الباب السابع

التكامل

التكامل غير المحدد :

التكامل هو عملية عكسية لعملية التفاضل إذ أنها تحتوى على إيجاد الدالة الأصلية من دالتها المشتقة . فلو أخذنا الدالة الآتية :

ص = د (س)

فإن تفاضل هذه الدالة بالنسبة إلى س هو :

ى ص / ى س = دَ (س)

وقد سبق أن عاملنا ى ص / ى س كنهاية النسبة △ ص إلى △ س كلما اقتربت △ س من الصفر . ومع ذلك يمكن أيضاً معاملة ى ص / ى س كنسبة عادية . وفى هذه الحالة فإنه يمكن ضرب طرفى التعبير السابق بواسطة ى س وينتج أن:

ى ص = دَ (س) ى س

وتعرف ى ص على أنها تفاضل الدالة ص = د (س) . وحيث أن ص = د (س) فإن التعبير

$$\text{ء ص} = \text{د}'(\text{س})\ \text{ء س}$$

يمكن كتابته كالآتى :

$$\text{ء}\ [\,\text{د}(\text{س})\,] = \text{د}'(\text{س})\ \text{ء س}$$

ونعرف الآن علامة التكامل $\int$ لتعنى أنه عند ظهورها فيجب إيجاد الدالة التى يظهر تفاضلها بجانب علامة التكامل . أى أن :

$$\int \text{ء}\ [\,\text{د}(\text{س})\,] = \text{د}(\text{س})$$

أو

$$\int \text{ء ص} = \text{ص}$$

$$\int \text{د}'(\text{س})\ \text{ء س} = \text{د}(\text{س})$$

بعد أن أنشأنا معنى علامة التكامل فإنه يمكن تكامل التعبير $\text{ء ص} = \text{د}'(\text{س})$ كالآتى :

$$\int \text{ء ص} = \int \text{د}'(\text{س})\ \text{ء س}$$

وبسبب تعريف معنى علامة التكامل فتصبح النتيجة

$$\text{ص} = \text{د}(\text{س})$$

حيث أن :

$$\int \text{ء ص} = \text{ص}$$

$$\int \bar{د}(س)\ ى س = د(س) \quad ،$$

وباختصار فقد (١) فاضلنا الدالة ص = د (س)

(٢) أوجد المعامل التفاضلي للدالة

(٣) كاملنا المعامل التفاضلي للوصول إلى الدالة الأصلية

ويطلق على التكامل الذى سبق مناقشته التكامل غير المحدود . خذ مثلا الدالة :

$$د(س) = س^{٤}$$

وبمفاضلة هذه الدالة بالنسبة إلى س نحصل على :

$$\frac{ى}{ى س}\left[\ د(س)\ \right] = ٤ س^{٣}$$

وبضرب الطرفين بواسطة ى س فإن المتفاضل يمكن إيجاده :

$$ى\left[\ د(س)\ \right] = ٤ س^{٣}\ ى س$$

وبتكامل الطرفين فى التعبير السابق نحصل على :

$$\int ى\ \left[\ د\ (س)\ \right] = \int ٤ س^{٣}\ ى س$$

وبالنسبة إلى الطرف الأيمن فإن التكامل لتفاضل الدالة د(س) يساوى الدالة نفسها بسبب تعريفنا السابق لعلامة التكامل . أى أن :

$$\int ى\left[\ د(س)\ \right] = د(س)$$

وبالنسبة إلى الطرف الأيسر فإن التكامل يساوى س ، أى أن :

$$\int ٤\, س^{٣}\, ء س = س^{٤}$$

ومن ثم فإن نتيجة التكامل هو التعبير الأصلى

$$د(س) = س^{٤}$$

خذ مثلا آخر الدالة الآتية :

$$د(س) = ١٠ س$$

وبالتفاضل نجد أن :

$$\frac{ء}{ء س}\left[د(س)\right] = ١٠$$

ويكون المتفاضل هو :

$$ء\left[د(س)\right] = ١٠\, ء س$$

ويوضع التكامل بالآتى :

$$\int ء\left[(س)\right] = \int ١٠\, ء س$$

وبإجراء عملية التكامل يكون لدينا

$$د(س) = ١٠ س$$

ويلاحظ أنه فى المثالين السابقين نبدأ عادة بالدالة ثم نفاضلها وإيجاد التفاضل ثم نكاملها للوصول إلى الدالة الأصلية . ومن الطبيعى أن التكامل

بهذه الصورة سهل وبسيط للغاية . إذ عادة عندما يطلب إجراء عملية التكامل فإنه لا يكون لدينا إلا المعامل التفاضلى .

خذ مثلا مشكلة إيجاد الدالة التى معاملها التفاضلى هو :

$$٣\,\text{س}^{٢} + \text{س} - ٤$$

أى أن :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٣\,\text{س}^{٢} + \text{س} - ٤$$

والمطلوب إيجاد ص .

الخطوة الأولى هى إيجاد التفاضل عن طريق ضرب الطرفين فى التعبير بواسطة ء س لتعطى :

$$\text{ء ص} = (٣\,\text{س}^{٢} + \text{س} - ٤)\,\text{ء س}$$

ويمكن تكامل الطرفين كالآتى :

$$\int \text{ء ص} = \int (٣\,\text{س}^{٢} + \text{س} - ٤)\,\text{ء س}$$

أو

$$\text{ص} = \int (٣\,\text{س}^{٢} + \text{س} - ٤)\,\text{ء س}$$

ومن معلوماتنا فى التفاضل فإنه يمكن تكامل الطرف الأيسر كالآتى :

$$\text{ص} = \text{س}^{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٤\,\text{س}$$

ولإيضاح أن التكامل كان صحيحاً فإنه يمكن حساب المعامل التفاضلى لهذه الدالة لمعرفة ما إذا كنا سنحصل على المعامل التفاضلى الأصلى .

وبحساب التفاضل نجد أن :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ء}{ءس}\left(س^{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} \right)$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ٣س^{٢} + س - ٤$$

ومن ثم يثبت أن التكامل كان صحيحاً .

وبذلك نكون قد شرحنا معنى التكامل وكيفية إجراء عملية التكامل إلا أننا لم نتعرض للآن للحقيقة أن تفاضل الثابت يساوى صفرا . إذ أنه إذا كان تفاضل دالة تحتوى على كمية ثابتة فإنها ستساوى صفرا فى التعبير الخاص بالمعامل التفاضلى بصرف النظر عن قيمة الكمية الثابتة . ومن ثم عند إيجاد تفاضل دالة وتكاملها فإنه ليس من الضرورى أن الدالة الأصلية الناتجة تكون صحيحة حيث أن الثوابت فى الدالة الأصلية سنفقدها فى عملية التفاضل . وطبقاً لذلك فإنه يجب فى إجراء عملية التكامل أن نأخذ فى الاعتبار إمكانية وجود هذه الثوابت بإضافة ما يسمى بثابت التكامل . وسنشير إلى ثابت التكامل بالرمز حـ . ولإيضاح هذه الإجراءات نأخذ المثال السابق وتصحيح عملنا بإضافة ثابت التكامل . وفى المثال السابق كان لدينا :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣ س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٤}$$

أو

$$\text{ء ص} = (\text{٤ س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٤})\ \text{ء س}$$

وبتكامل هذه الدالة وإضافة ثابت التكامل النتيجة السابقة تجد أن :

$$\int \text{ء ص} = \int (\text{٣ س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٤})\ \text{ء س}$$

،

$$\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{٤ س} + \text{حـ}$$

لاحظ أن الثابت غير محدد القيمة وليست هناك طريقة لتحديد قيمته طالما ليس هناك أية شروط أخرى محددة . أما إذا كان فى مشكلة معينه هناك شروط أخرى فى المشكلة تستلزم أن حـ تأخذ قيمة محددة فإنة يكون لدينا تكامل معين عندما نستبدل حـ بهذه القيمة .

ولمراجعة التكامل السابق إجرائه بأخذ تفاضل الدالة :

$$\text{ص} = \text{س}^{\text{٣}} + \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} - \text{٤ س} + \text{حـ}$$

بالتفاضل :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٣ س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٤} + \text{صفر}$$

أو

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{٣ س}^{\text{٢}} + \text{س} - \text{٤}$$

وبذلك نكون قد أسقطنا الثابت حـ عند إجراء التفاضل وتكون النتيجة هو المعامل التفاضلى الذى بدأنا به .

وسنوضح الآن عدداً من خواص التكامل وكذا بعض قواعده .

١ — $\int \text{ا ء}\,[\,\text{د}\,(\text{س})\,] = \text{ا} \int \text{ء}\,[\,\text{د}\,(\text{س})\,]$

حيث ا تمثل كمية ثابتة .

أى أن تكامل دالة مضروبة فى كمية ثابتة يساوى الكمية الثابتة مضروبة فى تكامل الدالة .

٢ — $\int \{\, \text{ء}\,[\,\text{د}\,(\text{س})\,] + \text{ء}\,[\,\phi\,(\text{س})\,] \,\}$

$$= \int \text{ء}\,[\,\text{د}\,(\text{س})\,] + \int \text{ء}\,[\,\phi\,(\text{س})\,]$$

أى أن تكامل مجموع أى عدد من الدوال يساوى مجموع تكاملات هذه الدوال كل على حدة .

٣ — $\int \{\, \text{ء}\,[\,(\text{س})\,] - \text{ء}\,[\,\phi\,(\text{س})\,] \,\}$

$$= \int \text{ء}\,[\,\text{د}\,(\text{س})\,] - \int \text{ء}\,[\,\phi\,(\text{س})\,]$$

أي أن تكامل الفرق هو فرق التكاملات

٤ — $\int \text{ى س} = \text{س} + \text{ح}$

٥ — $\int \text{د(س)}^{\text{ن}}\ \text{ى}\,[\text{د(س)}] = \frac{\text{د(س)}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{ح}$

٦ — $\int \frac{\text{ى}\,[\text{د(س)}]}{\text{د(س)}} = \text{لو د(س)} + \text{ح}$

أي أنه إذا كان لدينا كسر وكان بسطه مساوياً المشتقة الأولى بالنسبة إلى س لمقامه فإن تكامل الكسر بالنسبة إلى س يساوى لو المقام.

٧ — $\int \text{هـ}^{\text{د(س)}}\ \text{ى}\,[\text{د(س)}] = \text{هـ}^{\text{د(س)}}$

٨ — $\int \text{ا}^{\text{د(س)}}\ \text{ى}\,[\text{د(س)}] = \frac{\text{ا}^{\text{د(س)}}}{\text{لو ا}} + \text{ح}$

٩ — $\int (\text{اس} + \text{ب})^{\text{ن}}\ \text{ى س} = \frac{1}{(\text{ن}+1)}(\text{اس} + \text{ب})^{\text{ن}+1}$

إذا كانت $\text{ن} \neq -1$

١٠ — $\int \frac{\text{ى س}}{\text{اس} + \text{ب}} = \frac{1}{\text{ا}}\ \text{لو}\,(\text{اس} + \text{ب})$

١١ — $$\int \text{هـ}^{\text{ا س} + \text{ب}} = \frac{\text{١}}{\text{ا}}\ \text{هـ}^{\text{ا س} + \text{ب}}$$

وإليك أمثلة تطبيقاً لهذه القواعد :

<u>تطبيق القاعدة الأولى :</u>

$$\int \text{٥ ى س} = \text{٥} \int \text{ى س}$$

،

$$\int \text{١٠ س}^{\text{٩}}\ \text{ى س} = \text{١٠} \int \text{س}^{\text{٩}}\ \text{ى س}$$

$$= \text{١٠} \times \frac{\text{س}^{\text{١٠}}}{\text{١٠}} + \text{حـ}$$

$$= \text{س}^{\text{١٠}} + \text{حـ}$$

<u>تطبيق القاعدة الثانية :</u>

$$\int (\text{٥ س}^{\text{٢}} + \text{٢ لو س})\ \text{ى س} = \text{٥} \int \text{س}^{\text{٢}}\ \text{ى س} + \text{٢} \int \text{لو س ى س}$$

،

$$\int (\text{س}^{\text{٣}} + \text{س} + \text{٥})\ \text{ى س} = \text{٥} \int \text{س}^{\text{٣}}\ \text{ى س} + \text{٥} \int \text{لو س ى س}$$

$$= \tfrac{\text{١}}{\text{٤}}\ \text{س}^{\text{٤}} + \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\ \text{س}^{\text{٢}} + \text{٥ س} + \text{حـ}$$

،

$$\int (\text{٢ س} - \text{١})^{\text{٣}}\ \text{ى س} = \int (\text{٨ س}^{\text{٣}} - \text{١٢ س}^{\text{٢}} + \text{٦ س} - \text{١})\ \text{ى س}$$

$$= \text{٨} \int \text{س}^{\text{٣}}\ \text{ى س} - \text{١٢} \int \text{س}^{\text{٢}}\ \text{ى س} + \text{٦} \int \text{س ى س} - \int \text{ى س}$$

$$= 8 \times \frac{\text{س}^{4}}{4} - 12 \times \frac{\text{س}^{3}}{3} + 6 \times \frac{\text{س}^{2}}{2} - \text{س} + \text{حـ}$$

$$= 2\,\text{س}^{4} - 4\,\text{س}^{3} + 3\,\text{س}^{2} - \text{س} + \text{حـ}$$

تطبيق القاعدة الثالثة :

$$\int \left[\text{هـ}^{\text{س}} - \text{س}^{2} - \frac{1}{\sqrt{\text{س}}} \right] \text{ءس}$$

$$= \int \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{ءس} - \int \text{س}^{2}\, \text{ءس} - \int \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{س}}}$$

$$= \text{هـ}^{\text{س}} - \frac{\text{س}^{3}}{3} - 2\sqrt{\text{س}} + \text{حـ}$$

تطبيق القاعدة الرابعة :

$$\int \text{ءس} = \int \text{س}^{0}\, \text{ءس} = \text{س} + \text{حـ}$$

تطبيق القاعدة الخامسة :

$$\int \text{س}^{5}\, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{6}}{6} + \text{حـ}$$

$$،\quad \int \text{س}^{7}\, \text{ءس} = \frac{1}{8}\,\text{س}^{8} + \text{حـ}$$

$$،\quad \int \frac{1}{\text{س}^{5}}\, \text{ءس} = \int \text{س}^{-5}\, \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^{-٥+١}}{-٥+١} + \text{حـ}$$

$$= \frac{\text{س}^{-٤}}{-٤} + \text{حـ}$$

$$= \text{حـ} - \frac{١}{٤\text{س}^{٤}}$$

٦) $$\int \sqrt{\text{س}}\ \text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{١}{٢}}\ \text{ءس}$$

$$= \frac{\text{س}^{\frac{١}{٢}+١}}{\frac{١}{٢}+١} + \text{حـ}$$

$$= \frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{حـ}$$

تطبيق القاعدة السادسة :

$$\int \frac{٥\text{س}^{٤}\ \text{ءس}}{\text{س}^{٥}} = \text{لو س}^{٥} + \text{حـ}$$

٦) $$\int \frac{٤}{\text{س}}\ \text{ءس} = ٤\ \text{لو س} + \text{حـ}$$

تطبيق القاعدة السابعة :

$$\int \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{س}} + \text{حـ}$$

تطبيق القاعدة الثامنة :

$$\int ١٠^{\text{س}}\,\text{ءس} = \frac{١٠^{\text{س}}}{\text{لو } ١٠} + \text{ح}$$

،

$$\int \text{أ}^{(\text{س}^{٣} - \text{س})}\,(٣\text{س}^{٢} - ١)\,\text{ءس}$$

$$= \frac{\text{أ}^{(\text{س}^{٣} - \text{س})}}{\text{لو أ}} + \text{ح}$$

لاحظ فى هذا المثال أن د (س) = $\text{س}^{٣}$ — س ، ء [د (س)]
= ($٣\text{س}^{٢}$ — ١) ءس

تطبيق القاعدة التاسعة :

$$\int (٤\text{س} - ٧)^{٥}\,\text{ءس} = \frac{١}{٦ \times ٤}(٤\text{س} - ٧)^{٦} + \text{ح}$$

$$= \frac{(٤\text{س} - ٧)^{٦}}{٢٤} + \text{ح}$$

،

$$\int (٨ - ٥\text{س})^{٣}\,\text{ءس} = \frac{١}{٤ \times -٥}(٨ - ٥\text{س})^{٤} + \text{ح}$$

$$= \frac{(٨ - ٥\text{س})^{٤}}{-٢٠} + \text{ح}$$

، $$\int \frac{\text{ى س}}{(\text{٢ س} - \text{٥})^{\text{٢}}} = \int (\text{٣ س} - \text{٥})^{-\text{٢}}\,\text{ى س}$$

$$= \frac{\text{١}}{-\text{١} \times \text{٣}} (\text{٣ س} - \text{٥})^{-\text{١}} + \text{ح}$$

$$= \frac{\text{١}}{\text{٣}(\text{٣ س} - \text{٥})} + \text{ح}$$

تطبيق القاعدة العاشرة :

$$\int \frac{\text{ى س}}{\text{٥ س} - \text{١}} = \tfrac{\text{١}}{\text{٥}}\,\text{لو}\,(\text{٥ س} - \text{١}) + \text{ح}$$

،

$$\int \frac{\text{ى س}}{\text{٥} - \text{س}} = \frac{\text{١}}{-\text{١}}\,\text{لو}\,(\text{٥} - \text{س}) + \text{ح}$$

$$= -\,\text{لو}\,(\text{٥} - \text{س}) + \text{ح}$$

تطبيق القاعدة الحادية عشر :

$$\int \text{هـ}^{\text{٢ س} - \text{٥}}\,\text{ى س} = \tfrac{\text{١}}{\text{٢}}\,\text{هـ}^{\text{٢ س} - \text{٥}}$$

،

$$\int \text{٣ هـ}^{\text{٣ س}}\,\text{ى س} = \text{٣} \times \tfrac{\text{١}}{\text{٣}}\,\text{هـ}^{\text{٣ س}} + \text{ح}$$

$$= \text{هـ}^{\text{٣ س}} + \text{ح}$$

$$\int \text{هـ}^{٧-\text{س}}\,\text{ء س} = \frac{١}{-١}\,\text{هـ}^{٧-\text{س}} + \text{حـ}$$

$$= -\,\text{هـ}^{٧-\text{س}} + \text{حـ}$$

تفسير وتطبيق التكاملات غير المحدودة :

أن التفسير الهندسى للتكامل غير المحدود ينبع مباشرة من التفسير الذى سبق أن أوضحناه لتفاضل الدالة . لقد سبق أن أوضحنا أنه عند إيجاد المعامل التفاضلى لدالة تحتوى على متغير مستقل واحد فإن المعامل التفاضلى يفسر هندسياً على أنه تعبير يوضح ميل الدالة الأصلية لأى قيمة للمتغير المستقل . وبالعكس عند تكامل دالة ، فإننا نجد دالة التى ميلها عند أى نقطة قد أعطى بمعرفة الدالة التى كاملناها .

ولنأخذ مثالا لإيجاد تكامل الدالة س + ٣ . فإذا أخذنا ص لتمثل الدالة التى معاملها التفاضلى هو س + ٣ فإن :

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = \text{س} + ٣$$

$$\text{ء ص} = (\text{س} + ٣)\,\text{ء س}$$

وبتكامل الطرفين يكون لدينا

$$\int \text{ء ص} = \int (\text{س} + ٣)\,\text{ء س}$$

أى

$$\text{ص} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٣\,\text{س} + \text{حـ}$$

ولذلك فإن ص = $\left(\frac{س^{٢}}{٢}\right) + ٣س + ح$ لها معاملها التفاضلي الذي بدأنا به . ولكن هذه الدالة لا تحدد بطريقة وحيدة أي منحنى ولكنها تعرف مجموعة من المنحنيات التي تعتمد على قيمة ح . ومن ثم يجب معرفة معلومات إضافية قبل تحديد قيمة ح .

لتوضيح هذه الفكرة فلنأخذ المثال التالي . افترض أننا أجرينا تحليلا لإمكانيات الإنتاج والأفراد . وقد قدر أنه بالاستثمارات الحالية في المعدات وعدد العمال الحالي فإن الإنتاج الكلي لليوم الواحد هو ٥٠٠٠ وحدة . وقد قدر أيضاً أنه بدون أي زيادة في الاستثمار في المعدات فإن الإنتاج الحدي للعمال الإضافيين يعطى بمعرفة الدالة .

$$\beta = ١٠٠ - ٥\,س^{\frac{١}{٢}}$$

حيث :

β = الإنتاج الحدي للعامل الإضافي الذي ترتيبه س .

س = عدد العمال الإضافيين .

افترض الآن أننا نرغب في معرفة الإنتاج الكلي الذي ينتج في حالة استخدام ١٠٠ عامل إضافي إلى القوة العاملة. فإذا رمزنا إلى الإنتاج الكلي بالرمز ϕ فإنه من العبارة السابقة فإن :

$$\frac{د\phi}{دس} = ١٠٠ - ٥\,س^{\frac{١}{٢}}$$

$$\therefore\ د\phi = (١٠٠ - ٥\,س^{\frac{١}{٢}})\ دس .$$

وبالتكامل لإيجاد ϕ يكون لدينا

$$\int \text{د}\,\phi = \int (\text{١٠٠} - \text{٥ س}^{\frac{١}{٢}})\ \text{د س}$$

$$\phi = \text{١٠٠ س} - \text{٥}\left(\frac{٢}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}}\right) + \text{حـ}$$

$$\phi = \text{١٠٠ س} - \frac{١٠}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{حـ}$$

وفى هذه المشكلة يمكن تحديد قيمة حـ من الحقائق السابقة . وحيث أن الإنتاج الكلى يساوى ٥٠٠٠ وحدة عندما يكون عدد العمال الإضافيين يساوى صفراً فإنه يمكن إيجاد قيمة حـ كالآتى :

$$\phi = \text{١٠٠ (صفر)} - \frac{١٠}{٣}\text{(صفر)}^{\frac{٣}{٢}} + \text{حـ} = \text{٥٠٠٠}$$

أو

$$\text{حـ} = \text{٥٠٠٠}$$

ومن ثم فإن الدالة التى تعرض العلاقة بين الإنتاج الكلى وعدد العمال الإضافيين هى:

$$\phi = \text{١٠٠ س} - \frac{١٠}{٣}\text{س}^{\frac{٣}{٢}} + \text{٥٠٠٠}$$

ولإيجاد الإنتاج الكلى فى حالة استخدام ١٠٠ عامل إضافى فإننا نضع ١٠٠ بدلا من س فى هذه المعادلة كالآتى :

$$\phi = \text{١٠٠ (١٠٠)} - \frac{١٠}{٣}(\text{١٠٠})^{\frac{٣}{٢}} + \text{٥٠٠٠}$$

$$\phi = \text{١٠٠٠٠} - \frac{١٠}{٣}(\text{١٠٠٠}) + \text{٥٠٠٠}$$

$$= \text{١١٦٦٧}$$

ولنأخذ مثالا آخر لايضاح التعويض الجبرى عند إيجاد التكامل لنفرض أننا نرغب فى إيجاد :

$$\int \frac{\text{س} + \text{٣}}{\text{س} + \text{١}}\ \text{ءس}$$

فإنه يمكن تبسيط هذا التكامل باستخدام التعويض

$$\text{ع} = \text{س} + \text{١}$$

،

$$\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \text{١}$$

أو

$$\text{ءع} = \text{ءس}$$

وبالتعويض فى التكامل الأصلى

$$\int \frac{\text{س} + \text{٣}}{\text{س} + \text{١}}\ \text{ءس} = \int \frac{\text{ع} + \text{٢}}{\text{ع}}\ \text{ءع}$$

$$= \int \text{ءع} + \text{٢} \int \frac{\text{١}}{\text{ع}}\ \text{ءع}$$

$$= \text{ع} + \text{٢ لوع} + \text{حـ}$$

وبوضع (س + ١) بدلا من ع يكون لدينا

$$\int \frac{\text{س} + \text{٣}}{\text{س} + \text{١}}\ \text{ءس} = \text{س} + \text{٢ لو } (\text{س} + \text{١}) + \text{حـ}$$

وبستخدم التكامل الجزئى لحل بعض المشاكل وقد سبق أن أوضحنا المعادلة الخاصة بالمعامل التفاضلى لحاصل ضرب دالتين وهى :

$$\frac{ى}{ى\,س}\left[د(س)\,\phi(س)\right] = د(س)\,\frac{ى}{ى\,س}\left[\phi(س)\right]$$

$$+\ \phi(س)\,\frac{ى}{ى\,س}\left[د(س)\right]$$

وإذا ضربنا هذا التعبير بواسطة ى س ينتج أن :

$$ى\left[د(س)\,\phi(س)\right] = د(س)\,ى\left[\phi(س)\right] + \phi(س)\,ى\left[د(س)\right]$$

وبتكامل الطرفين :

$$\int ى\left[د(س)\,\phi(س)\right] = \int د(س)\,ى\left[\phi(س)\right] + \int \phi(س)\,ى\left[د(س)\right]$$

أو

$$د(س)\,\phi(س) = \int د(س)\,ى\left[\phi(س)\right] + \int \phi(س)\,ى\left[د(س)\right]$$

وبإعادة ترتيب هذه المعادلة يكون لدينا

$$\int د(س)\,ى\left[\phi(س)\right] = د(س)\,\phi(س) - \int \phi(س)\,ى\left[د(س)\right]$$

وتمثل هذه المعادلة الأخيرة التكامل الجزئى .

وكمثال لاستخدام التكامل الجزئى افترض التكامل الآتى :

$$\int س\ او\ س\ ى\ س$$

افترض أن :

$$\text{د}(\text{س}) = \text{لو س}$$

،

$$\text{ى}\left[\phi(\text{س})\right] = \text{س ى س}$$

ومن ثم فإن :

$$\text{ى}\left[\text{د}(\text{س})\right] = \frac{١}{\text{س}}\ \text{ى س}$$

،

$$\phi(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$$

وبالتعويض فى معامل التكامل الجزئى يكون لدينا

$$\int \text{س لو س ى س} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\ \text{لو س} - \int \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \cdot \frac{١}{\text{س}}\ \text{ى س}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\ \text{لو س} - \int \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\ \text{ى س}$$

$$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\ \text{لو س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{حـ}$$

التكامل المحدود :

ولإيضاح معنى التكامل المحدود فلنأخذ المثال التالى :

افترض أن الإيراد الحدى على الاستثمار فى إمكانيات الإنتاج للمستويات المختلفة للاستثمار يمكن تعريفه بالمعادلة الآتية .

$$\text{ر} = ٣\ \text{هـ}^{-\text{س} / ٢٠٠٠}$$

حيث :

س = مستوى الاستثمار

ر = الإيراد الحدى للجنيه لمستوى الاستثمار س

وتفسير هذه العلاقة أنه لكل مستوى من مستويات المصاريف الكلية الموضحة بقيمة س فإن كل جنيه إضافى صرف على إمكانيات الإنتاج سينتج عنه إيراد إضافى يساوى ر .

وحيث أن الدالة هى دالة إيراد حدى فهى عبارة عن تفاضل دالة الإيراد الكلى . لاحظ أنه بالرغم من أن شكل دالة الإيراد الكلى حدد بمعرفة دالة الإيراد الحدى فإن الموقع (رأسيا) لدالة الإيراد الكلى لم يحدد .

افترض أننا نرغب فى معرفة التغير الذى سيطرأ على الإيراد الكلى بزيادة الاستثمار من ١٥٠٠ جنيها إلى ٣٠٠٠ جنيها ومن الطرق التى يمكن استخدامها هو إيجاد تكامل دالة الإيراد الحدى لمعرفة دالة الإيراد الكلى.

ومن المعلومات المعطاة نعرف أن :

$$\frac{\text{ءر}}{\text{ءس}} = \text{٣ هـ}^{-\text{س}/\text{٢٠٠٠}}$$

حيث :

ر = الإيراد الكلى

س = مستوى الاستثمار

ويمكن إعادة كتابة هذا التعبير كالآتى :

$$\text{ءر} = \text{٣ هـ}^{-\text{س}/\text{٢٠٠٠}}\ \text{ءس}$$

وبتكامل الطرفين يكون لدينا

$$\int \text{ءر} = \int \text{٣ هـ}^{-\text{س}/\text{٢٠٠٠}}\ \text{ءس}$$

أو

$$\text{ر} = -\text{٦٠٠٠ هـ}^{-\text{س}/\text{٢٠٠٠}} + \text{جـ}$$

ولإيجاد الزيادة فى الإيراد الكلى التى تنتج من زيادة س من ١٥٠٠ جنيها إلى ٣٠٠٠ جنيها فإننا نحتاج فقط لإيجاد قيمة دالة الإيراد الكلى عند س = ١٥٠٠ جنيها ثم طرحها من قيمة دالة الإيراد الكلى عند س = ٣٠٠٠ جنيها وهذه العملية يمكن إيضاحها بالرموز كالآتى :

$$\Big[\big(-\text{٦٠٠٠}\ \text{هـ}^{-\text{س}/\text{٢٠٠٠}} + \text{حـ} \big) \Big]_{\text{١٥٠٠}}^{\text{٣٠٠٠}}$$

ويعنى القوس الموضح بأعلاه ٣٠٠٠ وبأسفله ١٥٠٠ أن التعبير فى داخل القوس نوجد قيمته لـ س = ٣٠٠٠ ، س = ١٥٠٠ وأن قيمة التعبير عند س = ١٥٠٠ يطرح من قيمة التعبير عند س = ٣٠٠٠ . وبإجراء هذه العملية يكون لدينا :

$$\Big[\big(-\text{٦٠٠٠}\ \text{هـ}^{-\text{س}/\text{٢٠٠٠}} + \text{حـ} \big) \Big]_{\text{١٥٠٠}}^{\text{٣٠٠٠}}$$

$$= \big(-\text{٦٠٠٠}\ \text{هـ}^{-\text{٣٠٠٠}/\text{٢٠٠٠}} + \text{حـ} \big)$$

$$- \big(-\text{٦٠٠٠}\ \text{هـ}^{-\text{١٥٠٠}/\text{٢٠٠٠}} + \text{حـ} \big)$$

$$= -\text{٦٠٠٠}\ \text{هـ}^{-\text{٣٠٠٠}/\text{٢٠٠٠}} + \text{٦٠٠٠}\ \text{هـ}^{-\text{١٥٠٠}/\text{٢٠٠٠}}$$

$$= \text{٦٠٠٠} \big(\text{هـ}^{-\frac{\text{٣}}{\text{٤}}} - \text{هـ}^{-\frac{\text{٣}}{\text{٢}}} \big)$$

$$= -\text{٦٠٠٠} \big(\text{٢٢٣ر} - \text{٤٧٢ر} \big)$$

$$= -\text{١٤٩٤}\ \text{جنيها}$$

ويمثل المبلغ ١٤٩٤ جنيها الزيادة فى الإيراد الكلى التى تنتج من زيادة س من ١٥٠٠ جنيها إلى ٣٠٠٠ جنيها . ويلاحظ أن هذا المبلغ مستقلا

عن قيمة حـ حيث أن قيمتى حـ فى التعبير السابق ألغى بعضهما الآخر عند إيجاد الفرق بين التعبيرين . وفى الرموز السابق استخدامها أوضحنا أن الفرق بين التعبيرين $\left(-\text{٦٠٠٠}\,\text{هـ}^{-\text{س}/\text{٢٠٠٠}}+\text{حـ}\right)$ عند س = ٣٠٠٠ وقيمة التعبيرين $\left(-\text{٦٠٠٠}\,\text{هـ}^{-\text{س}/\text{٢٠٠٠}}+\text{حـ}\right)$ عند س = ١٥٠٠ وجب إيجاده . ولكن نستطيع استخدام الرمز التالى لإيضاح نفس الاجراءات :

$$\int_{\text{١٥٠٠}}^{\text{٣٠٠٠}} \text{٣}\,\text{هـ}^{-\text{س}/\text{٢٠٠٠}}\,\text{ءس}$$

ويعرف هذا الرمز بالتكامل المحدود وتعرف الأرقام ٣٠٠٠ ، ١٥٠٠ فى هذه الحالة بأنها الحد الأعلى والحد الأدنى . ويعنى هذا الرمز أن الدالة بجانب علامة التكامل يجب تكاملها كما يجب تقييم الحد الأعلى والحد الأدنى لمتغير التكامل وإيجاد الفرق . وبصفة عامة إذا كان :

$$\frac{\text{ء}}{\text{ءس}}\left[\phi(\text{س})+\text{حـ}\right]=\text{د}(\text{س})$$

فمن ثم

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}\text{د}(\text{س})\,\text{ءس}=\left[\phi(\text{س})+\text{حـ}\right]_{\text{ا}}^{\text{ب}}$$

$$= [\phi(ب) + ح] - [\phi(أ) + ح]$$
$$= \phi(ب) - \phi(أ)$$

كما يمكن إعطاء معنى هندسى آخر لتعريف التكامل المحدود بأن ما فعلناه من إيجاد قيمة التكامل المحدود هو إيجاد المساحة تحت المنحنى .

د(س) = ٣ هـ $^{-س/٢٠٠٠}$ بين حدود س = ١٥٠٠ ، س = ٣٠٠٠ نذكر أن المشكلة هى إيجاد التغير فى الإيراد الكلى عندما يزيد الاستثمار من ١٥٠٠ إلى ٣٠٠٠ وعند تعريف الإيراد الحدى على الاستثمار لكل مستوى من مستويات الاستثمار بالدالة ٣ هـ $^{-س/٢٠٠٠}$. ويؤدى ذلك إلى النتيجة أنه بالإضافة إلى الطريقة السابقة فيمكن حل المشكلة بإضافة الإيراد من استخدام ١٥٠١ جنيه إلى الايراد الناتج من استخدام ١٥٠٢ جنيه وهكذا إلى ٣٠٠٠ جنيه . ونحصل على الايراد لكل هذه المستويات بواسطة الدالة ٣ هـ $^{-س/٢٠٠٠}$ وهذا يساو لإضافة المسافة للمستطيلات من الرسم البيانى . ويمثل كل مستطيل اتساع يساوى واحد وارتفاع يساوى الايراد الحدى لمستوى الاستثمار الموضح .

وإذا رمزنا إلى الايراد الحدى ر عند ١٥٠١ بالرمز « (س$_١$) وعند ١٥٠٢ بالرمز (س$_٢$) .. ، وعند ٣٠٠٠ بالرمز (س$_{١٥٠٠}$) واتساع المستطيلات بالرموز $\triangle$ س$_١$ ، $\triangle$ س$_٢$ ، ... ، $\triangle$ س$_{١٥٠٠}$ فإن المساحة الكلية ا المستطيلات يساوى :

$$ا = د(س_١) \triangle س_١ + د(س_٢) \triangle س_٢ + \ldots + د(س_{١٥٠٠}) \triangle س_{١٥٠٠}$$

أو

$$\text{ا} = \sum_{\text{١}}^{\text{١٥٠٠}} \text{د(س)} \triangle \text{(س)}$$

ومن الواضح أن الزياده △ س كلما كانت صغيرة (ومن الأفضل أن تكون أقل من جنيه) كلما كان التقريب للمساحة تحت المنحنى أقرب للحقيقة . أو أنه يمكن الحصول على تقريب أحسن وأفضل للمساحة عندما تكون الزيادات △س صغيرة بقدر الإمكان. أو بمعنى آخر يمكن الحصول على أحسن تقريب للمساحة عندما تكون .

$$\text{ا} = \lim_{\triangle\text{س} \to \text{٠}} \sum_{\text{١}}^{\text{ن}} \text{د(س)} \triangle \text{س}$$

لاحظ فى هذا التعبير أننا بدأنا من ١ حتى ن بدلا من ١ إلى ١٥٠٠ حيث يكون لدينا أكثر من ١٥٠٠ مستطيل . وبصفة عامة فإن المساحة ا تحت المنحنى د (س) بين الحدين س = ع ، س = ب تكون بالصورة الآتية :

$$\text{ا} = \lim_{\triangle\text{س} \to \text{٠}} \sum_{\text{١}}^{\text{ن}} \text{د(س)} \triangle \text{س}$$

$$= \int_{\text{ب}}^{\text{ع}} \text{د(س)}\ \text{ء س}$$

وبالنسبة للمشكلة تحت الدراسة

$$\text{ا} = \int_{١٠٠٠}^{٣٠٠٠} ٣ \, \text{هـ}^{-\text{س}/٢٠٠٠} \, \text{ء هـ}$$

$$= ١٤٩٤$$

مثال آخر :

أوجد المساحة تحت المنحنى

$$\text{ص} = \text{د}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$$

بين س = ١ ، س = ٢

الحل :

التكامل غير المحدود هو

$$\int \text{س}^{٣} \, \text{ء س} = \frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \text{حـ}$$

وللتحقيق

$$\frac{\text{ء}}{\text{ء س}} \left(\frac{\text{س}^{٤}}{٤} + \text{حـ} \right) = \text{س}^{٣}$$

ومن ثم فإن

$$\int_{١}^{٣} \text{س}^{٣} \, \text{ء س} = \left[\frac{\text{س}^{٤}}{٤} \right]_{١}^{٣}$$

$$= \frac{(٣)^{٤}}{٤} - \frac{(١)^{٤}}{٤}$$

$$= \frac{٨١}{٤} - \frac{١}{٤} = ٢٠$$

وهى عبارة عن المساحة تحت المنحنى من س = ١ إلى س = ٣

مثال آخر :

أوجد المساحة تحت المنحنى ص = س = ١ ، س = ٢

الحل :

$$\int_{١}^{٢} س \, د \, س = \left[\frac{س^{٢}}{٢}\right]_{١}^{٢}$$

$$= \frac{س^{٢}}{٢} - \frac{١^{٢}}{٢}$$

$$= \frac{٣}{٢}$$

ومن التكاملات المحدودة غير الحقيقية أو غير المناسبة لأن المساحة تحت المنحنى بين الحدود لايمكن إيجادها باستمرار التكامل الآتى :

$$\int_{صفر}^{٤} \left(\frac{١}{٢ - س}\right)^{٢} د \, س$$

وفى هذا التكاملى د (س) = $\left(\frac{١}{٢ - س}\right)^{٢}$ ويمكن تفسير التكامل على أن المساحة تحت المنحنى د (س) بين الحدود س = صفر ، س = ٤ .
ويلاحظ أنه من المستحيل إيجاد المساحة تحت المنحنى بين هذه الحدود حيث أن قيمة الدالة تقترب من مالا نهاية كلما اقتربت س من ٢ أى س ← ٢ .
ولذلك فإنه بالحدين س = صفر ، س = ٤ فهو تكامل غير حقيقى حيث أن الدالة غير متصلة عند س = ٢ . وبتغيير الحدود حتى لا تحتوى على س = ٢ فيمكن تغيير التكامل غير الحقيقى إلى تكامل حقيقى . إذ يمكن إيجاد المساحة تحت أى جزء من المنحنى مادامت س = ٢ لا تقع فى حدود النهايات .

وهكذا نجد أن عدم الاستمرار أو الاتصال فى الدوال المراد تكاملها قد تؤدى إلى تكاملات غير حقيقية . وقد تنتج التكاملات غير الحقيقية نتيجة وجود حدود لا نهائية بدلا من حدود نهائية .

افترض التكامل :

$$\int_{١}^{\infty} \frac{٣}{س} \, ى س$$

وفى هذا التكامل نجد أن د (س) = $\frac{٣}{س}$ ويمكن تفسير هذا التكامل ليعنى أننا نريد إيجاد المساحة تحت المنحنى د (س) = $\frac{٣}{س}$ بين س = ١ ، س = ∞ ولكن تزداد المساحة بدون حدود كلما اقتربت س من مالا نهاية.

ويمكن إيضاح ذلك بتقييم التكامل المحدود كالآتى :

$$\int_{1}^{\infty} \frac{٣}{س} \, ى س = ٣ \, لو س \Big]_{1}^{\infty}$$

$$= ٣ \, (لو \infty - لو ١)$$

ولذلك نستنتج أن $\int_{1}^{\infty} \left(\frac{٣}{س}\right) ى س$ هو تكامل غير حقيقى حيث أنه لم نتمكن من إيجاد المساحة تحت المنحنى فى الحدود المطلوبة . ويشبه التكامل التالى السابق ولكنه تكامل حقيقى .

$$\int_{1}^{\infty} \frac{٣}{س^{٢}} \, ى س = - \frac{٣}{س} \Big]_{1}^{\infty}$$

$$= - \frac{٣}{\infty} + \frac{٣}{١}$$

$$= ٣$$

وقد وجدنا فى هذه المرحلة المساحة تحت المنحنى د (س) $= \frac{٣}{س^{٢}}$

بين س = ١ ، س = ∞ لتساوى ٣ .