الكلى}}{\text{الزيادة فى المبيعات}}$$

عندما تقرب الزيادة فى المبيعات إلى صفر . أى أن الإيراد الكلى

$$= ر = ص ع$$

$$\text{و} \quad \frac{د ر}{د ع} = \text{نهـــــا}_{\Delta ع \leftarrow ٠} \frac{\Delta ر}{\Delta ع}$$

ولذلك فبالنسبة للمثال الحالى فإن الإيراد الكلى يساوى

$$ر = (١٠ - ٢ع) \times ع$$

$$= ١٠ع - ٢ع^{٢}$$

$$\therefore ر + \Delta ر = ١٠(ع + \Delta ع) - ٢(ع + \Delta ع)^{٢}$$

$$= ١٠(ع + \Delta ع) - [ع^{٢} + ٢ع \Delta ع + (\Delta ع)^{٢}]$$

$$= ١٠ع + ١٠(\Delta ع) - ٢ع^{٢} - ٤ع(\Delta ع) - ٢(\Delta ع)^{٢}$$

$$\therefore \Delta ر = ١٠ ع + ١٠ \Delta ع - ٢ ع^{٢} - ٤ ع \Delta - ٢ (\Delta ع)^{٢}$$
$$- ١٠ ع + ٢ ع^{٢}$$
$$= ١٠ (\Delta ع) - ٣ ع (\Delta ع) - ٢ (\Delta ع)^{٢}$$

$$\therefore \frac{\Delta ر}{\Delta ع} = ١٠ - ٤ ع - ٢ \Delta ع$$

$$\therefore \frac{د ر}{د ع} = ١٠ - ٤ ع$$

ويوضح هذا منحنى الإيراد الحدى .

قواعد التفاضل :

من الطبيعى أنه يمكن إيجاد تفاضل أى دالة باتباع الإجراءات السابق شرحها فى الصفحات السابقة ، إلا أن هذه الطريقة تعتبر طريقة مطولة لإيجاد المعامل التفاضلى . وحيث أن هناك أنواعاً معينة من الدوال تستخدم فى كثير من التطبيقات ، ولذلك فان من السهولة بمكان معرفة طريقة إيجاد المعامل التفاضلى لهذه الأنواع بدلا من استعمال الطريقة السابقة .

١ — المعامل التفاضلى للدالة ص = س ن

إذا كانت ن عدداً موجباً أو سالباً صحيحاً أو كسر فإن :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د}{د س} (س)^{ن}$$

$$= ن س ن - ١$$

أى ان المعامل التفاضلى للدالة ص = س ن هو ن س ن - ١

مثال :

أوجد المعامل التفاضلى للدالة ص = س°

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ن\ س^{ن-١}$$

$$= ٥\ س^{٥-١}$$

$$= ٥\ س^{٤}$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلى ص = س

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ن\ س^{ن-١}$$

$$= ١ \times س^{١-١}$$

$$= ١ \times س^{٠}$$

$$= ١$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلى للدالة ص = $س^{\frac{٣}{٤}}$

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{٣}{٤}\ س^{\frac{٣}{٤}-١}$$

$$= \frac{٣}{٤}\ س^{\frac{١}{٤}}$$

obeikandl.com

مثال :

أوجد المعامل التفاضلى للدالة ص = $\frac{١}{س^{٣}}$

الحـــل :

$$\therefore \quad \frac{١}{س^{٣}} = س^{-٣}$$

$$\therefore \quad \frac{ء ص}{ء س} = -٣ س^{-٤}$$

٢ — المعامل التفاضلى للكمية الثابتة :

إذا كانت ا كمية ثابتة وكان لدينا

ص = ا

فإن

$$\frac{ء}{ء س}(ا) = \text{نهـــــا}_{\Delta س \leftarrow \Delta س} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$$

$$= \text{صفر}$$

حيث أنه من الواضح أن الدالة مستقلة عن س وبصرف النظر عن التغير الذى يحدث فى س فإنه لا يحدث تغير فى قيمة الدالة أى أن Δ ص = صفر

ولذلك فإن $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$ = صفر و $\frac{ء ص}{ء س}$ = صفر

أى أن المعامل التفاضلى لكمية ثابتة يساوى صفر .

٣ — المعامل التفاضلى لمتغير بالنسبة لنفسه :

المعامل التفاضلى لأى دالة بالنسبة لنفسها يساوى الواحد الصحيح .

$$ص = س$$

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{د}{د\,س}(س)$$

$$= ١$$

أى أن معدل التغير لمتغير بالنسبة لنفسه يساوى واحد صحيح أى كلما تغيرت س بأى كمية سواء كانت كبيرة أو صغيرة فإن الدالة Φ (س) التى تساوى س تتغير بنفس الكمية .

٤ — المعامل التفاضلى لحاصل ضرب مقدار ثابت فى دالة :

إذا كانت ا مقدار ثابت ، ص دالة للمتغير س .

$$ص = ا\,\Phi(س)$$

فإن :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{د}{د\,س}\left[ا\,\Phi(س)\right]$$

$$= ا \times \frac{د}{د\,س}\Phi(س)$$

أى أن المعامل التفاضلى لحاصل ضرب مقدار ثابت فى دالة يساوى المقدار الثابت فى تفاضل هذه الدالة .

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة ص = ٦س٤

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ٦ \times ٤ س^{٣}$$

$$= ٢٤ س^{٣}$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة ص = ٥س^-٢

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ٥ \times -٢ س^{-٣}$$

$$= -١٠ س^{-٣}$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة ص = $\sqrt{س}$

الحل :

$$\therefore \quad \sqrt{س} = (س)^{\frac{١}{٢}}$$

$$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٢} س^{-\frac{١}{٢}}$$

obeikandi.com

٥ — المعامل التفاضلي للمجموع الجبري لدالتين أو أكثر :

إذا كانت ص = ل + ع + م وكان كل من س ، ع ، م دوال للمتغير المستقل س فإن :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = \frac{د\,ل}{د\,س} + \frac{د\,ع}{د\,س} + \frac{د\,م}{د\,س}$$

أى أن تفاضل المجموع الجبرى لدالتين أو أكثر يساوى مجموع تفاضل هذه الدوال .

مثال :

أوجد المعامل التفاضل للدالة ص = ٤ س^{٣} — ٣ س^{٢} — س + ٥

الحل :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = ١٢\,س^{٢} - ٦\,س - ١$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلى للدالة ص = ٥س^{٢} — ٤ س — ٤ عندما تكون س = ٣

الحل :

$$\frac{د\,ص}{د\,س} = ١٠\,س - ٤$$

$$\therefore \frac{د\,ص}{د\,س} \text{ عندما س} = ٣ = ١٠ \times ٣ - ٤ = ٢٦$$

٦ — المعامل التفاضلي لحاصل ضرب دالتين :

إذا كانت ص = ل × ع وكان كل من ل ، ع دالة للمتغير س فإن :

$$\frac{د ص}{د س} = ل \times \frac{د ع}{د س} + ع \times \frac{د ل}{د س}$$

أى أن المعامل التفاضلي لحاصل ضرب دالتين يساوى الدالة الأولى مضروبة في تفاضل الدالة الثانية + الدالة الثانية مضروبة فى تفاضل الدالة الأولى .

ويمكن القول أيضاً إذا كانت ص = ل × ع × م وكان كل من ل ، ع ، م دوال للمتغير س فإن :

$$\frac{د ص}{د س} = (ل ع) \frac{د م}{د س} + م \times \frac{د (ع ل)}{د س}$$

$$= ل ع \frac{د م}{د س} + ع م \frac{د ل}{د س} + م ل \frac{د ع}{د س}$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة = (س + ٢) (س + ٣)

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = (س + ٣) \times ١ + (س + ٣) \times ١$$

$$= ٢ س + ٥$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة ص = (س^{٢} + ٥) (٣ س − ١)

الحل :

$$\frac{د\ ص}{د\ س} = (س^{٢} + ٥) \times ٣ + (٣ س - ١) (٢ س)$$

$$= ٣ س^{٢} + ١٥ + ٦ س^{٢} - ٢ س$$

$$= ٩ س^{٢} - ٢ س + ١٥$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة ص =

(س + ٤) (٣ س − ٢) (٥ س + ٩)

الحل :

$$\frac{د\ ص}{د\ س} = (س + ٤)(٣ س - ٢)$$

$$\times \frac{د}{د\ س}(٥ س + ٩)$$

$$+ (٣س - ٢)(٥س + ٩)$$

$$\times \frac{د}{د\ س}(س + ٤)$$

$$+ (٥ س \times ٩)(س + ٤)$$

$$\times \frac{ء}{ء س} (٣ س - ٢)$$

$$= (س + ٤)(٣ س - ٢) \times ٥$$

$$+ (٣ س - ٢)(٥ س + ٩) \times ١$$

$$+ (٥ س + ٩)(س + ٤) \times ٢$$

٧ — المعامل التفاضلي لخارج قسمة دالتين :

إذا كانت ص $= \frac{ل}{ع}$ حيث ل ، ع دوال للمتغير س فإن :

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{ع^{٢}} \left[ع \times \frac{ء ل}{ء س} - ل \times \frac{ء ع}{ء س} \right]$$

أى أن المعامل التفاضلي لخارج قسمة دالتين يساوى

$$\frac{\text{المقام} \times \text{تفاضل البسط} - \text{البسط} \times \text{تفاضل المقام}}{\text{مربع المقام}}$$

ولا يكون المقام يساوى صفراً .

مثال :

أوجد المعامل التفاضلي للدالة ص $= \frac{٣ س^{٢}}{٤ س - ١}$

الحل:

$$\frac{ص}{س} = \frac{(٤س - ١)(٦س) - (٣س^{٢}) \times ٤}{(٤س - ١)^{٢}}$$

$$= \frac{٢٤س^{٢} - ٦س - ١٢س^{٢}}{(٤س - ١)^{٢}}$$

$$= \frac{١٢س^{٢} - ٦س}{(٤س - ١)^{٢}}$$

٨ — المعامل التفاضلي لدالة الدالة :

إذا كانت ص دالة للمتغير ك وكانت ك دالة للمتغير س فتكون ص دالة المتغير س . أى أن ص دالة الدالة .

$$ص = \Phi(ك)$$

حيث $ك = \Phi(س)$

فمثلا من المعروف أن الإنتاج الكلى يكون دالة لعدد ساعات العمل وأن الإنتاج للعامل فى الساعة قد يكون دالة لكمية الآلات الميكانيكية المستخدمة فإذا كان عدد ساعات العمل ثابتة فإن الإنتاج الكلى يكون دالة للإنتاج بالساعة الذى يكون دالة لكمية الآلات أو أن الإنتاج دالة الدالة .

ولذلك بصفة عامة ، فإن المعامل التفاضلى إذا كانت ص دالة للمتغير ك وكانت ك دالة للمتغير س يساوى :

$$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ك} \times \frac{ك}{س}$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلى للدالة الآتية بالنسبة إلى س

ص = (س^{٢} — ٣ س + ٥)^{٤}

الحل :

نضع أولا ك = س^{٢} — ٣ س + ٥

ولذلك تصبح ص دالة للمتغير ك أى أن

ص = ك^{٤}

ولذلك فإن المعامل التفاضلى للدالة ص بالنسبة إلى ك :

$$\frac{د ص}{د ك} = ٤ ك^{٢}$$

وكذلك فإن المعامل التفاضلى للدالة ص بالنسبة إلى س :

$$\frac{د ك}{د ص} = ٣ س^{٢} — ٣$$

∴ المعامل التفاضلى للدالة ص بالنسبة إلى س يساوى :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ك} \times \frac{د ك}{د س}$$

$$= ٤ ك^{٣} \times (٣ س^{٢} — ٣)$$

$$= ٤ (س^{٢} — ٣ س + ٥)^{٣} (٣ س^{٢} — ٣)$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلى للدالة ص $= \frac{1}{\sqrt[3]{٤ س^{٢} + ٣}}$ بالنسبة إلى س

الحل :

نفرض أن ل $= ٤ س^{٢} + ٣$

$\therefore$ ص $= \frac{1}{\sqrt[3]{ل}}$

ص $= \frac{1}{(ل)^{\frac{1}{3}}}$

ص $= ل^{-\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{د ص}{د ل} = -\frac{1}{3} ل^{-\frac{4}{3}}$

$\frac{د ل}{د س} = ٨ س$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ل} \times \frac{د ل}{د س}$

$= -\frac{1}{3} ل^{-\frac{4}{3}} \times ٨ س$

$= -\frac{1}{3} (٤ س^{٢} + ٣)^{-\frac{4}{3}} \times ٨ س$

$= \frac{-٨ س}{\sqrt[3]{(٤ س^{٢} + ٣)^{٤}}}$

مثال :

أوجد $\frac{ص}{س}$ إذا كانت ص = ٦ (٤ س^{٢} — ٤)$^{-٣}$

الحل :

$$\frac{ص}{س} = -١٨ (٤ س^{٢} - ٤)^{-٤} \times ٨ س$$

مثال :

إذا كانت ص = ٥ (٤ $\sqrt{س}$ + س)^{٣} أوجد $\frac{ص}{س}$

الحل :

$$\frac{ص}{س} = ١٥ (٤ \sqrt{س} + س)^{٢} (٢ س (س)^{-\frac{١}{٢}} + ١)$$

أى أنه يمكن القول بصفة عامة إنه لإيجاد المعامل التفاضلى لدالة يكون على الوجه الآتى :

$$\frac{ص}{س} = \frac{ك}{ل} \times \frac{ل}{م} \times \frac{م}{س}$$ وهكذا

٩ — المعامل التفاضلى للدالة العكسية :

الدالة العكسية تكون على الصورة الآتية :

س = ϕ (ص)

ونريد إيجاد المعامل التفاضلى للدالة ص بالنسبة إلى س . وقد يكون فى بعض الحالات من السهل إيجاد تفاضل هذه الدالة العكسية وذلك بتحويلها أولا إلى دالة صريحة للمتغير ص بالنسبة إلى س . ولكن لا يكون فى إمكاننا ذلك فى كل الأحوال كما هو موضح بالدالة الآتية :

$$س = ص^{٥} + ص$$

إلا أنه يمكن إيجاد المعامل التفاضلى على الوجه الآتى :

حيث أن :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{\frac{د س}{د ص}}$$

فإنه يمكن إيجاد المعامل التفاضلى للدالة س بالنسبة إلى ص أولا ثم إيجاد $\frac{د ص}{د س}$ كما هو موضح أعلاه

مثال :

إذا كانت $س = ص^{٥} + ص$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :

$$\frac{د س}{د ص} = ٥ ص^{٤} + ١$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{٥ ص^{٤} + ١}$$

المعامل التفاضلى للدالة الضمنية :

سبق أن أوضحنا أن الدالة الضمنية تكون على الصورة الآتية :

$$\Phi (س ، ص) = ١$$

ولايجاد المعامل التفاضلى للدالة ص بالنسبة إلى س أو للدالة س بالنسبة إلى ص فإن إحدى الطرق لإيجاده تكون بتغيير الدالة الضمنية إلى دالة صريحة فمثلا .

$$\frac{ص}{س} = ٢$$

يمكن تحويلها إلى ص = ٢ س أو س = $\frac{ص}{٢}$

ومن الطبيعى الآن يمكن إيجاد المعامل التفاضلى بسهولة .

إلا أنه ليس من السهولة دائماً تحويل الدالة الضمنية إلى دالة صريحة . ولإيجاد $\frac{د ص}{د س}$ تحسب التفاضل بالنسبة إلى س لجميع حدود الطرفين ثم تجمع الحدود التى بها $\frac{د ص}{د س}$ وتوجد قيمة $\frac{د ص}{د س}$

مثال :

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ للمعادلة س٤ + س٣ ص٢ — ص — ٥ = ٠

الحل :

نأخذ التفاضل بالنسبة إلى س لجميع الحدود فى الطرفين .

∴ بالنسبة للحد الأول $\frac{د}{د س}(س^{٤}) = ٤س^{٣}$

« « الثانى $\frac{د}{د س}(س^{٣} ص^{٢})$

$= ٣ س^{٣} ص^{٢} + س^{٣} ٢ ص \frac{د ص}{د س}$

لاحظ أننا نعتبر أن ص دالة غير معروفة بالنسبة إلى س

بالنسبة للحد الثالث $\frac{د ص}{د س}(- ص) = - \frac{د ص}{د س}$

« « الرابع $\frac{د ص}{د س}(- ٥) =$ صفر

وتستخدم هذه النتائج لإيجاد المعامل التفاضلى للمعادلة كلها :

$٤ س^{٣} + ٣ س^{٢} ص^{٢} + س^{٣} ٢ ص \frac{د ص}{د س} - \frac{د ص}{د س} = ٠$

$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{٤ س^{٣} + ٣ س^{٢} ص^{٣}}{١ - ٢ س^{٣} ص}$

مثال :

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ من المعادلة $ص^{٢} + ٥ س ص + ٣ س^{٣} - ٥ = ٠$

الحل :

$$٣ص\frac{وص}{وس} + ٥\left(س \times \frac{وص}{وس} + ص \times ١\right) + ٦س = ٠$$

$$٣ص\frac{وص}{وس} + ٥س\frac{وص}{وس} = -(٥ص + ٦س)$$

$$\therefore \frac{وص}{وس}(٢ص + ٥س) = -(٥ص + ٦س)$$

$$\therefore \frac{وص}{وس} = -\frac{٥ص + ٦س}{٢ص + ٥س}$$

١١ — المعامل التفاضلي للدوال الأسية :

تعرف الدالة الأسية التي يكون فيها هـ مرفوعة إلى قوة تسمى بالأس والمعامل التفاضلي للدالة هـ س بالنسبة إلى س يساوي الدالة نفسها أي أن

$$ص = هـ^{س}$$

$$\therefore \frac{وص}{وس} = هـ^{س}$$

مثال :

إذا كانت ص = هـ ٣س أوجد $\frac{وص}{وس}$

الحل :

نجد أن $\Phi(س) = ٢س$

$$\therefore \frac{ء}{ء س} \Phi(س) = ٢$$

ولذلك حيث أن

$$\frac{ء}{ء س}\left[هـ^{\Phi(س)} \right]$$

$$= هـ^{\Phi(س)} \frac{ء}{ء س}\left[\Phi(س)\right]$$

$$\therefore \frac{ء ص}{ء س} = ٢ هـ^{٢س}$$

مثال :

إذا كانت $ص = هـ^{(٣س^٤ + ٥)}$ أوجد $\frac{ء ص}{ء س}$

الحل :

$$\frac{ء ص}{ء س} = هـ^{٣س^٤ + ٥} \times (١٢ س^٣)$$

$$= ١٢ س^٣ هـ^{٣س^٤ + ٥}$$

مثال :

إذا كانت ص = س٤ هـ٢س٢ أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$

الحل :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \text{س}^{٢}\left[\text{هـ}^{٢\text{س}^{٢}} \times ٤\text{س}\right] + \text{هـ}^{٢\text{س}^{٢}}\left[٢\text{س}^{٢}\right]$$

١٢ — المعامل التفاضلي للدوال اللوغاريتمية :

إذا كانت ص = لو هـ س فإن :

$$\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{\text{س}}$$

مثال :

أوجد $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}}$ للدالة ص = لو (٤ س + ٥) مع ملاحظة أن الأساس اللوغاريتم هو هـ في حالة عدم ذكره

الحل :

نضع م = ٤ س + ٥

∴ ص = لو م

$$\therefore \frac{د ص}{د م} = \frac{١}{م} = \frac{١}{٤ س + ٥}$$

$$\text{و} \quad \frac{د م}{د س} = ٤$$

$$\therefore \frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د م} \times \frac{د م}{د س}$$

$$= \frac{٤}{٤ س + ٥}$$

مثال :

إذا كانت ص = لو $\frac{س}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$ أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :

$$ص = لو \frac{س}{(س^{٢} - ١)^{\frac{١}{٢}}}$$

$$ص = لو\ س - \frac{١}{٢} لو\ (س^{٢} - ١)$$

$$\therefore \frac{د س}{د ص} = \frac{١}{س} - \frac{١}{٢ (س^{٢} - ١)} \times ٣ س^{٢}$$

$$= \frac{١}{س} - \frac{٢ س (س^{٢} - ١)}{٣ س^{٢}}$$

مثال :

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ للدالة ض = لو (٤ س^{٢} + ٧)

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{(٤ س^{٢} + ٧)} \times ٨ س$$

$$= \frac{٨ س}{(٤ س^{٢} + ٧)}$$

١٣ — التفاضل اللوغاريتمى :

قد يكون من الأحسن أحيانا إيجاد المعامل التفاضلى لبعض الدوال وذلك يأخذ لوغاريتم الطرفين بالأساس هـ قبل إجراء التفاضل وخاصة فى الأحوال التى تكون فيها ص دالة لعدة دوال مضروبة فى بعضها أو فى الرفع إلى القوى أو استخراج الجذور .

مثال :

إذا كانت ص = س^{س} أوجد $\frac{د ص}{د س}$

الحل :

لوغاريتم الطرفين :

لو ص = س لو س

$$\therefore \quad \frac{١}{ص} \times \frac{د ص}{د س} = س \times \frac{١}{س} + لو س \times ١$$

$$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = ص [١ + لو س]$$

$$= س^{س} [١ + لو س]$$

مثال :

أوجد $\frac{د ص}{د س}$ إذا كانت $ص = (س + ٣) \sqrt{س + ٤}$

الحل

لوغاريتم الطرفين :

$$لو ص = لو (س + ٣) + \frac{١}{٢} لو (س + ٤)$$

$$\therefore \quad \frac{١}{ص} \times \frac{د ص}{د س} = \frac{١}{(س + ٣)} + \frac{١}{٢ (س + ٤)}$$

$$\therefore \quad \frac{د ص}{د س} = ص \left[\frac{١}{(س + ٣)} + \frac{١}{٢ (س + ٤)} \right]$$

$$= (س + ٣) \sqrt{س + ٤} \left[\frac{٢ (س + ٤) + (س + ٣)}{٢ (س + ٣) (س + ٤)} \right]$$

$$= (س + ٣) \sqrt{س + ٤} \left[\frac{٣ س + ١١}{٢ (س + ٣) (س + ٤)} \right]$$

ثانيا . المعاملات التفاضلية العليا :

أوضحنا سلفاً أن تفاضل الدالة ص = ف(س) عبارة عن $\lim_{\Delta س \to 0}$ $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$. وقد أطلقنا عليه المعامل التفاضلي الأول بالنسبة إلى س . فإذا فاضلنا المعامل التفاضلي الأول ينتج لدينا المعامل التفاضلي الثاني للدالة . وبالمثل إذا فاضلنا المعامل التفاضلي الثاني ينتج لدينا المعامل التفاضلي الثالث وهكذا .

ولذلك نجد أنه لإيجاد المعامل التفاضلي النوني لأي دالة فإننا نقوم بتفاضل المعامل التفاضلي الذي ترتيبه ن — ١ . وإعادة ما نستخدم الرموز التالية للمعامل التفاضلي الثاني .

$$ص''$$

أو $$ف''(س)$$

أو $$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$$

وبالمثل نستعمل رموز متشابهة للمعاملات التفاضلية العليا فمثلا إذا كان لدينا الدالة الآتية :

$$ص = س^{٦} + ٤ س^{٢} - ٥$$

فإن :

المعامل التفاضلى الأولى $\frac{د ص}{د س} = ٦ س^{٥} + ٨ س$

« « الثانى $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٣٠ س^{٤} + ٨$

« « الثالث $\frac{د^{٣} ص}{د س^{٣}} = ١٢٠ س^{٣}$

« « الرابع $\frac{د^{٤} ص}{د س^{٤}} = ٣٦٠ س^{٢}$

« « الخامس $\frac{د^{٥} ص}{د س^{٥}} = ٧٢٠ س$

« « السادس $\frac{د^{٦} ص}{د س^{٦}} = ٢٧٠$

« « السابع $\frac{د ص^{٧}}{د س^{٧}} =$ صفر

وبالطبع فإن المعاملات التفاضلية التى بعد ذلك أيضاً قيمتها تساوى صفراً.

ومن الملاحظ أنه بالرغم من أنه يمكن إيجاد المعاملات التفاضلية العليا إلا أنه يكثر استخدام المعامل التفاضلى الأول والثانى . وقد سبق أن عرفنا المعامل التفاضلى الأول بالنسبة إلى المتغير المستقل يوضح معدل تغير الدالة بالنسبة إلى هذا المتغير . وقد قلنا أيضاً أن المعامل التفاضلى من الوجهة

الهندسية هو عبارة عن ميل هذه الدالة عند قيمة معينة للمتغير المستقل . وإذا كان المعامل التفاضلي الأول موجباً فإنه يوضح أن قيمة الدالة فى تزايد للقيم المتزايدة للمتغير المستقل . أما إذا كان المعامل التفاضلي الأول سالباً فإنه يوضح أن قيمة الدالة فى تناقص للقيم المتزايدة للمتغير المستقل .

أما المعامل التفاضلي الثانى فإنه يوضح ما إذا كانت الدالة تتغير بالزيادة أو بالنقصان أو بمعدل ثابت وبمعنى آخر فإن المعامل التفاضلي الثانى يوضح ما إذا كان المعامل التفاضلي الأول فى زيادة أو نقص أو يبقى ثابتاً للزيادة فى المتغير المستقل .

ومثال للدالة التى يكون فيها المعامل التفاضلي الأول ثابتاً وأن المعامل التفاضلي الثانى يساوى صفر هى الدالة الخطية التى تمثل الإيراد الكلى من المبيعات .

$$ص = ٢ س$$

حيث :

ص = الإيراد الكلى

س = عدد الواحدات المباعة

وإذ مثلنا هذه الدالة بيانياً فاننا نجد أنها عبارة عن خط مستقيم بميل موجب قيمة تساوى ٢ . أى أن المعامل التفاضلي الأول .

$$\frac{د ص}{د س} = ٢$$

وحيث أن ميل الخط ثابتاً فاننا نتوقع المعامل التفاضلى الثانى يساوى صفر أى أن $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$ = صفر . ويلاحظ طبعاً أنه فى حالة ما إذا كان المعامل التفاضلى الأول سالبا فإن المعامل التفاضلى الأول ثابتا .

ولضرب الآن مثلا يكون فيه المعامل التفاضلى الثانى موجبا . الدالة التالية تمثل دالة التكلفة : ص = ٢ س

حيث .

ص = التكاليف الكلية بمئات الجنيهات

س = الإنتاج بمئات الوحدات

وإذا أخذنا المعامل التفاضلى الأول لهذه الدالة فنجد أن:

$$\frac{د ص}{د س} = ٢^{س} \text{ لو}_{هـ} ٢$$

ومن الواضح أن المعامل التفاضلى ليس ثابتاً وأنه موجب ، والمعامل التفاضلى الثانى هو :

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٢^{س} (\text{لو}_{هـ} ٢)^{٢}$$

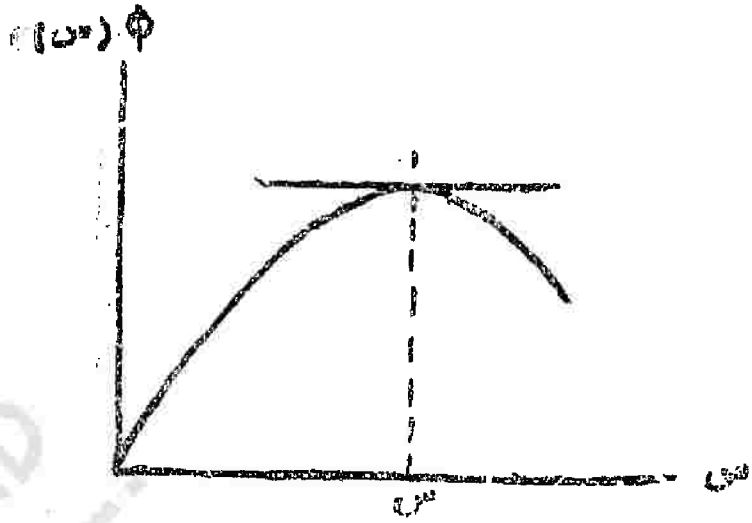
ومن الواضح أيضاً أن إشارة المعامل التفاضلى الثانى موجبة ، ويظهر ذلك بوضوح فى حالة تمثيل هذه الدالة بيانياً .

وتلخيصاً لما سبق نجد أنه فى حالة كون المعامل التفاضلى الأول موجباً عند نقطة معينة فإن معنى ذلك أن المنحنى المناظر لهذه الدالة يكون صاعداً عند هذه النقطة أما إذا كان سالباً فإن معنى ذلك أن الدالة تكون متناقصة ومن الواضح أيضاً أن المعامل التفاضلى الأول يعطى ميل الخط الذى يمس المنحنى عند النقطة (س ، ص) .

أما إذا كان المعامل التفاضلى الثانى موجباً فإن ذلك يوضح أن المعامل التفاضلى الأول فى أزدياد . أما إذا كان المعامل التفاضلى الثانى سالباً فإن معنى ذلك أن المعامل التفاضلى الأول الذى هو عبارة عن ميل الخط المستقيم الذى يمس المنحنى عند النقطة (س ، ص) فى تناقص .

ثالثاً : النهايات العظمى والصغرى ونقط الإنقلاب

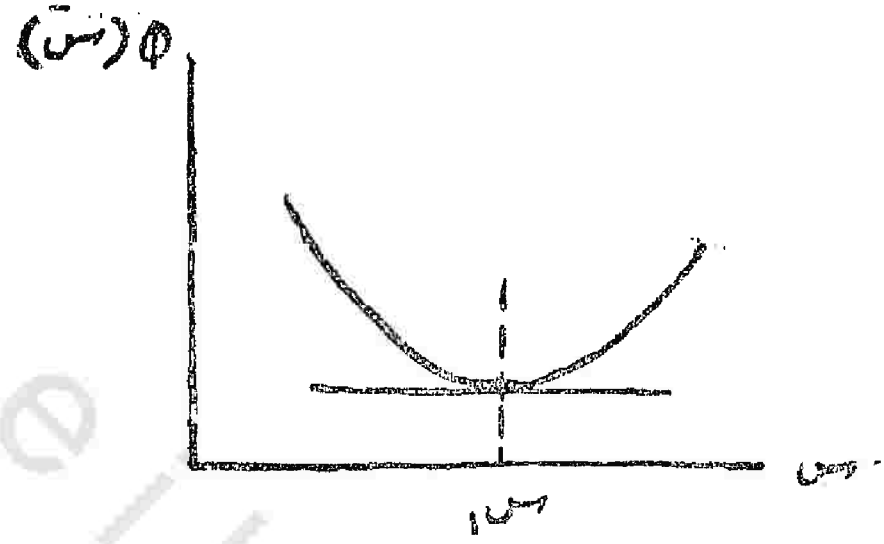
من المفهوم أن الدوال التى تتناقص أو تتزايد باستمرار لكل القيم للمتغير المستقل لا يكون لها نهايات عظمى أو صغرى : إلا أنه يوجد فى الحياة الإقتصادية كثير من الدوال مثل دوال الربح ، ودوال الإيرادات ، دوال التكلفة ، . . . الخ لها قيم كبرى وصغرى المناظرة لقيم معينة للمتغير المستقل أو المتغيرات المستقلة . ويمكن إيجاد قيم هذه النهايات الكبرى أو الصغرى وذلك بملاحظة سلوك المعامل التفاضلى الأول للدالة . والشكل الآتى يوضح دالة معينة .



(شكل ٤٣)

افترض أن هذا الشكل يمثل دالة الأرباح الكلية حيث س تمثل عدد الوحدات المباعة وأن ف (س) تمثل الأرباح الكلية . ويلاحظ أن دالة الربح تصل إلى نهايتها العظمى عند بيع س, من الوحدات . ومن المفهوم الآن من مناقشاتنا السابقة أن المعامل التفاضلي الأول يكون موجباً إلى يسار س, لأن المنحنى يتصاعد أو يتزايد ؛ كما أنه يكون سالباً إلى يمين س, لأن المنحنى يتناقص . وحيث أن المعامل التفاضلي الأول يتغير من قيم موجبة إلى قيم سالبة عند النقطة س, فإن المعامل التفاضلي يجب أن يكون قيمته تساوى صفراً عند النقطة س, .

ولنناقش دالة أخرى . افترض أن الشكل الآتي يمثل دالة متوسط التكلفة حيث س تمثل عدد الوحدات المنتجة وأن ف (س) تمثل متوسط التكلفة لكل وحدة منتجة . وفى الحالة فإن المعامل التفاضلي الأول للدالة سيكون سالباً إلى يسار س, وموجباً إلى يمين س, ويساوى صفراً عند س, وهى النقطة الصغرى للدالة .

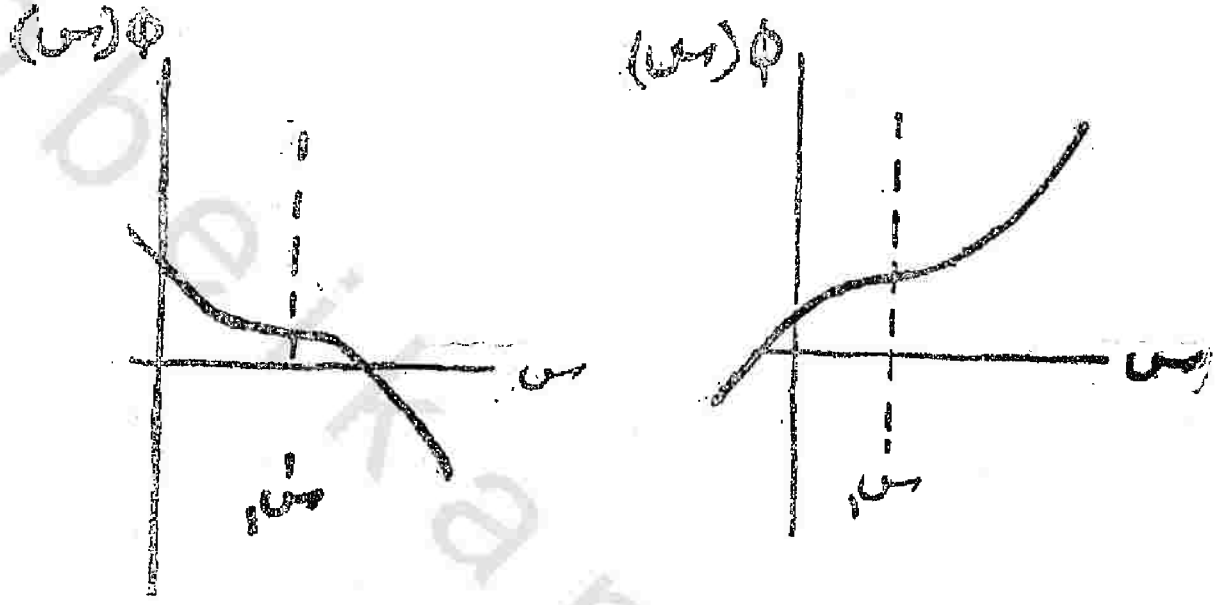


(شكل ٤٤)

ولذلك فمن الواضح بين هذين المثالين أنه يمكن إيجاد النقطة العظمى والنقطة الصغرى لأى دالة وذلك بوضع المعامل التفاضلى الأول للدالة يساوى صفر ثم حلل المعادلة لإيجاد قيمة المتغير المستقل . وهذا الإجراء قد ينتج عنه عدم وجود نقطة ممكنة أو ينتج عنه عدم وجود النقط ويستلزم فى هذه الحالة معرفة ما إذا كانت هذه النقط تمثل نقط عظمى أو صغرى أو لا هذا ولا ذاك . ومن الواضح الآن أنه إذا تغير المعامل التفاضلى الأول من موجب إلى سالب ، فإنه يوجد لدينا نقطة عظمى ، أما إذا تغير المعامل التفاضلى الأول من سالب إلى موجب فإنه يوجد لدينا نقطة صغرى.

هذا وقد يحدث أحياناً أن يتغير المعامل التفاضلى الأول من موجب إلى صفر إلى موجب أو من سالب إلى صفر إلى سالب مع قيم متزايدة للمتغير المستقل . وفى الحالات ، فإنه بالرغم من أن المعامل التفاضلى الأول

للدالة قد يكون صفراً لقيمة معينة للمتغير المستقل ، فإنه لا يوجد نقطة عظمى أو صغرى كما هو واضح من الأشكال الآتية :



(شكل ٤٥)

لذلك يقال للدالة عند قيمة معينة للمتغير أنها نهاية عظمى إذا كان مقدار الدالة عند هذه القيمة أكبر من أى مقدار لها لقيم المتغير المستقل الأصلى سواء كانت أكبر أو أصغر من القيمة المذكورة كما يقال للدالة نهاية عظمى إذا كان مقدار الدالة عند هذه القيمة أصغر من أى مقدار لها لقيم المتغير المستقل الأصلى سواء كانت أكبر أو أصغر من القيمة المذكورة .

هذا وقد قلنا أنه لاختيار ما إذا كان هناك نهايات عظمى أو صغرى عند نقطة معينة حيث المعامل التفاضلى الأول يساوى صفر هو معرفة سلوك المعامل التفاضلى الأول فى المنطقة المجاورة إلى اليسار وفى المنطقة المجاورة إلى اليمين للنقطة التى عندها المعامل التفاضلى الأول يساوى صفر .

وهناك طريقة أخرى وهى لإيجاد المعامل التفاضلى الثانى للدالة عند النقطة التى يكون فيها المعامل التفاضلى الأول يساوى صفر . ولذلك إذا كان المعامل التفاضلى الثانى موجباً عند النقطة التى فيها المعامل التفاضلى الأول يساوى صفر فإن المنحنى يجب أن يكون مقعر إلى أعلى ولا يوجد فى هذه الحالة نهاية صغرى . أما إذا كان المعامل التفاضلى الثانى سالباً عند النقطة التى فيها المعامل التفاضلى الأول يساوى صفر . فإن المنحنى يجب أن يكون مقعرا إلى أسفل عند هذه النقطة ويوجد فى هذه الحالة نهاية عظمى .

مثال :

افترض أن لدينا المنحنى ص = Φ (س) = س^{٢} — ٣ س + ١ ولذلك فإن المعامل التفاضلى الأول :

$$\frac{د\ ص}{د\ س} = ٣\ س^{٢} - ٣$$

والمعامل التفاضلى الثانى

$$\frac{د^{٢}\ ص}{د\ س^{٢}} = ٦ س$$

ولمعرفة وجود نهايات عظمى أو صغرى يجب أن يكون

ص$'$ = ٣ س^{٢} — ٣ = صفر

ولذلك فإن ص' = صفر عندما س = ١ ، س = — ١ فإذا كانت س = ١ فإن :

ص (١) = ٦ وهى أكبر من صفر

ولذلك فإنه عند النقطة س = ١ ، ص = — ١ توجد نهاية صغرى

أما إذا كانت س = — ١ فإن :

ص' (— ١) = — ٦ وهى أصغر من صفر

ولذلك فإنه عند النقطة س = — ١ ، ص = ٣ توجد نهاية عظمى .

مثال :

افترض أننا نرغب فى حساب كمية الطلب الاقتصادية السابق الإشارة إليها فى باب سابق فى هذا الكتاب : افترض أن هناك التكلفة الآتية :

١ — تكلفة شراء المواد ٢ قرش لكل وحدة

٢ — افترض أن تكلفة عمل الطلب بصرف النظر عن الكمية المطلوبة هى ٤٠ قرشاً .

٣ — تكلفة تخزين المواد ١٠ ٪ سنوياً على كمية المخزون

فإذا كان معدل استعمال هذه المادة هو ١٠٠٠٠ وحدة سنوياً ، وإذا كانت س تمثل حجم الطلب فانه يكون لدينا التعبير التالى للتكلفة الكلية ص فى السنة .

$$ص = ٢ \times ١٠٠٠٠٠ + \frac{١٠٠٠٠٠}{س} \times ٤٠ + \frac{س}{٢}$$

$$\times ٢ \ (١٠ \ ٪)$$

أو

$$ص = ٢٠٠٠٠ + \frac{٤٠٠٠٠٠}{س} + ١,٠ \ س$$

فإذا أخذنا المعامل التفاضلي الأول لهذا التعبير فإن

$$\frac{د ص}{د س} = - \frac{٤٠٠٠٠٠}{س^{٢}} + ١,٠$$

ولمعرفة وجود نهاية صغرى، نضع المعامل التفاضلي الأول يساوي صفر ثم نوجد قيمة س

$$- \frac{٤٠٠٠٠٠}{س^{٣}} + ١,٠ = صفر$$

$$س^{٢} = ٤٠٠٠٠٠٠$$

$$س = \pm ٢٠٠٠$$

حيث أنه من غير الممكن أن تكون كمية الطلب بالسالب ولذلك فيكن إهمال — ٢٠٠٠ والاستفسار فقط عن النقطة التي عندها

س = ٣٠٠٠ لمعرفة النهاية العظمى أو الصغرى عند النقطة . وستقوم بحل المثال بالطريقتين السابق شرحهما

إذا أخذنا قيمة س أقل من ٢٠٠٠ ولتكن ١٩٩٩ فإن قيمة المعامل التفاضلي الأول عند هذه النقطة يساوى :

$$\frac{ص}{س} = -\frac{٤٠٠٠٠٠}{(١٩٩٩)^٣} + ١,$$

ومن الواضح أن القيمة ستكون سالبة ، وإذا أخذنا قيمة س أكبر من ٢٠٠٠ ولتكن ٢٠٠٠١ فإن المعامل التفاضلي الأول عند هذه النقطة يساوى:

$$\frac{ص}{س} = -\frac{٤٠٠٠٠٠}{(٢٠٠١)^٣} + ١,$$

ومن الواضح أن القيمة ستكون موجبة ولذلك نستطيع القول أنه عند س = ٢٠٠٠ ينتج نهاية صغرى للتكلفة الكلية حيث أن المعامل التفاضلي الأول يتغير من سالب إلى صفر إلى موجب عند هذه النقطة .

س	٥٠٠	١٠٠٠	٢٠٠٠	٣٠٠٠	٥٠٠٠
ص	٢٠٨٥٠	٢٠٥٠٠	٢٠٤٠٠	٢٠٤٣٣	٢٠٥٨٠

والطريقة الثانية لمعرفة النهايات العظمى والصغرى وهى الطريقة السهلة

التى نوصى باستخدامها لتحديد ما إذا كان عند النقطة س = ٢٠٠٠ توجد نهاية صغرى هى بإيجاد المعامل التفاضلى الثانى عند هذه النقطة .

$$\frac{د ص}{د س} = -\frac{٤٠٠٠٠٠}{س^{٢}} + ١,$$

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = -٢ \left(-\frac{٤٠٠٠٠٠}{س^{٣}} \right)$$

$$\text{أى } \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = \frac{٨٠٠٠٠٠}{س^{٣}}$$

ومن الواضح أنه لا داعى لإيجاد قيمة المعامل التفاضلى الثانى عند النقطة س = ٢٠٠٠ وذلك لأن إشارة المعامل التفاضلى الثانى موجبة عند هذه النقطة . وهذا يكفى لتحديد أن منحنى التكلفة الكلية يكون مقعرا إلى أعلى عند النقطة س = ٢٠٠٠ ، ولذلك نستنتج أن التكلفة الكلية تنتج نهاية صغرى عند س = ٢٠٠٠ .

مثال :

أوجد نقط النهايات العظمى والصغرى للدالة

$$ص = س^{٣} - ٢ س^{٣} - ٢٤ س + ٥٠$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^{٢} - ٦ س - ٢٤$$

$$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^{٢} - ٦ س - ٢٤$$

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٦ س - ٦$$

نضع ٣ س^{٢} — ٦ س — ٢٤ = صفر

أى ٣ (س — ٤) (س + ٢) = صفر

∴ س = ٤ أو س = — ٢

أى أن :

$$\frac{د ص}{د س} = \text{صفر}$$ عندما س = ٤ أو س = — ٢

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$$ عند س = ٤ تساوى

٦ × ٤ — ٦ = ١٨

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$$ عند س = — ٢

٦ × — ٢ — ٦ = — ١٨

ولذلك فهناك نهاية عظمى عند س = ٤

ونهاية صغرى عند س = — ٢

توجد قيمة النهاية العظمى بوضع س = ٤ فى الدالة الأصلية وكذلك لنهاية الصغرى بوضع س = — ٢ فى الدالة الأصلية .

∴ النهاية العظمى للدالة = (٤)^{٣} — ٣ (٤)^{٢} — ٢٤ (٤) + ٥٠

= ٦٤ — ٤٧ — ٩٦ + ٥٠

= — ٣٠

∴ النهاية الصغرى للدالة = (— ٢)^{٣} — ٣ (— ٢)^{٢}

— ٢٤ (— ٢) + ٥٠

= — ٨ — ١٢ + ٤٨ + ٥٠

نقط الإنقلاب :

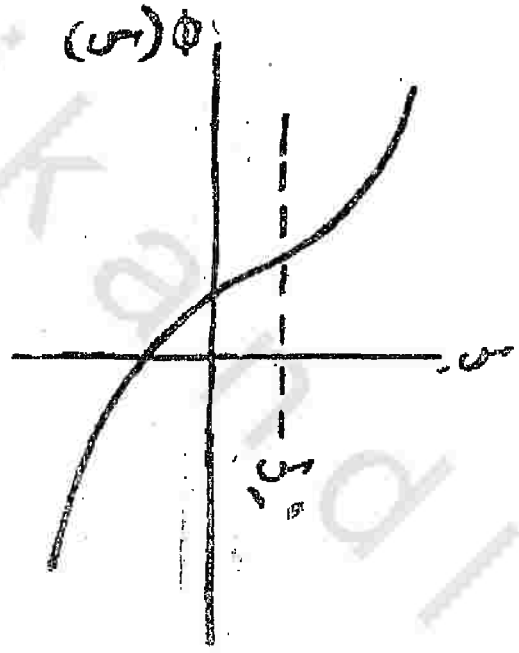
عندما يتغير المعامل التفاضلى الثانى للدالة من موجب إلى سالب أو من سالب إلى موجب لقيم متزايدة للمتغير المستقل ، يوجد لدينا ما يعرف بنقطة الانقلاب عند قيمة المتغير المستقل حيث وجد هذا التغير . لذلك عند هذه النقطة يجب أن يكون المعامل التفاضلى الثانى يساوى صفر إذا كانت له إشارة واحدة فى جانب واحد والاشارة عكسية فى الاتجاه الاخر. ومن الوجهة الهندسية نجد أنه عند نقطة الإنقلاب يتغير شكل الدالة من منحنى مقعر إلى أسفل إلى منحنى مقعر إلى أعلى إذا تغير المعامل التفاضلى الثانى من سالب إلى صفر إلى موجب ، كما هو موضح بالشكل التالى :

أى أن اتجاه المنحنى ينقلب من أسفل إلى أعلى أى أن $\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}}$

متزايدة مع ازدياد س وبذلك يكون المعامل التفاضلى الثالث عند هذه النقطة موجبة . أى أنه عند نقطة الانقلاب على منحنى الدالة ص = Φ

(س) يكون المعامل التفاضلى الثانى يساوى صفر عند هذه النقطة ، وتتغير إشارة المعامل التفاضلى الثانى من موجب قبل النقطة مباشرة إلى سالب بعد النقطة مباشرة أو العكس أو يكون المعامل التفاضلى الثانى يساوى صفر المعامل التفاضلى الثالث لا يساوى صفر عند هذه النقطة .

ولذلك لإيجاد نقطه لانقلاب نضع المعامل التفاضلى الثانى يساوى صفر ثم نحل المعادلة لإيجاد قيمة س



(شكل ٤٦)

مثال :

أوجد نقطة الانقلاب للدالة ص = س^{٣} - ٣ س^{٢} - ٢٤ س + ٥٠

الحل :

$$\frac{د ص}{د س} = ٣ س^{٢} - ٦ س - ٢٤$$

$$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = ٦ س - ٦$$

نضع ٦ س - ٦ = صفر

أى أن :

$$٦ (س - ١) = صفر$$

∴ $س = ١$ توجد عندها نقط انقلاب

$$\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = ٦ = موجب$$

أى أن شكل الدالة أن المنحنى ينقلب من أسفل إلى أعلى . أى أننا نتوقع أن هناك نقطة انقلاب عند النقطة $س = ١$ ، $ص = ٢٤$ على المنحنى .

ولذلك نجد أن نقطة انقلاب توجد بحيث يتغير تقعير المنحنى . إذ أن المنحنى قد يتغير من مقعر إلى أعلى إلى مقعر إلى أسفل أو بالعكس . وقد أوضحنا سلفا أنه إذا كان المعامل التفاضلى الثانى موجبا فإن المنحنى يكون مقعرا إلى أعلى ، أما إذا كان سالباً فإن المنحنى يكون مقعرا إلى أسفل . ولذلك من الواضح الآن أنه عند النقطة التى يتغير فيها تقعير المنحنى فإن المعامل التفاضلى الثانى يجب أن يتغير من موجب إلى سالب أو من سالب إلى موجب . ومن ثم فإن المعامل التفاضلى الثانى يجب أن يكون صفرا عند هذه النقطة . ولذلك، بصفة عامة، إذا كان $\frac{ء^{٢} ص}{ء س^{٢}} = صفر$ فهناك نقطة انقلاب على المنحنى .

رابعاً : التفاضل الجزئى

تكلمنا فى فصول سابقة عن الدوال التى تحتوى على أكثر من متغير مستقل واحد . إلا أن فى دراستنا للتفاضل اقتصرنا حتى الآن فى مناقشة الدوال التى تحتوى على متغير مستقل واحد . ومهمتنا الآن توضيح فكرة أو مفهوم التفاضل بالنسبة للدوال التى تحتوى على متغيرين أو أكثر .

هذا وقد عرفنا سلفاً المعامل التفاضلى الأول بأنه عبارة عن :

$$\text{نهـــا}_{\Delta س \leftarrow 0} \frac{[\phi(س + \Delta س) - \phi(س)]}{\Delta س}$$

نفترض أن لدينا ف وهى دالة للمتغيرين س ، ص أى أن ف = ϕ (س ، ص) . فإذا أردنا أن نحسب المعامل التفاضلى لهذه الدالة فإننا يجب أن نختار أولا المتغير الذى سنلحقه زيادة مع تثبيت المتغير الآخر وحساب المعامل التفاضلى للدالة بالنسبة إلى المتغير الذى سمح له بالتغير وحيث أنه من المستحيل إيجاد المعامل التفاضلى للدالة بالنسبة إلى المتغيرين فى نفس الوقت ، فإن عملية تثبيت متغير ثم إيجاد المعامل التفاضلى للدالة بالنسبة إلى المتغير الآخر تعرف بالتفاضل الجزئى . هذا ويستعمل الرمز ∂ للإشارة إلى المعامل التفاضلى الجزئى .

ولذلك نستطيع القول الآن أن التفاضل الجزئى للدالة Φ (س ، ص) للمتغيرين المستقلين هما كالآتى :

$$\frac{\partial \Phi (س ، ص)}{\partial س}$$

$$= \text{نهـــا}_{\Delta س \leftarrow 0} \frac{\Phi (س + \Delta س ، ص) - \Phi (س ، ص)}{\Delta س}$$

$$\frac{\partial \Phi (س ، ص)}{\partial ص}$$

$$= \text{نهـــا}_{\Delta ص \leftarrow 0} \frac{\Phi (س ، ص + \Delta ص) - \Phi (س ، ص)}{\Delta ص}$$

هذا ويلاحظ أنه إذا كان لدينا دالة تحتوى على ن من المتغيرات المستقلة ، فإنه يمكن إيجاد التفاضل الجزئى بالنسبة إلى أى واحد من هذه المتغيرات .

ولإيجاد التفاضل الجزئى للدالة التى تحتوى على أكثر من متغير واحد . ليس هناك معادلات جديدة لاستخدامها فى الحالة بل يمكن استعمال المعادلات السابق شرحها ، مع ملاحظة أن هناك متغير واحد فقط هو الذى نسمح له بالزيادة وأن المتغيرات الأخرى يجب تثبيتها .

فمثلا إذا كان لدينا الدالة الآتية التى تحتوى على متغيرين مستقلين :

$$\phi(س ، ص) = س^{٣} - ٣ س^{٢} ص - ص^{٥} + ١٠$$

فإذا أردنا إيجاد المعامل التفاضلى الأول بالنسبة إلى س مع تثبيت ص فإنه يساوى :

$$\frac{\partial (س ، ص)}{\partial ص} = ٣ س^{٢} - ٦ س ص$$

وبالمثل إذا أردنا إيجاد المعامل التفاضلى الأول بالنسبة إلى ص مع تثبيت س ، فإنه يساوى :

$$\frac{\partial (س ، ص)}{\partial ص} = - ٣ س^{٢} - ٥ ص^{٤}$$

وهكذا تتبع نفس الإجراءات عند إيجاد المعامل التفاضلى الجزئى للدالة التى تحتوى على أى عدد من المتغيرات . فمثلا إذا كان لدينا الدالة .

$$\phi(س ، ص ، ع) = ٢ س^{٣} + ص^{٣} + س ص ع$$

$$\frac{\partial (س ، ص ، ع)}{\partial س} = ٦ س^{٢} + ص ع$$

$$\frac{\partial\,(س\ ،\ ص\ ،\ ع)}{\partial\ ص} = ٢\ ص + س\ ع$$

$$\frac{\partial\,(س\ ،\ ص\ ،\ ع)}{\partial\ ع} = س\ ص$$

مثال :

أوجد المعامل التفاضلى الجزئى للدالة الآتية إلى س

$$ف = (٥\ س^{٣} + ص + ٤\ ع)^{٢}$$

الحل :

$$\frac{\partial\ ف}{\partial\ س} = ٣\,(٥\ س^{٣} + ص + ٤\ ع)^{٢} \times ١٥\ س^{٢}$$

وهذا يمكن إيجاد المعاملات التفاضلية العليا للدالة ، أى يمكن إيجاد المعامل التفاضلى الثانى والثالث ... الخ باتباع نفس القواعد السابق شرحها عند الكلام عن المعامل التفاضلى الثانى للدالة التى تحتوى على متغير واحد . فمثلا إذا كان لدينا الدالة السابقة وهى :

$$\phi\,(س\ ،\ ص) = س^{٣} - ٣\ س^{٢}\ ص - ص^{٥} + ١٠$$

فإن المعامل التفاضلى الجزئى الأول بالنسبة إلى س :

$$\frac{\partial\,(س\ ،\ ص)}{\partial\ ص} = ٣\ س^{٢} - ٦\ س\ ص$$

والمعامل التفاضلى الجزئى الأول بالنسبة إلى ص :

$$\frac{\partial (س\ ص)}{\partial ص} = -3س^2 - 5ص^4$$

والمعامل التفاضلى الجزئى الثانى إلى س :

$$\frac{\partial^2 (س\ ص)}{\partial س^2} = -6س - 6ص$$

والمعامل التفاضلى الثانى بالنسبة إلى ص :

$$\frac{\partial^2 (س\ ص)}{\partial ص^2} = -20ص^3$$