الباب الثامن

المحددات

من المعروف أن هناك طرقاً مختلفة لحل المعادلات الخطية الآتية ومنها طريقة الحذف ، إلا أن هناك طريقة أخرى لحل المعادلات باستعمال نظرية المحددات وهى موضوع دراستنا فى هذا الباب .

افترض أولا أننا نريد حل معادلة ذات مجهول واحد بطريقة الحذف السابق الإشارة إليها . فإذا كان لدينا المعادلة الآتية :

$$\text{ا}_{١١}\,\text{س}_{١} = \text{ب}_{١} \qquad (١)$$

فإن :

$$\text{س}_{١} = \frac{\text{ب}_{١}}{\text{ا}_{١١}} \qquad (٢)$$

على أن يكون $\text{ا}_{١١}$ لا تساوى صفراً .

أما إذا كان لدينا معادلتين ذات مجهولين :

$$\text{ا}_{١١}\,\text{س}_{١} + \text{ا}_{٢١}\,\text{س}_{٢} = \text{ب}_{١} \qquad (٣)$$

$$\text{ا}_{١٢}\,\text{س}_{١} + \text{ا}_{٢٢}\,\text{س}_{٢} = \text{ب}_{٢} \qquad (٤)$$

فقد سبق أن رأينا أنه يمكن حل هاتين المعادلتين كالآتى :

بضرب المعادلة (٣) فى ($\text{ا}_{٢٢}$) والمعادلة (٤) فى ($\text{ا}_{٢١}$) ينتج أن .

$$\text{ا}_{١١}\,\text{ا}_{٢٢}\,\text{س}_{١} + \text{ا}_{٢١}\,\text{ا}_{٢٢}\,\text{س}_{٢} = \text{ب}_{١}\,\text{ا}_{٢٢}$$

$$\text{ا}_{٢١}\,\text{ا}_{٢٢}\,\text{س}_{١} + \text{ا}_{٢١}\,\text{ا}_{٢٢}\,\text{س}_{٢} = \text{ب}_{١}\,\text{ا}_{٢١}$$

وبالطرح فإن :

$$ا_{11}\, ا_{22}\, س_1 - ا_{21}\, س_1 = ب_1\, ا_{22} - ب_2\, ا_{22}$$

أى :

$$(ا_{11}\, ا_{22} - ا_{21}\, ا_{12})\, س_1 = ب_1\, ا_{22} - ب_2\, ا_{21}$$

$$\therefore\ س = \frac{ب_1\, ا_{22} - ب_2\, ا_{21}}{ا_{11}\, ا_{22} - ا_{21}\, ا_{12}} \qquad (٥)$$

وبالمثل لإيجاد $س_2$: بضرب المعادلة (٣) فى ($ا_{12}$) والمعادلة (٤) فى ($ا_{11}$)، ينتج أن :

$$ا_{11}\, ا_{12}\, س_1 + ا_{21}\, ا_{11}\, س_2 = ب_1\, ا_{12}$$
$$ا_{11}\, ا_{12}\, س_1 + ا_{21}\, ا_{22}\, س_2 = ب_1\, ا_{11}$$

وبالطرح فإن :

$$ا_{11}\, ا_{12}\, س_2 - ا_{21}\, ا_{22}\, س_2 = ب_1\, ا_{12} - ب_2\, ا_{12}$$

أو :

$$ا_{11}\, ا_{22}\, س_2 - ا_{21}\, س_2 = ب_2\, ا_{11} - ب_1\, ا_{21}$$

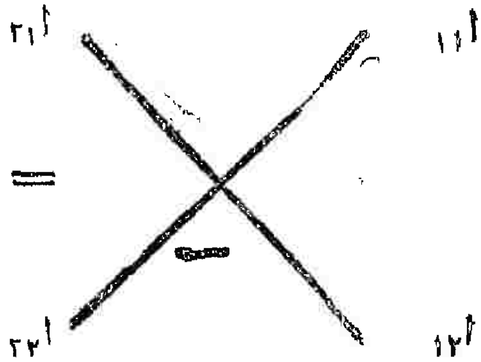
أى :

$$(ا_{11}\, ا_{22} - ا_{21}\, ا_{12})\, س_2 = ب_2\, ا_{11} - ب_1\, ا_{12}$$

$$\therefore\ س_2 = \frac{ب_2\, ا_{22} - ب_1\, ا_{22}}{ا_{11}\, ا_{22} - ا_{21}\, ا_{12}} \qquad (٦)$$

مع ملاحظة أن المقام واحد فى المعادلتين (٥)، (٦) وهو ($ا_{11}\, ا_{22} - ا_{21}\, ا_{22}$) لا يساوى صفراً .

كما نجـد أن المقام فى المعادلتين (٥) ، (٦) نتج من الضرب التصالبى كالآتى :



$$= ا_{١١}\, ا_{٢٢} - ا_{٢١}\, ا_{١٢}$$

(شكل ٤٧)

ويمكن حل المعادلتين السابقتين باستعمال المحددات والرمز :

$$\begin{vmatrix} ا_{١١} & ا_{٢١} \\ ا_{١٢} & ا_{٢٢} \end{vmatrix} \qquad (٧)$$

يسمى محددا . والكميات $ا_{١١}$ ، $ا_{٢١}$ ، $ا_{١٢}$ ، $ا_{٢٢}$ هى مكونات أو عناصر المحدد . ويسمى المحدد المشار إليه بالمحدد من الرتبة الثانية حيث أنه يتكون من صفين (أفقيين) وعمودين (رأسيين) وقيمة أو مفكوك هذا الرمز هى $ا_{١١}\, ا_{٢٢} - ا_{٢١}\, ا_{١٢}$) ، أى أن :

$$\begin{vmatrix} ا_{١١} & ا_{٢١} \\ ا_{١٢} & ا_{٢٢} \end{vmatrix} = ا_{١١}\, ا_{٢٢} - ا_{٢١}\, ا_{١٢} \qquad (٨)$$

ولذلك نقول أن المحدد يمثل عدد ، وهذا العدد يمكن الحصول عليه بفك المحدد كما هو موضح بعاليه حيث يسمى الطرف الأيسر من (٨) بمفكوك المحدود بالطرف الأيمن .

ومن المعروف أن العنصرين أو المكونين $ا_{١١}$ ، $ا_{٢٢}$ يكونان القطر الرئيسى للمحدد . ولذلك يمكن القول أن قيمة المحدد من الرتبة الثانية عبارة عن حاصل ضرب العناصر فى القطر الرئيسى ناقصا حاصل ضرب العناصر فى القطر الآخر .

مثال : $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٥ \end{vmatrix} = ٤ \times ٥ - ٢ \times ٦ = ٨$

مثال : $\begin{vmatrix} ٤ & \text{صفر} \\ ٦ & -٥ \end{vmatrix} = ٤ \times (٥) - \text{صفر} \times ٦ = -٢٠$

حل معادلتين خطيتين فى مجهولين باستعمال المحددات :

من الواضح أنه يمكن كتابة المعادلتين (٥) ، (٦) كالآتى :

$$\text{س}_{١} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ب}_{١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{ب}_{٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix}} \qquad (٩)$$

$$، \text{س}_{٢} = \frac{\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{ب}_{١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{ب}_{٢} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix}} \qquad (١٠)$$

أى معنى ذلك أن حل المعادلتين (٥) ، (٦) يمكن كتابتهما كما هو موضح فى (٩) ، (١٠) . ويلاحظ أن عناصر المحدد فى مقامى المعادلتين (٩) ، (١٠) عبارة عن معاملات $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ فى المعادلتين الأصليتين (٣) ، (٤) . أما عناصر المحدد فى بسط المعادلة (٩) فهى عبارة عن عناصر المقام فيما عدا العمود الأول على اليمين فنضع بدلا منه $\text{ب}_{١}$ ، $\text{ب}_{٢}$ ، وكذلك الحال بالنسبة لعناصر المحدد فى بسط المعادلة (١٠) فهى عبارة عن عناصر المقام فيما عدا العمود الثانى فنضع بدلا منه $\text{ب}_{١}$ ، $\text{ب}_{٢}$.

مثال :

حل المعادلتين الآتيتين باستخدام المحددات :

$$٢\text{س} + ٣\text{ص} = ٧$$

$$٤\text{س} + \text{ص} = ٩$$

الحل

$$\text{س} = \frac{\begin{vmatrix} ٧ & ٣ \\ ٩ & ١ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}} = \frac{٧ \times ١ - ٣ \times ٩}{٢ \times ١ - ٣ \times ٤}$$

$$= \frac{-٢٠}{-١٠} = ٢$$

$$\text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} ٢ & ٧ \\ ٤ & ٩ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}} = \frac{٢ \times ٩ - ٢٨}{٢ \times ١ - ١٢}$$

$$= \frac{-١٠}{-١٠} = ١$$

مثال :

إذا كان هناك معملى تكرير بترول ا ، ب ينتجون منتجات مشتركة بالنسبة الموضحة بعد لكل ساعة تشغيل .

ا	ب	
٣	٤	كيروسين بآلاف البراميل
٥	٢	بنزين » »

وأن الكميات المطلوبة هي :

كيروسين	بنزين	
١٧	١٩	بآلاف البراميل

ماهى عدد الساعات الواجب تشغيلها فى ا ، ب مع بعضهما حتى يمكن إنتاج الطلب المذكور بدون أية زيادة فى الإنتاج .

الحل :

يمكن وضع هذه المشكلة فى صورة معادلتين كالآتى :

$$٣ ا + ٤ ب = ١٧$$

$$٥ ا + ٢ ب = ١٩$$

حتى يمكن إيجاد قيمتى ا ، ب أى عدد ساعات تشغيل المعلمين .

$$أ = \frac{\begin{vmatrix} 17 & 4 \\ 19 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{17 \times 2 - 4 \times 19}{3 \times 2 - 4 \times 5}$$

$$= \frac{34 - 76}{6 - 20} = \frac{-42}{-14} = 3$$

و

$$ب = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 5 & 19 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{57 - 85}{6 - 20}$$

$$= \frac{-28}{-14} = 2$$

حل ثلاث معادلات خطية في ثلاثة مجاهيل باستعمال المحددات :

إذا كان المحدد يتكون من ثلاثة صفوف (أفقية) وثلاثة أعمدة (رأسية) ، فيقال أنه محدد من الرتبة الثالثة . والصورة العامة لهذا المحدد هي :

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{٣١} & \text{ا}_{٢١} & \text{ا}_{١١} \\ \text{ا}_{٣٢} & \text{ا}_{٢٢} & \text{ا}_{١٢} \\ \text{ا}_{٣٣} & \text{ا}_{٢٣} & \text{ا}_{١٣} \end{vmatrix}$$

ونستطيع إيجاد قيمة لهذا المحدد بفكه فى صورة عناصر الصف أو العمود . والعنصر الأول أهمية فى محدد من الرتبة الثالثة هو المحدد من الرتبة الثانية الذى يمكن الحصول عليه باستبعاد الصف أو العمود الذى على العنصر المعين .

افترض أننا نرغب فى فك المحدد الموضح بعاليه فى صورة العناصر الموجودة فى العمود الأول ، أى $\text{ا}_{١١}$ ، $\text{ا}_{١٢}$ ، $\text{ا}_{١٣}$.

فمثلا المحدد التابع للعنصر $\text{ا}_{١١}$ هو المحدد الذى يمكن الحصول عليه باستبعاد الصف الأول والعمود الأول . أى أنه .

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{٣٢} & \text{ا}_{٢٢} \\ \text{ا}_{٣٣} & \text{ا}_{٢٣} \end{vmatrix}$$

والمحدد التابع للعنصر $\text{ا}_{١٢}$ يمكن الحصول عليه باستبعاد الصف الثانى والعمود الأول . أى أنه :

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{٣١} & \text{ا}_{٢١} \\ \text{ا}_{٣٣} & \text{ا}_{٢٣} \end{vmatrix}$$

والمحدد التابع للعنصر $\text{أ}_{١٣}$ يمكن الحصول عليه باستبعاد الصف الثالث والعمود الأول .

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \end{vmatrix}$$

وقيمة المحدد من الرتبة الثالثة هى :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

$$- \text{أ}_{١٢} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} + \text{أ}_{١٣} \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \end{vmatrix}$$

أى أن مفكوك هذا المحدد هو :

$$\text{أ}_{١١} (\text{أ}_{٢٢} \text{أ}_{٣٣} - \text{أ}_{٣٢} \text{أ}_{٢٣}) - \text{أ}_{١٢} (\text{أ}_{٢١} \text{أ}_{٣٣} - \text{أ}_{٢١} \text{أ}_{٣٢}) + \text{أ}_{١٣} (\text{أ}_{٢١} \text{أ}_{٣٢} - \text{أ}_{٣١} \text{أ}_{٢٢}) .$$

مثال :

إحسب قيمة المحدد :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٣ \\ ٤ & ٥ & ٠ \\ ٦ & ٧ & ٨ \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\text{المحدد} = ١ \begin{vmatrix} ٥ & ٠ \\ ٧ & ٨ \end{vmatrix} - ٤ \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٧ & ٨ \end{vmatrix} + ٦ \begin{vmatrix} ٢ & -٣ \\ ٥ & ٠ \end{vmatrix}$$

$$= ١ (٤٠ - ٠) - ٤ (١٦ + ٢١) + ٦ (٠ + ١٥)$$

$$= ٤٠ - ١٤٨ + ٩٠$$

$$= -١٨$$

ولحل ثلاث معادلات فى ثلاثة مجاهيل باستعمال المحددات سنتبع طريقة مشابهة لحل معادلتين ذات مجهولين . إذ سنقوم أولا بتكوين المحدد لمعاملات المجاهيل فى المعادلات ، وهذا يعطى مقام المحدد عند إيجاد قيمة كل مجهول. وللحصول على قيمة المجهول الأول وليكن $س_١$ مثلا . نقوم بتكوين بسط المحدد وهو عبارة عن عناصر المقام فيما عدا العمود الأول على اليمين فنضع بدلا منه الثوابت الموجودة فى الطرف الأيسر للمعادلات الثلاثة المطلوب إيجاد (قيمة المجاهيل بها) ثم نقوم بقسمة المحدد فى البسط على المحدد فى المقـــام .

وللحصول على قيمة المجهول الثانى وليكن $س_٢$ نقوم بتكوين بسط المحدد وهو عبارة عن عناصر المقام فيما عدا العمود الثانى فنضع بدلا منه الثوابت الموجودة فى الطرف الأيسر للمعادلات الثلاثة ، ثم نقسم المحدد فى البسط على المحدد فى المقام لنستنتج قيمة $س_٢$.

وكذلك الحال بالنسبة للمجهول الثالث $س_٣$ تكون المحدد فى البسط وهو عبارة عن عناصر المقام فيما عدا العمود الثالث فنضع بدلا منه الثوابت الموجودة فى الطرف الأيسر للمعادلات الثلاثة ، ثم نقسم المحدد فى المقام لنستنتج قيمة $س_٣$.

أى أننا لو كان لدينا المعادلات الثلاثة الآتية :

$$\begin{aligned} \text{ب}_1 &= \text{أ}_{31}\,\text{س}_3 + \text{أ}_{21}\,\text{س}_2 + \text{أ}_{11}\,\text{س}_1 \\ \text{ب}_2 &= \text{أ}_{32}\,\text{س}_3 + \text{أ}_{22}\,\text{س}_2 + \text{أ}_{12}\,\text{س}_1 \\ \text{ح}_3 &= \text{أ}_{33}\,\text{س}_3 + \text{أ}_{23}\,\text{س}_2 + \text{أ}_{13}\,\text{س}_1 \end{aligned} \qquad (11)$$

فإذا رمزنا لقيمة المحدد للمعادلات بالرمز م فإن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix} = \text{م} \qquad (12)$$

ولذلك فإن :

$$\frac{\begin{vmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{ب}_2 \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{ب}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{أ}_{11} \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{أ}_{12} \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{أ}_{13} \end{vmatrix}} = \text{س}_1$$

أى أن :

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{31} & \text{أ}_{21} & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_{32} & \text{أ}_{22} & \text{ب}_2 \\ \text{أ}_{33} & \text{أ}_{23} & \text{ب}_3 \end{vmatrix} \frac{1}{\text{م}} = \text{س}_1 \qquad (13)$$

$$\therefore \text{س}_{٢} = \frac{\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{ب}_{١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{ب}_{٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{ب}_{٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}}$$

أى أن :

$$\text{س}_{٢} = \frac{١}{\text{م}} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{ب}_{١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{ب}_{٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{ب}_{٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix} \qquad (١٤)$$

$$\therefore \text{س}_{٣} = \frac{\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{ب}_{١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{ب}_{٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{ب}_{٣} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}}$$

أى أن :

$$\text{س}_{٣} = \frac{١}{\text{م}} \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{ب}_{١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{ب}_{٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{ب}_{٣} \end{vmatrix} \qquad (١٥)$$

مع ملاحظة أن م لاتساوى صفرا (١٦)

مثـال :

حل المعادلات الآتية باستخدام المحددات :

$$٢\text{س} + ٣\text{ص} + ٦\text{ع} = ١$$
$$\text{س} + \text{ص} - \text{ع} = \text{صفر}$$
$$٥\text{س} + ٢\text{ص} + \text{ع} = ٢$$

الحـل :

$$\text{م} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ١ & ١ & ١- \\ ٥ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

$$= ٢ \begin{vmatrix} ١ & ١- \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ١ & ١- \end{vmatrix}$$

$$= ٢[٢ \times ١ - ٢ \times (١-)] - ١[(٣ \times ١) - (٢ \times ٦)]$$
$$+ ٥[٣ \times (١-) - (٢ \times ٦)]$$

$$= ٢(٢ + ٢) - ١(٣ - ١٢) + ٥(٣- - ٦)$$

$$= ٨ + ٩ - ٤٥$$

$$= -٢٨$$

وطبقاً للمعادلة (١٣) فإن :

$$س = \frac{١}{-٢٨} \begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٦ \\ ٠ & ١ & -١ \\ ٢ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$$

نفك المحدد أولا :

$$= ١ \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ٠ \begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} + ٢ \begin{vmatrix} ٣ & ٦ \\ ١ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ١ \, (١ + ٢) - \text{صفر} + ٢ \, (-٩)$$

$$= ٣ - ١٨$$

$$= -١٥$$

$$\therefore س = \frac{-١٥}{-٢٨}$$

$$= \frac{١}{٢}$$

وطبقاً للمعادلة (١٤) فإن :

$$ص = \frac{١}{-٢٨} \begin{vmatrix} ٢ & ١ & ٦ \\ ٠ & ١ & -٦ \\ ٥ & ١ & ٢ \end{vmatrix}$$

نفك المحدد أولا :

$$= ٢ \begin{vmatrix} ٠ & -١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٦ \\ ٠ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٢(٢) - ١(-١١) + ٥(-١)$$

$$= ٤ + ١١ - ٥$$

$$= ١٠$$

$$\therefore \quad ص = \frac{١٠}{-٣٠}$$

$$= -\frac{١}{٣}$$

وطبقا للمعادلة (١٥) فإن :

$$ع = \frac{١}{-٣٠} \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٥ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$$

نفك المحدد أولا :

$$= ٢ \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} - ١ \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} + ٥ \begin{vmatrix} ١ & ٠ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= ٢(٢) - ١(٤) + ٥(-١)$$

$$= ٤ - ٤ - ٥$$

$$= -٥$$

$$\therefore \quad ع = \frac{-٥}{-٣٠}$$

$$= \frac{١}{٦}$$

بعض نظريات المحددات :

النظرية الأولى :

لا تتغير قيمة المحدد إذا حولت صفوف المحدد إلى أعمدة والأعمدة إلى صفوف .

مثال :

$$\begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} أ_{11} & أ_{12} \\ أ_{21} & أ_{22} \end{vmatrix} = (أ_{11}\,أ_{22} - أ_{21}\,أ_{12})$$

النظرية الثانية :

إذا احتوى المحدد على عمودين أو صفين متطابقين فإنه يساوى صفرا .

مثال :

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$$

$$+ 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(3) - 1(3) + 3(-2)$$

$= $ صفر

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$+ 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-7) - 3(\text{صفر}) + 2(7)$$

$$= \text{صفر}$$

النظرية الثالثة :

إذا احتوت عناصر أو مكونات أى صف أو عمود فى المحدد على عامل مشترك فإن قيمة المحدد تساوى حاصل ضرب العامـــل المشترك فى قيمة محدد ينتج من المحدد الأصلى بعد قسمة مكونات الصف أو العمود على العامل المشترك .

مثـــال :

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 24 \\ 5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

النظرية الرابعة :

لا تتغير قيمة المحدد مقداراً ولكن تتغير إشارة باحلال عمودين متجاورين أو صفين متجاورين محل إحداهما الآخر .

مثال :

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

أو

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

النظرية الخامسة :

إذا كان كل عنصر أو مكون فى أى صف أو عمود يشتمل على حدين فإن المحدد يمكن بيانه حينئذ كمجموع محددين آخرين :

مثال :

$$\begin{vmatrix} \text{ا}_{11} + \text{ك} & \text{ا}_{21} & \text{ا}_{31} \\ \text{ا}_{12} + \text{ل} & \text{ا}_{22} & \text{ا}_{32} \\ \text{ا}_{13} + \text{ع} & \text{ا}_{23} & \text{ا}_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{ا}_{11} & \text{ا}_{21} & \text{ا}_{31} \\ \text{ا}_{12} & \text{ا}_{22} & \text{ا}_{32} \\ \text{ا}_{13} & \text{ا}_{23} & \text{ا}_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \text{ك} & \text{ا}_{21} & \text{ا}_{31} \\ \text{ل} & \text{ا}_{22} & \text{ا}_{32} \\ \text{ع} & \text{ا}_{23} & \text{ا}_{33} \end{vmatrix}$$