



الباب الثاني
تقديم هندسة الفراكتال

الفصل الثاني

أفكار تمهيدية حول أهمية
ونشأة هندسة الفراكتال

الفصل الثاني

أفكار تمهيدية حول أهمية ونشأة هندسة الفراكتال

مقدمة:

عندما ترتبط الرياضيات بالطبيعة nature البديعة فإنها تصبح مألوفة واقعية قريبة من تفكير المتعلم يستشعر جمالها فى عقله وفى الطبيعة حوله. وعندما ترتبط الرياضيات بالفن فهذا يزيد دراستها متعة ويجعلها قريبة من وجدانه وإحساسه يستشعر جمالها فى قلبه وروحه. وعندما ترتبط الرياضيات بالعلوم الأخرى، وتسهم فى اختراع وغو نظريات جديدة، وتطبيقات واسعة وتقدم حلولاً لمشكلات حيوية عصرية كانت تعتبر مشكلات أزلية فهذا يجعل المتعلم يقدرها لفائدتها ويستشعر جمالها فى عظمتها.

تناغم الرياضيات مع الطبيعة مع الفن الراقى الذى يولّد نظريات وتطبيقات فى أرجاء الحياة المعاصرة نجد مثلاً له فى هندسة عصرية تسمى هندسة الفراكتال -Frac-tal Geometry. وكان هذا السبب الأول فى تعلقى بها وتقديم فكرة مبسطة متكاملة لها للمعلم (فى هذا الكتاب) للاستفادة بها وليستطيع أن ينمى تذوق جمالها فى الكون وفى العقل والقلب وتقدير عظمتها وفائدتها لتلاميذه من خلال خصائص مثيرة لها وأنشطة مستوحاه منها. أما السبب الثانى الذى أثارنى لتقديم هذه الهندسة كان نتيجة حديث مع إحدى طالباتى (وهى الآن فى درجة أستاذ ولها مؤلفات وهى أ.د/ مديحة حسن). وذلك عندما كنا فى الطريق لحضور مؤتمر فى كلية تربية الفيوم وأرادت الاستفسار عن بعض أفكار هذه الهندسة التى قرأت عنها. وسألتنى لماذا لا أكتب نبذة عنها. وبعد سنتين انشغلت باستكمال كتاباتى سلاسل للصغير والكبير لتنمية العقلية الرياضية الابتكارية منذ الصغر تتضمن سحر وغرائب هندسة جديدة (مستوحاه من نظرية فى التوبولوجى الجبرى) ثم حضرت مؤتمر الجمعية المصرية

للتوبولوجى حيث ألفت ورقة عن «التوبولوجى ومعلم الرياضيات»^(١) تضمنت فكرة سريعة عن هذه الهندسة وأحسست بتشوق البعض للتعرف على هذه الهندسة.

واسترجعت بعضاً من كتاباتى للطفل (أو بالأحرى للصغير والكبير)^(٢)، ووجدتني المحت ببعض خصائص لأشكال فراكتال، اعتبرت أحدها بطلًا لإحدى سلسلة حكايات وألغاز رياضية. كما قدمت التكرار المرحلي iteration فى تكاثر ثنائى لمخلوقات عجيبة فى كتاب لرياض الأطفال^(٤)، وفى كتاب آخر لتنمية المواهب الرياضية والفنية من خلال الحلزون^(٣). وأشارت إلى خاصية البعد الفراكتالى فى أحد سلاسل كتبى عن تشكيلات للمكعب. وكان هذا سبباً ثالثاً دفعنى لاستكمال ما قدمته فى عمل متكامل للمعلم عن هذه الهندسة.

أما السبب الرابع فكان تأثرى بأصالة فنان يدعى بولاك، وفنان وعالم آخر يدعى تيلر حاول تحليل لوحات بولاك باستخدام الكمبيوتر، فوجدوها دون غيرها المشابهة لها تتضمن أشكال فراكتال. كما استطاع تيلر نفسه أن يجعل الطبيعة فى ليل ذو رياح عاصفة أن تتدخل فى قذف ألوان من جهاز له بريتم (إيقاع) حركة الرياح على لوحة فنية فى وضع أفقى فترسم لوحة بأشكال فراكتال تشبه لوحات بولاك.

أما السبب الخامس فكان صدور كتاب مترجم لوزارة الثقافة عن علم جديد انبثق من هندسة الفراكتال وهو الهولوية (أو جوازاً الفوضى، Chaos، بعنوان «الهولوية تصنع علماً جديداً» يتضمن فصلاً فى بضع صفحات بعنوان هندسة الطبيعة. ويقصد بها هندسة الفراكتال والكتاب مكتوب للعامه بأسلوب وصفى وتثقيفى بعيداً عن أى معالجة رياضية.

وعندما فكرت فى الكتابة عن أفكار هندسة الفراكتال رجعت إلى الإنترنت (من خلال Internet Explorer ثم اختيار Favourates ثم كتابة Fractal Geometry) فوجدت ١٨٠٠ موقعاً يتعرض لهذه الهندسة متضمناً حوالى ٧٠٠ كتاب استمعت بثلاثة مواقع منها ما يخص الفن والصور المتحركة مثل:

www.angelfire

وعلى ذلك حاولت من خلال التمهيد وتقديم الأفكار الأساسية لهندسة الفراكتال فى هذا الباب أن أطعمها ببعض أعمالى السابقة والاستعانة بأعمال وفنون الآخرين لغرس النواحي الفنية الرياضية المثيرة للخلاقة العصرية من جهة. ومن جهة أخرى إثارة المعلم للتعلم مدى الحياة فى الرياضيات وخاصة الرياضيات العصرية ومنها هندسة الفراكتال. وذلك مع إثارة النواحي الابتكارية فى تدريسه.

١.٢ هندسة الفراكتال وأفكار وحكايات حول نشأتها

جلس بنوا ماندلبروت Benoit Mandelbrot (البولندى المنشأ والفرنسى الموطن والمشتغل حاليا فى شركة IBM بأمریکا) على شاطئء بإمجلترا ومن قمة استمتاعه بالبحر وأمواجه وجوه... زاغ يبصره نحو الشاطئء وبهره تعرجاته وخلجانه وتضاريسه الصخرية المتباينة... لم يلهمه البحر بقصيدة شعرية أو بلوحة فنية...

ولكن الشاطئء المتعرج أثار مشكلة فى خاطرة.. ما هو طول شاطئء إمجلترا؟ شكل الشاطئء المتعرج ذكره بالأشكال المتشابهة ذاتيا self similarity. والشكل المتشابه ذاتيا ببساطة هو شكل يتكون من أشكال أصغر منه بمقاييس Scales مختلفة مثل فرع شجرة وتفرعاتها أو شريان وتفرعاته أو نهر بروافده الموجودة فى الطبيعة nature، وفى الزخارف الرياضية الفنية منذ آلاف السنين (ومنها المصرية القديمة والإسلامية)... ولكونه عالم رياضى تدرب على الرياضيات الشكلية لمدرسة بورباكى، فكان من ثقافته الرياضية أن تذكر اهتمامات كانتور وهاوسدورف وچوليا وكوخ Koch، وبينو..... خاصة بأفكار وأشكال قدموها ولاحظ أنها تتضمن أشياء ذات تشابه ذاتى لأى عدد من المقاييس.

وانطلق من تعريف الشكل المتشابه ذاتيا (وهو المتكون من نماذج أصغر منه) إلى تعريف أعم للفراكتال.. وهو الشكل الهندسى (الحشن أو ذو الانكسارات) الذى يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل منها (على الأقل تقريبا) هو تصغير للشكل لعدد من

المقاييس)... ورجع إلى تعاريج الشاطئ... انها فراكتالات. ويبدأ مشوار المعالجات الرياضية ليخترع أبعاداً جديدة للفراكتالات؛ منسبقة من البعد التوبولوجي وبعده قدمه هاوسدورف (بعده الصندوق). وأعتبر بعد dimension الفراكتال خاصية أساسية أخرى للفراكتال.

ثم يقوم بتوليد فراكتالات (في الرياضيات) وفراكتالات (مشابهة لما في الطبيعة) فرضية Virtual؛ عن طريق نظم الدوال مرحلية التكرار IFS، حيث يمكن اعتبار التكرار المرحلي تكنيك مرتبط بالفراكتالات.

وقد شد انتباهه واعجابه وانبهاره بمجموعة جوليا Jolya Set إلى دراسة إتصالية مسارات (كمفهوم توبولوجي) لدوال ذات متغير مركب تربيعية دفعه إلى توليد أجمل وأغرب وأشهر فراكتال معروف باسمه وهو مجموعة ماندلبروت Mandelbrot (كجاذب غريب Strapge attractor). ومع عمله في شركة IBM ونتيجة التقدم في الرسوم الكمبيوترية وتقنيات التلوين، أمكنه عمل برنامج كمبيوترى لاطهار مجموعة ماندلبروت على شاشة الكمبيوتر. وهي بالألوان تعتبر لوحة فنية فريدة تتميز بشفافية درجات الألوان المتعددة. وقد ساعده عمله السابق في الاقتصاد ومقابلته للاضطرابات الاقتصادية، ومن عمله في هندسة الاتصالات ومقابلته لمشكلات الاتصال التي في باطنها أسباب ترجع إلى الهولوية Chaos التي يرتبط فيها النظام باللائظام. فالهولوية ارتبطت نشأتها بهندسة الفراكتال التي أدت إلى تنميتها وبلورتها.

نرجع إلى الطبيعة الساحرة الملهمة... البحر وشواطئه المتعرجة جعلت ماندلبورت يخترع هندسة جديدة عصرية، أحد تطبيقاتها هو مشكلة قياس طول الساحل الإنجليزي. وذلك بتحليل خواص التشابه الذاتي والبعد الفراكتال وتمثيل فراكتالات تعكس ثنايات وانكسارات وتعرجات الشاطئ العديده الانتظام لأجزائه الصغيرة.

هندسة الفراكتالات لها أيضا تطبيقات في هندسة الاتصالات وفي علوم الأرصاد

الجوية... فهي فى الواقع لها تطبيقات حيوية تكنولوجية متعددة. ونستخدم فى العلوم Sciences والعلوم الهندسية مثل توصيف شكل نسيج لأسطح مركبة. وعلى جانب آخر تستخدم فى السينما والتلفزيون لعمل مناظر طبيعية فرضية خيالية Creates realistic imaginary landscape كخلفية لأفلام الخيال العلمى والقصص الخيالية.

كما تطبق هندسة الفراكتال فى الأنظمة الديناميكية والموجيات Wavelets وأنظمة الهيلوليه Chaos وفى علوم الزلازل والفيزياء الأرضية والأحياء. ونتج من ربط (أو تطبيق) هندسة الفراكتال مع نظرية الأنظمة الديناميكية التوصل إلى علم عصرى جديد يسمى «الأنظمة الديناميكية غير الخطية» non linear dynamic Systems. وقد يسميها البعض «بأنظمة التعقد» أو «التعقدات» Complexities.

وعند إصدار كتاب ماندلبروت ١٩٨٢ حول هذه الهندسة اختار اسمها هندسة الفراكتل، وقد اختار اسم فراكتال Fractal لأنه وقع تحت يده بالصدفة مجلة عرف منها أن Fractus هى كلمة لاتينية تعنى يكسر break وبمعنى كسر Fraction رياضى وهذا جعله يشتق الاسم فراكتال منها. ولذا فإن البعض يترجمون هندسة الفراكتال بهندسة الكسريات أو هندسة الفنايت.

تمضى الأيام ويذهب بعض الرياضيين^(٦) لمؤتمر رياضيات «المجلس العالمى لتحليل غير الخطية» سنة ١٩٩٦ باليونان. وللترويج يذهبون إلى متحف فيجدوا أنفسهم أمام لوحة من العصور القديمة لشاطيء يونانى قديم للقارة المفقودة أتلانتيس أحدثت تعرجاته بركائنا يعتبر نموذج لفراكتالات شبيهة بشاطيء إنجلترا. فيستعيدوا الذكريات، وينطلق الجميع يسأل ما هو طول شاطيء أتلانتيس؟... أسوة بسؤال ماندلبروت... ما هو طول شاطيء إنجلترا؟....

مجمل القول: التأمل فى الطبيعة.. الأمواج فى حركاتها المنتظمة والفوضوية (الهيلوليه) Chaos.. الشاطيء بتعرجاته غير المنتظمة والمتشابهة... الثقافة الرياضية من القديم والحديث التى اخترعها الرياضيون فى العصور المختلفة... التعمق

الرياضى فى التوبولوجى والتحليل المركب ونظرية الدوال الهندسية والحركة البراونيه Brownian وتكامل ليبييه وتماثلات كلين، لى Lie... أنتج هندسة جديدة عصريه مملوءة بالحياة والجمال تعكس الطبيعة ونسهم فى تفسيرها وفى حل المشاكل العصريه... نموذجها يحتضن الفن الرياضى القديم والحديث... ولها تطبيقات حيوية فى الأنظمة الديناميكية والتكنولوجية والحيوية والطبيعة... كل هذا يعكس وجهة نظر هيرش حول الرياضيات الإنسانية... فهى من صنع الإنسان، اجتماعية (من صنع مجموعة الرياضيين)...، متغيرة، سياسية تعكس النمو الحضارى تؤثر وتتأثر به...، وهى دائماً تصحح نفسها أو تطور نفسها. فكما يقول ماندلبروت^(٧) «لماذا توصف الهندسة (ويقصد الهندسة الاقليدية) دائماً بأنها جافة وباردة؟ ... يكمن السبب فى عدم قدرتها على وصف شكل السحاب أو الجبال أو الشاطئ أو الشجرة.. فالسحب ليست أشكال كرويه والشواطىء ليست دوائر وجذع الشجرة bark غير ناعم، ولا البرق يسير فى خط مستقيم.. وجود هذه الأنماط تحدانا لدراسة هذه الصور (الأشكال) Forms التى اعتبرها إقليدس بأن ليس لها شكل Formless، ودراسة الشكل الخارجى morphology لما لا شكل له amorphous».

وبالرغم من أن ماندلبروت هو منشئ هندسة الفراكتال الهامة التى تعتبر حجر أساس لتطور علوم عصريه وحلولاً لمشكلات عصريه إلا أنه تعرض لنقد وهجوم من الرياضيين. فقد إنتقده كرانتر^(٥) Krantz لأن معظم أفكار هندسة الفراكتال كانت موجودة من قبل كما أن بعض نظرياتها أثبتت فى ١٩٢٠.

ومع أن ماندلبروت إعترف أن أفكار پول ليفى الشاعر الرياضى لنظرية الحركة البراونيه لها الفضل فى إلهامه بأفكار رائعة (جميلة) حدسيه فى عمل الفراكتال؛ إلا أن سبب النقد يرجع ربما إلى أن هندسته لا ترضى (البحثيون - المثاليون - الشكليون - المنطقيون). وذلك لأن لها مذاقاً ينحو إلى الرياضيات التطبيقية فهى نصف عملية، ولأنها تخدم العلوم الأخرى أكثر من الرياضيات. أو لأنه يعتمد على إمكانيات وآليات الكمبيوتر لاستكشاف وتفسير نظرياته دون إثباتها بأساليب رياضية صارمة. أو ربما يكون السبب راجعاً إلى تعالى ماندلبروت وإحاطته بهالة إعلامية فى حلبة

السياسية العلمية حتى إعتبروه أنه خارج الرياضيات. وعلى أية حال فإلى ماندلبروت يرجع الفضل فى وجود هندسة الفراكتال.

وكما أثار البحر والشاطئ الإنجليزى الهامة بهذه الهندسة، فقد أثار البحر بانتظام وثورة موجاته الرياضى سمال Smale إلى اختراع هندسية عصرية أخرى تعتمد أيضا على الهولوية Chaos تسمى هندسة حدوة الحصان. ولها جذور فى هندسة الفراكتال.

وسيطل البحر منبعاً الهام خصب لبلورة أفكار ونظريات رياضية وعلمية. ومهما كان لهندسة الفراكتال من إبهار لأهميتها وجمالياتها وحيوتها وفائدتها العصرية.. فانها ستصير بعد فترة (قد تمتد قرناً من الزمان مثلاً) عتيقة وغير مناسبة لتفسير ظواهر طبيعية أو حياتية أو حل مشكلات مستقبلية. فقد كانت قوانين نيوتن فى وقت ما مناسبة لتفسير حركة الأجسام الكبيرة وحركة البندول... ولكنها أصبحت عتيقة لفشلها فى تفسير حركة الأجسام الدقيقة وظواهر عشوائيه وفى البحث عن أصل الكون فجاءت النظرية النسبية لأينشتين لتتربع على العرش. ونجحت فيما فشلت فيه قوانين نيوتن ثم أصبحت عتيقة لعدم قدرتها على تفسير اضطرابات وعدم الخطية فى أنظمة حيوية... ثم جاءت هندسة الفراكتال ونظرية الهولوية ونظرية الأنظمة الديناميكية غير الخطية لتحل مشكلات عصرية ترتبط بالاضطرابات والهولوية (الفوضى)... فى مجالات متعددة فى الطبيعة والإنسان وهندسة الاتصالات وفى الأجهزة الدقيقة التكنولوجية... ثم بعد فترة ستصير عتيقة... وهكذا وتبقى الرياضيات ذات طاقة متجددة تبعث الحياة والنمو فى علوم مستقبلية متجددة.

وأخيراً هندسة الفراكتال قدمها ماندلبروت فى السبعينيات وبلورها فى الثمانينات وإهتم بها العلماء واشتهرت فى التسعينات. وابتدأ الإهتمام بتعريفها للمعلم منذ سنتين فى ٢٠٠٢. فلماذا لا أبادر بتقديمها لمعلم الرياضيات فى مصر والبلاد العربية؟

تعقيب (٢): تضامين implications وانعكاسات حول تنمية الابتكار التدريس لمعلم

الرياضيات

فى الواقع أن الحكاية لها تأثير كبير على جذب الإنتباه والاهتمام والتعلق...

وعلى إثارة التفكير والخيال والمشاعر...، وعلى تقمص شخصية البطل والاقتراء به...، وعلى الانغماس ومتابعة الأحداث المتسلسلة أو القفز للتوصل للنهاية..... وكلنا نعرف كمية الأهداف التي تحققها الحكاية خاصة إذا كانت تربوية هادفة.

وقد ناظر أحد الرياضيين الحكاية بالبرهان المنطقي فكلاهما يبدأ من مقدمة أو مسلمات (أو نظريات يعتمد عليها البرهان)، وكلاهما يسير في خطوات متعاقبة (سلسلة من الأحداث أو خطوات منطقية)، وكلاهما يستخدم علاقات (بين الأحداث والأبطال والأماكن أو قواعد منطقية ونظريات)، وكلاهما له نهاية (نهاية الحكاية أو وهو المطلوب إثباته). كما أن أحد الرياضيين ناظر إيقاع البرهان بتناسق خطواته وجماله بإيقاع الموسيقى..

وقد وجدت بالتجربة أن الحكايات والألغاز الرياضية تنمى التفكير الرياضى الابتكارى (بمستويات عليا) للتلميذ الضعيف والتلميذ المتفوق فى الرياضيات (بالمرحلة الإعدادية).

فما بالك بحكاية نشأة هندسة عصرية مع تمهيد يثير الدوافع لمعرفتها. أعتقد أن هذا المدخل سيكون له دور فى تنمية ابتكارية تدريس معلم الرياضيات خاصة إذا كانت هذه الهندسة العصرية إبتكاراً لفكر رياضى جديد، وهى بذاتها تمتلك خصائص تثير الإبتكار نظراً لروابطها Connections بالطبيعة وبالفن وبالرياضيات وبالعلوم وبالتطبيقات العصرية التكنولوجية والحوية.

بالاضافة إلى أن الحكاية عندما تكون مرتبطة بنشأة علم جديد أو حتى عمل تاريخى عظيم تعبر عن فكر جديد مختلف عن نمط تفكير تقليدى.

ويذكرنى هذا بحكاية مولد العبقرية الحربية للإسكندر الأكبر. فعندما كان فى الثالثة عشر من عمره إشتراك فى مسابقة... وهى ركوب حصان غير مروض والانطلاق به والحصان يكون جائزة لمن ينجح فى المسابقة... كل من يركب الحصان أمامه يجد أن الحصان يثور ثورة عارمة ويرميه. لاحظ الإسكندر مكان الحصان. فغير موضعه ١٨٠° حتى لا تقع عيناه على أشعة الشمس التى تحرقها وتؤلها

وتهيجه. أى أنه غير تفكيره تماماً عن غيره السابقين الذين فشلوا فى ركوبه. ومن المشوق أنه ارتبط عقلياً ووجدانياً بهذا الحصان الذى ركبه فى جميع فتوحاته وعندما عاد به بعد مرض الجنود فى آسيا ابتدأت صحة الحصان فى الذبول حتى مات. ومن شدة ارتباط الاسكندر به توفى هو بعده بشهر واحد.

بالتأكيد مثل هذه الحكاية لها مزايا تمس الإحساس والوجدان والخيال والتفكير وتقوى الذاكرة.... وتعتبر أفضل من السرد التاريخى بميزاته.

والآن بعد قراءتك لهذا الفصل مرةً أخرى حاول أن تتبين فاعلية مدخل الحكاية حول نشأة هندسة الفراكتال فى تنمية تفكيرك ومشاعرك وخيالك وذكرياتك لمواقف رياضية وفى تشويقك وتحفيزك لمعرفة ثم اكتب انعكاساتك فى مذكراتك. ثم حاول التعليق على ما يأتى:

- أثر حكاية نشأة هندسة الفراكتال على تعلقك بعمل البطل ماندليبروت.
- أثر الحكاية مندمجة مع بعض الأفكار الرياضية لهندسة الفراكتال فى تنمية حب الاستطلاع لتعلمها.
- أثر الحكاية بعد التمهيد لأهميتها فى تنمية تذوقك لجمال الرياضيات وتقدير فائدتها.

- هل حفزك هذا المدخل باستخدام حكاية نشأة هندسة الفراكتال على استقلالية التعلم فقامت بزيارة بعض المواقع على الإنترنت تخص هندسة الفراكتال؟ أو حفزك على الاستمرار فى قراءة ودراسة باقى فصول هذا الكتاب؟

من خلال تعليقاتك على هذه النقط ونقطاً أخرى تقدمها ستجد بنفسك مدى بداية نمو قدراتك الابتكارية التى سوف تعكسها فى تدريسك الإبتكارى بتلقائية. وسوف تبحث وتفتش عن حكايات نشأة الموضوعات الرياضية لتستخدم هذا المدخل.. مدخل نشأة موضوع رياضى وأهميته.

المراجع

- ١- جيمس جلايك (ترجمة على يوسف) (٢٠٠٠): «الهيولية تصنع علماً جديداً» القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.
- ٢- أ.د/ نظلة حسن أحمد خضر (١٩٨٨): «حكاية زخرفة البلاط ولغز الميراث» سلسلة حكايات وألغاز رياضية تنمي التفكير الهندسى والابتكارى لسن ١٠ - ١٥ ومشوقة لجميع الأعمار. القاهرة - الهيئة المصرية العامة للكتاب.
- ٣- أ.د/ نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠٢): «نم مواهبك الفنية والرياضية من خلال الحلزون مع روابطه وحكايات عليه». من سلسلة للصغير والكبير من سن ١٣ سنة فأكثر القاهرة - الهيئة المصرية العامة للكتاب.
- ٤- أ. د/ نظلة حسن أحمد خضر (١٩٨٦): الرياضيات لرياضة الأطفال. الكتاب الثالث - للموهوبين - القاهرة - هيئة الكتب بوزارة التربية والتعليم.
- 5- Krants, S-in Hermon, R (1991) "Fraclal Theory" The Mathematical Intelligencer, Vol 13 No 1 Winter, 1991 New York, Springer - Verlag.
- 6- Slomoczynski, W & Zastawniak, T (1999): "How Long Was The Coast of Atlantis".
The Mathematical Intelligencer, Vol 21 No 4 Witer 1999. New York, Springer - Verlag.
- 7- Thomas, D. A (2001): "Modern Gemetry" U.SA, Brooks/ Cole. Thomson learning.
www.angelfire
www.contest2k.com
www.math.rice.edu

الفصل الثالث

التشابه الذاتي، وتوليد فراكتالات
مشهورة ذات سحر وغرائب

الفصل الثالث

التشابه الذاتى، وتوليد فراكتالات مشهورة ذات سحر وغرائب

مقدمة:

عندما تقابل شخصاً ما لأول مرة تشعر كأنك تعرفه منذ سنوات، وهذا ما يحدث عندما تتعرف على أشكال متشابهة ذاتياً. فستجد أنك تألفها وكأنك تعرفها من قبل وهى أشكال تجدها حولك فى الطبيعة nature. وفى الزخارف القديمة (اليونانية القديمة - المصرية القديمة - العربية والفارسية). وفى الزخارف وفى الفن الحديث. تجدها فى أشكال هندسية تعاملت معها... تجدها فى أشكال رياضية فرضية (اصطناعية).

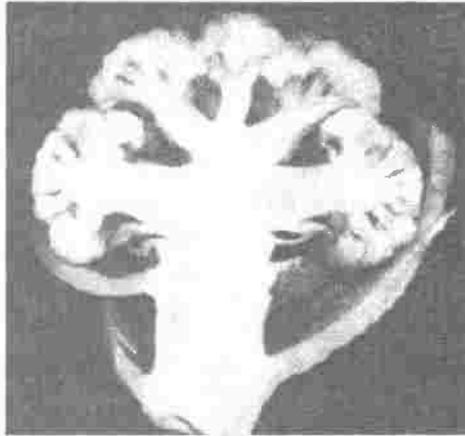
وخاصية التشابه الذاتى Self Similarity هى خاصية أساسية لأشكال الفراكتال (الفراكتالات)، وقد يسميها البعض بخاصية التماثل الذاتى. فالفراكتالات أو الأشكال المتشابهة ذاتياً ببساطة هى أشكال لها نفس المظهر لأى (تكبير - وتصغير) فجزءاً صغيراً من التركيب (للشكل) يبدو كأنه مثل الشكل الكلى. وعلى ذلك نحاول تقديم التشابه الذاتى من خلال أمثلة فى الطبيعة، وفى أشكال هندسية مألوفة، وفى الفن ثم نفرق بين التشابه الذاتى (الاحصائى) فى الطبيعة والفن وبين التشابه الذاتى (المضبوط) فى أشكال هندسية (مثل الشجرة الرياضية). وبالرغم من أن خاصية التشابه الذاتى موجودة فى فراكتالات مألوفة إلا أنها موجودة أيضاً فى فراكتالات غاية فى الغرابة يتوه فيها العقل والخيال مثل فراكتالات مجموعة ماندلبروت، ومجموعة جوليا، وفراكتالات مقترنة بمجموعة حل معادلات تربيعية فى الأعداد المركبة.. ولهذا نشير إلى هذه الفراكتالات الغريبة ونعرض بعض صورها... لنمذج المؤلف مع غير المؤلف. هل تتصور وجود سطح لا نهائى مساحته صفر؟ أو شكل لجسم يشغل حيزاً لا نهائى فى فراغ ذى ثلاثة أبعاد حجمه صفر؟ أو محيط لا نهائى يحد مساحة محدودة... بالفعل يوجد فراكتالات تؤيد الإجابة بنعم لهذه الأسئلة....

وهذا ما سنتعرض له أيضاً. هل تريد أن تعرف كيف تنتج (أو تولد) بعض فراكتالات مشهورة؟ هذا ما سوف نساعدك لتقوم بعملها أيضاً.

١-٣-١- التشابه الذاتي؛

١-٣-١- التشابه الذاتي في الطبيعة nature

إذا نظرنا إلى مقطع رأس لقرنبيط نجد أن شكل الرأس يتكرر بصورة أصغر وأصغر.... كلما صغرت وحدات أفرعها. تأمل الشجر وأفرعه، تأمل ريشة طائر، تأمل مقاطع مخ لطائر أو لحيوان، تأمل التركيب الداخلي لخضروات وثمار فاكهة، تأمل شجرا وقممه، تأمل جبلاً وقممها، تأمل نهرا وروافده...، تأمل تجزيعات وتفريعات ورقة نبات، تأمل تفريعات تزين جناح فراشة (أو بعوضة)، تأمل قرون غزال وتفريعاتها؛ تأمل تشققات أرض جافة...، تأمل أنسجة تحت المجهر.....



شكل (١)

سوف نجد أن هذه الأشياء الطبيعية مثلها مثل رأس القرنبيط لها خاصية التشابه الذاتي بمعنى أن كل منها شكل يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل منها يكون على الأقل تقريبا شكل أصغر يشبه الشكل الكلى على مدى العديد من المقاييس. انظر شكل (١).

حاول أن تفكر في أمثلة أخرى لأشكال متشابهة ذاتيا في الطبيعة فستجد الكثير.

علاوة على ذلك فقد وجد شولتز^(١) أن الزلازل كبيرها وصغيرها يتبع نمطاً في كل مكان تقاس به يقابل المقاييس scales من تكبير وتصغير magnification كما في التشابه الذاتي. واتضح أيضاً لعلماء الجيوفيزياء (الغزباء الأرضية) أن الأسطح المختلفة المثلثة بالشقوق والتصدعات والكسور الموجودة على هيكل الكرة الأرضية معظمها أشكال متشابهة ذاتياً. وأن تحكّمها في سريان الموائع في باطن الأرض: الماء - البترول - الغز الطبيعي. وتحكّمها في تصرفات الزلازل يكون فهمه عن طريق الفراكتالات (الأشكال المتشابهة ذاتياً) وهندسة الفراكتال.

وقد لاحظ أيضاً علماء المعادن أن ابنعاجات وإتصال أسطحها تتضمن الأشكال المتشابهة ذاتياً. كذلك علماء الأحياء وجدوا في الأوعية الدموية وشعيراتها أمثلة للتشابه الذاتي. فهي تتشعب وتنقسم إلى أصغر فأصغر فأصغر مثلها مثل الشعيرات الجذرية في النبات.. كذلك تشعب الشعيبات الهوائية في الرئة تتصرف بطريقة ثابتة مهما اختلفت المقاييس من أكبرها لأصغرها فهي لذلك تُعد مثالاً للأشكال المتشابهة ذاتياً..

الم أذكر أن التشابه الذاتي والأشكال المتشابهة ذاتياً مألوفة لنا فهي حولنا وفوقنا وتحتنا وداخلنا في تكوينات الطبيعة.

ويعتبر التشابه الذاتي خاصية رئيسية في أشكال الفراكتال (الفراكتالات) حتى أن شكل الفراكتال يعرف عن طريقها.

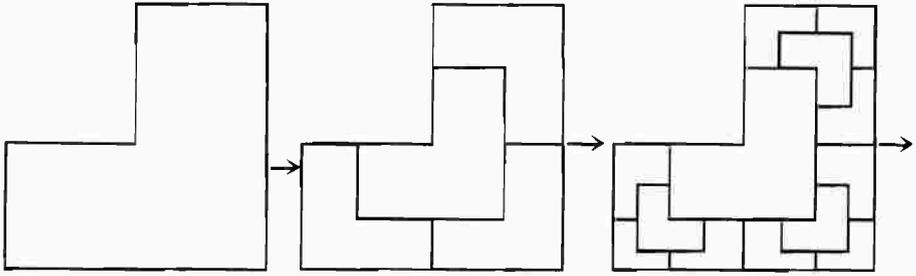
فيمكن تعريف الفراكتال^(٦) Fractal بأنه شكل هندسي حشن (أو متكسر -Frag- mented) يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل منها يكون (على الأقل تقريبا) شكل أصغر يشبه الشكل الكلي^(١).

أما الشكل المتشابه ذاتياً Self Similar فهو الشكل المتكون من نماذج أصغر منه. وهو أيضاً فراكتال.

٢-٢-٢- التشابه الذاتي في الأشكال الهندسية المستقيمة والأشكال الرياضية

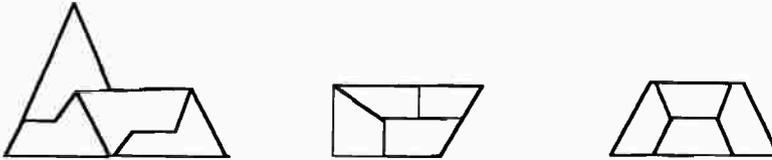
قدمت في أحد كتاباتي (سلسلة حكايات وألغاز رياضية)^(٢) مشكلة تتعلق

بتقسيم الميراث لقطعة أرض على شكل مربع إلا ربع إلى أربعة أقسام كل منها مربع إلا ربع تشبه الشكل الأصلي لقطعة الأرض. ومن سيناريو الحكاية وأحداثها يتوصل القارئ (الطفل سن ١١ فأكثر) إلى الحل الصحيح. ثم بالتكرار المرحلي يقسم كل مربع إلا ربع ناتج إلى أربعة مربعات إلا ربع أصغر مشابهة له.. وهكذا. انظر شكل (٢).



شكل (٢)

ثم تطبيق نفس النمط من التقسيم والتكرار (المرحلي) على كل تقسيم ناتج على شبه منحرف متساوي الساقين. فينقسم الشكل الأصلي إلى أربعة أشكال شبه منحرفة متطابقة تشبهه وأصغر وأصغر في كل تكرار.... وكذلك بالنسبة لشبه منحرف قائم، وبالنسبة لمثلث إلاثلث..... انظر شكل (٣) وحاول رسم التقسيم التالي لكل منها.



شكل (٣)

واضح أن كل شكل من هذه الأشكال تعتبر متشابهة ذاتياً. ومع توالي التقسيم

بنفس العملية (التكرار المرحلي الذي يحدد طريقة التقسيم) نحصل على أشكال أدق وأدق تشبه الشكل الأصلي. ومع الزيادة اللانهائية للتكرار المرحلي يمكن توليد شكل متشابه ذاتياً على عدد لا نهائي من المقاييس Scales.

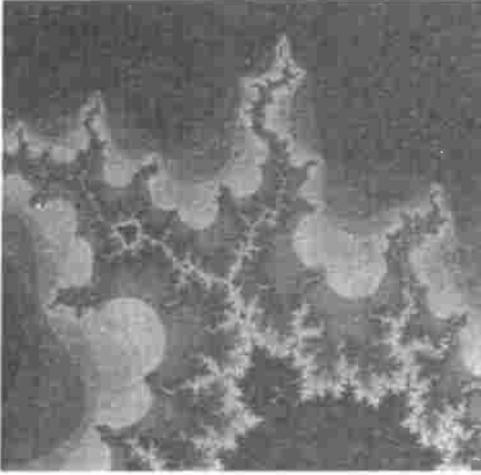
والآن اشهد ذاكرتك وحاول استرجاع أشكال هندسية مستقيمة تكون متشابهة ذاتياً فستوصل إلى الكثير انظر شكل (٤).



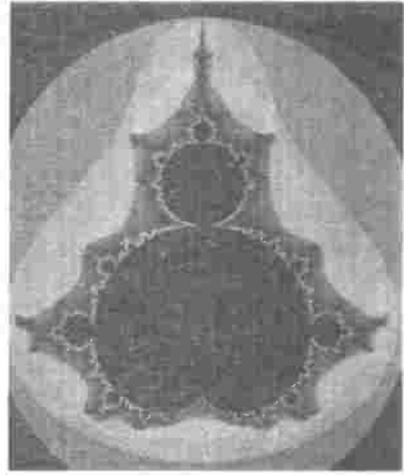
شكل (٤)

وقد استُخدمت أشكال متشابهة ذاتياً في الزخرفة منذ آلاف السنين (وأبسطها شكل ٤ أ) إلا أن اهتمام الرياضيين الحديثين أمثال جوليا، وكوخ، وسيرينيسكي كان منصّباً على أشكال متشابهة ذاتياً على عدد لا نهائي من المقاييس (من التصغير والتكبير enlargement) والتي أثارت ماندلبروت بعد ذلك في اختراع هندسته، حيث سمي هذه الأشكال (المتشابهة ذاتياً) بالفراكتالات أو أشكال الفراكتال التي تعتبر من الفراكتالات المشهورة نسبة إلى الرياضيين الذين قدموها. مثل (فراكتال) منحنى كوخ لرفائق الثلج Koch Snow Curve (شكل ٥)، (فراكتال) مجموعة جوليا التي يتوه الخيال والعقل في روعتها وجمالها (شكل ٦)، وفراكتال بينو، وفراكتال سيرينيسكي.... وسوف نتعرض لهذه الفراكتالات المشهورة بشيء من التفصيل فيما بعد.. ولكنني أقدم الشكلين ٥، ٦ لأعطي لك فرصة لتأمل الجمال الظاهر والجمال الباطن لهذه الفراكتالات. ففي شكل (٥) أعطى صاحبها كوخ وصف برفائق الثلج. أما شكل (٦) فهو شكل معقد يمكن أن تناظر منه أشكال في الطبيعة وفي الرياضيات وفي الفن، وفي الخيالات.

وتعتبر مجموعة جوليا مجموعة جزئية من أشهر وأجمل وأغرب فراكتال وهو فراكتال معروف مجموعة ماندلبورت Mendelbort Set أعرضها في شكل (٧) لأتيح فرصة للتأمل والإثارة والتشويق أيضا. وهي تعتبر لوحة فنية (خاصة الملونة) حيث تتميز بشفافية درجات الألوان المتنوعة. وهي (ومجموعة جوليا الجزئية منها) يتصارع فيها النظام والانظام عند حدودها.



شكل (٨)

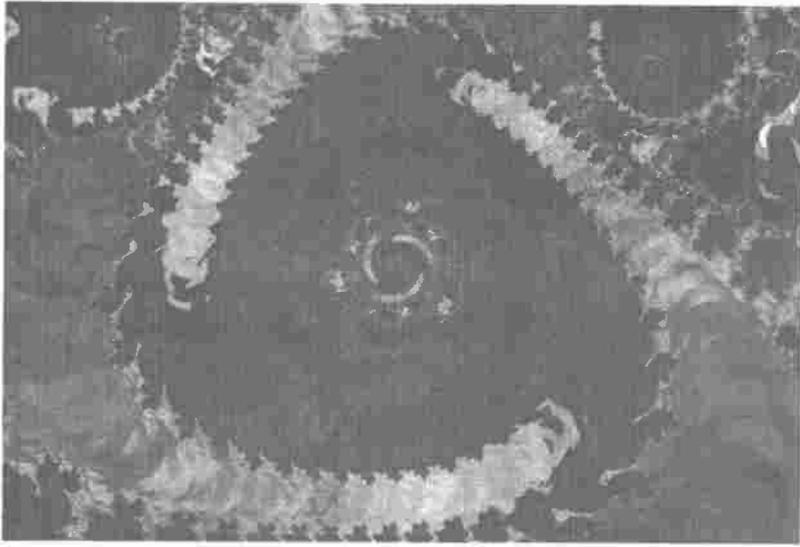


شكل (٧)

أجزاء من مجموعة ماندلبورت (٣)

٣-١-٢: التشابه الذاتي في لوحات فنية

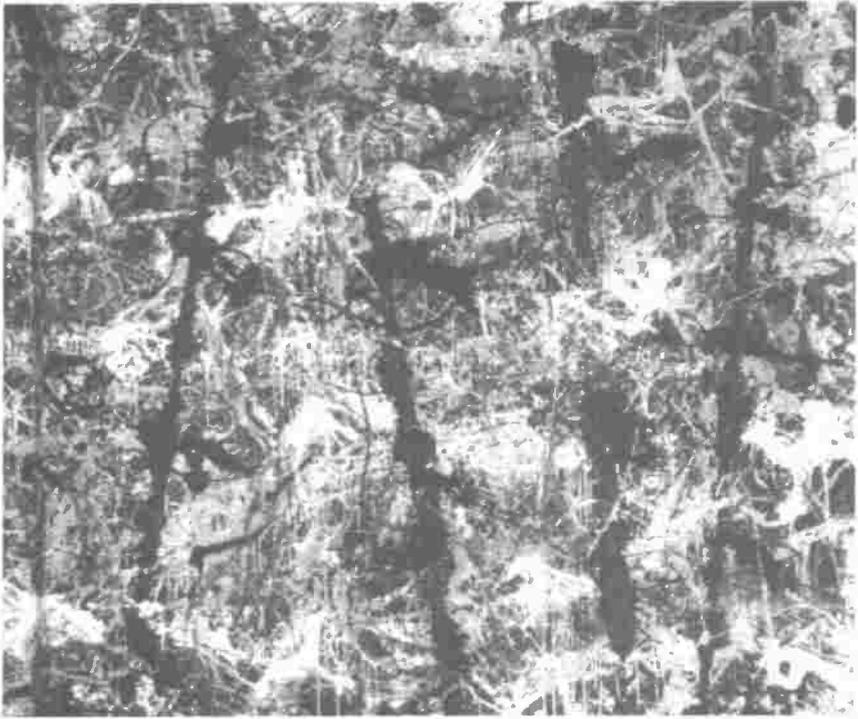
بلاشك أننا قد لمسنا النواحي الجمالية والفنية في تابلوهات فراكتالات مجموعة ماندلبورت ومجموعة جوليا (المتشابهة ذاتيا). ومن إعجاب بعض الفنانين لها فقد استخدموا برمجيات خاصة بالفراكتالات في عمل لوحات فنية أقدم أحدها (شكل ٩).



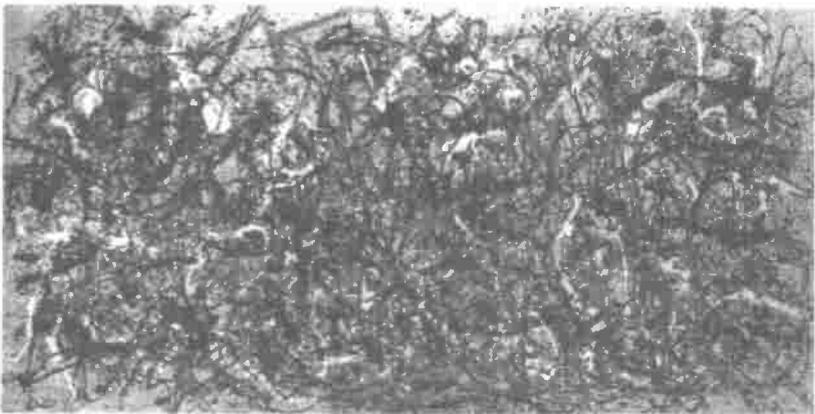
شكل (٩)

لوحة أبدعها فنان باستخدام برمجية للفراكتالات

أما لوحات الفنان بولوك^(٥) التي أبدعها في ١٩٥٠، ١٩٥٢ قبل تقديم هندسة الفراكتال ١٩٧٥ ودون معرفته بالفراكتالات، فقد تبين أنها عبارة عن أشكال تشابه ذاتي أنتجها بجهاز صغير يقذف الألوان على لوحة في وضع أفقي بريتم (إيقاع) يمثل الطبيعة nature بإحساسه. حيث قام الفنان العالم تيلر بتحليل لوحات بولوك بالاستعانة بالكمبيوتر فإكتشف أن بولوك قد بنى طبقات من الألوان بتكنيك غاية في العناية أنتج به شبكة كثيفة من الفراكتالات في لوحة تبين دوامات من الألوان استغرق عملها ٦ شهور في ١٩٥٢ (شكل ١٠ أ)) أما لوحته التي تعبر عن الخريف (فتقدمها في شكل (١٠ ب)). ومن المشوق أن نعرض في شكل ١٠ (ج) صورة لبولوك أثناء تلويته بجهاز لقذف الألوان وعلى يمينها صور فوتوغرافية لأعشاب بحرية في الطبيعة ولا تعليق بين لوحاته والصور الطبيعة التي ينقلها بإحساسه.

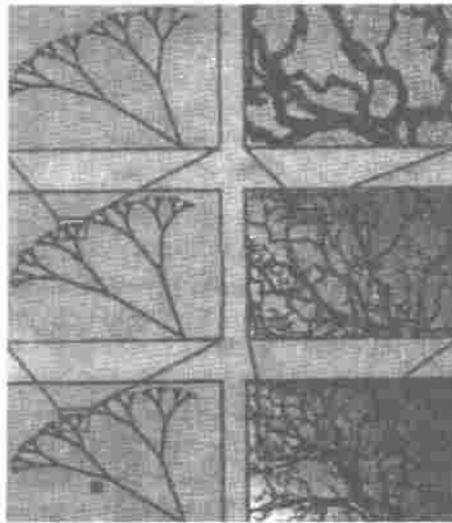


شکل (۱۰) ا



شکل (۱۰) ب

تكون فيها الأنماط المتشابهة (بمقاييس مختلفة - المصغرة) لا تتكرر بشكل مضبوط تماماً، بمعنى أن التشابه الذاتي يبدو متشابهاً في الشكل لأي مقياس من التكبير أو (التصغير) فيما عدا إغفال بعض الملامح المعينة. إلا أن سمات الأنماط الاحصائية تتكرر. ولذا يسمى تشابهه ذاتي إحصائي. وللتوضيح نقدم شجرة رياضية (اصطناعية) كمثال للتشابه الذاتي المضبوط، وشجرة حقيقية في الطبيعة كمثال للتشابه الذاتي الاحصائي في شكل (١٠) د، هـ.



شكل (هـ)
شجرة اصطناعية
(تشابه ذاتي مضبوط)

شكل (د)
شجرة حقيقية (تشابه
ذاتي إحصائي)

شكل (١٠) (د، هـ)

وعلى ذلك فالتشابه الذاتي في الطبيعة أو في الفن ولوحات بولاك يكون تشابه ذاتي إحصائي والتشابه الذاتي في الرياضيات (الاصطناعي) يكون مضبوطاً.

ومن المشوق أن نعرف أن الشجرة الاصطناعية وفيها كل فرع ينقسم إلى فرعين متساويين بينهما زاوية ثابتة θ . عندما تساوي 145° يكون شكل قمتهما من اليسار إلى اليمين هو فراكتال منحنى كوخ لرفائق الثلج. انظر شكل (١٠) ز أما شكل (١٠) و فشكل الشجرة عن $\theta = 20^\circ$.

٢-٣- التكرار المرحلي iteration وطريقة بسيطة لتوليد الفراكتالات المشهورة

تقابلنا مع التكرار المرحلي عند تقديم الأشكال المتشابهة ذاتياً في الأشكال الهندسية المستقيمة، ففي شكل (٢) السابق عند تقسيم مثلث المربع لاربع إلى أربعة أشكال تشبهه كل منها مربع إلا ربع أيضاً. كان الناتج في الأجراء الأول أربعة أشكال متطابقة أصغر، كل منها مربع إلا ربع ثم أخذنا الناتج وأجرينا عليه مرة أخرى نفس التقسيم على كل مربع إلا ربع منه فتتج ١٦ شكل مربع إلا ربعاً أصغر... وهكذا. أى أنه قمنا بتكرار خاص. حيث يكون ناتج التكرار الأول هو الذى نجرى عليه التقسيم فى التكرار الثانى... وهكذا... ناتج (خارج) كل تكرار يصير الداخلى فى التكرار التالى. ولذا يطلق عليه بالتكرار المرحلي iteration.

وفى الواقع فقد تذكر أنك تعاملت مع التكرار المرحلي عند اجراء تقريب تنابعي Successive approximation. مثل استخدام عددة إجراءات (أو خوارزميات) لايجاد تقريبات لجذور المعادلات فى طريقة نيوتن. حيث استخدم نيوتن طريقة بسيطة لايجاد تقريبات للدوال عندما تكون قيمتها صفر. حيث قدم قانون

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

بداية للتقريب التالى. حتى يصل إلى أفضل تقريب للدالة د قيمتها صفر. أو بالأحرى تقريب لجذر المعادلة التى نبدأ بتخمينها قبل التكرارات المرحلية.

وعلى ذلك فالتكرار المرحلي iteration ليس مجرد تكرار. ولكنه تكرار (لعملية - اجراء - قاعدة...) يستخدم ناتج (مخرجات) كل تكرار كمدخلات فى التكرار التالى... وهكذا.

والتكرار المرحلي مرتبط بعملية توليد الفراكتالات المشهورة بأسلوب إتبعه الرياضيون أصحابها، ونحاول تبسيطه عن طريق تحويل هندسى يسمى «بالمنحنى المولد» أو باختصار المولد.

١-٢-٣: توليد (فراكتال) منحنى كوخ لرفائق الثلج Koch Snowflake Curve

قد تستمتع بجمال زهرة متفتحة، ولكن بالتأكيد يزيد استمتاعك عندما تشاهد

عملية تفتح الزهرة رويداً رويداً حتى يكتمل تفتحها سواء كانت الزهرة أمامك في حديقة أو مصورة فى التليفزيون بالحركة السريعة. وبالمثل يزيد استمتاعك بعمل ما من بدايته لنهايته أن تعيشه فى مراحل مختلفة.

فى البداية هيأتك للتعرف على شكل منحنى كوخ لرقائق الثلج (شكل ٥)، (١٠ز).

والذى أطلق عليه هذا الاسم هو العالم الرياضى السويدى هيلج فون كوخ (١٩٠٤) قبل أن نعرف أن هذا المنحنى هو فراكتال بمدة طويلة.

والآن تعال نستمتع بعمله خطوة خطوة كأنه زهرة تفتح من برعمها رويداً رويداً لنرى كثف الثلج وهى تتكون رقائق شيئاً فشيئاً.

البرعم هنا هو قطعة مستقيمة S_0 نبدأ بها العملية. نلاحظ أن التكرار المرحلى صفر ونرمز له n_0 .

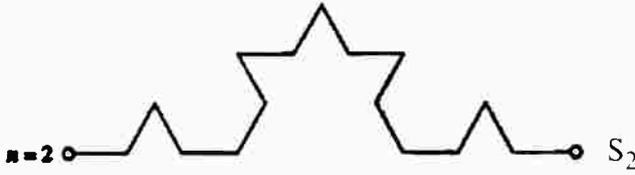


ثم نحول القطعة المستقيمة إلى الشكل التالى فى أول تكرار مرحلى n_1 .

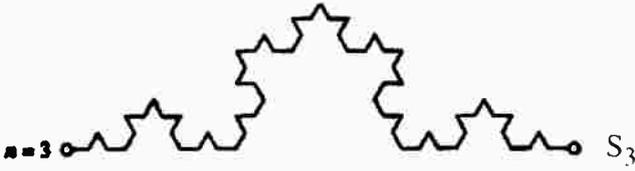


وذلك استبدال القطعة بالمنحنى الذى يشبه الشكل S_1 . وذلك بتثليث القطعة المستقيمة واستبدال الثلث الأوسط بساقين مساويين لهذا الثلث مكوناً شكل من أربعة قطع مستقيمة S_1 . يسمى بالمنحنى المولد أو المولد generator.

وفى التكرار المرحلى التالى n_2 نقوم بتحويل كل قطعة مستقيمة للشكل الناتج فى التكرار الأول إلى شكل المولد. وذلك بتثليث كل قطعة من القطع الأربعة واستبدال القطعة الوسطى لكل منها بساقى مثلث مساويين لهذا الثلث. فيتتج الشكل التالى (S_2) ستة عشرة قطعة مستقيمة.



وفي التكرار المرحلي الثالث n_3 نحول كل قطعة مستقيمة من القطع ١٦ الناتجة في شكل (S_2) للتكرار الثاني إلى الشكل المولد فينتج S_3 .



لاحظ أن التكسيرات (التعرجات) تكون أدق كلما زاد التكرار المرحلي. وهكذا بتكرار هذه العملية بعدد لا نهائي من التكرارات المرحلية $n \rightarrow \infty$ فإننا نصل إلى المنحنى المضبوط لرقائق الثلج لكوخ.

حاول رسم المنحنى بنفسك حتى التكرار المرحلي الثالث n وخبّن طول محيطه عنده n_3 وعند التكرار المرحلي اللانهائي $n \rightarrow \infty$ أنظر شكل (١١) أ.

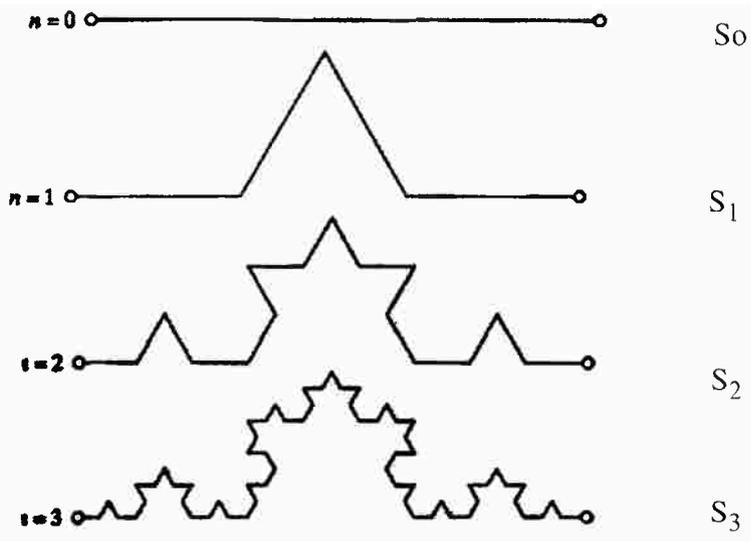
والآن حاول تطبيق نفس المولد على أضلاع مثلث متساوي الأضلاع حتى التكرار المرحلي الثالث n_3 وتخيل الشكل الناتج ثم إرسمه.

استخدم المولد السابق (عكسيا) أي بقمته إلى أسفل

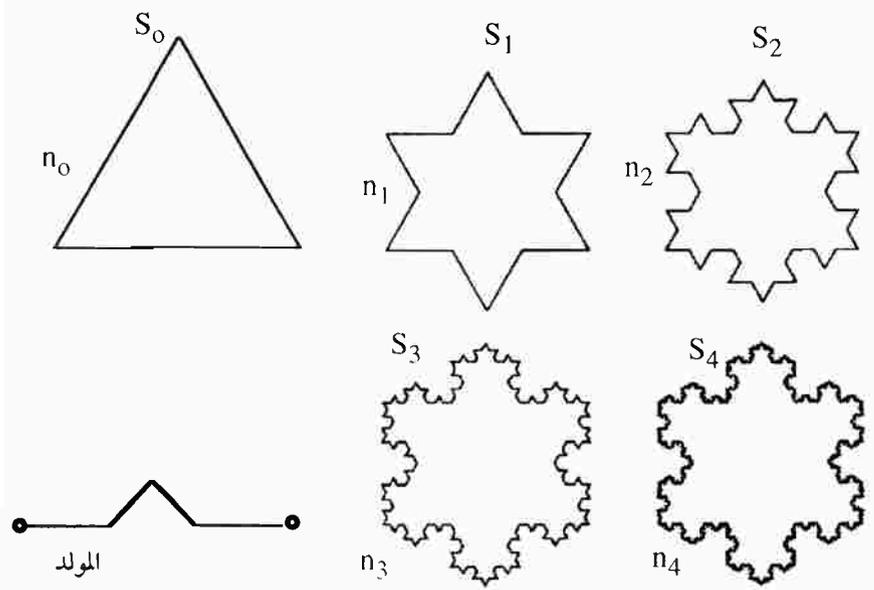
وطبقه على أضلاع مثلث متساوي الأضلاع (أي طبق المولد إلى الداخل) وتخيل الشكل الناتج حتى التكرار المرحلي الثالث n_3 ثم تحقق بالرسم.

ستجدك توصلت إلى شكل (١١) ب الذي يتضمن منحنى كوخ لرقائق الثلج (بتطبيق المولد على مثلث)، شكل (١١) ج الذي يتضمن منحنى كوخ العكسي

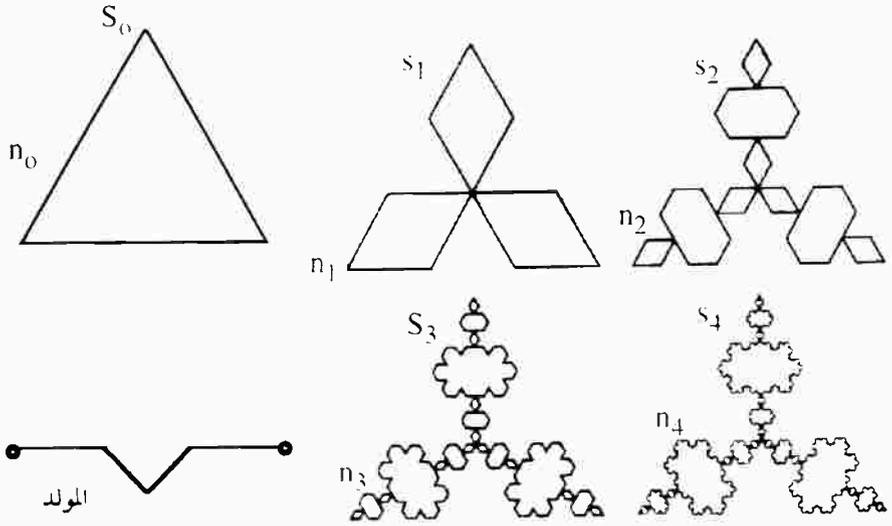
لرقائق الثلج Koch Anti. Snowflake Curve .



شكل (١١) أ



شكل (١١) ب



شكل (١١) حـ. منحنى كوخ العكسي لرقائق الثلج

في الأمثلة السابقة كان مولد الفراكتال هو منحنى يحدده التكرار المرحلي من مرة إلى أخرى. عند كل تكرار مرحلي كل قطعة مستقيمة لمنحنى الفراكتال المراد تكوينه (أو توليده) يستبدل بمقياس مناسب.

في (فراكتال) كوخ لرقائق الثلج شكل (١١) أ كان المولد قمته إلى أعلى وفي فراكتال كوخ العكسي لرقائق الثلج كان المولد قمته إلى أسفل (شكل (١١) ج).

وكان شكل الفراكتال في كل منهما كرقائق الثلج (متعرج ومشرشر برقه) ولكنه كمنحنى لا يملأ جزء مسطح.

إعط لنفسك فرصة لتفكر في شكل مولد لفراكتال يملأ سطح مربع مثلاً.

هل سيكون الثلث الأوسط للمولد على شكل ضلعي مثلث أم شكل مربع؟

هل سيكون المربع على الثلث الأوسط للمولد إلى أعلى أو إلى أسفل؟ هل

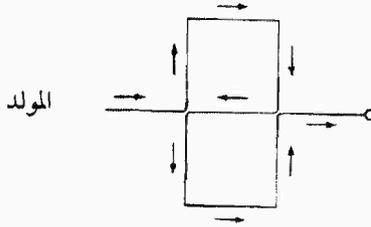
سيكون المولد ثلثه الأوسط يجمع بين مربع إلى أعلى ومربع إلى أسفل؟ ستجد

الإجابة في مولد فراكتال بينو التالي.

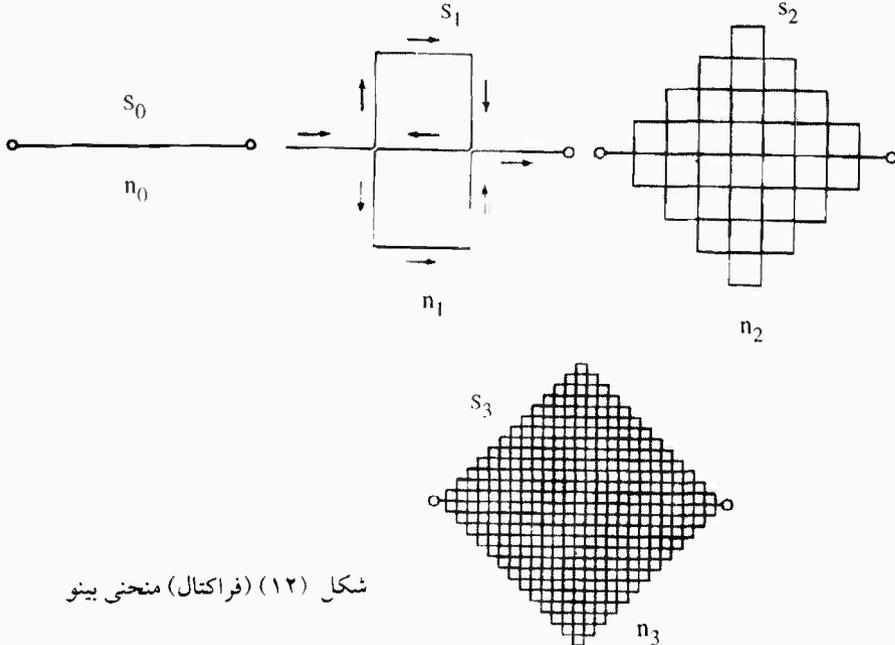
٢-٢-٣- توليد (فراكتال) منحنى بينو Peano

إستطاع العالم الرياضى الفرنسى بينو (١٨٥٠ - ١٩٣٢) أن يولد فراكتال يملأ مستوى. وهو معروف بمنحنى بينو لملء المستوى.
ولعل الأسئلة التى أثارها فى آخر البند السابق (٣-٢-١) تمهدك لشكل هذا المولد.

وكلما اقتربت من التوصل إليه كلما زادت ثقفتى فى أنك سوف تكون من المعلمين المجددين المبتكرين أو من المجددين الرياضيين.
المنحنى المولد لفراكتال بينو هو الذى يحول كل قطعة مستقيمة إلى الشكل.



والآن حاول رسم هذا الفركتال (لبعض المقاييس) بتحديد التكرار المرحلى الأول والثانى والثالث فستصل إلى شكل (١٢).



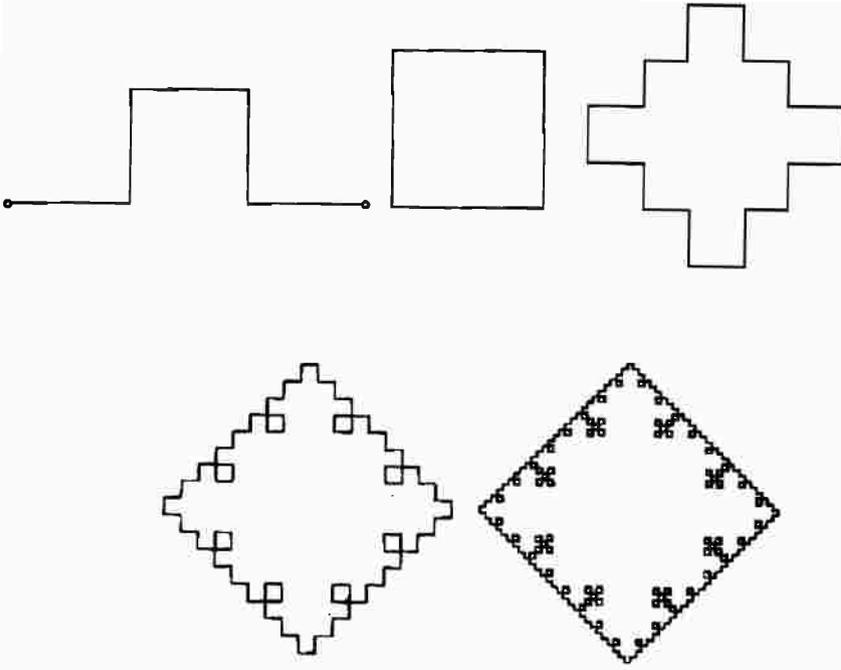
شكل (١٢) (فراكتال) منحنى بينو

وكلما زدنا التكرار المرحلي لإنتاج منحنى بينو مرةً بعد مرةً نجد أن شكل المربع الممثل يبدأ فى الظهور. وبزيادة أخرى التكرارات المرحلية نجد المنحنى المتكون يمر بنقط أكثر وأكثر لداخلية ذلك المربع وعندما تقرب التكرارات المرحلية اللانهائية $n \rightarrow \infty$ فإن كل نقطة فى داخل المربع تصير نقطة نهائية Limit Point لمنحنى بينو. ولأنه لا توجد نقطة مفترقه فى المربع (وداخله) فان منحنى بينو يسمى مالىء المستوى Plane Filling. (لاحظ أنه يوجد تشاكل توبولوجي بين المربع والمستوى).

ونرجع الآن إلى الأسئلة التى قدمتها لإثارتك لمولد فراكتال بينو آخر بسند (١-٢-٣) إذا كانت إجابتك تثليث القطعة المستقيمة واستبدال الثلث الأوسط بثلاثة أضلاع مربع إلى أعلى. أى يكون المولد على شكل قبة.



فهذا مستوى من الإبتكار فقد استبدلت ضلعي الثلث لمولد منحنى كوخ بثلاثة أضلاع مربع. وإن كنت حاولت رسم تكوين الفراكتال بالتكرار المرحلي المحدد بهذا المولد لعدد من المرات فانك تكون قد حاولت تحقيق الإجابة وهذا مستوى من التفكير الرياضى، وتكون توصلت للفراكتال فى شكل (١٥) (لمقاييس قليلة من التصغير) وكأنه شكل زخرفى جميل يزين منديل بأشغال اليد. ولكنه لا يملا المستوى. إلا أنه يكون حدود المربع.



شكل (١٥) مولد القبة والفراكتال الناتج

وإذا كانت إجابتك قبعه عكسية (الأضلاع الثلاثة للمربع على الثلث في الوسط تكون إلى أسفل) فهذا مستوى ابتكارى أعلى. وإذا تحققت من الإجابة ورسمت الفراكتال (سأترك المحاولة لك) فنجد أن هذا الفراكتال يمر بعدد أكثر من النقاط الداخلة لمربع ولكن ليس بجميع النقاط الداخلة للمربع مع نقط حدوده (أضلاعه).

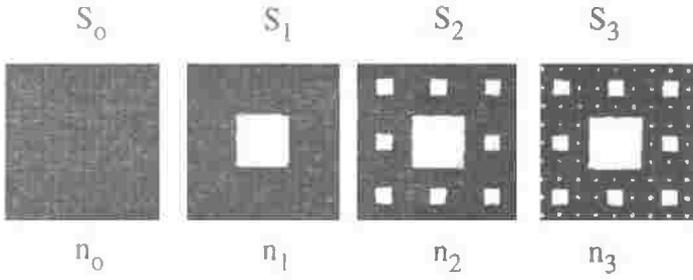
أما مولد منحني (فراكتال) بينو فهو تجديد لرياضى مجدد أصيل.

في عملية توليد (بناء) فراكتال كوخ وفراكتال بينو استخدمنا مولد عبارة عن منحني يحدد التكرار المرحلي. سنستبدل منحني المولد بعملية تصف تحويل شكل (ليس بالضرورة قطعة مستقيمة) نحدد التكرار المرحلي كما في البند التالي.

فى البند السابق توصلنا إلى فراكتال منحنى بينو الذى يغطى كل نقط المربع وداخلية المربع (أى النقط على محيطه والنقط داخله. أى سطح مربع أو منطقته مربعة). هل تصور فراكتال بعكسه لا يمر بأى منطقة فى داخلية مربع.. تعال نتعرف عليه. إنه شكل قدمه الرياضى سيربينسكى فى ١٩١٥ ويسمى بساط Carpet سيربينسكى . وبنفس فكرة عملية التحويل الهندسى على مثلث توصل إلى ما يسمى جوان gasket سيربينسكى. وتطبيق الفكرة على مجسم مكعب نصل إلى ما يسمى باسفنجية مينجر Menger Sponge.

إعط لنفسك فرصة للتفكير فى عملية تجعل من سطح مربع. منطقة تخلو شيئاً فشيئاً لمربعات أصغر فأصغر من النقط الداخلية!! حتى تخلو تماماً عند التكرار المرحلى اللانهائى!! هل ستصل إلى أن العملية تتضمن نزع جزء؟ فكر ما هو شكل هذا الجزء وما موضعه بالنسبة للشكل الأصيل؟ حدّد مستواك من خلال إجابتك ومدى قربها مما قدمه سيربينسكى فيما يلى.

للتوصل إلى فراكتال - شكل (سباط) سيربينسكى نستخدم عملية لتحويل هندسى مع التكرار المرحلى. تبدأ العملية بأخذ مربع So وتقسيمه إلى تسع مربعات متطابقة أصغر وفى أول تكرار مرحلى n_1 نزع المربع الأوسط (أى تسع المربع الأوسط). وفى التكرار المرحلى الثانى n_1 نزع من كل مربع أصغر ناتج من التكرار المرحلى الأولى - التسع الأوسط.... وهكذا نصل إلى (فراكتال) بساط سيربينسكى. حاول بالرسم التوصل إلى شكله بعد التكرار المرحلى الثالث (على مدى ثلاثة مقاييس من التصغير كما فى شكل (١٦)).

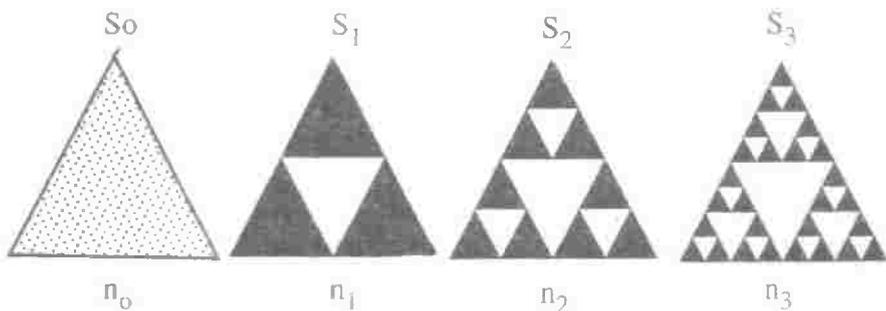


شكل (١٦) بساط سيربينسكى

لاحظ أن الفراغات مع تصغيرها فى كل تكرار مرحلى فإنها تزداد ... ومع التكرارات اللانهائية تزداد الفراغات لا نهائيا حتى تفرغ المربعات الجزئية المصغرة تدريجياً.

إذا أردنا تطبيق نفس الفكرة السابقة على سطح مثلث فماذا نتوقع أن يكون شكل الجزء الأوسط الذى سوف ينزع فى عملية التحويل الهندسى الذى يفرغ داخلية المثلث...؟ ستجد نفسك تصل إلى الإجابة الصحيحة بسهولة بعكس صعوبة التوصل إلى الإجابة الصحيحة فى السؤال السابق الذى مهدت فيه لفراكتال بساط سيربينسكى.

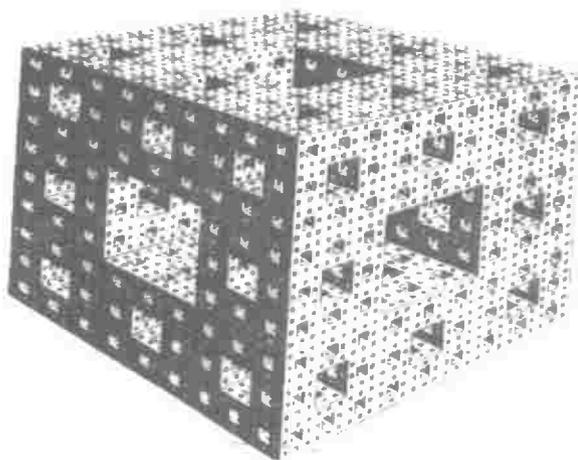
وعلى ذلك حاول تكوين فراكتال جوان Gasket (مثلث) سيربينسكى... إذا لم تستطع فابدأ بمثلث متساوى الأضلاع S_0 وقسمه إلى أربعة مثلثات متكافئة. وفى التكرار المرحلى الأول n_1 انزع رُبع المثلث الأوسط فتصل إلى S_1 . وفى التكرار المرحلى الثانى n_2 انزع من كل مثلث صغير ناتجة رُبعه الأوسط.. وهكذا فتصل إلى شكل (١٧).



شكل (١٧) جوان سيربينسكي

وعند التكرارات اللانهائية تصل إلى شكل متشابه ذاتياً على كل المقاييس (اللانهاية في الصغر) الذي يكاد يخلو شيئاً فشيئاً من مثلثاته الجزئية الداخلية. وبنفس فكرة تكوين (فراكتال) بساط سيربينسكي، حاول الامتداد بها لتطبيقها على مكعب S_0 وقسمه إلى تسع مكعبات متساوية (متطابقة)

وفي التكرار المرحلي الأول إنزع تسعة الأوساط. وفي التكرار المرحلي الثاني انزع التسع الأوساط من كل مكعب أصغر وهكذا... ستصل إلى شكل (١٨) إلى ما يسمى اسفنجية منجر.



شكل (١٨) اسفنجية منجر

بالتأكيد فراكتال سيربينسكى عند التكرارات اللانهائية (وأيضاً اسفنجية منجر) لها هيكل بالغ التعقد يتضمن فراغات (وثقوب) خيالية!

وفى الواقع يرجع الفضل للرياضين (الحديثين) كوخ، بينو، سيربينسكى وجرليا (وهاوسدورف) فى أوائل التسعينيات الامتداد بالأشكال ذات التشابه الذاتى المستخدمة فى الزخارف منذ آلاف السنين وفى الرياضيات، إلى مفهوم التشابه الذاتى الذى يتضمن أشكال متشابهة ذاتيا على عدد لا نهائى من المقاييس (من التصغير).

ولقد تعرفنا على أشكال متشابهة ذاتيا قدموها بأسمائهم تعكس الروح الرياضية التجديدية لهم. وهى أمثلة أعيد الانتباه إليها لسحرها وغرابتها بعد عشرات السنين.. لتكون أمثلة للفراكتالات. ولا يقتصر سحرها وغرابتها على عملية تكوينها أو توليدها ولا على التعقد الغريب فى شكلها.. فقط ولكن يرجع جمال سحرها وغرابتها إلى خصائص لها بعيدة التصور، ستعرض لها فى البند التالى.

٣-٣-٣- سحر وغرائب لخصائص بعض الفراكتالات المشهورة

مهدت والمحت لبعض الخصائص المثيرة العجيبة من خلال العرض السابق (بند ٣-٢). لفراكتالات كوخ، بينو، سيربينسكى. تعال نلقى الضوء عليها ونحددها.

٣-٣-٣-١: سحر وغرائب (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج.

تذكر أننى طلبت منك تخمين (أو حساب) طول فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج بالرجوع إلى شكل (١٠) أ. ثم قدمت شكل (١١) ب لفراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج (على مثلث). حاول حساب محيطه (أو تخمين طوله) وحساب مساحة المنطقه الداخلية له. هل ستصل إلى أغرب خاصية.... محيط لشكل فراكتال طوله لا نهائى يحد مساحة محدودة؟ بالطبع هذه خاصية عجيبة عما تعودنا عليه فى الرياضيات البحتة. فمثلا إذا رسمنا مضلع داخل (أو خارج) دائرة وبالتكرار العادى بزيادة أضلاعه حتى تؤول إلى ما لا نهاية فإن مساحة الشكل المضلع تقترب من مساحة الدائرة (المحدودة) وكذلك محيط المضلع يقترب من محيط الدائرة (المحدود) أيضا...

تعال نتحقق من صحة هذه الخاصية الغربية: محيط (فراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج (على مثلث) طوله لا نهائي ويحد مساحة قيمتها محدودة.

أولا: طول فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج لا نهائي:

إذا رجعنا إلى شكل (١١) ب لتكوين منحنى كوخ لرقائق الثلج (على مثلث). نجد أننا في كل تكرار مرحلي iteration للعملية التي استخدمناها وهي تحويل هندسي بالمنحنى المولد  حيث تبدل كل قطعة مستقيمة بنسخة

من المولد طوله $\frac{4}{3}$ من القطعة المستقيمة المبدلة. وبالتالي فإن طول محيط المنحنى يزداد بمعامل $\frac{4}{3}$ في كل تكرار مرحلي.... هل هذا الارشاد يكفي إلى أن تتوصل بنفسك أن طول (فراكتال) هذا المنحنى ∞ ... إذا لم تتوصل إستعن بالشكل (١٩) والتوضيح التالي:

بالدباة بمثلث S_0 الذي طول ضلعه l فإن محيطه $3l$ (عند n_0).

في التكرار المرحلي n_1 يصير محيطه $3 \times \frac{4}{3} l = \frac{4}{3} \times 3l$

في التكرار المرحلي الثاني n_2 يصير محيطه $3 \times (\frac{4}{3})^2 l = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times 3l$

وهكذا في التكرار المرحلي النوني n_n يصير محيطه $3 \times (\frac{4}{3})^n l = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{4}{3} \times 3l$

$$3 \times (\frac{4}{3})^n =$$

وبأخذ النهاية عندما $n \rightarrow \infty$ فإن نهاية طول المحيط $= \infty$.

ثانيا: المساحة التي يحددها فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج محدودة

نبدأ بمثلث S_0 نفترض أن مساحته هي الوحدة (عند n_0)

في التكرار المرحلي الأول n_1 أضفنا ثلاثة مثلثات مساحتها $3 \times \frac{1}{9}$.

في التكرار المرحلي الثاني n_2 أضفنا $12 = 3 \times 4$ مثلث مساحتها

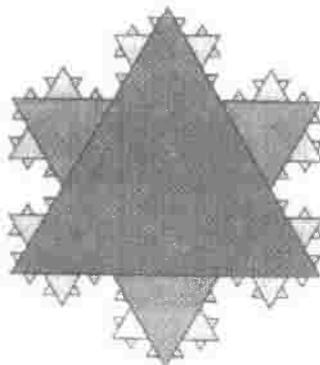
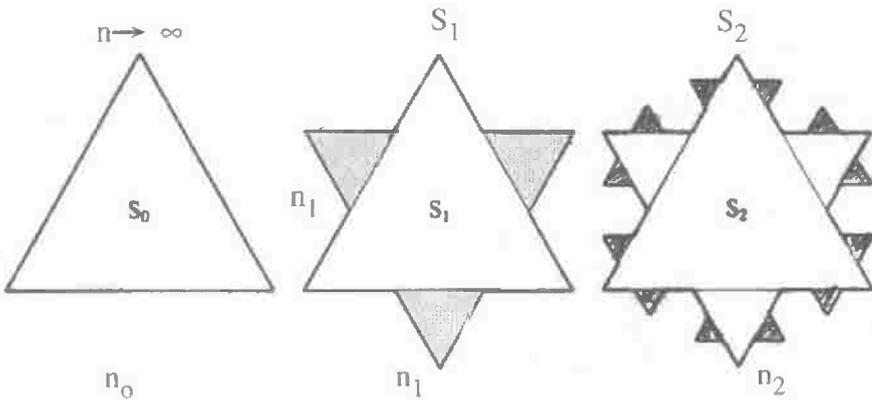
$$4 \times 3 \times (\frac{1}{9})^2 = 12 \times (\frac{1}{9})^2$$

في التكرار المرحلي الثالث n_3 أضفنا $48 = 3 \times 24$ مثلثاً مساحتها $24 \left(\frac{1}{9}\right)^3 = 48 \left(\frac{1}{9}\right)^2$

في التكرار المرحلي النوني n_n أضفنا $4 \cdot 3^{n-1}$ مثلثاً مساحتها $4 \cdot 3^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^n$.

وبذلك يصير مساحة الشكل (المثلث S_0 + المثلثات المضافة) =

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^{i-1} = 1.6$$



(التظليل للمثلثات المضافة في التكرارات المختلفة)

شكل (١٩)

٢-٢-٢ سحر وغرائب (فراكتال) منحني بينو

هل تتصور أشكالاً مستقيمة غير متقاطعة مهما تعددت قطعها المستقيمة المتصلة يمكن أن تغطي (تمر) بكل نقط سطح مربع أو أى سطح آخر يتشاكل (توبولوجيا) معه؟

فكل ما نعرفه أن سطح المربع يملأه وحدات مربعة أصغر وهكذا...

وقد نتذكر أن دودة الحرير تستطيع ملء سطح الشرنقة بخيط حرير (متصل). ولكن خيط الحرير مهما كان رفيعاً فإن جزءاً منه لا يمثل قطعة مستقيمة لأن القطعة المستقيمة لا سُمك لها بالمرّة. بالإضافة إلى أن خيط الحرير يتقاطع مع نفسه عند عمل الشرنقة. بينما أى فراكتال لا يتقاطع مع نفسه. أيضاً القطعة المستقيمة أو أى مجموعة من القطع المستقيمة المعدودة لها طول ولكن ليس لها مساحة.

وقد أشرنا عند تكوين فراكتال بينو عن طريق المنحنى المولد له (شكل ١٢) كيف أن هذا الفراكتال الذى يزداد إنتظاماً فى تعرجاته يغطي سطح المربع عندما تقترب التكرارات إلى ما لا نهاية $n \rightarrow \infty$ فهذه خاصية لأعجب فراكتال متولد من أعجب منحني مولد.

٣-٣-٣ سحر وغرائب فراكتال سيربينسكى

هل يتصور أحد وجود سطح لا نهائى مساحته صفر؟

هل يتصور أحد وجود مجسم لا نهائى حجمه صفر؟

إرجع إلى تكوين بساط سيربينسكى وچوان سيربينسكى شكلى ١٦، ١٧ ستكتشف بنفسك أن هذه الأسطح هى أسطح تتفرغ (أو تتثقب) تدريجياً فى التكرارات المتتالية، وفى التكرارات اللانهائية $n \rightarrow \infty$ لا يكاد يتبقى من داخلية السطح إلا شكل بالغ التعقيد لا يشغل جزء من وحده مساحة مهما صغرت صغراً لا نهائياً. ولذا يعد فراكتال سيربينسكى مثلاً لأعجب خاصية. سطح مساحته صفر.

ونظراً لتشاكل المربع أو المثلث مع سطح لا نهائى. فهو يعد مثلاً لخاصية أكثر غرابه وهى سطح لا نهائى مساحته صفر.

ويمكنك التوصل إلى ذلك بالرجوع لشكل (١٦) وحيث مهدنا إلى أن مجموع مساحات المربعات المنزوعة فى التكرارات n_1, n_1, \dots, n_n وعندما تؤول إلى ما لا نهاية يكون المربع (أو بالأحرى سطح المربع) النهائى مفرغ من أى منطقته مربعه مهما صغرت ومساحته صفر.

حاول التحقق من ذلك من خلال تعريف المربع الأسمى S_0 ومساحته الوحدة.

$$S_0 = \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$$

ثم الشكل S_1 فى التكرار الأول

$$S_1 = \{(x,y) : (x,y) \in S_0 \text{ \& } \text{xor } y \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$$

الشكل S_1 فى التكرار الأول كإتحاد ثمانية مربعات من تسعة مربعات صغيرة للمربع S_0 بطول $\frac{1}{3}$ للضلع عند نزع المربع (الجزئى) الأوسط.

ثم نعرف الشكل S_2 بأنه S_1 منزوع منه مربع جزئى طول ضلعه $(\frac{1}{3})^2$ لكل مربع جزئى للشكل S_1 وهكذا...

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$$

فتجدها مساوية للصفر أى أن مساحة الشكل S فى التكرار اللانهائى = صفر وبنفس الأسلوب يمكنك التوصل إلى أن فراكتال جوان سيربينسكى يؤدى إلى أن سطح مثلث المطبق عليه عملية توليد هذا الفراكتال مساحته تساوى صفر ويمكنك التحقق من ذلك بأخذ S_0 (شكل ١٧) بسطح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه l . وياعتبار أن S_0 هو اتحاد أربعة مثلثات طول ضلع كل منها $\frac{l}{3}$.

ونعرف S_1 بأنه S_0 منزوع منه المثلث الأوسط من الأربعة مثلثات المكونة له... وهكذا ننزع أواسط المثلثات الثلاثة للشكل S_1 لنكون S_2 وهكذا ثم عرف وأوجد

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n$$

فتجد أن مساحة الشكل فى التكرار اللانهائى = صفر.

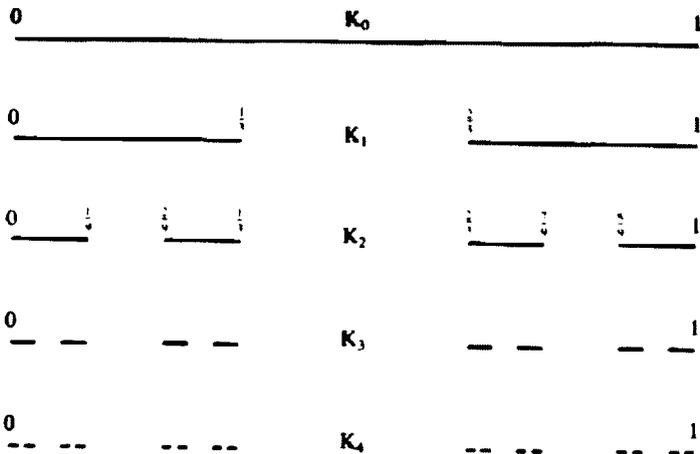
وبنفس الأسلوب يمكن التوصل إلى أنه فى الفراغ الثلاثى تكون اسفنجية متبجر

Menger Sponge فراكتال ذا حيز في الفراغ حجمه صفر. (شكل ١٨) ولكون هذا الفراكتال المتكون من تطبيق عملية لتوليدته على مجسم مكعب، والمكعب يتشاكل توبولوجيا مع مجسم (حيز) لا نهائي. فإن هذا الفراكتال يعتبر مثلاً لمجسم (حيز) لا نهائي حجمه صفر. هل يوجد سحر وغرائب أكبر من التي (للفراكتالات) لمنحنيات Koch، وبينو، وسبيرنيسكى، ومنجر...)?

ولقد كان لهذه الخصائص العجيبة للفراكتالات المشهورة أثر كبير في استثارة ماندلبروت لإختراع وبلورة هندسة الفراكتال.

والواقع أن حيز (في فراغ ذو بعدين وذو ثلاثة أبعاد) مقياسه صفر ربما تكون فكرته قد نبتت من مجموعة كانتور Cantor Set (١٨٨٣). وتتكون عن طريق قطعة مستقيمة S_0 تنزع ثلثها الأوسط لنصل إلى S_1 . ثم نزع الثلث الأوسط لكل قطعة متبقية في S_1 لنصل إلى S_2 .. وهكذا نصل في التكرار المرحلي اللانهائي إلى المجموعة S المحتوية على عدد من النقط الممكن عددها (معدودة) Countable المتفرقة مقياس طولها = صفر. (لاحظ أن مجموعة نقط معدودة ليس لها طول، ومجموعة قطع مستقيمة معدودة ليس لها مساحة)

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n = 0 \quad \text{انظر شكل (٢٠) لأن}$$



شكل (٢٠) تكوين مجموعة كانتور للتثليات

ويمكن أن نتوصل إلى ذلك عن طريق تعريف

$$S_0 = [0, 1]$$

$$S_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$$

$$S_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$$

وهكذا

لاحظ أن S_n هي اتحاد فترات جزئية مقفولة Closed عددها 2^n من الفترة $[0, 1]$ ، وتكون على شكل: For appropriate integer r : $[r/3^n, (r+1)/3^n]$ ، وكل فترة

$$S_{n+1} \subset S_n \subset [0, 1], \quad 1/3^n = 3^{-n}$$

وعلى ذلك تكون S هي مجموعة كل النقط المشتركة في S_0, S_1, S_2

$$S = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_n \quad \text{أي أن}$$

وبذلك S لا تحوى أى فترات جزئية. لأن $[0, 1]$ التى تحوى عدداً لا نهائياً من الفترات الجزئية لا تتقاطع مع S .

وبملاحظة أن طول $S_0 = [0, 1]$ هو 1، وطول S_1 هو $2/3$

وطول S_{n+1} هو $\frac{2}{3}$ لطول S_n . وهذا يؤدي إلى أن طول

$$S_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

وبأخذ النهاية عند $n \rightarrow \infty$ فإن طول $S = 0$.

أي أن طول مجموعة كانتور للتثليثات مساوى للصفر.

وهنا نتساءل هل فكرة استبعاد الجزء الأوسط لمجموعة كانتور هي التى أوحى إلى فكرة استبعاد المربع الأوسط فى تكوين بساط سيربينسكى أو أوحى إلى فكرة استبدال الجزء الأوسط بساقين متساوين لمثلث فى المنحنى المولد لفراكتال كوخ Koch لرقائق الثلج، أو بالجزء الأوسط فى مولد بينو... إذا كانت الإجابة بنعم! فماذا سوف يلهم الرياضيون أو يلهمك من توليد الأشكال المشهورة ذات الأفكار المتجددة ومن خصائصها العجيبة الغريبة الساحرة؟ سوف تتعجب أكثر عندما تعلم أن هذه الخصائص العجيبة تفسر ظواهر فى الطبيعة nature والتكنولوجيا.

فمثلا من مجموعة كانتور (للتثليثات) وما تؤول إليه من نقاط طولها صفر كأنها غبار موزع بطريقة معينة هي التي تصورها ماندلبورت في توزيع التشويش على خطوط الإتصال. فقد وجد ماندلبروت في مجموعة كانتور نموذجاً لحدوث الأخطاء فى قنوات الاتصال. حيث تظهر فترات خالية من الشوشرة ثم فترات لظهور مفاجيء لها. وبتحليل دقيق لفترات الشوشرة ذاتها وجد أنها تحتوى على فترات خالية منها.

كما أن خاصية (فراكتال) منحني كوخ لمحيط لا نهائى يحد مساحة محدودة نجد أمثلة له فى جسم الإنسان وفى النبات. فالأوعية الدموية المتشعبة (المتشابهة ذاتياً) أطوالها لا نهائية ولكنها تحيط بحيز محدود من الدم الذى يعتبر غالباً جداً. وكذلك بالنسبة للشعيرات الجذرية فى النبات اللانهائية فى الطول وتكتنز الحيز المحدود للماء الغالى جداً. وكذلك بالنسبة للملايين الحويصلات الهوائية للرئتين التى حيزها محدود والهواء المنقى الغالى جداً جداً.

وقد يكون D.N.A يخترن قواعد تحويل بسيطة مثل المولدة لمنحنيات كوخ وسيربينسكى ليخترن معلومات التشعبات الهائلة فى الجسم.

وفى ختام هذا الفصل أرجو أن نكون قد وضحنا الفراكتال بخاصية أساسية له هى التشابه الذاتى. فأى شكل يتكون من نماذج مصغرة له نسمية متشابه ذاتياً. سواء على عديد من المقاييس Scales أو على مدى كل المقاييس. وقد وسع مفهوم التشابه الذاتى الرياضيون الحديثون كانتور. هاوسدورف، وچوليا وكوخ وبينو، وسيرينيسكى.. ليشمل الأشياء (الأشكال) المتشابهة ذاتياً على مدى المقاييس اللانهائية. وقدما تعريف الفراكتال كشكل له خاصية التشابه الذاتى. أو ببساطة الفراكتال كشكل هندسى (متعرج) يمكن تقسيمه إلى أجزاء كل (على الأقل تقريبا) يعتبر جزءاً مصغراً من الكل. وقد لاحظنا أن الفراكتال لا يتقاطع مع نفسه. كما ميزنا بين فراكتالات (أشكال متشابهة ذاتياً) مضبوطة (رياضية - اصطناعية) وأخرى إحصائية موجودة فى الطبيعة أو فى بعض لوح فنية. كما قدمنا رسم أشكال هندسية متشابهة ذاتياً (رياضية - مضبوطة) لعدد قليل من المقاييس Scales. وفى الواقع أنه

حتى استخدام التكنولوجيا المتقدمة تعجز عن رسم (وتوضيح) شكل يبين التشابه الذاتي على مدى عدد لا نهائى من المقاييس.

كما قدمنا نبذة عن التكرار المرحلى iteration الذى يحدد مولد أو عملية... لتوليد فراكتالات مشهورة. ثم رسم هذه الفراكتالات خطوة خطوة فى التكرارات المختلفة بالنسبة لمنحنيات كوخ، بينو، سيرنيسكى، ومنجر كما قدمنا خصائص وملاحظ عجيبة لهذه الفراكتالات لا يتصورها العقل كمحيط لا نهائى لفراكتال كوخ (على مثلث) لرقائق الثلج يحد مساحة محدودة، وسطح لا نهائى لفراكتال سيرنيسكى يحد مساحة صفر، وشكل مجسم لفراكتال منجر لا نهائى حجمه صفر. كما أبرزنا الجمال الرياضى البديع لفراكتالات ساهم اظهارها تقدم الكمبيوتر وحاولنا ربط الفن الرياضى بفن الرسم المعاصر المبنى فى جوهره على الفراكتالات لفنانين لهم أصالة فنية أو فنانين يعتمدون على برمجيات للفراكتال بالكمبيوتر على رسم لوحهم الفنية.

وقد أثار تقديم محتوى هذا الفصل خاصية أساسية للفراكتالات وهى التشابه الذاتي. وهذا يمهد لتقديم خاصية أساسية هامة أخرى للفراكتالات فى الفصل القادم وهى البعد الفراكتالى.

تعقيب (٣): تضامين implications وانعكاسات حول تنمية الابتكار التدريسى لمعلم

الرياضيات

قدمنا فى نهاية هذا الفصل ملخصاً لمحتواه... لكن فى هذا التعقيب نشير إلى توظيف أسلوب عرض المحتوى لتنمية النواحي الابتكارية للمعلم، المتعلم لخاصية أساسية جديدة عليهم تسهم فى نمو أفكار متشعبة للهندسة المعاصرة التى من المحتمل ألا يكون قد سمع عنها شيئاً. فالعرض موجهٌ أساساً بهدف تنمية ابتكارية المعلم التى تظهر وتنعكس فى ابتكارية تدريسه.

والآن إقرأ مرةً أخرى هذا الفصل ليس بغرض التعرف وتعلم الأفكار والموضوعات الجديدة فيها فقط ولكن بقصد أن تتلمس كيف أن أسلوب أو شكل

عرض فكرة أو جزء من المحتوى أثار إحساسك وخيالك أو حفرك على معاشته بعقلك ومشاعرك بما أدى إلى إنغماس (عميق) دفعك على صنع أو إعادة صنع (عمل) شيء أو فكرة أو شكل جديد.

وسجلها فى مذكرات لك. ثم لاحظ بعد ذلك نمط تدريسيك ستجد أنك تلقائياً تعكس هذا الأسلوب فى تدريسيك ليستمتع تلاميذك بتعلم ما يثير إحساسهم وخيالهم وتفكيرهم ويحفزهم لعمل (صنع الرياضيات).

فتكامل الإحساس والخيال مع الأفكار مع العمل هو ما ينمى ابتكارك فى التدريس وابتكار تلاميذك فى الرياضيات.

ستجد فى المذكرات التى كتبتها تعبيراً عن وصف ملامح أسلوب العرض لمحتوى هذا الفصل لتنمية ابتكارك التدريسي مثل:

١ - أسلوب العرض أسلوبٌ جديدٌ لم تعهده فى أى كتاب جامعى - مدرسى - ثقافى ... فهو أقرب ما يكون حديثاً من القلب لقارىء عزيز ليكون قريباً جداً منه، يرى بعينه ويسمع بأذنيه ويحس بإحساسه ويفهم بعقله ويتأمل بتأمله ويتخيل بخياله ويشاركه فى صنع الرياضيات مهما كانت جديدة - عصرية غريبة عليه. فالأسلوب يعطى مساحة للمشاركة بينى وبين القارىء وجدانياً وخيالياً وعقلياً وتأملياً فى كشف النقاب عن الأفكار الرياضية وفى التفتيش عن نماذجها وأمثلتها... وفى صنع الأشكال الهندسية الجديدة.. وفى نمو الأفكار والأساسيات.

٢ - التبسط والتبسط فى تقديم أى جزء من المحتوى بأساليب متعددة. فالتبسيط عمل إبتكارى يعودك الأسلوب عليه.

٣ - جعل غير المؤلف مألوفاً (مثل تقديم خاصية التشابه الذاتى).

٤ - تنمية الإحساس بالطبيعة والإحساس بنفسك.

٥ - تنمية تذوق الجمال الرياضى والإحساس بجمال الأشكال الرياضية والفراكتالات الغريبة وجمال اللوحات الفنية التى باطنها فراكتالات منها ما يعكس الإحساس بإيقاعات الطبيعة. فعمل لوحة فنية ابتكار (ابداع)، وتذوق

جمالها نوع من الابتكار. وعلى ذلك فالأسلوب الذى يعمل على تنمية تذوقك بالجمال الرياضى والإحساس به هو أيضا ينمى فيك نوع من الابتكار الرياضى وبالتالي الابتكار فى تقديم أى مادة رياضية لتلاميذك.

٦ - تنمية الدافعية للبحث والتفتيش Search عن فراكتالات فى الرياضيات وفى الطبيعة وفى جسم الإنسان وفى الفن.... فالبحث والتفتيش مرحلة هامة فى أى عمل رياضى لجمع مادة رياضية تساعد فى حل مشكلة بحثية أو إختراع وابتكار رياضى. ومن جهة أخرى يولد الميل لهواية التجميع والتصنيف (مثل هواية تجميع طوابع البريد والعملات...) هذا الهواية بدورها تؤدى إلى تنمية الحب للرياضيات. وهذا الحب (والعشق) للرياضيات هو النافذة لحب الإستطلاع الرياضى، وللاكتشاف والاختراع الرياضى للبعض.

٧ - تنمية الخيال والإحساس المصاحب لعملية البحث والتفتيش.

٨ - معايشة الرياضيين فى تجديدهم ونمو أفكارهم الرياضية.

٩ - إثارة الحيوية فى صنع الفراكتالات والاستمتاع بعملية تكوينها كزهرة غريبة تفتح رويداً رويداً.

١٠ - إثارة الدافعية للقيام بإكمال عمل الفراكتالات المشهورة. مع تنمية الدقة والانتقان فى عملها.

١١ - إثارة اكتشاف واختراع ومتابعة الفكر الرياضى الأصيل. مثلاً فى التجديد المستمر لفكرة الجزء الأوسط للمولد generator للفراكتالات المشهورة لكوخ، وبينو، وسيربينسكى...

١٢ - تنمية حب الاستطلاع المعرفى لجذور الأفكار الجديدة... مثل جذور فكرة الجزء الأوسط للمولد فى مجموعة كانتور التليثيه.

١٣ - تنمية الخيال الرياضى لجعل المستحيل ممكناً من خلال الإثارة للتعرف على سطح لانهاى مساحته صفر... وبقية خصائص الفراكتالات التى تعكس سحرها وغرائبها.

١٤ - تنمية التفكير الرياضى (المنطقى والشكلى) من خلال التمييز بين التشابه الذاتى المضبوط (الرياضى - الاصطناعى) وبين التشابه الذاتى الاحصائى. وأيضاً من خلال إرشادات لاثبات الخصائص الغريبة لبعض الفراكتالات المشهورة.

١٥ - استخدام أسئلة وتساؤلات، والإجابة الفورية على بعضها أو إرجاء الإجابة بقصد تحضين الفكرة الرياضية ولتوظيف الخيال والذاكرة والشعور واللاشعور فى صنع الفكرة الجديدة.

١٦ - الانطلاق بالفكرة الرياضية وربطها بالمجالات المختلفة (أى عمل روابط رياضية (mathematical Connections).

١٧ - التعبير عن فكرة رياضية جديدة بأساليب مختلفة لفظية أو رسوم فى مواضع مختلفة لتوضيح الفكرة (أو المفهوم....) ولتسهيل هضمها على مراحل.

١٨ - الاثارة للتأمل فى الطبيعة وفى لوحات فراكتالات مشهورة غريبة (مجموعة جوليا، مجموعة ماندليبروت...) ولوحات مستوحاه. من الفراكتالات باستخدام الكمبيوتر.

١٩ - استخدام مداخل مختلفة للتوصل لنفس الفكرة الرياضية أو صنعها. مثل تكوين فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج عن طريق المولد (وتطبيقه على قطعة مستقيمة) وعن طريق فراكتال الشجرة الرياضية وقمتها.

٢٠ - التشويق واثارة التفكير الرياضى بالتفاعل المستمر بإحساس صادق وفكر متجدد تلقائى خالى من أى اصطناع.

٢١ - محاولة للاندماج فى رحلات وجولات لاستكشاف الأفكار الرياضية وصنعها.

والآن حاول إضافة نقطاً أخرى ثم أضف أمثلة لها وللنقط السابقة... أمثلة ما تزال عالقة بذهنك ووجدانك. ثم سجلها فى مذكراتك. ثم حاول أن تعكس هذا الأسلوب فى تدريسك تدريجياً فستجد بنفسك مدى ثمر مقدراتك الابتكارية فى التدريس وتعود على كتابة مذكرات فى هذا الشأن.

المراجع

١- جيمس جلايك (ترجمة على يوسف) (٢٠٠٠): «الهيولية تصنع علماً جديداً» القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.

٢ - أ.د/ نظلة حسن أحمد خضر (١٩٨٨): «حكاية زخرفة البلاط ولغز الميراث» سلسلة حكايات وألغاز رياضية تنمى التفكير الهندسى والابتكارى لسن ١٠ - ١٥ ومشوقة لجميع الأعمار القاهرة - الهيئة المصرية للكتاب.

3- Drazin, P. G (1993) "Non Linear Systems" Cambridge Univ Press.

4 - Mondelbrot, B.B & Frame, M (1999): "The Canopy and Shortest Path in a Self-Contacting Fractal Tree". The Mathematical Intelligencer Vol 21 No2 Spring (1999) New York, Springer Verlang. pp 18 - 27.

5 - Taylor, R.P (2002) : Order in Pollack Chaos" Scientific American, New York Vol 287 No - 6, December 2002. pp 84 - 89.

6 - Thamos, D.A (2002): "Modern Geametry" US - Brooks/ Cole - Thomson learning.

www.angelfive.com.

www.contestsk.com.

www.math.rice.edu.

<http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Julia.html>

<http://www/history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Koch.html>

<http://www.history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Peano.html>

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Sierpinski.html>

الفصل الرابع

البعد الفراكتالي كخاصية
أساسية للفراكتالات

البعد الفراكتالى كخاصية أساسية للفراكتالات

مقدمة:

توصلنا فيما سبق إلى أن الفراكتال يمكن تعريفه عن طريق أحد خواصه الرئيسية وهى التشابه الذاتى. يوجد خاصية رئيسية أخرى يمكن تعريف الفراكتال على أساسها. هذه الخاصية هى البعد الفراكتالى Fractal dimension. وهذا البعد يدل على مدى تعرجات الفراكتال أو على تعقيد Complexity شكله. ومن الغريب كآى خاصية للفراكتال أننا نجد أن البعد الفراكتالى يكون هو نفسه البعد الفراكتالى لأشكال فراكتال تبدو مختلفه كل الاختلاف فى مظهرها. فمثلاً البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ لرقائق الثلج هو نفسه البعد الفراكتالى للشاطئ الإنجليزي!

وكانت المشكلة هى إختيار أنسب الأبعاد التى يعرفها ماندلبروت لتكون أكثر لياقة لتحديد بُعد فراكتال ما فى هندسته. هل هى الأبعاد الإقليدية أم الأبعاد التوبولوجية أم أبعاد قدمها هاوسدورف تعرف بأبعاد الصندوق تقوم على العد؟

وقد شغل بال ماندلبروت التوصل إلى البعد الفراكتالى عند مواجهته مشكله: إيجاد طول الشاطئ الإنجليزي. وكان ذلك قبل إعطائه إسم الفراكتال لهندسته. ولذا فإن البعد الفراكتالى كان يطلق عليه البعد الكسرى fractional dimension. ويُعد هذا شيئاً جديداً غريباً. فقد تعودنا أن تكون الأبعاد أعداداً صحيحة (موجبه) مثل: الخط المستقيم أو بالأحرى المحور له بعد واحد والمستوى له بعدان والفراغ له ثلاثة أبعاد... وهكذا بالنسبة للبعد التونى للأبعاد الأقلية. وكذلك فى الأبعاد التوبولوجية القطعه المستقيمة (أو المنحنى البسيط) ذات بعد واحد والمربع (أو الأحرى داخلته) ذو بعدين، والمكعب (أو بالأحرى داخلته) ذو ثلاثة أبعاد... وهكذا.

ولما كان منحنى الفراكتال يختلف فى تعرجاته وتعتيده عن القطعة المستقيمة التى

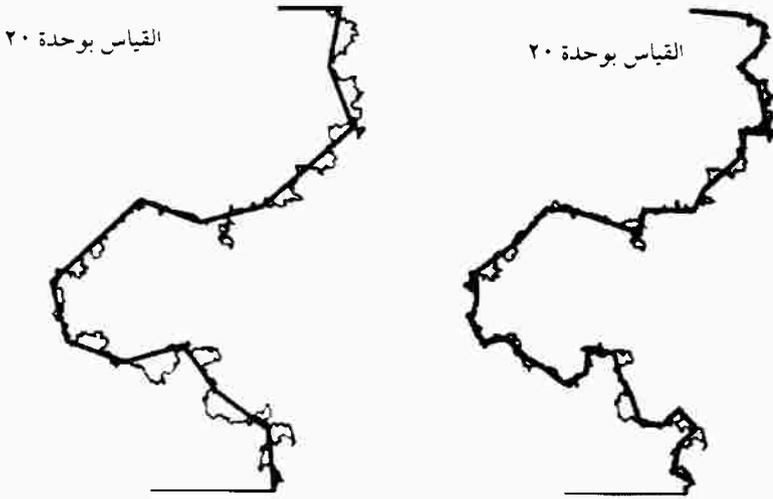
بعدها التوبولوجى واحد « ١ » فقد جعل ذلك ماندلبروت يستخدمُ بعداً للفراكتال يكون أكبر من البعد التوبولوجى للقطعة المستقيمة. وقد دعاه ذلك لأن يعرف الفركتال كمجموعة set بعدها أكبر من البعد التوبولوجى لها.

رعلى ذلك سيكون مدخلنا فى تقديم البعد الفركتالى هو ماندلبروت ومشكلة إيجاد طول الشاطئ الإنجليزى. والتمهيد إلى قاعدة إيجاد البعد الفركتالى واشتقاقها عن طريق الأبعاد الإقليدية $R^1, R^2, R^3 \dots R^n$ والبعد التوبولوجى d . ثم نُقدم طرقاً مختلفة لحساب البعد الفركتالى لبعض الفراك탈ات (ومنها المشهورة) التى قدمناها فى الفصل السابق مع الإشارة إلى المعالجات الرياضية الصارمة. ثم نتعرض لأبعاد بعض فراك탈ات اللوحات فنية وفراك탈ات فى الطبيعة (واقعيه أو احصائيه).

٤-١- ماندلبروت وطول الشاطئ الإنجليزى

نرجع إلى رحلة ماندلبروت إلى الشاطئ الإنجليزى وإفتانته وانبهاره بروعة تعرجاته وخليجانه، وبأواجه المتلاطمة التى تخفى بعض التعرجات تارة وتظهر تعرجات كانت مخفيه تارة أخرى. ويتحول بنظره إلى أعلى فيتعجب من الغيوم الملبدة وانقشاعها... كل هذا جعله يتشكك فى مقدرة الهندسة الإقليدية على وصف هذه الأشكال الطبيعية.. وأخذ يفكر فى خواص أخرى غير إقليديه تبرزها هذه الأشكال (الأشياء). ثم توصل إلى أن تعرجات وخليجان وإنكسارات الشاطئ لها تشابه ذاتى.. وهى شكل فركتال. فعاد به التفكير مرة أخرى ليخترع وسيله لقياس طول هذا الشاطئ الغريب. وهو كأي شكل فركتال فى الطبيعة (واقعى أو احصائى - غير مضبوط مثل الفراك탈ات الرياضية المضبوطة). فهو متشابه على مدى مقاييس متعددة. ولكون الفراكتال شكل معقد ولا يتقاطع not overlapping فإن من خواصه الرئيسية أن تركيبه structure يتغير على كل المقاييس الصغيرة. بمعنى أننا لو استخدمنا مسطرة طولها ٥٠ متر كوحدة للطول مثلاً فى قياس الشاطئ نجد أننا أغفلنا كثيراً من التعرجات والخليجان. وإذا صغرنا الوحدة إلا ٢٠ متر فقياس طول الشاطئ يكون أكثر دقة إلا أنه يهمل أيضاً بعض التعرجات والخيجان الأصغر.. وهكذا أنظر شكل (٢١). بالإضافة إلى أن الشاطئ يتغير بعوامل الطبيعه من مد وجذر وعمليات شاطئه أخرى. إلا أن الخليج سيظل خليجاً مهما تعرج.....

هذا يعطينا فكرة عن أن طول الشاطئ الإنجليزي لا نستطيع الإجابة عليه بدقه رياضية عالية. وقد دعا ذلك ماندبروت إلى أن يفكر في إعطاء خاصية للشاطئ المعقد باختراع مفهوم البعد الفراكتالى. وكان يقصد به البعد الكسرى لأنه توصل إليه قبل سنوات عديدة من إطلاق إسم الفراكتال على هندسته. ثم استخدم البعد الفراكتالى للتمييز بين تعقيد شكل فراكتال وتعقيد أكبر لشكل فراكتال آخر. فكلما زاد التعقيد زاد البعد الفراكتالى.



شكل (٢١)

٤-٢- الأبعاد الإقليديه - البعد التوبولوجى d - بعد الصندوق D:

كما نعرف الخط المستقيم (أو بالأحرى المحور) له بعد dimension واحد، والمستوى له بعدين والفراغ الثلاثى له ثلاثة أبعاد... وهكذا الفراغ النونى له ن من الأبعاد. وهذه هى الأبعاد الإقليديه التى نعرفها وقد نشأت من تعريف اقليدس للنقطة وللمستقيم والمستوى والفراغ، ومن هندسة الإحداثيات (الهندسية التحليلية) لديكارث. على أساس أن أى نقطة على المستقيم (المحور) لها إحداثى واحد وأى نقطه على المستوى لها إحداثيين، والنقطه فى الفراغ لها ثلاثة احداثيات... وهكذا النقطة فى الفراغ النونى لها ن من الاحداثيات ونشير إلى الفراغات الإقليديه ذات الأبعاد ١، ٢، ٣... ب R^1 و R^2 و R^3 ...

أما البعد التوبولوجي d فقد قدمه پوانكربيه (١٩٠٥) حيث إعتبر:

أ- البعد التوبولوجي للنقطة أو لمجموعة محدودة من النقط صفر أى $d=0$.

ب- البعد التوبولوجي للقطعة المستقيمة (أو المنحنى المكافئ لها توبولوجيا) هو واحد أى $d=1$.

ج- البعد التوبولوجي للمثلث (أبو بالأحرى سطح المثلث أو داخلية المثلث - وأى شكل يتكافئ معه توبولوجيا كالمربع - الدائرة...) فى الفراغ الاقليدى R^2 هو إثنين أى $d=2$.

د- البعد التوبولوجي للمكعب (داخلية المكعب) فى الفراغ الاقليدى R^3 هو ثلاثة أى $d=3$. أى أن البعد التوبولوجي للقطعة المستقيمة (قد تسمى خليه cell) فى الفراغ الإقليدى R^1 هو $d=1$ ، البعد التوبولوجي للمربع (أو بالأحرى سطح المربع أو داخلية) فى الفراغ الاقليدى R^2 هو $d=2$ ، البعد التوبولوجي للمكعب فى الفراغ الاقليدى R^3 هو $d=3$.

هـ- ... وهكذا البعد التوبولوجي لما يناظر المكعب فى فراغ اقليدى أكبر من الفراغ الثلاثى (وتسمى بالمكعبات العليا hyper-cubes) يساوي بعد هذا الفراغ الإقليدى، فمثلا البعد التوبولوجي للمكعب العلوى hyper cube فى الفراغ الاقليدى الرابع R^4 هو $d=4$ ، البعد التوبولوجي للمكعب العلوى فى الفراغ الاقليدى النوني R^n هو $d=n$.

كانت فكرة پوانكربيه للبعد التوبولوجي مبنية على أساس القطوع cuts التى تقسم الشكل بحدوديات boundaries، بالإضافة إلى استخدام الاستنتاج الرياضى.

إذا كان التقسيم لشكل يحدث عن طريق نقط، بإعتبار النقطة بعدها التوبولوجي صفر فيكون الشكل بعده التوبولوجي أكبر بواحد، وإذا كان تقسيم الشكل بمنحنى بعده التوبولوجي ١ فيكون الشكل بعده التوبولوجي أكبر بواحد من البعد التوبولوجي للمنحنى وهكذا. وعلى ذلك فإن:

أ - القطعة المستقيمة (أو أى منحني يكافئها توبولوجيا) يمكن تقسيمها بقطع cuts عبارة عن نقطة أو مجموعة من النقط (أى بنزق نقطه أو أكثر). وحيث أن البعد التوبولوجى للنقطة (أو مجموع النقط) صفرا فيكون البعد التوبولوجى للقطعة المستقيمة $d=1$.

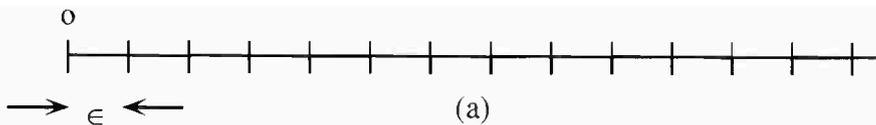
ب - السطح يمكن تقسيمه بقطع cuts عبارة عن منحنيات بسيطة (أى بقطع المنحنيات) بعدها التوبولوجى ١ فيؤدى ذلك أن البعد التوبولوجى للسطح ٢ أى $d=2$.

ج - المجسم يمكن تقسيمه بقطع cuts عبارة عن أسطح بعدها التوبولوجى ٢ فيكون البعد التوبولوجى للمجسم ٣ أى $d=3$... وهكذا.

أما مجموعة كانستور التثليثيه فلا مكان لها فى الأبعاد الإقليديه ولكن البعد التوبولوجى لها فهو صفر أى $d=0$ لأنها مجموعة جزئية من R طولها صفر. وقد عمم هاوسدورف (١٩١٩) البعد التوبولوجى d للأشكال غير البسيطة بتقديم أفكار ما يسمى بُعد الصندوق D . حيث يكون البعد D ليس بالضرورة عدد صحيح فيكون $D \neq d$ للأشكال غير البسيطة (المعقده)، $D=d$ للأشكال البسيطة ويكون البعد D أقل أو يساوى البعد الاقليدى m . أى $d \leq D \leq m$.

وبُعد الصندوق يماثل تعريف البعد الذى قدمه هاوسدورف D . وهو نفسه الذى اختاره ماندبروت ليعبر عن البعد الفراكتالى D . وللتوصل إلى تعريف بُعد الصندوق D دعنا نأخذ قطعة مستقيمة طولها l فى الفراغ الاقليدى ذى بعد واحد R^1 . شكل (٢٢) أ. إذا أردنا أن نغطى هذه القطعة المستقيمة بمجموعة من القطع المستقيمة الصغيره (غير المتقاطعه) التى طول كل منها ϵ فإننا نجد أن عدد هذه القطع المستقيمة الصغيره (ϵ) $N(\epsilon)$ التى تغطى القطعة المستقيمة l هو تقريبا $\frac{l}{\epsilon} \equiv \epsilon^{-1}$ أى أن

$$N(\epsilon) = l \epsilon^{-1}$$



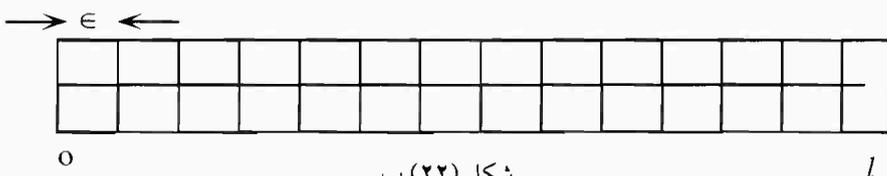
شكل (٢٢) أ

(تغطيه قطعه مستقيمه طولها l في فراغ R^1 بقطع مستقيمه أصغر بطول ϵ)

وبالطبع كلما صغر طول القطعة الصغيرة ϵ كلما زاد عددها الذي يغطي القطعة المستقيمة l . وعندما $\epsilon \rightarrow 0$ فإن العدد للقطع المتناهية في الصغر تكاد تغطي تماما القطعة المستقيمة l (التي طولها l).

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} N(\epsilon) = l \epsilon^{-1} = \left(\frac{l}{\epsilon}\right) \text{ أي } 1$$

وبالمثل إذا كانت القطعة المستقيمة التي طولها l في الفراغ الإقليدي ذو بعدين R^2 . فإنها تُغطي بمربعات صغيرة طول ضلع كل منها ϵ . شكل (٢٢) ب.



شكل (٢٢) ب

قطعة مستقيمة طولها l في فراغ

الإقليدي ذي بعدين R^2 تغطي بمربعات صغيرة طول ضلع كل منها ϵ

لاحظ أن عدد القطع المستقيمة الصغيرة التي طول كل منها ϵ التي تغطي القطعة المستقيمة l في R^1 هو نفسه عدد المربعات الصغيرة التي طول ضلع كل منها ϵ وأن القطعة المستقيمة l هي شكل بسيط بعده التوبولوجي ١، وعلى ذلك عدد المربعات الصغيرة التي طول كل منها ϵ هي $N(\epsilon)$ وهي تساوي تقريباً $l \epsilon^{-1}$. الخلايا $N(\epsilon)$ التي تغطي الشكل البسيط قد تكون قطعاً مستقيمة صغيرة طول كل منها ϵ أو مربعات صغيرة طول ضلع كل منها ϵ أو مكعبات صغيرة طول ضلع كل منها ϵ أو مكعبات عليا..... تبعاً للفراغ الإقليدي الموجود فيه الشكل.

أما إذا أخذنا دائرة نصف قطرها r وحاولنا تغطيتها بمربعات (خلايا) طول ضلع كل منها ϵ فإن عدد هذه المربعات $N(\epsilon)$ يساوى تقريباً $\frac{\pi r^2}{\epsilon^2}$ شكل (٢٢) ج.
وكما عرفنا البعد التوبولوجي للدائرة ٢ أى أن

$$N(\epsilon) \equiv \frac{\pi r^2}{\epsilon^2} \left(\frac{l}{\epsilon} \right)^2$$

فهل الأس ٢ للقيمة $(\frac{l}{\epsilon})$ هو البعد التوبولوجي ٢ للدائرة كما كان الأس (١) للقيمة $(\frac{l}{\epsilon})$ هو البعد التوبولوجي للقطعة المستقيمة فى المثال السابق..... استخدم أمثله أخرى لأشكال بسيطة بأبعاد توبولوجيه ١، ٢، ٣... فى الفراغات الإقليديه R^1, R^2, R^3, \dots وغطبها بخلايا تبع كل فراغ (قطع مستقيمة طول كل منها ϵ أو مربعات طول ضلع كل منها ϵ أو مكعبات عليا طول ضلع كل منها ϵ) ستوصل إلى أن

$$N(\epsilon) \equiv V \left(\frac{l}{\epsilon} \right)^d \dots (1)$$

حيث V پارامتر كان فى حالة القطعة المستقيمة l وفى حالة الدائرة $2/\pi r^2$ ، d البعد التوبولوجي للشكل البسيط المستخدم.

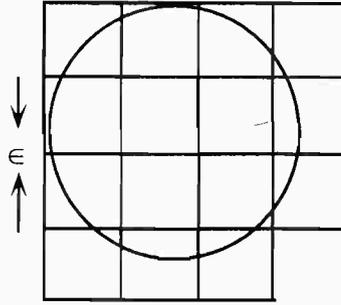
وإذا كان الشكل البسيط هو قطعة مستقيمة طولها الوحدة أو مربع طول ضلعه الوحدة أو مكعب طول ضلعه الوحدة فإن.

$$N(\epsilon) = \left(\frac{l}{\epsilon} \right)^d = (\epsilon^{-1})^d \dots (2)$$

بأخذ اللوغريتم للطرفين فإن البعد التوبولوجي للأشكال البسيطة d يكون

$$d = \frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } (\epsilon^{-1})} = \frac{\ln (\epsilon)}{\ln (\epsilon^{-1})} \dots (3) \text{ فى هذا الفصل ١٠٦}$$

حيث $N(\epsilon)$ عدد وحدات الخلايا التى تغطى الشكل البسيط، ϵ^{-1} عدد القطع المستقيمه ϵ وتعتبر ϵ أيضاً طول ضلع الخلية.

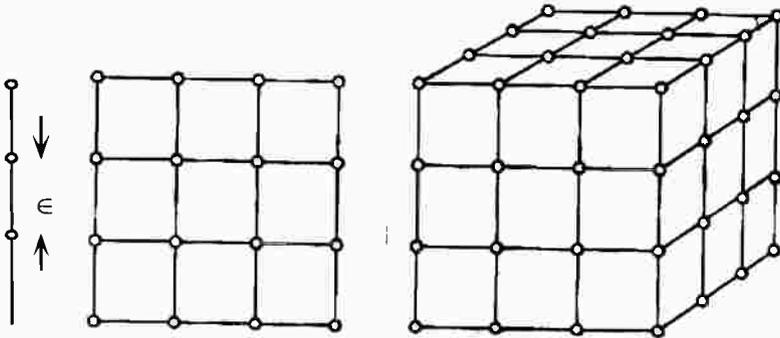


شكل (٢٢) ج

(غطاء دائرة نصف قطرها ٢ بعدد من

المربعات $N(\epsilon)$ بضلع طول ϵ)

إذا لم تستطع التوصل إلى القاعدة (١)، (٢) أو تريد التحقق منها استخدم الأشكال (الأشياء) البسيطة: قطعة مستقيمة (Segment) طولها الوحدة، مربع (Square) طول ضلعه الوحدة، مكعب (cube) طول ضلعه الوحدة شكل (٢٣) مع الاستعانة بالجدول (١).



شكل (٢٣) ج

(قطعة مستقيمة - مربع - مكعب)

Object	ϵ	d	$(1/\epsilon)^d$
Segment	1/3	1	$[1/(1/3)]^1 = 3$
	1/4		$[1/(1/4)]^1 = 4$
	1/5		$[1/(1/5)]^1 = 5$
Square	1/3	2	$[1/(1/3)]^2 = 9$
	1/4		$[1/(1/4)]^2 = 16$
	1/5		$[1/(1/5)]^2 = 25$
Cube	1/3	3	$[1/(1/3)]^3 = 27$
	1/4		$[1/(1/4)]^3 = 64$
	1/5		$[1/(1/5)]^3 = 125$

جدول (١)

(البعد التوبولوجي d وطول القطعة المنقبة الصغيره ϵ وعدد الخلايا)

ولمزيد من الايضاح والإرشاد تعالى نشترك القاعدة (١) مرة أخرى. وهي القاعدة التي تربط البعد التوبولوجي d، طول القطعة المستقيمة ϵ التي تقسم بها طول ضلع الشكل البسيط الأصلي (سواء قطعة مستقيمة أو ضلع مربع أو مكعب أو مكعب علوى طولها الوحدة)، وعدد الخلايا التي انقسم بها الشكل البسيط الأصلي (سواء عدد قطع مستقيمة ϵ أو مربعات صغيرة ϵ^2 أو مكعبات صغيرة $\epsilon^3 \dots$) ونرمز لها (عدد الخلايا) بالرمز $N(\epsilon)$.

- في البداية نسترجع أن البعد التوبولوجي لقطعة مستقيمة في الفراغ الإقليدي R^1 هو ١ أى $d=1$ ، البعد التوبولوجي للمربع في مستوى (فراغ إقليدي R^2) هو $d=2$ ، البعد التوبولوجي للمكعب في فراغ إقليدي ذو ثلاثة ابعاد R^3 هو $d=3 \dots$ وهكذا.

وأنا نسمى القطعة المستقيمة، المربع، المكعب... بالخلايا في بعد واحد، بعدين، ثلاثة أبعاد..

- بأخذ الشكل البسيط الأصلي قطعة مستقيمة طولها الوحدة ثم تقسيمها إلى قطع مستقيمة (صغيرة) جزئية طول كل منها $\frac{1}{3}$ أى $\epsilon = \frac{1}{3}$. فإن عدد الخلايا (القطع

المستقيمة الجزئية) المتكونه هي ٣ أى: $N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\frac{\epsilon}{3}}\right)^1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^1 = 3$

وبتصغير ϵ بحيث $\epsilon = \frac{1}{4}$ ، وتقسيم القطعة المستقيمة الأصلية التي طولها الوحدة فإن عدد الخلايا (القطع المستقيمة الصغيرة التي طول كل منها ϵ) تصير $N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\frac{\epsilon}{4}}\right)^1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^1 = 4$.

وبالمثل حاول تقسيم القطعة المستقيمة الأصلية التي طولها الوحدة إلى قطع مستقيمة أصغر طول كل منها $\epsilon = \frac{1}{10}$ ، فإن عدد الخلايا (القطع المستقيمة الصغيرة المقسم لها الشكل الأصلي تصير 10.

$N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\frac{\epsilon}{10}}\right)^1 = \left(\frac{1}{\frac{1}{10}}\right)^1 = 10$ للبعد التوبولوجي للقطعة المستقيمة $d=1$

- وإذا كان الشكل الأصلي مربعاً طول ضلعه الوحدة وقسمناه إلى مربعات صغيرة طول ضلع كل منها $\frac{1}{3}$ فإنه ينتج ٩ خلايا (مربعات جزئية طول ضلع كل منها $\frac{1}{3}$). أى:

$N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\frac{\epsilon}{3}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^2 = 9$ للبعد التوبولوجي للقطعة المستقيمة $d=2$

وإذا صغرنا ϵ حيث تصير $\frac{1}{4}$ فإن عدد الخلايا (المربعات الجزئية التي طول ضلع كل منها $\frac{1}{4}$) تصير ١٦. أى:

$N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\frac{\epsilon}{4}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^2 = 16$ للبعد التوبولوجي للمربع $d=2$

وإذا صغرنا ϵ بحيث تصير $\frac{1}{10}$ فإن عدد الخلايا (المربعات الجزئية التي طول ضلع كل منها $\frac{1}{10}$) تصير ١٠٠ للبعد التوبولوجي للمربع $d=2$.

- وبالمثل بأخذ الشكل الأصلي البسيط مكعب طول ضلعه الوحدة وينقسم طول الضلع بقطع مستقيمة صغيرة جزئية طول كل منها $\frac{1}{3}$ $\epsilon = \frac{1}{3}$ فستجد أن عدد المكعبات الصغيره الجزئية (الخلايا) المقسم إليها الشكل تصير ٢٧ مكعب أى:

$$d=3 \text{ للمكعب } N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^3 = \left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right)^3 = 27$$

وبتصغير ϵ بحيث نصير $\frac{1}{4}$ نجد عدد الخلايا 64 . أى :

$$d=3 \text{ للمكعب } N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^3 = \left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right)^3 = 64$$

وبتصغير ϵ لتصير $\frac{1}{10}$ نجد عدد الخلايا 1000

$$d=3 \text{ للمكعب } N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^3 = \left(\frac{1}{\frac{1}{10}}\right)^3 = 1000$$

- فى الأمثلة السابقة نلاحظ أن الأس هو البعد التوبولوجى d ومن ذلك نصل إلى التعميم:

$$N(\epsilon) = \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^d = \left(\frac{1}{\epsilon^{-1}}\right)^d$$

حيث $N(\epsilon)$ عدد الخلايا (المقسم إليها الشكل الأسمى، ϵ هى طول القطعة المستقيمة الجزئية التى تقسم ضلع الشكل الأسمى).

وهى القاعدة التى توصلنا إليها سابقًا. وبأخذ اللوغريتم للطرفين فإن

$$d = \log N(\epsilon) / \log \epsilon^{-1}$$

هذه النسبة (التي توصلنا إليها من قبل) عندما تتقارب إلى قيمة ثابتة بتصغير ϵ

حتى تؤول إلى الصفر أى $\epsilon \rightarrow 0$

فإن البعد التوبولوجى عندما يطبق على شكل معقد غير بسيط يسمى بعد

الصندوق Box dimension كما قام بتقديمه هاوسدورف فى (1919) ونرمز له

بالرمز D .

وعلى ذلك فإن :

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln \epsilon^{-1}} \quad (5)$$

مع استبدال اللوغريتم العادى بأساس 10 باللوغاريتم الطبيعي بأساس e . وأخذ القيمة المطلقة $|D|$ لتعبر عن بعد الصندوق.

وقد أثارَت فكرة البعد D لها وسدورف، مخترع هندسة الفراكتال ماندلبروت وأختارها ليصف أشكال الفراكتالات المعقدة المتشابهة ذاتيا على أساسها.

وعلى ذلك يمكن تعريف ^(٦) البعد الفراكتالى للشكل المتشابه ذاتيا بأن القيمة

$$\frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}} \quad (\text{أو } \frac{\ln N(\epsilon)}{\ln (\epsilon^{-1})}) \quad \text{المطلقة للنسبة}$$

(حيث $N(\epsilon)$ عدد الخلايا المقسم إليها الشكل على أساس تقسيم الطول بقطع مستقيمة جزئية طول كل منها ϵ) مع ملاحظة أن الدقة الرياضية تستلزم أن تتقارب النسبة لقيمة ثابتة.

ونرجع إلى إشتقاق قاعدة إيجاد البعد الفراكتالى التى تجعلك تشعر أنها مألوفة وتأتى ببساطه مما نألفه فى الابعاد الإقليديه والبعد التوبولوجى. وكما مهدنا فى هذا الفصل، القطعة المستقيمة بعدها التوبولوجى واحد أى $d=1$ وكذلك شكل الفراكتال (مثل منحنى كوخ لرقائق الثلج) المتكون من تعرجات لقطع مستقيمة بعده التوبولوجى أيضاً يساوى واحد أى $d=1$ لأنه يتكافأ توبولوجيا مع القطعة المستقيمة.

ولكنك لا تتوقع أنه باستخدام القاعدة D للبعد الفراكتالى أن يكون D لهذا الفراكتال يساوى واحد، ولكنك تتوقع أن يكون أكبر من واحد أى $D > 1$ وهذا الذى تأكد منه ماندلبروت. وعلى ذلك فقد عرف الفراكتال (المتشابه ذاتيا) بأنه المجموعة التى بعدها الفراكتالى أكبر من بعدها التوبولوجى.

ومن المشوق أن نعرف كما ذكر درازين ^(٤) أن ريتشارد سون فى سنة ١٩٦١ فحص الشاطئ الغربى لبريطانيا واكتشف عملياً أنه تقريباً متشابه ذاتيا على عديد من المقاييس، والتشابه الذاتى بمعنى إحصائى.. بأن الشاطئ يبدو متشابهاً لأى

مقياس (من التصغير والتكبير magnification) إلا من ملامح يمكن معرفتها. وقد وجد ريتشاردسون أن طول الساحل l يحقق العلاقة $L(\epsilon) = V \epsilon^{1-D}$

حيث اعتبر وحدة القياس كما كان متعوداً عليه في الخرائط ما بين ١٠ كم، ١٠٠٠ كم أي $10 \text{ km} \leq \epsilon \leq 1000 \text{ km}$ ، حيث $D = 1.25$ بالعد على الخرائط للقيم المختلفة لـ ϵ والعدد $N = \frac{l}{\epsilon}$ وهو عدد خطوات الطول ϵ من نقطة إلى نقطة على الشاطئ. وكان يستخدم مساطر (أو مازوره) بالسير Walking dividers. ووجد أن طول الشاطئ L يحقق المعادلة $L(\epsilon) = V \epsilon^{1-D}$ عندما يكون $D = 1.25$ ، $10 \text{ km} \leq \epsilon \leq 1000 \text{ km}$

إلا أنه كما عرفنا بعد الصندوق (أو البعد الفراكتالي نأخذه عندما $\epsilon \rightarrow 0$) وهذا ما لم يفعله ريتشاردسون، فلم يستخدم القياسات على مقياس أصغر من المأخوذ به للخرائط التي أمكنه الحصول عليها (مثل المتر. والميكرن أو الكميات المتناهية في الصغر). فهل يكون ما عمله ريتشاردسون قد دفع ماندلبروت لاستخدام ما يشبه الساحل من فراكتالات مضبوطة رياضية متشابهة ذاتياً على كل المقاييس مثل منحني كوخ لرقائق الثلج عن طريق البعد الفراكتالي لحل مشكله طول الشاطئ الإنجليزي؟ والآن تعال نطبق قانون البعد الفراكتالي D لايجاد أبعاد بعض الفراكتالات التي قدمناها في الفصل السابق. وفي الواقع يوجد عدة أساليب لإيجاد البعد الفراكتالي باستخدام هذا القانون نعرف عليها في البند التالي.

٤-٣-٣- أساليب حسابيه مختلفه لإيجاد البعد الفراكتالي؛

كل هذه الأساليب تعتمد على العد (كما في بعد الصندوق) في تطبيق قاعدة البعد الفراكتالي D ونقدم من هذه الأساليب: الطريقة التحليلية - طريقة استخدام الشبكة التربيعة - طريقة استخدام المسطرة.

٤-٣-١- الطريقة التحليلية في إيجاد البعد الفراكتالي لبعض الفراكتالات ومنها المشهورة.

وهي طريقة تستخدم العد على مكونات المولد (أو العملية) التي تولد الفراكتال. فمثلاً بالنسبة للمولد المطبق على قطعة مستقيمة في التكرار n_0 نأخذ القطعة

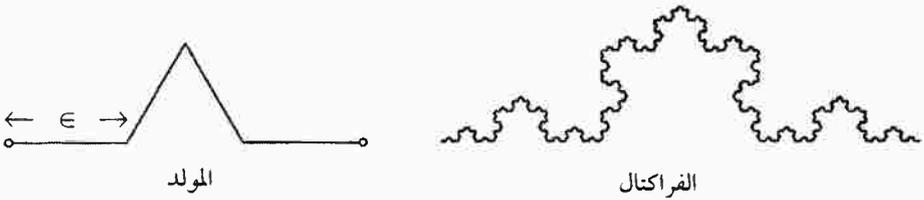
المستقيمة طولها الوحدة، ϵ طول القطعة المستقيمة الصغيره الجزئية، التي تقسم بها القطعة المستقيمة الأصلية، عدد الخلايا $N(\epsilon)$ هو عدد القطع المستقيمة التي طول كل منها ϵ للمولد.

$$D = \frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}} \quad \text{ثم نطبق القاعدة:}$$

وقد اتضح أن هذه الطريقة تقدم نفس قيمة D باستخدام المعالجة الرياضية الصارمة عندما $\epsilon \rightarrow 0$.

وعلى ذلك نقدم أمثلة تطبيقية لإيجاد البعد الفراكتالى لبعض الفراكتالات D باستخدام الطريقة التحليلية التي ذكرناها على المولد ونقدم المعالجة الرياضية لبعضها:

مثال (١): البعد الفراكتالى D (لفراكتال) منحنى كوخ لرقائق الثلج (المطبق على قطعة مستقيمة) بالمولد العادى (قمته إلى أعلى).



شكل (٢٤) أ

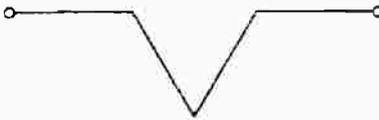
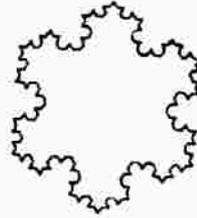
لاحظ أن $\epsilon = \frac{1}{3}$ لأن القطعة المستقيمة التي طولها الوحدة قسمت إلى ثلاثة قطع مستقيمة متطابقة طول كل منها $\frac{1}{3}$ وفي المولد استبدلت القطعة المستقيمة في الوسط بساقين متساويين لمثلث كل منها يساوى طولها طول $\epsilon = \frac{1}{3}$. وعلى ذلك فإن عدد الخلايا (القطع المستقيمة المكونه للمولد) هي 4 أى $N(\epsilon) = 4$ وبالتعويض في قانون البعد الفراكتالى D . فإن البعد (الفراكتال) لمنحنى رقائق الثلج (على قطعة مستقيمة):

$$D = \frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1.26$$

ولكون نفس المولد يولد فراكتال منحنى كوخ بتطبيقه على مثلث (متساوى الأضلاع طول ضلعه الوحدة) سواء كانت قمة المولد إلى أعلى أو إلى أسفل فإن الفراكتال شكل (٢٤) ب، شكل (٢٤) ج بعد كل منهما أيضاً $D \equiv 1.26$.

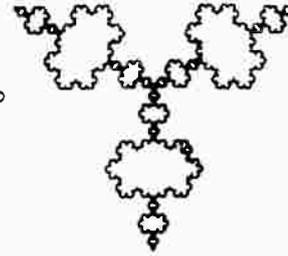


شكل (٢٤) ب

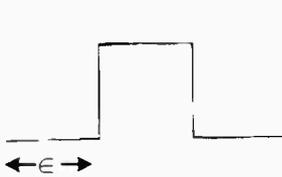


$$D = \log 4 / \log 3 = 1.26$$

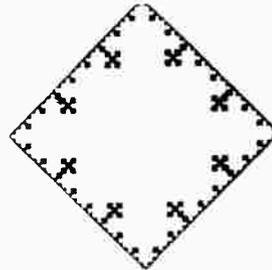
شكل (٢٤) ج



لاحظ أنه بالرغم من الاختلاف الكبير في ملامح أو مظهر فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج في شكل (٤) أ، ب، ج إلا أنه لهما نفس البعد الفراكتالي $D \equiv 1.26$ الذى يعكس أن مستوى تعقدهم هو نفسه بالرغم من الاختلاف البين في مظاهرهم. مثال (٢)؛ البعد الفراكتالي لفراكتال القبة D . حاول حساب D مستعيناً بشكل (٢٥).



Generator



Fractal

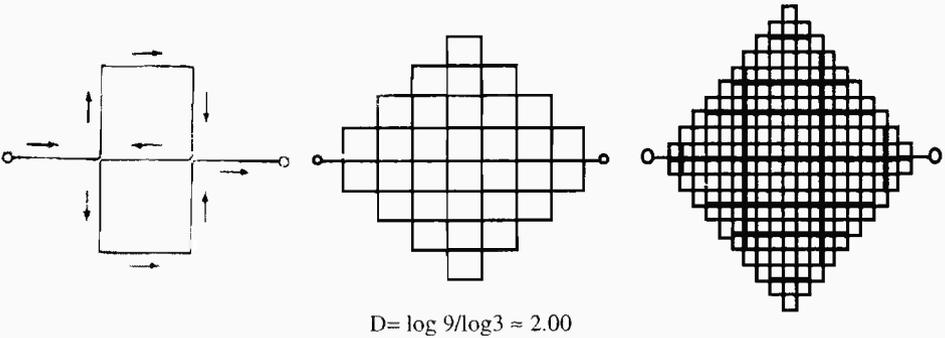
$$D = \log 5 / \log 3 = 1.46$$

شكل (٢٥)

ستجد أن القطعة المستقيمة الأصلية التي طولها الوحدة استبدل الجزء الأوسط منها بثلاثة أضلاع لمربع طول كل منها $\frac{1}{3}$ ، وأن عدد خلايا (القطع المستقيمة) المكونه للمولد هي $N(\epsilon) = 4$. وتطبيق القانون فإن البعد الفراكتالى $D = 1.46$.

مثال (٣): البعد الفراكتالى لفراكتال منحنى بينو. ستصل بسهولة أن $\epsilon = \frac{1}{3}$ ، عدد الخلايا للمولد ٩ (قطع مستقيمة صغيرة جزئية طول كل منها $\frac{1}{3}$). وعلى ذلك

$$D = \frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2.00$$



شكل (٢٦)

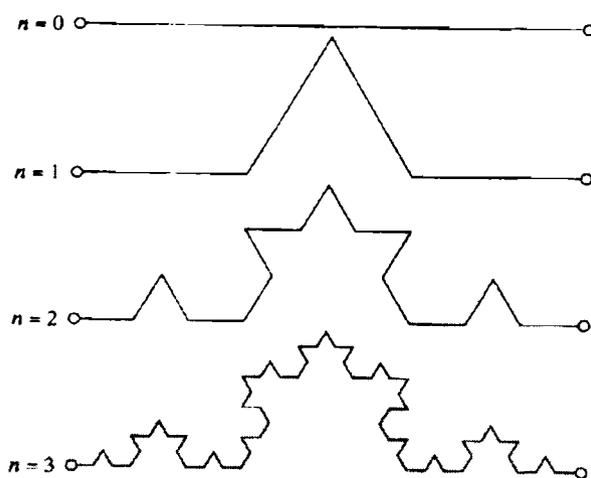
وكما ذكرنا (فراكتال) منحنى بينو هو مالىء السطح لأنه بزيادة عدد التكرارات المرحليه ن زيادة لا نهاية $n \rightarrow \infty$ يتقارب converges الفراكتال مع كل نقط المستوى. ومن العجيب أن الفراكتال تولد من منحنى (مولد) على قطعة مستقيمة بعدها التوبولوجى $d=1$. وأن الفراكتال الناتج شكل معقد من قطع مستقيمة متناهية فى الصغر، ويختلف كل الاختلاف عن داخلية المربع فى الفراغ الإقليدى ذو بعدين R^2 والذى بعده التوبولوجى ٢ أيضاً.

.. والآن هل سألت لماذا استخدمنا المولد عند حساب البعد التوبولوجى الذى قام

بتوليده؟ أو الأخرى لماذا حسبنا عدد الخلايا المكونه له وأخذناها $N(\epsilon)$ والتي طول ضلعها ϵ ؟.

إذا كنت تساءلت لماذا يكون حساب البعد الفراكتالى بهذه الطريقة هي صحيحه فأنت متعلم رياضى لديه مقدرة رياضيه ابتكاريه وحب استطلاع، وإذا أنت تحققت من صحة هذا السؤال فمستقبلك سيكون على مستوى أعلى فى التفكير الرياضى والابتكارى.

والسبب فى تبسيط الإجراءات الحسابيه باستخدام المولد يتضح ببساطه مثلاً من مولد منحنى فون كوخ لرقائق الثلج المطبق على قطعة مستقيمه شكل (٢٧).



شكل (٢٧) منحنى كوخ لرقائق الثلج

لاحظ أن المولد وهو فى التكرار الأول، وأن عدد القطع المستقيمه الصغيره المكونه له عددها ٤ وطول كل منها $\frac{1}{3}$ أى أن

$$\epsilon = \frac{1}{3} \quad \text{عند} \quad N(\epsilon) = 4 \quad \text{فى التكرار الأول } n_1 \text{ يكون}$$

$$\epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \quad \text{عند} \quad N(\epsilon) = 16 = 4^2 \quad \text{فى التكرار الثانى } n_2 \text{ يكون}$$

$$\epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \quad \text{عند} \quad N(\epsilon) = 64 = 4^3 \quad \text{فى التكرار الثالث } n_3 \text{ يكون}$$

.... وهكذا

وفي التكرار النوني n_n يكون $N(\epsilon) = 4^n$ عند $\epsilon = (\frac{1}{3})^n$

ومن قانون البعد الفراكتالى

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon^{-1}}$$

فإن بالنسبة لفراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج يكون

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log (4)^n}{\log (3)^n}$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 4}{n \log 3}$$

$$= \frac{\log 4}{\log 3}$$

كما كنا نطبق على المولد.

- حاول أن تتحقق من ذلك بالنسبة للمولدات الأخرى فى الأمثلة السابقة.

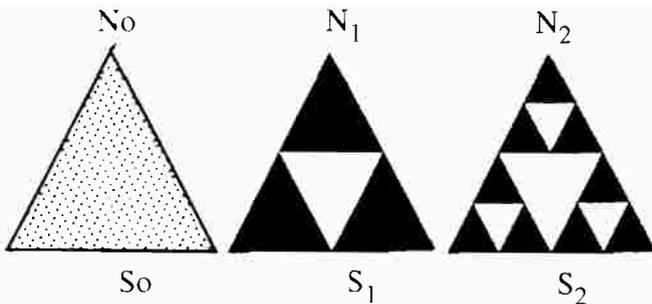
وبالمثل يمكن الإمتداد بالفكرة لحساب عدد الخلايا $N(\epsilon)$ التى طول ضلع كل منها ϵ على شكل S_1 الذى يحدده التكرار الأول n_1 عند إيجاد البعد الفراكتالى كما نبين فى الأمثلة التالية . (حاول التحقق من صحة هذا الاجراء).

مثال (٤)؛ البعد الفراكتالى لمنحنى جوان سيربينسكى (شكل ٢٨)

هنا العملية مطبقة على مثلث S_0 طول ضلعه الوحدة. عدد الخلايا على ما يناظر المولد فى التكرار الأول n_1 وهو مثلث منزوع منه المثلث الأوسط، هو ثلاثة مثلثات طول ضلع كل منها $\frac{1}{2}$ $\epsilon = \frac{1}{2}$.

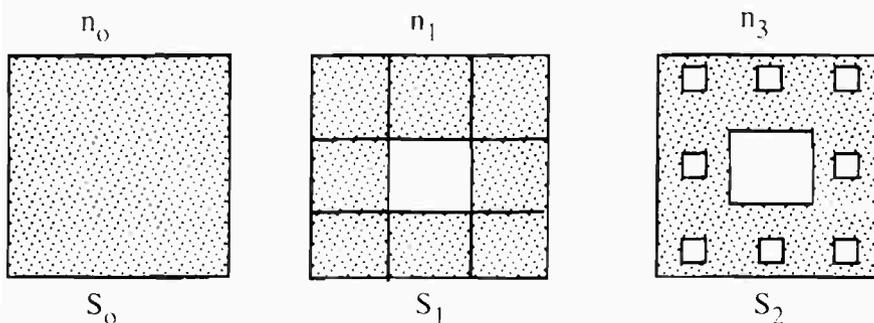
وعلى ذلك فإن:

$$D = \frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}} = \frac{\log (3)}{\log (2)} \approx 1.58496$$



شكل (٢٨) بساط سيربينسكي

مثال (٥): البعد الفراكتالي لبساط سيربينسكي . شكل ٢٩



شكل (٢٩) بساط سيربينسكي

العملية هنا التي يحددها التكرار الأول n_1 هو نزع المربع الأوسط من مربع S_0 طول ضلعه الوحدة . بتطبيق قانون البعد الفراكتالي على S_1 الذي يحدده التكرار الأول، نجد أن عدد الخلايا (المربعات) المكونه له هي ٨ وطول ضلع كل منها $\frac{1}{3}$ أي أن $N(\epsilon) = 8$ ، $\epsilon = \frac{1}{3}$ وعلى ذلك فإن:

$$D = \frac{\text{Log } N(\epsilon)}{\text{Log } \epsilon^{-1}} = \frac{\text{log } (8)}{\text{log } (3)} \cong 1.8928$$

أرجو أن تكون تحققت من صحة استخدام حساب البعد الفراكتالي بتطبيق القانون على الشكل S_1 الذي يحدده التكرار الأول.

وذلك لأنه بالنسبة (للفراكتال) چوان سيربينسكي شكل (٢٨) نجد أن

في التكرار الأول n_1 يكون $N(\epsilon) = 3$ عندما $\epsilon = \frac{1}{2}$

في التكرار الثاني n_2 يكون $N(\epsilon) = 9 = 3^2$ عندما $\epsilon = (\frac{1}{2})^2$

في التكرار النوني n_n يكون $N(\epsilon) = 3^n$ عندما $\epsilon = (\frac{1}{2})^n$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3^n}{\log 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 3}{n \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} \Leftarrow$$

وأيضاً بالنسبة لفراكتال بساط سيربينسكى شكل (٢٩).

في التكرار الأول n_1 يكون $N(\epsilon) = 8$ عندما $\epsilon = \frac{1}{3}$

في التكرار الثاني n_2 يكون $N(\epsilon) = 8^2$ عندما $\epsilon = (\frac{1}{3})^2$

في التكرار النوني n_n يكون $N(\epsilon) = 8^n$ عندما $\epsilon = (\frac{1}{3})^n$

$$\Rightarrow D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(8)^n}{\log(3)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 8}{n \log 3} = \frac{\log 8}{\log 3}$$

مثال (٦) البعد الفراكتالي لمجموعة كانتور التلثية. تذكر أن الشكل S_1 الذي يحدده التكرار الأول هو قطعة مستقيمة طولها الوحدة منزوع منها الثلث الأوسط

$$\text{شكل (٣٠)}. \text{ وعلى ذلك فإن } D = \frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon^{-1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0.6309$$

ومع ملاحظة أن عدد القطع التي تغطي الشكل S_1 هو 2، وطول كل منها $\frac{1}{3}$

$$n_0 \quad \begin{array}{ccc} 0 & & 1 \\ & \text{---} S_0 & \end{array}$$

$$n_1 \quad \begin{array}{ccc} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ & \text{---} S_1 & \end{array}$$

شكل (٣٠)

وكما ذكرنا عندما $n \rightarrow \infty$ أي تكرار الذي يقترب من اللانهاية فإن شكل المجموعة عبارة عن مجموعة نقاط لا يوجد بها أي قطعة مستقيمة أو بالأحرى أي فترة جزئية. وهذه المجموعة من النقاط طولها صفر، وعلى ذلك فالبعد التوبولوجي

صفر. أما البعد الفراكتالى هو $D = 0.63$ وهو يعضد وجهة نظر ماندلبروت بأن فراكتال مجموعة كانتور التثليثية بعدها الفراكتالى أكبر من بعدها التوبولوجى مثلها مثل أى فراكتال.

ويمكنك أيضاً التحقق من أن $D = \log 2 / \log 3$ عندما $n \rightarrow \infty$ كما قمنا فيما سبق بالنسبة للأمثلة السابقة.

وذلك لأنه فى التكرار الأول n_1 يغطى S_1 قطعتين جزئيتين أو بالأحرى فترتين جزئيتين (أى $N(\epsilon) = 2$) طول كل منها $\epsilon = \frac{1}{3}$ وفى التكرار الثانى n_2 ينتج أربع فترات جزئية طول كل منها $\epsilon = \frac{1}{3}$ وعلى ذلك

$$\text{عندما } n = 1 \quad \epsilon = \frac{1}{3} \quad , N(\epsilon) = 2$$

$$\text{عندما } n = 2 \quad \epsilon = \frac{1}{3} \quad , N(\epsilon) = 2^2$$

$$\text{عندما يكون التكرار } n_n \quad \epsilon = \frac{1}{3} \quad , N(\epsilon) = 2^n$$

$$\Rightarrow D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2^n}{\log 3^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 2}{n \log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

عموماً فى الطريقة التحليلية لحساب البعد الفراكتالى نستخدم عدد الخلايا $N(\epsilon)$ المكونه للمولد (أو الشكل S_1 الذى يحدده التكرار الأول) وطول ضلع هذه الخلية ϵ ، سواء أكانت الخلية قطعة مستقيمة جزئية أو مثلث أو مربع جزئى. كما مهدنا فى شكل (٢٢) أ السابق.

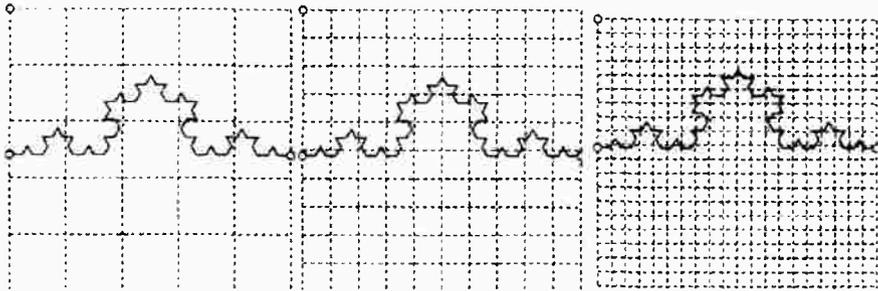
أما الطريقة الثانية التى نقدمها فى البند التالى فتعتمد على غطاء من المربعات الذى مهدنا له فى شكل (٢٢) ب، ج.

٢-٣-٤، طريقة الشبكة التربيعيه فى حساب البعد الفراكتالى.

وهى طريقة تستخدم أكثر فى التطبيقات العملية. وهى تعتمد على عد الخلايا التى

تغطي الفراكتال $N(\epsilon)$ ، والخلايا عبارة عادة عن مربعات لشبكة تربيعية طول ضلع كل منها ϵ . وبتصغير ϵ نوجد النسبة $\frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon^{-1}}$ عندما $\epsilon \rightarrow 0$ لحساب البعد الفركتالي. وتوضح الطريقة من المثالين التاليين.

مثال (١): استخدام طريقة الشبكة التربيعية في حساب البعد الفركتالي لمنحنى (فون) كوخ لرفائق الثلج (المطبق على قطعة مستقيمة). انظر شكل (٣١).



(أ) شبكة 5×5

(ب) شبكة 10×10

(ج) شبكة 20×20

شكل (٣١)

في الشبكة (أ) 5×5 قسمنا المربع الذي طول ضلعه الوحدة إلى ٢٥ مربع جزئي طول ضلع كل منها $\frac{1}{5}$ أي $\epsilon = \frac{1}{5}$ أما في الشبكة (ب) 10×10 فقد قسم المربع إلى ١٠٠ مربع جزئي طول ضلع كل منها $\frac{1}{10}$ أي $\epsilon = \frac{1}{10}$. والشبكة (ب) أدق من الشبكة (أ) وكذلك الشبكة (ج).

بعد المربعات الجزئية التي تغطي المنحنى في متابعه من الشبكات الأدق التربيعية التي تصغر فيها ϵ شيئاً فشيئاً، مع إمكانية استخدام الكمبيوتر في العد نوجد العدد

المطلق الذي تتقارب إليه النسبة $\frac{\log N(\epsilon)}{\log \epsilon^{-1}}$ حيث $N(\epsilon)$ عدد المربعات التي تغطي المنحنى التي طول ضلع كل منها ϵ .

فمثلاً بالنسبة لشكل (٣١) والشبكة (أ) 5×5 يكون $N(\epsilon) = 7$ ، $\epsilon = 0.2$

وفي حالة الشبكة (ب) 10×10 يكون $N(\epsilon) = 24$ ، $\epsilon = 0.1$

أما استخدمنا الشبكة الأدق 20×20 فيكون $N(\epsilon) = 46$ ، $\epsilon = 0.05$

ونجد أنه في حالة الشبكة (أ) 5×5 تكون القيمة المطلقة للنسبة $\frac{\log 7}{\log 5} = 1.209$

..... (ب) 10×10 تكون القيمة المطلقة للنسبة $\frac{\log 24}{\log 10} = 1.38$

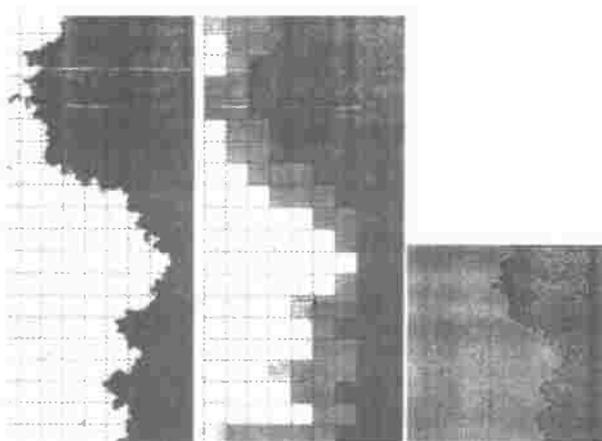
$\log 10$

أما إذا في حالة الشبكة 20×20 تكون القيمة المطلقة للنسبة $\frac{\log 46}{\log 20} \approx 1.27$

وتتقارب هذه النسبه إلى $1.26 =$ وهي قيمة البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ كما توصلنا إليها في الطريقة التحليلية.

نلاحظ أنه كلما كانت الشبكة أدق كلما وضحت تفصيلات الفراكتال وكان عدد $N(\epsilon)$ الذى يغطيها أدق.

مثال (٢): استخدام طريقة الشبكة التربيعيه لحساب البعد الفراكتالى لأحد الشواطئ مثل نموذج الشاطئ فى شكل (٣٢)أ.

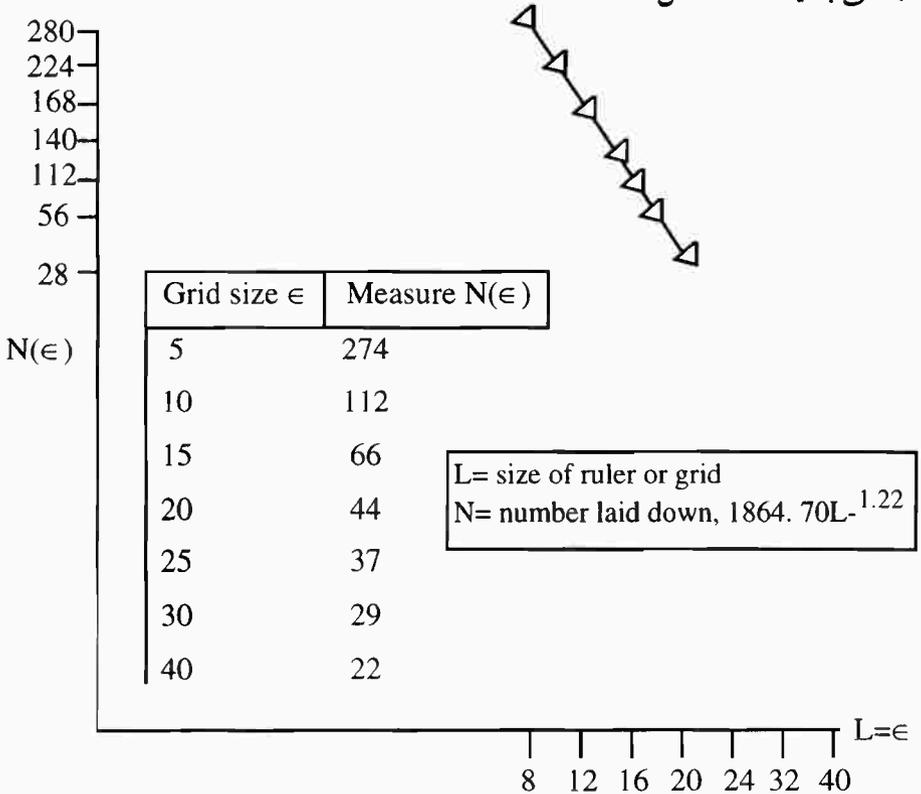


(أ) نموذج لأحد الشواطئ
(ب) عدد الخلايا التى تغطى الشاطئ ٤٤
(ج) عدد الخلايا التى تغطى الشاطئ ١١٠

شكل (٣٢)

ولكون الشبكة التربيعة في الخرائط وحداتها الجزئية مربعات طول ضلع كل منها مقياسه كبير. فإننا عندما نستخدم شبكة تربيعة طول ضلع وحداتها الجزئية ٢٠، ثم نعد عدد الخلايا (المربعات) التي تغطي الشاطئ بتعرجاته نجد أنها ٤٤ كما في شكل (٣٢) ب أي $N(\epsilon) = 44$ حيث $\epsilon = 20$ وبتصغير الوحدات التربيعة لتصير طول ضلعها ١٠ فإن عدد المربعات (الخلايا) الأصغر التي تغطي تفصيلات أكثر للشاطئ يزداد عددها فتصير $N(\epsilon) = 100$ حيث $\epsilon = 10$ كما في شكل (٣٢) ج - عدد الخلايا باللون الفاتح هي التي تغطي الشاطئ. ومع التوالى في تصغير أبعاد المربعات الجزئية للشكبه أى بتصغير ϵ فإننا نجد أن النسبة $\log N(\epsilon) / \log \epsilon^{-1}$ تقترب من نسبة ثابتة 1.22 أى أن البعد الفراكتالى لهذا الشاطئ $D=1.22$. وعملياً نستعين بالرسم البيانى للتوصل إلى المعادلة $N(\epsilon) = 1864.70\epsilon^{-1.22}$ أنظر شكل (٣٣) (٦).

حاول أن تتحقق من هذه المعادلة عن طريق التمهيد لمعادلة (١) شكل (٢٢) ب، ج في بداية هذا الفصل.



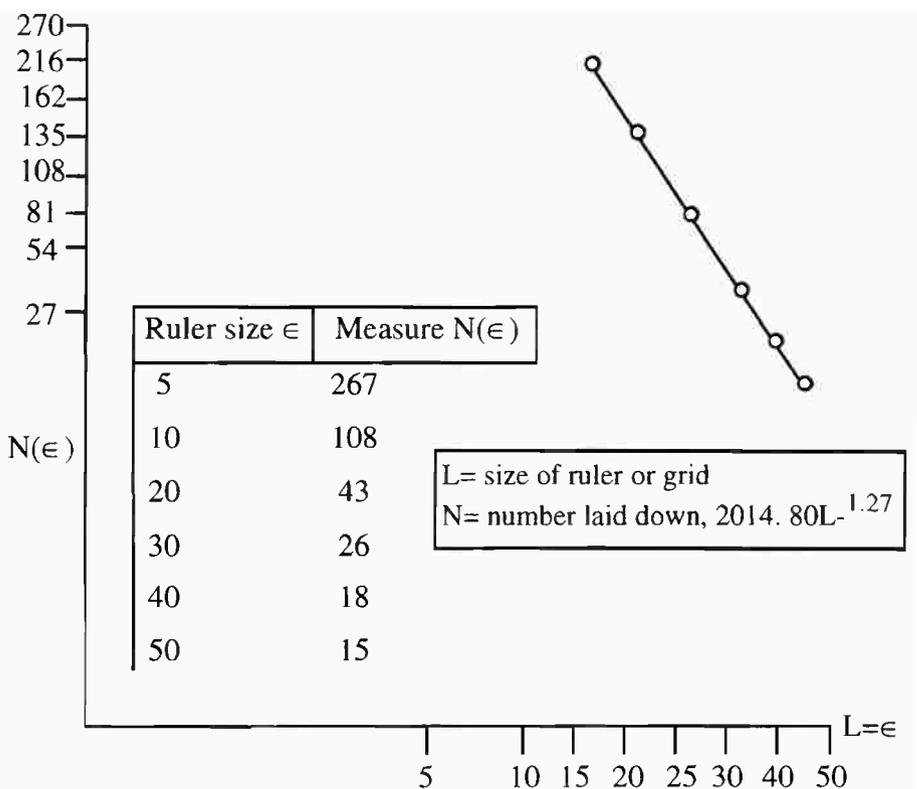
شكل (٣٣)

٣-٣-٤: طريقة المسطرة ruler لحساب البعد الفراكتالى

وهى طريقة مثلها مثل الطريقة السابقة تستخدم فى التطبيقات العملية. وهى قريبة من الطريقة التى استخدمها ريتشارد سون (والتي ذكرناها عند التعليق على قانون (٥)) ولكنها أكثر دقة رياضياً وقد استخدمها ماندلبروت لايجاد البعد الفراكتالى للشاطئ الانجليزى لحل مشكله «ما طول هذا الشاطئ؟».

حيث كان متشوقاً لمعرفة ما تقوده البيانات المتاحة المعروفه بهذا الصدد. وهى قياس طول الشاطئ بمسطره (تمثل قطعة مستقيمه ϵ) عن طريق عددها الذى يغطى تقريباً الشاطئ $N(\epsilon)$.

وعن طريق استخدام الرسم البيانى وتصغير طول المسطرة (التي اعتبرها وحدة القياس ϵ) أكثر وأكثر مع إيجاد عدد المساطر rulers التى تغطى طول الشاطئ $N(\epsilon)$ فى كل مرة. والتمثيل البيانى لهذه البيانات ينتج شكلاً يستطيع منه التوصل إلى مستقيم أكثر لياقه Fit لهذه البيانات - كما ظهر فى طريقه الشبكة التربيعيه. وفى هذه الحالة كانت معادلة المستقيم $N(\epsilon) = 2014.8 \epsilon^{-1.27}$ وبذلك يكون البعد الفراكتالى لهذا الشاطئ $D=1.27$ أنظر شكل (٣٤) (٦).



شكل (٣٤)

يتضح مما سبق أن البعد الفراكتالي لمنحنى كوخ لرقائق الثلج (بحسابه بالطريقة التحليلية أو طريقة الشبكة التربيعية) يقترب من البعد الفراكتالي للشاطئ الانجليزي (بحسابه بطريقة المسطرة بدقة رياضية أو حتى بطريقة ريتشارد سون). وأن القيمة التقريبية للبعد الفراكتالي تدل على مدى تعقيد الفراكتال وليس على ملامحه الظاهرية أو كبره أو صغره. وقد توصلنا إلى أن البعد الفراكتالي لمنحنيات الفراكتال تكون ما بين ١، ٢ وهذا يجعلنا نتوقع أن البعد الفراكتالي لأسطح الفراكتال تقع ما بين ٢، ٣.

وعرفنا أنه بالنسبة للأشكال البسيطة المألوفة (مثل القطعة المستقيمة - المربع ...) يكون بعدها التوبولوجي d مساوياً لبعدها الفراكتالي (أو بعد الصندوق) D . أما

ووصل البعد الفراكتالى لأحد لوحاته ٩ , ١ . وهي لوحة دمرها بولاك بنفسه. أما بالنسبة للفراكتالات الرياضية المضبوطة لمنحنيات (أو شكل متعرج من قطع مستقيمة) فهي كما بينا فى البند السابق فإن البعد الفراكتالى لها يتراوح ما بين ٢٦ , ١ , ٢ . فكما توصلنا إليه البعد الفراكتالى لمنحنى كوخ لرفائق الثلج (أو بالأحرى منحنى فون كوخ لرفائق الثلج) $\equiv ٢٦ , ١$ والبعد الفراكتالى لمنحنى سيربينسكى $= ٥٨ , ١$ ، والبعد الفراكتالى لمنحنى بينو يتقارب من ٢ .

وعموماً فقد تبين أن الأفراد يفضلون الأعمال الفنية للوحات ذات بعد فراكتالى قليل أو متوسط فهي تكون مريحة لهم. أما زيادة التعقيد فى اللوحات ذات قيم بعد فراكتالى عالية فهي تزيد الاثارة وتشد وتشغل المشاهدين بنشاط أكثر من مشاهدة اللوحات ذات قيم متوسطة للبعد الفراكتالى. ويصبحوا أكثر انجذاباً واهتماماً بالفنان وإبداعه.

وكما للبعد الفراكتالى دلالة فى الفن وتذوقه، فله أيضاً أهمية فى الجيولوجيا فهو يصف انبعاجات سطح الأرض. وله أهمية ودلالة كذلك فى علم المتبالورجى والصناعة. فقد وجد أن البعد الكسرى لسطح المعدن مهما كانت خشونته يعطى فكرة عن مدى تحلل الكتل الصخرية. فمثلاً تحلل جبل إلى جبل صخرى فى حجم السيارة يكون بعده الفراكتالى ٧ , ٢ .

وعلى ذلك فالبعد الفراكتالى من الخصائص الأساسية للفراكتال التى تعطى قيماً جمالية وقيماً نفعيه تطبيقيه فى شتى المجالات.

تعقيب (٤): تضمينات implications وانعكاسات حول تنميه الابتكار التدريس لمعلم الرياضيات.

والآن بعد قراءة تلك ودراستك لهذا الفصل حاول إختيار أى جزء منه ثم فكر فى تعليق عليه أو انعكاساتك عليه.

لعلك فطنت أننى أردت أن أدربك على إختيار فكرة أو شىء رياضى مثلما عمل ماندلبروت عند إختياره بعد الصندوق لها وسدورف ليعبر عن البعد الفراكتالى وحسابه.

فى الواقع أردت أن استخدم مدخلى فى عرض هذا الفصل لتنمية التعلم الاستقلالى autonomous learning كأحد أهدافى .

والتعلم الاستقلالى تكوين أو تركيب يشمل مركبات أهمها: الاختيار choice - تحمل مسؤولية التعلم - التحكم - الثقة - الابتكار . وابتلى تنمية التعلم الاستقلالى يؤدى إلى تنمية الابتكار التدرسى لمعلم الرياضيات .

إختيارك لآى شىء ينم عن تفضيل ذاتى له ويتضمن الاختيار نواحى شعوريه ولا شعوريه . وقد يكون تلقائياً وقد يكون بعد تمحص ودراسة أو تردد أو بعد أخذ استشاره أو رأى من الآخرين . إلا أنه فى النهاية أنت صاحب قرار الإختيار سواء اختيار ملابس أو زوجه أو كتاب أو ... قراءة معينه أو دراسة معينة، أو هواية) وذلك بحرية Freedom .

ما تختاره هو تفضيل يعكس الميل والمشاعر والإحساس بالقيمة . الإقتناع بما تختاره يمثل تزواج الجانب العقلى والوجدانى ليكشف السر وراء الإختيار ليكون أكثر لياقه Fit أو ما نقوله فى الرياضيات الاختيار الأمثل optimization . والواقع أننى أفضل التعبير الرياضى عن عملية التوصل إلى الأمثل optimization عن التعبير بمستوى الجودة أو التميز التى ابتدأت تدخل فى وصف النواحى التربوية التى تتطلع لمستوى عالى لها .

ما تختاره تعتز به لأنك تضى عليه بعض الحياة منك عليه، كأنه جزء حيوى منك . الإختيار الأمثل يحرك مثيرات وسلوكيات لأعمال استقلاليه تكون مصدر الهام وابتكار .

وعلى ذلك عملت على أن يكون عملية اختيار ماندلبروت لبعده الصندوق الذى قدمه هاوسدورف . والذى يعد حديثاً نسبياً، ليكون أكثر لياقه أو بالأحرى يكون الاختيار الأمثل للبعده الفراكتالى هو أسلوبى لتنمية استقلالية التعلم لك . أو بالأحرى للمعلم كدافع للإبتكار التدرسى له وعلى ذلك فالاساليب التى ركزت عليها من خلال عرض محتوى هذا الفصل لتنمية الابتكار التدرسى للقارىء (المعلم) منها:

(١) عملية التعميم فى الرياضيات، الحديثه أو العصرية ليست فقط الوصول إلى قانون عام ولكن إلى قانون أعم من قانون سابق يجعله حالة خاصة منه. فمثلاً للتوصل إلى (أو المساعدة على اكتشاف) البعد التوبولوجى d من خلايا (أشكال بسيطة: قطع مستقيمه - مربعات - مكعبات.. مكعبات عليا) فى فراغ إقليدى ما R^1, R^2, \dots, R^n باستخدام الأنماط العددية والهندسية هو أسلوب البراجماتيين الرياضيين فى اكتشاف فكرة رياضية مثلهم مثل علماء العلوم.

أما استخدام البعد التوبولوجى d الذى يكون عدداً صحيحاً للأشكال البسيطة ليكون مصدر إلهام لبعد الصندوق D كتعميم للبعد التوبولوجى d حيث لا يكون البعد D بالضرورة عدداً صحيحاً، بل فى الغالب عدداً كسرياً، هذا هو ابتكار رياضى لها وسدورف.

وقد حاولت أن أجعلك (أيها القارئ المعلم) أن تعيش خبرة اكتشاف d وعملية ابتكار D .

ولعلك تتساءل لماذا لا يكون قانون D هو تعميم رياضى تقليدى ولكنه يكون تعميماً مميزاً للرياضيات الحديثة والجديدة.

وللأجابة على هذا التساؤل تعالى نسترجع أبسط التعميمات فى الرياضيات الحديثة المتعلقة بالأعداد أو بالهندسة.

أ- اختراع الإنسان القديم أعداد العد ١، ٢، ٣... بمناظرة مجموعة من الحصى بمجموعة من الماشية... ثم وجدها غير مناسبة لقياس مكيال اللبن.. مثلاً فاخترع الأعداد الكسرية.. ثم وجد أنه للوصول من مكان إلى مكان لا يكفيه أن يعرف المسافة ولكنه يجب أن يعرف الاتجاه فاخترع الأعداد الموجبة...

وتعتبر مجموعة الأعداد الصحيحه ليست مجرد إضافة أعداد سالبة والصفر على أعداد العد، فأعداد العد تختلف كل الاختلاف عن الأعداد الموجبه فى نوعها، فهى مجموعة جديدة تكون اعداد العد متساكله (مناظره) مع مجموعة

الأعداد الموجبه التي هي مجموعة جزئية من الأعداد الصحيحه فهذا هو ما نقصده بالتعميم الحديث .

أى اختراع تركيب جديد يكون التركيب القديم متشاكل مع جزء منه . ولو أن الأعداد الصحيحه تولدت من خلال أعداد العد، ولكننا اعتبرناها تعميماً جديداً، أو بالأحرى تعميماً لأعداد العد وهكذا بالنسبة لبعض النظم العددية... فنظام الأعداد المركبه هو تركيب جديد يكون مجموعة الأعداد الحقيقه متشاكل (مناظراً) مع مجموعة جزئية للأعداد المركبه على صورة $z = a + o \times i$. أيضاً نبعت الهندسة الآفينه من دراسة الهندسة الاقليديه ولكنها استقلت عنها لتكون الهندسة الاقليديه متشاكله (مناظره) لمجموعة جزئيه من الهندسة الآفينه، وهكذا... تكون الهندسة الاسقاطية تعميماً للهندسة الآفينه بمعنى أن الهندسية الآفنيه تشاكل مع مجموعة جزئية من الهندسة الاسقاطيه... والتوبولوجى تعميم للهندسة الاسقاطيه وهكذا...

وعلى ذلك بالرغم من أن بعد الصندوق أُشتق عن طريق البعد التوبولوجى d إلا أنه أعتبر تعميماً جديداً للبعد d - كما إعتبرنا نظام الاعداد الصحيحه تعميماً جديداً لنظام أعداد العد. أو إعتبر التوبولوجى تعميماً جديداً للهندسة الإسقاطيه...

(٢) بالنسبة لاختيار ماندلبروت لبعد الصندوق D ليحسب به البعد الفراكتالى فهو كما ذكرت يُجسد استقلالية التعلم التى حفزته إلى إيجاد البعد الفراكتالى لفراكتالات مختلفه ليتأكد من مستواه الأمثل ومستوى لياقته فى فاعليه تطبيقه فى هندسته. وكان هذا مصدراً لإلهامه بيلورة هندسته العصريه. وعلى أساس تقديره بسلامة إختياره للبعد D وتأكدّه من مستواه الأمثل فقد عرف الفراكتال على أساس بعده الفراكتالى (الأكبر من بعده التوبولوجى - كما ذكرنا). وهذا ما حاولت إبرازه من خلال العرض فى هذا الفصل لتنمية استقلالية التعلم التى جعلت ماندلبروت يعزز اختياره بابتكارات ومسميات جديدة فى هندسته.

(٣) قدمت إيجاد البعد الفراكتالى باستخدام الطريقة التحليلية لفراكتالات متولدة عن طريق المولد generator. وذلك بعد count القطع المستقيم المكونه للمولد وتحديد طول كل منها ϵ ، كتبسيط فى الإجراءات الرياضية ثم قدمت تساؤلات للبحث عن تفسير صحة هذه الطريقة المبسطة. وذلك لإستثارة تفكير الرياضى فى النواحي المنطقية كرياضى ينتمى لمدرسة الرياضيين المنطقيين. وللتغذية الراجعة feedback والتعزيز قمت بتقديم ارشاد للبرهان وفكرة عنه والبرهنة مرات متتالية متشابهة كل منها تخص تطبيق البرهان على إيجاد البعد الفراكتالى لفراكتال ما. وأيضاً لتدريبك على استخدام الصرامه الرياضية والدأبه وعدم التسليم بصحة ما تقرأه وبهذا ينمى مستوى التقويم لك وهو من المستويات العليا من التفكير. هذا من جهة ومن جهة أخرى فهذا نوع من التحقيق الذى يعتبر أحد خطوات أى اكتشاف أو إبتكار (إخترع) رياضى أئمه فيك.

(٤) تقديم البند الأخير، دلالة البعد الفراكتالى فى الفن والطبيعة لم يكن فقط بهدف معرفة الدلالة التطبيقية لهذا المفهوم أو لعمل روابط connections فى المجالات المختلفة، ولكن لتقديم معلومات خفيفة مشوقة. وذلك بقصد تنمية الميل والحب للأفكار الرياضية الجديدة العصرية، من جهة، ومن جهة أخرى لتعويدك أو تشجيعك على عمل إجراء مماثل للترويج عن النشاط العقلى بعد المجهود العقلى المصاحب للأعمال الرياضية الصارمة (المنطقية) أو فى استيعاب الأفكار الجديدة على تلاميذك.

- أما عن التحبيب فى الأفكار الرياضية فهو يأتى عن طريق أن يكون لها أثر فى القلب. أو بالأحرى أثر يزين القلب كما تُزين السماء بزينة الكواكب ويحضرنى فى هذا الصدد قوله سبحانه وتعالى ﴿.. حَبِّبْ إِلَيْكُمْ الْإِيمَانَ وَزَيِّنْهُ فِي قُلُوبِكُمْ..﴾
﴿إِنَّا زَيَّنَّا السَّمَاءَ الدُّنْيَا بِزِينَةِ الْكُوَاكِبِ﴾.

والآن حاول أن تزيد عن النقاط السابقة نقاطاً أخرى مع كتابة انعكاساتك عنها فى مذكراتك. ولاحظ العائد على تدريسيك الابتكارى منها.

المراجع

- ١- جيمس كلايك (ترجمة على يوسف) (٢٠٠٠): «الهيولية تصنع علمًا جديدًا» - القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.
- ٢- أ.د/ نظله حسن أحمد خضر (٢٠٠١): «أصول تدريس الرياضيات» - القاهرة - عالم الكتب. ط/ ١٠.
- ٣- أ.د/ نظله حسن أحمد خضر (١٩٨٤): «دراسات تربوية رائدة في الرياضيات» - القاهرة - عالم الكتب.
- 4- Drazin, p.G (1993) "Non linear systems" cambridge Univ press p 130, chap 4.
- 5- Taylor, R.P (2000). "Order in pollacks chaos". Scientific American - Newyork - Uol 287 No 6, Decembr 2002.
- 6- Thomas, D.A (2002): "Modern. Geometry" Us - Brooks/ cok - Thomson learning.

الفصل الخامس
مزيد حول توليد الفراكتالات

مزيد حول توليد الفراكتالات

مقدمة:

رأينا في الفصل الثالث إمكانية توليد فراكتالات رياضية (مضبوطه) عن طريق المولد generator بالترار المرحلى لتعاقب قطع مستقيمه بأسلوب معين... مثل بعض الفراكتالات المشهوره مثل فراكتال كوخ لرقائق الثلج، منحى بينو.

كما رأينا فراكتالات مولده عن طريق عملية تحويل هندسى يحددها التكرار المرحلى كما فى حالة فراكتال جوان سيربينسكى وبساط سيربينسكى. كما أشرنا إلى مجموعة من التحويلات الهندسيه عند توليد فراكتال شجرة رياضيه - قمتها أيضاً يولد فراكتال منحى كوخ لرقائق الثلج. نحاول فى هذا الفصل إلقاء مزيداً من الضوء على هذه المجموعة من التحويلات الهندسية والتي تسمى بأنظمة الدوال المتكررة مرحلياً (IFS) Iterated function systems وتطبيقها فى توليد بعض فراكتالات مشهوره وفراكتالات تحاكي فراكتالات الطبيعه. وفى الواقع تقع الأهمية التطبيقية التي تعكس النواحي النفعيه لأنظمة الدوال المتكررة مرحلياً (IFS) فى استخدامها لعمل المناظر الطبيعه فى خلفيات أفلام الكارتون وفى محاكاة الظواهر الطبيعه التي تقتصد بصورة كبيرة جداً التخزين فى ذاكرة الكمبيوتر والتي يستحيل إيجاد مكان لتخزينها فى حالة تسجيل الظواهر الطبيعه.

كما نشير إلى فراكتالات تسمى الجاذب الغريب Strange attractor يرتبط تكوينها بالهولوية (أو جوازا الفوضى) chaos- حيث يرتبط فيها النظام واللانظام. فنقدم نبذة عن أشهر وأول جاذب غريب اكتشفه لورنز معروف بإسمه مرتبط تكوينه بتصرفات (ديناميكيات) حلول معادلات تفاضلية. كما نشير إلى توليد أشهر

وأجمل وأعقد فراكتال يعتبر أيضاً جاذب غريب. وهو فراكتال مجموعة ماندلبروت عن طريق تصرفات دالة تربيعية مركبة من الدرجة الثانية توصل إليها ماندلبروت من استثارته ودراسته لمجموعات جوليا. ثم نقدم فراكتالات متولدة من استخدام التكرار المرحلي في حل معادلات مركبة (في المستوى المركب) من الدرجة الثالثة والخامسة لها طابع جمالي فريد. ثم نختم الفصل بأعمال خفيفة لتجديد النشاط العقلي والترويح العقلي تخصص فراكتالات فنية للفنان المهندس إيشر Escher وأخرى ناتجة من تكشيلات تستخدم في ملأ سطح ما (التبليط Tiling).

١-٥- توليد فراكتالات عن طريق أنظمه الدوال المتكررة مرحلياً (IFS).

لما كان مفهوم التشابه الذاتي للفراكتال يتضمن التصغير (أو التكبير) على مقياس Scales متعددة، فهذا يوحي باستخدام تحويلات هندسية تقوم بالتصغير، مثل تحويل التشابه (بمركز معين ومعامل تكبير أو تصغير magnification).

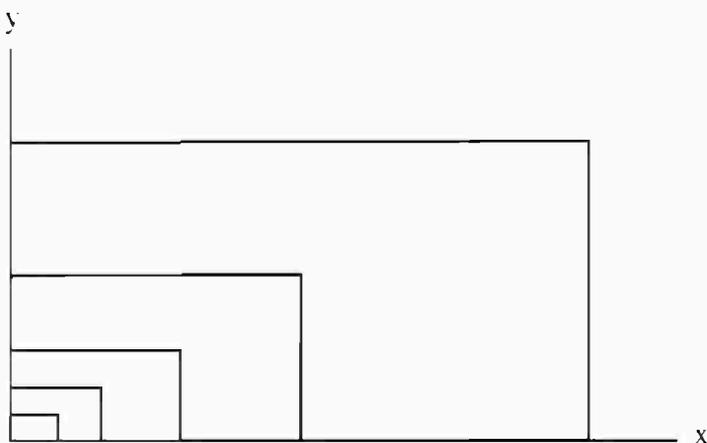
تحويل التشابه الذي يقوم بالتصغير (بمعامل $r < 1$) ينتمي لمجموعة من التحويلات الهندسية أو الدوال تسمى دوال إنكماشية أو انقباضية contraction mappings. وعند تطبيقها تكون أى مسافة بين نقطتين أقل من المسافة الأصلية أو تساويها بالضرب في كسر بين ٠، ١). قد تسمى الدالة الإنكماشية بالتحويل الهندسي (التشابه بمعامل تصغير) dialation ونرمز له D. إذا أخذنا دالة إنكماشية f واستخدمنا التكرار المرحلي، فقيمة الدالة f(x) في التكرار المرحلي الأول n_1 تصير الداخل في التكرار المرحلي التالي الذي ينتج ff(x)... وهكذا تسمى قيم الدالة في التكرارات المرحلية * iterates. f(x), ff(x), fff(x).... بقيم التكرار المرحلية.

ويمكن استخدام دالة انقباضية (انكماشية) واحدة أو نظام من عدة دوال إنكماشية يحددها التكرار المرحلي في توليد فراكتالات كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال ١: بأخذ المستطيل في الربع الأول (شكل ٣٥)، وأخذ الدالة الانكماشية (التحويل الهندسي) تشابه مركزه نقطة الأصل ومعامله $\frac{1}{4}$ الذي يحول النقطة

$$D = \begin{bmatrix} .5 & 0 & 0 \\ 0 & .5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{(س. ص. ١) إلى النقطة (س. ١/٤, ص. ١/٤). أي التحويل الهندسي (الخطي) الذي مصفوفته.}$$

- لاحظ البعد الثالث ١ لاعتبار التحويل الهندسي تحويل آيني.



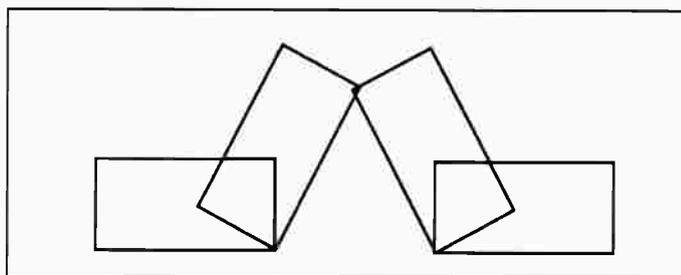
شكل (٣٥)

هنا التكرارات المرحلية التي كونت المستطيلات تبين التكرارات المرحلية لنظام دوال مرحلية التكرار IFS. ونلاحظ أنه في التكرار المرحلي الأول نتج مستطيل أصغر طوله $\frac{1}{4}$ المستطيل الأصلي الكبير وعرضه $\frac{1}{4}$ عرض المستطيل الأصلي. ثم أخذنا هذا الناتج (الخارج) output كداخل input في التكرار المرحلي الثاني لينتج مستطيل أصغر بعديه نصف بعدي المستطيل الخارج في التكرار الأول... وهكذا كل مستطيل أصغر هو صورة للمستطيل الأكبر منه بنفس الدالة (أو التحويل الهندسي) الانكماشية D.

أي أن الشكل (٣٥) نتج من التكرار المرحلي للدالة D أربعة مرات بدءاً بأكبر مستطيل (S_0) نبدأ به كما كنا نفعّل باستخدام المولد بالفصل الثالث.

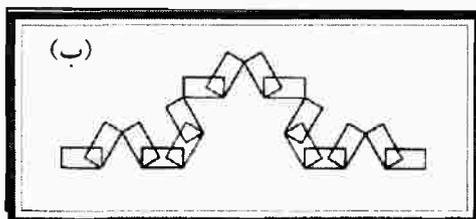
مثال ٢: تأمل شكل (٣٦) أ. المستطيل الكبير أصبح في التكرار المرحلي الأول أربع مستطيلات أصغر. فهل يمكنك تخمين كم تحويل هندسي (أو دالة انكماشية)

استخدم؟ وهل يمكنك أن تتصور الشكل الذي يتكون عندما يقترب التكرار المرحلي إلى ∞ ؟



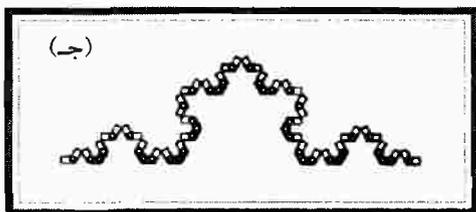
شكل (٣٥) أ

التخمين الصائب هو استخدام أربعة تحويلات هندسية (آينية - خطية) أو دوال انكماشية. كل تحويل يحول المستطيل الكبير (كداخل input) إلى أحد المستطيلات الأصغر (كخارج output). أى أن كل



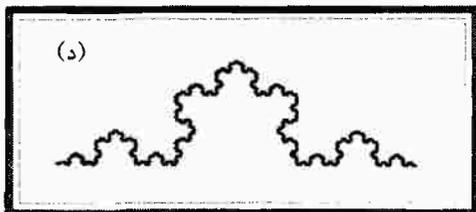
(ب)

مستطيل صغير من المستطيلات الأربعة هو صورة للمستطيل الكبير تحت أحد التحويلات المختلفة وكل التحويلات الأربع تطبق مع بعض فى كل تكرار.



(ج)

شكل (٣٥) ب، ج، د يبين التكرارات المتعاقبة (الثانية والثالثة والرابعة n_2, n_3, n_4) فى التكرار الأول (٣٥) أ نتج أربعة مستطيلات، وفى التكرار الثانى نتج ١٢ مستطيلاً أصغر... وهكذا نجد أنه كلما كبر التكرار كبراً كبيراً كلما اقتربنا من شكل فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج.



(د)

شكل (٣٥) ب، ج، د

أى أن نظام الدوال المتكررة مرحلياً IFS يحتوى على أربعة دوال انكماشية (أو تحويلات هندسية خطية (آفينية)) تُطبق مع بعضها فى كل تكرار مرحلى. وهذا يذكرنا أيضاً بالتكرارات المرحلية والمولد فى الفصل الثالث.

عموما أرجو أن يكون تخمينك صائبا فى التوصل إلى عدد التحويلات المستخدمة والتنبؤ بالتوصل إلى منحنى كوخ لرفائق الثلج عن طريقها.

والواقع أنه يمكن توليد عديد من الفراكتالات (المضبوطة) عن طريق نظم الدوال المتكررة مرحليا IFS. وهنا نركز أن تكون مجموعة الدوال هنا هى دوال أو تحويلات هندسية) انكماشية وخطية (آفينية) - بمعنى أن تكون صور القطع المستقيمة أصغر وأيضاً مستقيمة.

والآن إذا كان لديك فكرة عمل برامج كمبيوترية بلغات سهلة فنجد أن شكل (٣٥) يمكن إنتاجه بعمل برنامج بلغة اللوجو يحتوى على تقارير قليلة تحدد التطبيق النظامى للأربعة دوال (تحويلات هندسية) فى IFS لكل تكرار مرحلى. ونتساءل هل يكون نظام الدوال المتكررة مرحليا IFS لتوليد فراكتالات تحاكي فراكتالات الطبيعة بهذا الأسلوب النظامى فى تطبيق مجموعة دواله؟ هذا ما سوف نعرف إجابته فى البند التالى.

٥-٢: توليد فراكتالات (تحاكي فراكتالات الطبيعة) عن طريق IFS

تعال نتذكر عند رش برادة حديد على سطح زجاجى أفقى عشوائيا نجد البرادة فى أوضاع غير منتظمة (ولا نظامية). وعند وضع مغناطيس أسفل السطح نجد البرادة تبدأ فى تنظيم نفسها بالشكل النظامى الذى نعرفه (ويمثل خطوط القوى المغناطيسية). بالمثل فى توليد الفراكتالات التى تحاكي فراكتالات الطبيعة بالكمبيوتر نجد أنه يظهر على الشاشة رش من النقط العشوائية اللانظامية ثم بالتدرج يبرز من خلالها شكل معين يتضح بالتدرج.. هنا لا يوجد مغناطيس كما فى حالة برادة الحديد، ولكن مؤثرات أو نظام من الدوال المتكررة مرحليا IFS ينتج أشكال فراكتال من بين نقط لا نظام فيها.

عملية وجود نظام من بين اللانظام أو ارتباط النظام باللانظام هو عملية للهوليه (أو جوازاً الفوضى) Chaos.

وهذا الأسلوب في تكوين الفراكتال يختلف عن الأسلوب السابق لتكوين الفراكتال الرياضي المضبوط (في مثال ١ ، ٢) الذي يبدأ بشكل نظامي ثم يتحول إلى شكل آخر يصير أدق وأدق حتى يقترب من الفراكتال. أما هنا فالفراكتال يبرز من بين نقط عشوائيه ويتضح شيئاً فشيئاً. وهذا يدفعنا أن نتوقع أن يكون تطبيق الدوال في نظام الدوال المتكررة مرحلياً بأسلوب غير نظامي أو بالأحرى بطريقة عشوائية لتوليد فراكتالات تحاكي الطبيعة. وأن استخدام الكمبيوتر لإظهارها يستلزم برمجيات للهوليه (الفوضى) chaos. وهذا ما يتضح بعد المثالين التاليين.

مثال (٣): يمكن توليد الفراكتال الممثل لريشة طائر شكل (٣٦) عن طريق نظام الدوال المرحلية التكرار IFS المتكون من أربعة دوال انكماشية (تحويلات هندسية أفينية خطية) dialation مصفوفاتها:

$$\text{Map 1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & .16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Map 2} = \begin{bmatrix} .85 & .04 & 0 \\ .04 & .85 & 1.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Map 3} = \begin{bmatrix} .20 & -.26 & 0 \\ .23 & .22 & 1.6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Map 4} = \begin{bmatrix} -.15 & -.28 & 0 \\ .26 & .24 & .44 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مع استخدام برمجيه هوليه Chaos

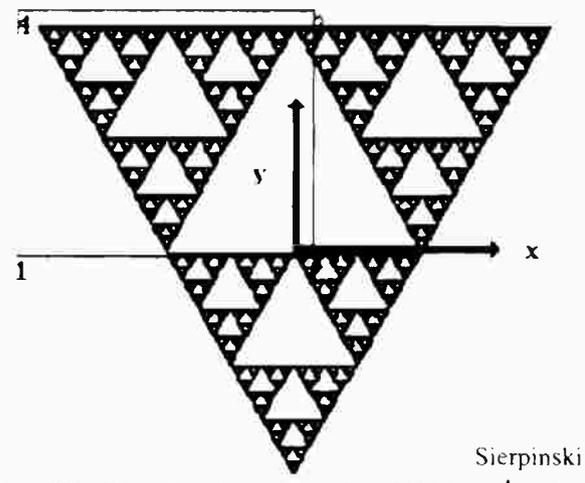


شكل (٣٦)

هذه الدوال الأربعة تطبق دفعة واحدة ولكن الاختيار لكل داله يكون إختيار عشوائى.

مثال (٤) يمكن توليد فراكتال جوان سيربينسكى (شكل ٣٧) أيضاً من إختيار عشوائى للدوال الثلاثة فى نظام دوال مرحلية التكرار IFS بالاستعانه ببرمجه الهوليه chaos مصفوفات الدوال الثلاثة:

$$\text{Map 1} = \begin{bmatrix} .5 & .0 & -1 \\ 0 & .5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Map 2} = \begin{bmatrix} .5 & .0 & 1 \\ 0 & .5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Map 3} = \begin{bmatrix} .5 & .0 & 1 \\ 0 & .5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



شكل (٣٧)

ويتضح التطبيق العشوائى للدوال فى IFS من الإجراءات (الخوارزميات) التالية التى تستخدم فى تكوين (فراكتال) جوان سيربينسكى شكل (٣٧).

- ١ - كنقطة ابتدائية نختار عشوائياً مركز هذه الدوال ونمثلها في المستوى.
 - ٢ - نختار عشوائياً أحد هذه الدوال الثلاثة ونطبقها على النقطة الابتدائية لإنتاج النقطة الثانية.
 - ٣ - نختار عشوائياً أحد هذه الدوال الثلاثة ونطبقها على النقطة الثانية لإنتاج النقطة الثالثة.
 - ٤ - نختار عشوائياً أحد هذه الدوال الثلاثة ونطبقها على النقطة الثالثة لإنتاج النقطة الرابعة.
 - ٥ - الاستمرار في التكرار المرحلي حتى يوجد نقط كافية (لصور النقط بهذه الدوال) حتى تظهر ملامح الفراكتال.
- ومثل هذه الإجراءات (بالنسبة للاربع دوال للنظام IFS في المثال (٣) لتوليد الريشة. وعموماً توليد شكل من خلال اللانظام (أو بالأحرى عن طريق عملية الهولوية chaos) فإننا نسمى هذا الشكل الناتج بالجاذب attractor. عندما يكون الشكل بسيط اقليدي.. كمربع أو نقطة مثلاً....
- أما إذا كان شكل الجاذب هو فراكتال (أو شكل غير اقليدي) فإننا نسميه بالجاذب الغريب strange attractor.
- وعلى ذلك فالفراكتالات التي تولدت في المثالية السابقين عن طريق عمليات الهولوية (التي يرتبط فيها النظام مع اللانظام) chaos للريشة أو مثلث جوان سيرينسكى يُسمى كل منها جاذب غريب strange attractor. والواقع أنه إذا كانت كل دالة في IFS هي دالة إنكماشية فإن الجاذب الغريب يكون فراكتال كما في المثالين السابقين عموماً عندما يتولد الجاذب الغريب بواسطة الكمبيوتر فإنه يظهر على الشاشة في البداية رش spray من النقط العشوائية ثم يبرز تدريجياً من خلالها الفراكتال (أى الجاذب الغريب). فالجاذب الغريب شكل يصف السلوك طويل المدى لنظام هولولي (أبو بالأحرى فوضوي) chaotic.

ولعل أول جاذب غريب اكتشف منذ مدة قبل اختراع هندسة الفراكتال كان جاذب لورنز Lorenz attractor، نقدمه في البند التالي.

٣-٥- جاذب لورنز Lorenz:

ابتدأ إكتشاف الجاذب الغريب فى الستينيات على يد عالم الأرصاد الجوية-meteorologist إدوارد لورنز Edward Lorenz. وقد كان عاشقاً للرياضيات ومغرمًا بالألغاز الرياضية والتحدى لحلها. وقد اكتشف فى عمله أن الطقس لغزاً أعقد من كل ما واجهه من الغاز رياضية. كانت المشكلة هى التنبؤ بالطقس، حيث كان علماء الطقس يمكنهم التنبؤ به لعدة أيام فقط وليس لفترات طويلة، ولكى يجيب لورنز على مشكلة لماذا يكون الطقس غير قابل للتنبؤ وضع إنثنا عشرة معادلة غير خطية كنموذج رياضى للطقس تتضمن الحرارة ونسبة الرطوبة سرعة الرياح.. ثم بسط النموذج إلى ثلاثة معادلات تفاضليه. وقد كان متأكدًا أن نمودجه (لتيارات) الحمل سوف يودى إلى إمكانيته التنبؤ طويل المدى للطقس. وأدخل معادلاته فى الكمبيوتر. ثم بالتكرار المرحلى أدخل مخرجات الدورة السابقة؛ فإذا بالنتائج تختلف إختلافًا كبيرًا، فكان هذه لغزاً محيراً له.

إذ كيف يكون الاختلاف الطفيف جداً فى المدخلات يودى إلى كل هذا الاختلاف الخطير.

وقدم لورنز ١٩٦٣ تلك الظاهرة بمسمى الحساسية للأحوال الابتدائية Sensitivity to initial conditions، وهى تظهر عندما يحدثُ تغيير صغير جداً فى ظرف (حالة) ما إلى تغيير كبير لا يمكن التنبؤ به. وهذه الظاهرة تعرف بظاهرة الفراشة فى نظرية الهولوية (أو جوازاً الفوضى) chaos. وظاهرة الفراشة مؤداها أن إهتزاز جناح فراشة يعمل إضطراباً طفيفاً فى الهواء يمكن أن يتضاعف تضاعفاً هائلاً على مدى الوقت والمكان إلى الحد الذى يحدث عاصفة فظيعة فى مكان للجانب الآخر فى هذا العالم. هذا اللانظام disorder الناتج كان الشرارة فى خلق نظرية الهولوية chaos التى استطاعت تفسير ظواهر طبيعیه كان يظن أنها فوضى أو عشوائية، ولكنها من حالة

النظام إلى اللانظام لأسباب تتناولها النظرية بالتحليل على أساس أن كل فوضى chaos لا نظام ولكن ليس لكل لا نظام فوضى.

وبنظرية الهولوية حدثت ثورة علمية جديدة جعلت من النظرية النسبية نظرية تقليديه، ولها تطبيقات فى تقدم معظم العلوم والتكنولوجيا. ومن المشوق أن جيمس جلايك فى كتابه «الهولوية تصنع علمًا جديدًا (١٩٨٧)» قدم مقولة شعرية قديمه فى مقدمته تقول:

For the want of a nail the shoe was lost,
For the want of a shoe the horse was lost,
For the want of a horse the rider was lost,
For the want of a rider the battle was lost,
For the want of a battle the kingdom was lost
And all for the want of a horseshoe - nail.

وهى تشير إلى أنه بسبب ضياع مسمار واحد فقط تحدث أحداث تؤدي إلى أن كل المملكة (والبلد) تنهار فى معركة تخسرها وذلك للتمهيد لفكرة الحساسيه للأحوال الإبتدائية.

وفى الواقع الحساسيه للأحوال الإبتدائية توصل إليها قبل لورنز العالم ماكسويل^(١٣) (١٨٧٦) صاحب النظرية الحركية للغازات حيث حذر من مسلمة التحديدية determinism التى تنص على «نفس الأسباب تؤدي إلى نفس النتائج» وينبئ إلى أنه يجب ألا نخلطها بالفرضية «الأسباب المتشابهة تؤدي إلى نتائج متشابهة». وذلك لأنه يوجد حالات فى الفيزياء تؤدي تغييرات طفيفة إبتدائية فيها إلى اختلاف كبير فى الحالة النهائية. كما أشار الرياضى پوانكاريه ١٩٠٢ فى كتابه الطريقة والعلم إلى فكرة الحساسيه للأحوال الإبتدائية (لم تكن بهذا المسمى)، حيث ذكر «أن عدم التبوّ بتقلبات الطقس وسقوط المطر وحتى العواصف لا تبدو أنها راجعة إلى عوامل الصدفة ولكن إلى تغيير إبتدائى بسيط يصل إلى $\frac{1}{10}$ درجة».

نرجع ثانية إلى المعادلات التفاضلية الثلاث التي قدمها لورنز للدراسة - (متأثراً بما تعلمه من سولتزمان Saltzman كنموذج ثنائي البعد لتيارات الحمل convection في طبقة أفقيه لسائل يسخن من أسفل):

$$X' = \frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \quad \sigma = 10$$

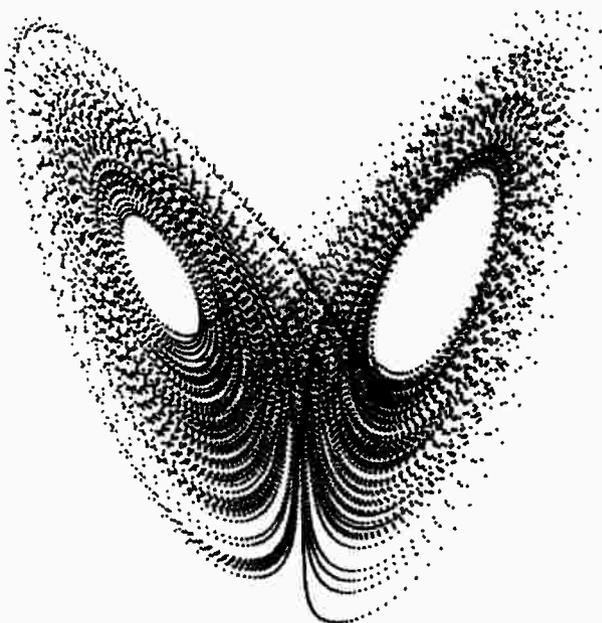
$$Y' = \frac{dy}{dt} = r x - y - z x, \quad r = 2 \dots \dots \dots (1)$$

$$Z' = \frac{dz}{dt} = -b z + x y, \quad b = 8/3$$

حيث X' , Y' , Z' هي تفاضل الدوال بالنسبة للزمن. وقد ذكر لورنز أنه خلال الحسابات أراد أن يقترب جداً من أحد الحلول. ولهذا ابتداءً يرجع لبداية التكامل باستخدام قيم بينيه تظهر على شاشة الكمبيوتر لحالة ابتدائية initial condition. ولدهشته كانت الحسابات الجديدة متباعدة diverged تدريجياً من النتيجة الأولى لتصل إلى نتائج مختلفة في أربعة أيام للطقس weather. فظن في البداية أن ذلك يرجع لفشل أجزاء الكمبيوتر الصلبة hardware. وللتسريع أعطى أوامر للكمبيوتر للتقريب لثلاثة أرقام عشرية حيث كانت الحسابات تجرى على ٦ ستة أرقام عشرية. فوجد أن الحالة الابتدائية الأولى التي دخلت البرنامج لم تناظر match القيمة الناتجة عن التكامل الأول. كل فرق صغير ابتدائي توسع في كل خطوة تكامل سببه إختلافاً يُعد كبيراً بعد برهة بين الحلين. ومعنى ذلك أن التنبؤ بالطقس على المدى الطويل من المستحيل. وذلك لأن الأخطاء البسيطة التي لا يمكن تحاشيها تتضخم amplified كلما مر الوقت مما يجعل القيم التي يحصل عليها بواسطة التكاملات العديدة غير ذات معنى في فترة قصيرة من الزمن. ومن المشوق أن تعرف أن كمبيوتر لورنز الذي كان يستعين به كان عتيقاً سعته 16 K.b ويمكنه إجراء ٦٠ عملية ضرب في الدقيقة وتكامل نظام من ١٦ معادلة تفاضلية يتطلب ثانية في كل خطوة التكامل (١٣).

المهم أن حل نظام المعادلات التفاضلية الثلاثة (١) للورنز أدى للتوصل إلى أعجب جاذب غريب يتكون من مسارات حلزونية غير متقاطعة يميناً ويساراً مكونة

شكل جناحي فراشة. أنظر شكل (٣٨) - يبرز شيئاً فشيئاً من بين نقط عشوائية كأى جاذب غريب.



شكل (٣٨) جاذب لورنز الغريب

وللتوضيح نقدم شكل (٣٩) أ، ب، ج التي تبين مسقط جاذب لورنز في المستوى XZ , XY , YZ على الترتيب التي توصل إليها من نتائج التكاملات العددية لنظام لورنز لمعادلاته الثلاثة التفاضلية (١) عند قيم البارامترات $r=28$, $\sigma=10$, $b=8/3$

$$\text{حيث الزمن } t: 30 \leq t \leq 70$$

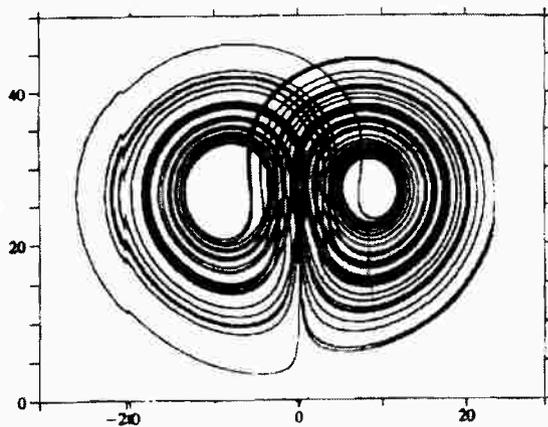
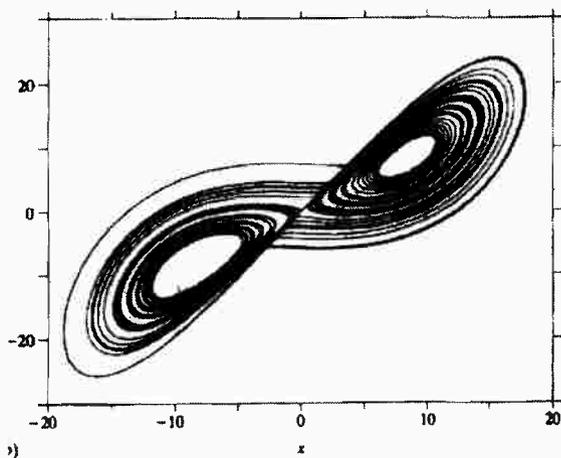
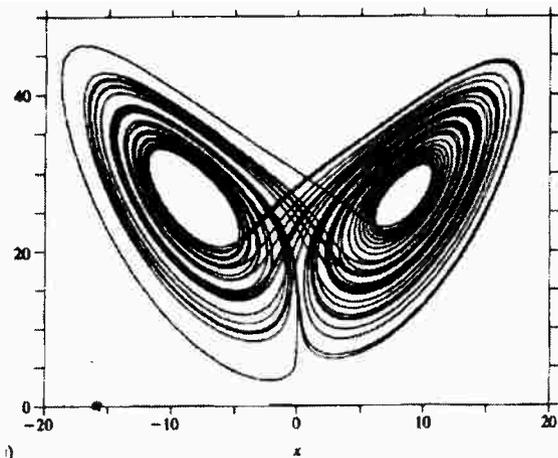
ويمكن التحقق من أن نقطتي الاتزان C, C^1 (نقطة الاتزان في نظام المعادلات التفاضلية تناظر النقطة الثابتة) هي $C, C^1 = (\pm 8.48, \pm 8.48)$

في المستوى XZ, XY

وفي المستوى XZ, XY, YZ على الترتيب

$$C, C^1 = (\pm 8.48, 8.48, 27)$$

في البداية يسير المسار حول C (الجناح الأول) ويلف حلزونياً خارجاً عدّة مرات حول C^1 (الجناح الآخر). ويقترب الشكل من الجاذب الغريب في عشرين ثانية. فيمكن أن نرى الجاذب الغريب كعدد من الحلزونات حول C تتبعها حلزونات حول C^1 مسارات غير متقاطعة (لأنها في فراغ ذو ثلاثة أبعاد). وهكذا يبدو تعاقب الحلزونات كتعاقب عشوائي random. والإجراءات الحاسوبية تبين أن جوار المسارات الغريبة من الجاذب الغريب تتحدد بدالة قوى power function. وعلى ذلك فالمسارات التي تبدأ قريبة جداً من بعض تنفصل سريعاً مفتقدة أى ارتباط فيما بينها. ولذلك فإنه يوجد حساسية معتمده على الأحوال الابتدائية. وإذا أعيدت الحسابات واستخدام كمبيوتر آخر أو برنامج مختلف فمن المحتمل أن تتباعد النتائج الجديدة عن الموجودة بالشكل السابق حتى لأن المسارين الحسوبيين $X(t)$ سريعاً ما يكونان غير مرتبطين بالرغم من أنهما يعبران عن نفس الجاذب. وعلى ذلك فالمسارات trajectories التي تتقارب للجاذب تكون لها حساسية للأحوال الابتدائية. والحساسيه في شكل (٣٨) تناظر الحقيقة بأن المسارات المبتدئه عند حالتين قريبتين تنتهى بالالتفاف حول جناحي الفراشة.



شکل (۳۹) آ. ب. ج

وعموماً فالجاذب الغريب للورنز له ملامح أخرى. فالمسارات الداخلية تكون كثيفة dense. وهذا يعنى أنه متعدى transitive ديناميكيا أو أنه لا يمكن تقطيعه in-decomposable إلى قطع صغيرة لا متغيره تحت السريان Flow. وله نقط اتزان. وأنه شكل فراكتال.

إرجع مرة ثانية وتأمل جاذب لورنز الغريب. تأمل الناحية الجمالية شكل دقيق ساحر لا تتقاطع طياته (مساراته) ذات اليمين وذات الشمال (لأنه فى فراغ زى ثلاثة أبعاد مثل أستك على حرف 8 برفع الجزء الأوسط للأستك نجده غير متقاطع فى الفراغ الثلاثى). هذا الفراكتال (الجاذب الغريب) ولید لنقط عشوائية لا نظاميه يبرز من خلالها. ولم يُعطى لشكله اسم الجاذب الغريب للورنز إلا بعد سنوات عديدة. واسترجع أنه نتج من حسابات. عدد قليل من معادلات تفاضلية لاكتشاف سر من أسرار الطبيعة مرتبط بالطقس.

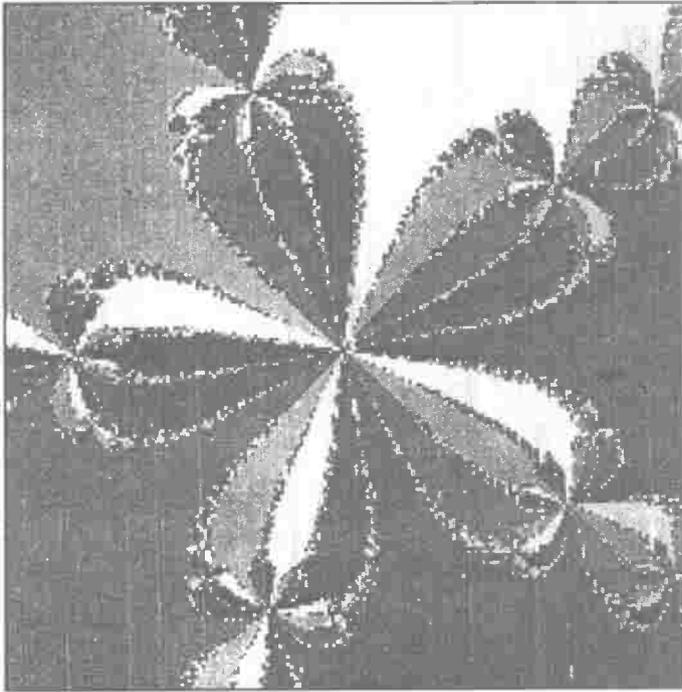
هذا الشكل فتح فيما بعد آفاقاً لدراسات فى الرياضيات والهيولية (الفوضى) chaos والنظم الديناميكية وتكنولوجيا الاتصالات والعلوم المعاصرة. وعموماً فجاذب لورنز الغريب يعتبر الآن جاذب كلاسيكى وإذا كان جاذب لورنز تولد من خلال حل معادلات تفاضلية. فهل تتخيل أن حل معادلات بالتركرار المرحلى يمكن أن يولد فراكتالات جاذب غريب؟.... هذا سوف نتناوله فى البند التالى.

٤-٥- حل معادلات (فى المستوى المركب) باستخدام التكرار المرحلى. وتوليد فراكتالات بدیعة.

سبق أن أشرنا إلى طريقة نيوتن فى حل المعادلات باستخدام التكرار المرحلى من خلال التوصل إلى تقريبات لحلول مخمنه. وقد وجد أنه عندما تكون الحلول أعداداً مركبه complex numbers أنه المنطقه المشتركة بين أى حلين تكون على شكل معقد غريب جميل لا يتصوره العقل.. هو شكل فراكتال. فإذا إخترنا أو قمنا بتخمين نقطة قريبة من أحد الحلول فى منطقة الحدود بين اخلول باستخدام الحاسب فإننا نجد التكرارات المرحلية تعطى نتائج.. عبارة عن نقط تتراقص عشوائيا قبل أن تتقارب

لأحد الحلول عند الحدود مباشرة في التكرارات اللانهائية. ومن هذه النقط العشوائية اللانظامية يبرز فراكتالات تتميز بجمال فريد. وما دامت هذه الفراكتالات تولدت من خلال عمليات هيوليه (أو جوازا فوضويه) chaotic فهي أيضاً جاذب غريب.

هل تتصور أن شكل (٤٠) نشأت الفراكتالات الخمسة فيه من إستخدام طريقة نيوتن في حل معادلة من الدرجة الخامسة في المستوى المركب أو بالأحرى من البحث عن القيم الصفرية للدالة المركبة $Z \rightarrow Z^5 - 1$ في المستوى المركب complex plane. حيث تشير المقاييس الرمادية المختلفة إلى المناطق التي تُوصَل إلى نفس الحل (أو التي عندها تكون الدالة صفر) عندما تكون نقطية البداية (للحل المخمن) فيها.



شكل (٤٠)

تأمل مرة ثانية هذا التشكيل البديع للفراكتال في الشكل السابق... هل هو تشكيل زخرفي؟ هل هو أزهار طبيعيه؟ هل هو ابداع ليد فنان؟... لا إنه شكل رياضى قام بعمله تكرار مرحلى يحدد عملية إيجاد طريقة حل المعادلات.. تعال نلقى ضوءاً

على هذه الطريقة وجذورها التاريخية - نرجع إلى المعادلة المذكورة سابقاً لعمل التكرار المرحلي

$$s_{n+1} = s_n - \frac{d(s_n)}{d'(s_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

المولد للمتابعه $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$.

التي تتقارب للجذر α .

حيث $d: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ أى $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (الدالة حقيقية). α هي صفر الدالة د أى $f(\alpha) = 0$. $d'(s_n)$ هي تفاضل الدالة. وأخذ s_0 (أى X_0) قريبة من الجذر α مع بعض شروط معينه.

والواقع أن أفكار نيوتن حول هذا الشأن (١٦٦٩) كانت أكثر صوبة وتعقيداً. وقد قام بتبسيطها رافسون إلى المعادلة السابقه فى ٢٠ سنة تقريباً أى فى (١٦٩٠). ولذا عرفت بطريقة نيوتن ورافسون Raphson. وقد بصنفا البعض بأنها طريقة المماس تبعاً لتفسيرها الهندسى.. لأن ميل المماس عند كل نهاية صغرى = صفر. ولكن استخدم الصفر بديلاً لخوازميات (إجراءات أخرى).

وقد حاول كيلى بعد مائتى عام أى فى ١٨٦٩ استخدامها لإيجاد جذور أعداد مركبة لدوال مركبه $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ بأخذ العدد المركب Z_0 أى $Z_0 \in \mathbb{C}$. مجموعة الأعداد المركبة واستخدام التكرار المرحلي الذى يحدد القاعدة.

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ثم بحث فى الشروط التى تجعل المتابعه $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب converges إلى الجذر. حيث كان مهتماً بالمناطق التى تتقارب فيها التكرارات المرحلية إلى الجذر وسماها بأحواض جذب الجذر α . وقد استطاع حل المشكلة عندما كانت الدالة المركبة f تربيعية (من الدرجة الثانية). ولكنه فشل بالنسبة للدالة التكعيبيه (من الدرجة الثالثة).

فمثلاً بالنسبة للدالة $f(z) = Z^3 - 1$ التي فشلت طريقة نيوتن التي استخدمها كيلى للتقارب لها صفة من صفات الفراكتال وهي البعد الفراكتالى ولأنها تتطابق (تقع على) مع حدود أحواض الجذب للجذور المركبة: $k = 0, 1, 2$ ، $e^{2k n \pi i/3}$

أى للجذور $e, e^{2\pi i/3}, e^{\pi i/3}$

أى (هـ، هـ، هـ) $\frac{2}{3}$ ط، $\frac{4}{3}$ ط هـ

وهذه المناطق (أحواض الجذب) هي أشكال فراكتال بالغه التعقد لاحظناها بالنسبة لأشكال التماثلات فى حل المعادلة $Z^5 - 1 = 0$ شكل (٤٠) والتي أظهر جمالها الكمبيوتر أما شكل (٤١) أفيين الفراكتال (الجاذب الغريب) أحواض الجذور الثلاثة وهي صورة مشهورة نشرت فى العديد من الكتب - لاحظ تماثلات الزوايا $\frac{2}{3}$ ط وإذا كانت هذه صورة مشهورة؟ فهل توجد صور أخرى لجذور نفس المعادلة المركبة $z^3 - 1 = 0$ ؟ وإذا كانت الإجابة بالإيجاب فماذا تظن ما الذى يحدث التغيير فى شكل الفراكتالات المتولدة عن حل نفس المعادلة؟

ربما تصل إلى أن ذلك يرجع إلى تغيير القاعدة التى يحددها التكرار المرحلى للوصول إلى التقارب Convergence أو بالأحرى طرق التكرار المرحلى للتقارب. فى الواقع لا يكتفى الرياضيون التوصل إلى حل بطريقة ما، ولكن يبحثوا فى التوصل إلى طريقة أمثل، فهم يتطلعون إلى الأفضل دائماً.

وبالفعل كانوا يتطلعون إلى إيجاد طرق أفضل للتكرار المرحلى عن الطريقة التى تستخدم القاعدة السابقة المأخوذة عن طريقة نيوتن لتطبيقها على الدوال المركبة. وكان الدافع وراء ذلك:

(١) «إيجاد جذور معادلات غير خطيه، ومعرفة الدقة accuracy وثبات stability

الخوارزميات - الاستراتيجيات (الإجراءات) الحسابية.

(٢) لاطهار جمال الرسوم التى تنتج بواسطة الكمبيوتر.

(٣) استخدام أساليب لتسريع التقارب.

وعن طريق الطرق العددية والتحليل العددي أمكن التوصل إلى طرق للتكرار المرحلى (أو بالأحرى قواعد مختلفة يحددها التكرار المرحلى) أنتجت أشكالاً بديعه

مبهرة لفراكتالات ملونه غاية في الجمال مختلفة. على سبيل المثال بالنسبة لمناطق
(أحواض) جذور المعادلة المركبة التكعيبة $z^3 - 1 = 0$ للدالة $f(z) = z^3 - 1$.

ومن المشوق أن نكتفى بذكر أهم هذه الطرق وقاعدة بعض منها التي يحددها
التكرار المرحلي والشكل الناتج من استخدامها (وللمزيد من الدراسة أنظر
مرجع (12)).

١-٤-٥ طرق التكرار المرحلي، والفراكتالات البديعة المتولدة من حل المعادلة المركبة
التكعيبة (١٢) $z^3 - 1 = 0$

١- طريقة نيوتن للجذور المتعددة multiple roots (بدرجة، للتقارب): انظر شكل
(٤١) ب

$$Z_{n-1} = Z_n - \frac{f(Z_n) f'(Z_n)}{f'(Z_n)^2 - f(Z_n) f''(Z_n)}$$

٢- طريقة هويتاكر Whitaker للاسراع المحذب convex acceleration أنظر
شكل (٤١) ب - وهي تعرف أيضاً باسم طريقة الوتر المتوازي تبعاً لتفسيرها
الهندسي. وهي تبسيط لطريقة نيوتن بتحاشي حساب المشتقة عن طريق عمل
التقريب $f'(Z) = \frac{1}{\lambda}$

حيث λ پارامتر نختاره لكي تكون الدالة $F(Z) = Z - \lambda f(Z)$ انقباضية
(انكماشية) contractive. وعلى ذلك لها نقطة ثابتة هي جذر للدالة f انظر
شكل (٤١) ج (وهي بدرجة تقارب 2) وتستخدم القاعدة:

$$Z_{n-1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{2 - L_f(Z_n)} \quad (2 - L_f(Z_n))$$

$$L_f(Z) = \frac{f(Z) f''(Z)}{f'(Z)^2} \quad \text{حيث}$$

٣- طريقة هويتاكر للاسراع المحذب المضاعف double convex acceleration

أنظر شكل (٤١) د (وهي بدرجة تقارب ٣) أو تستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{4f'(Z_n)} \left[\frac{2 - L_f(Z_n) + \frac{4 + L_f(Z_n)}{2 - L_f(Z_n)(2 - L_f(Z_n))}}{2 - L_f(Z_n)(2 - L_f(Z_n))} \right]$$

٤ - طريقة هالي Halley وتعرفه بطريقة مماس القطوع الزائدة Tangent hyperbo-

las وهي طريقة مشهورة لحل معادلات غير خطية. (وهي بدرجة تقارب ٣).
أنظر شكل (٤١) هـ وتستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \frac{2}{2 - 2f(Z_n)} = Z_n - \frac{1}{\frac{f'(Z_n)}{f(Z_n)} - \frac{f''(Z_n)}{2f'(Z_n)}}$$

٥ - طريقة شبيشيف Chebyshev وتعرف بطريقة أويلر شبيشيف لتفسيرها الهندسي
لمماس القطع المكافئة للدوال الحقيقية. وهي كالسابقة مشهورة لحل معادلات
غير خطية. (وهي بدرجة تقارب ٣). انظر شكل (٤١) وهى تستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \left[1 - \frac{Lf(Z_n)}{2} \right]$$

٦ - الطريقة الخارقة لها لى Super Halley method أو المعروفة بطريقة نيوتن
للإسراع المحدب أو طريقة هالى - فيرنر Halley - Werner . وهى من أشهر
وأقوى الطرق التى تحول المعادلة إلى معادلة ذات نقطة ثابتة. (وهى بدرجة
تقارب ٣) انظر شكل (٤١) ز. وتستخدم القاعدة:

$$Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{2f'(Z_n)} \frac{2 - Lf(Z_n)}{1 - Lf(Z_n)} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)} \left[1 + \frac{\frac{1}{2} Lf(Z_n)}{1 - Lf(Z_n)} \right]$$

كل هذه الطرق للتكرار المرحلى السابقة تحسب f، ومشتقتها فى كل خطوة
للطريقة لنقطة واحدة. ولكن يوجد طرق مرحلية التكرار المتعدد التى تحسب
فيها قيمة f، والمشتقة لأكثر من نقطة فى كل خطوة.

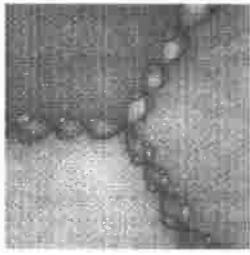
٧ - طريقة تروب - أوستروسكى Traub - Ostrowsti (وهي تقدم أكبر درجة للتقارب) انظر شكل (٤٧)٢، مثلها مثل طريقة جارات Jarrat انظر شكل (٤١)ح. وطريقة جارات العكسية انظر شكل (٤١) ط.

وتستخدم طريقة تروب - أوستروسكى القاعدة:

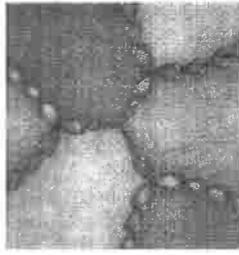
$$Z_{n-1} = Z_n - u(Z_n) \frac{f(Z_n) - u(Z_n) - f(Z_n)}{2f(Z_n - u(Z_n)) - f(Z_n)}$$

وعموماً عن طريق استخدام الطرق المختلفة للتكرار المرحلي التي ذكرناها وطرقاً أخرى وباستخدام امكانيات تكنولوجيا الرسوم الكمبيوترية وألوان الكمبيوتر أمكن التوصل إلى بديع أشكال الفراكتال فى المناطق القريبة من الجذور (أحواض الجذور) التي تظهر ملونة على شاشة الكمبيوتر. بتطبيقها على الدالة $f(z) = z^3 - 1$. وقد استخدم اللون الأصفر لأحواض جذب الجذور $e^{-2\pi i/3}$, $e^{-4\pi i/3}$ مع التفتيح والتغميق نسبة إلى عدد التكرارات المرحلية للتوصل (للتقارب) للجذر بالبدقة المطلوبة. ومع وضع علامة اللون الأسود للنقط المناظرة لطريقة التكرار المرحلي بداية بالنقط Z_0 التي لا تصل إلى جذر.

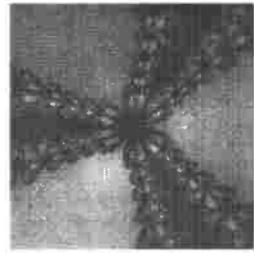
والإنبهار والاستمتاع بهذه الأشكال (انظر شكل (٤١) أ - ط) ليس فقط لروعة جمالها أو اختلاف أشكالها باختلاف الطرق التكرارية المرحلية المختلفة. ولكن فى عملية تكوينها البديع من تحركات عشوائية للنقط حتى تبرز الفراكتالات (الجذاب الغريب) لكل منها.



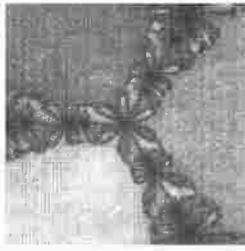
(ا)



(ب)



(ج)



(د)



(هـ)



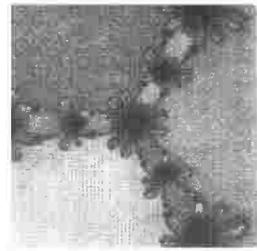
(و)



(ز)



(ح)



(ط)

شکل (۴۱)

وختاماً، فقد استرسلت في هذا البند لأن المعلم في دراسته وتدرسه يتعرض لحل المعادلات بصفة عامة وباستخدام طريقة نيوتن القائمة على التكرار المرحلي بصفة خاصة، ولايجاد الجذور التكميلية للواحد الصحيح وفي استخدام الخوارزميات. والخوارزميات هي ببساطة اجراءات أو تكرار خطوات معينة كالتى تستخدمها فى القسم المطولة. وهى تنصب أيضاً على التكرار المرحلي .

مثل هذه الأفكار تثير ما قدمناه، حيث يمكن أن تكون دافعاً للمعلم لنهم أعمق أو اشراك تلاميذه فى الاستمتاع بالفراكتالات البديعية المرتبطة بحل $z^3 - 1 = 0$ أو معايشة الفكر الرياضى المعاصر. فما قد يهمننا فى تدريس الرياضيات التقليدية هو إيجاد جذور المعادلة أو بالأحرى مجموعة الحل لها. أما الفكر الرياضى المعاصر فيهتم بالبحث عن تصرفاته وديناميكيات الدالة فى منطقة الجوار لجذور المعادلة وحدودها. بالاضافة إلى أننا كنا نستعين بالرسم البيانى كأقصى ما يمكن استخدامه كوسيلة لتوضيح إجراءات الحل الجبرى أو ايجاد الحل. أما فى الفكر الرياضى المعاصر فقد تلاحم استخدام الكمبيوتر بإمكانياته الهائلة فى رصد التكرارات المرحلية وفى الرسوم الكمبيوترية graphics والحركة وتكنولوجيا استراتيجيات الألوان فى دراسة ما وراء الحل، وللتوصل إلى الفراكتالات البديعة المختلفة وعملية تكوينها فى مناطق أحواض الجذب. وذلك باستخدام طرق تكرارية مرحلية مختلفة قدمها رياضيون (شكليون - متخصصون فى التحليل الرياضى) نتيجة دراستهم لتكون أكثر دقة وأكثر سرعة تقارب وأعلى درجة تقارب.... وقد اكتفيت بتقديم بعضاً من هذه الطرق وقواعدها لإثارة المعلم للدراسة المستقلة ليعرف المزيد عنها وعن طرق استثارها فى كتب التحليل العددي الجديدة.

فى البندين السابقين قدمنا جاذب لورنز الغريب، وجاذب غريب مرتبط بحل معادلات مركبة باستخدام طرق تكرارية مرحلية. والآن تعال نعيد التفكير فى أجمل وأعقد فراكتال مشهور هو أيضاً جاذب غريب. وهو ما يعرف بفراكتال مجموعة

ماندلبروت ومجموعة جزئية منها عرفت من قبل معروفة باسم مجموعة جوليا، فى البند التالى.

5-5: أشهر وأجمل جاذب غريب - مجموعة ماندلبروت - مجموعة جوليا

تعال نتأمل مرة أخرى شكل (٦)، (٧) بالفصل الثالث. هل تتصور أن صوراً بهذا الجمال الفريد هى نتائج إجراءات رياضية تخص دوال مركبة فى المستوى المركب تربيعية بقاعدة بسيطة؟ هل تتصور أيضاً أن ظهورها على شاشة الكمبيوتر بسيط يحتاج إلى برنامج يبضعه أسطر (أوامر) قليلة فقط؟ وأنه يبرز من خلال اضطرابات ولا نظام عشوائى من نقط - هيولية Chaos؟

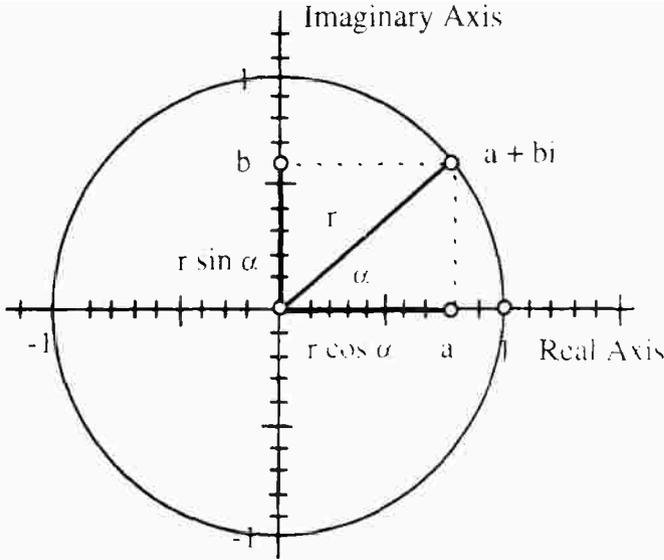
كمعلم رياضيات لن يشبعك التطلع إلى الصورة وتلمس نواحيها الجمالية، ولكنك تتطلع بحب استطلاع لمعرفة ولو القليل عن الأساس الرياضى فى تكوينها (توليدها) وهذا ما سوف نتعرض له.

ولقد توصلنا فى بند (٥-١، ٥-٢) إلى أن نظم الدوال التكرارية مرحليا IFS استخدمت فى توليد فراكتالات جاذب غريب وفراكتالات تحاكي الطبيعة. وأن هذه الدوال خطية وانكماشية أما توليد أشهر وأجمل جاذب غريب والمسمى مجموعة ماندلبروت فهو يتولد بواسطة التكرار المرحلى لدوال تربيعية فى المستوى المركب. مثل هذه الدوال تعتبر حالة خاصة من فصل معادلات الفروق difference equations ذات البعدين ومن أمثلتها الدالة اللوجستية Logistic mapping .

$$f(x) = rx(1-x)$$

الحقيقة أو المركبة التى تستخدم كمدخل لدراسة الهيولية Chaos.

والآن تعال نسترجع معلوماتنا عن تمثيل الأعداد المركبة فى المستوى المركب انظر شكل (٤٢).



شكل (٤٢) يمثل النقط في المستوى المركب

المستوى المركب C يتكون من النقط على الصورة $a + bi$ حيث $i = \sqrt{-1}$. المسافة r من نقطة الأصل إلى النقطة $a + bi$ تسمى المقياس modulus. إذا وقعت هذه النقطة على دائرة الوحدة فإن $r = 1$. تمثل النقطة أيضاً $(r(\cos \alpha) + r(\sin \alpha))$. $a + bi = r(\cos \alpha) + r(\sin \alpha)$.

٥-٥-١- بعض مجموعات جوليا

كان جوليا (١٠) Gaston Julia (١٩١٨) مهتما بالدوال التكرارية مرحليا Itera- $téd$ Functions وخاصة الدوال المركبة. فمثلا الدالة: $Z \in C, Z^2 \rightarrow Z^2$.

ترسم كل نقطة في المستوى بتربيع إحداثيات النقطة فوق نقطة أخرى في المستوى. وكان جوليا شغوفاً بمعرفة تصرف النقط على المدى الطويل في المستوى المركب بالتكرار المرحلي لهذه الدالة المركبة التربيعية البسيطة. فمثلا صورة النقطة $a + bi$ بالدالة التربيعية $Z \rightarrow Z^2$ أو $(f(z) = Z^2)$ هي النقطة التي يمكن تمثيلها:

$$(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$$

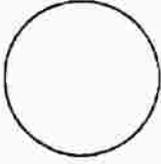
$$r(\cos \alpha + r(\sin \alpha))^2 = r^2 (\cos (2\alpha) + i \sin (2\alpha))$$

إذا كان المقياس r أكبر من 1 أى $r > 1$ فإن تربيعه يكون أكبر منه أى $r^2 > r$. ومع التكرار المرحلى فإن صورة النقطة تبتعد أكثر وأكثر من نقطة الأصل مع تضاعف الزاوية فى كل تكرار. إما إذا كان المقياس r أقل من الواحد أى $r < 1$ فإن تربيعه يكون أقل منه $r^2 < r$.

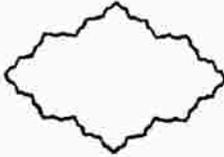
وعلى ذلك عند $r < 1$ ومع التكرارات المرحلية المتعاقبة تقترب الصورة من نقطة الأصل مع تضاعف الزاوية فى كل تكرار. أما إذا كانت $r = 1$ فإن الصور تقع على الدائرة. وبتصور التكرار المرحلى المتعاقب لهذه الدالة $z \rightarrow z^2$ فإن كل النقط داخل الدائرة تبدو كأنها تدور حلزونياً ناحية نقطة الأصل. أما النقط خارج الدائرة فتدور حلزونياً ناحية اللانهاية. وتبقى النقط على الدائرة عليها. أى أن النقط داخل الدائرة وخارجها. تبدو أنها تتحرك بعيداً عن الدائرة. ولذا فإن الدائرة (أو ما يناظرها) تسمى بمجموعة التنافر للدالة repelling set. وإذا كانت مجموعة التنافر للدالة ذات مسارات متصلة Path connected (بمعنى لأى نقطتين فيه يوجد مسار متصل بينهما يقع فى المجموعة) فإنها تسمى مجموعة جوليا. وعلى ذلك فالدائرة هى مجموعة تنافر وفى ذات الوقت مسار متصل ولذا فهى مجموعة جوليا.

أما إذا أخذنا الدالة التربيعية $z \rightarrow z^2 + c$.

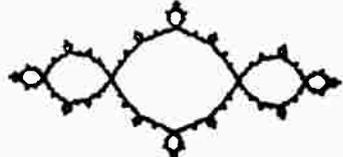
حيث C پارامتر عدد مركب. عندما يكون $C = 0$ فإن مجموعة جوليا تكون دائرة. أما إذا أخذنا C عدد مركب لا يساوى الصفر $C \neq 0$ فإن مجموعات جوليا تصير أكثر تعقيداً. انظر شكل (٤٣).



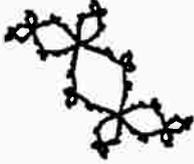
$$Z \rightarrow Z^2 + 0$$



$$Z \rightarrow Z^2 + (-.5 + oi)$$



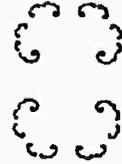
$$Z \rightarrow Z^2 + (1 + oi)$$



$$Z \rightarrow Z^2 + (-.128 + 0.7627i)$$



$$Z \rightarrow Z^2 + (-.8127 + .347i)$$



$$Z \rightarrow Z^2 + (-.4 + .0i)$$

شكل (٤٣) عينة من مجموعات جوليا باختلاف البارامتر c

أما مجموعة جوليا الرائعة الجمال في شكل (٦) في فصل ٣ السابق فإن البارامتر $c = a + bi$ حيث: $c = 0.2232 - 0.7296 i$.

$$(-0.3194417 \leq a \leq -0.3193553), (-0.4452514 \leq b \leq -0.4451650)$$

- لاحظ المدى الصغير جداً للجزء الحقيقي a ، والجزء التخيلي b الذي ينتج شكل (٦) الرائع.

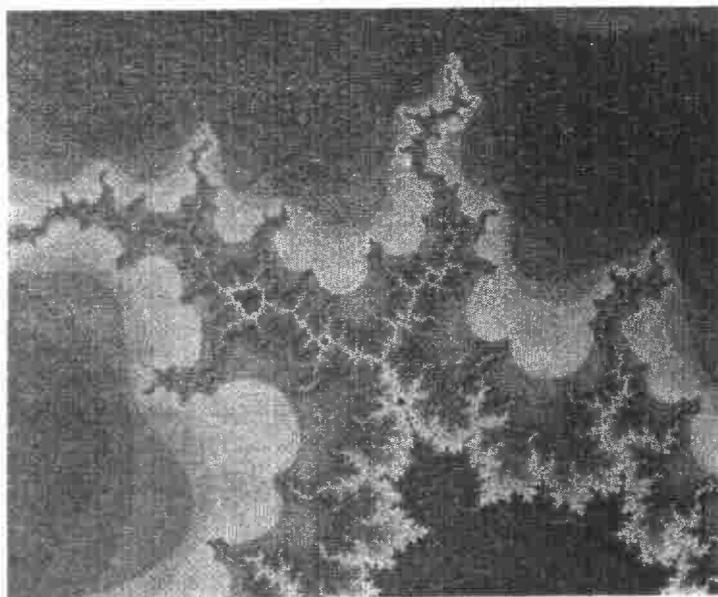
عموماً قد تأخذ مجموعات جوليا أشكال منحنى فراكتال معقدة أو نقاط مبعثرة تسمى غبار الفراكتال لجوليا.

٥-٢٥: مجموعة ماندلبروت

استرعى اهتمام ماندلبروت مجموعات جوليا. وراح يدرس قيم البارامتر c للدالة $z \rightarrow z^2 + c$ التي تؤدي إلى أن تكون مجموعات جوليا متصلة $connected$ ومن خلال دراسته الدائبة. اكتشف المجموعة التي تحمل اسمه... وهي مجموعة

ماندلبروت. حيث استخدم النقطة الابتدائية التي يبدأ منها عملية التكرار المرحلى
النقطة $z = 0 + 0i$.

وفى عام ١٩٧٨ استطاع ماندلبروت كتابة برنامج كمبيوترى لرسم مجموعة كل
نقط فى مستوى البارامتر التي تحقق شرط أن يكون لها مجموعة جوليا المتصلة.
وعلى ذلك فإن مجموعة ماندلبروت ببساطة هى مجموعة كل النقط c فى
مستوى البارامتر للدالة $z \rightarrow z^2 + c$ فى المستوى المركب لها مجموعة جوليا المتصلة
.Connected



شكل (٤٤) أجزاء من مجموعة ماندلبروت

فى شكل (٤٤) (أو شكل ٨ فى الفصل الثالث) البارامتر $c = a + bi$ يكون -
 $0.25 \leq b \leq 0.358$ ، $1.23 \leq a \leq -1.1$

أما فى شكل (٧) الفصل الثالث يكون $-2.25 \leq a \leq 2.25$ ، $-1.25 \leq b \leq 1.25$.

لاحظ الفروق الصغيرة في الجزء الحقيقي والجزء التخيلي التي تحدث هذا التغير الكبير في الشكلين (٤٤)، (٧ السابق في الفصل الثالث).

لاحظ أيضا وجود دوريات للتفرعات (قرون الاستشعار - مثل الهوائي - anten-na) من الكرويات (شكل اللمبة) bulbs. منها دوريات ثنائية، وثلاثية ورباعية للدورة شكل (٤٤).

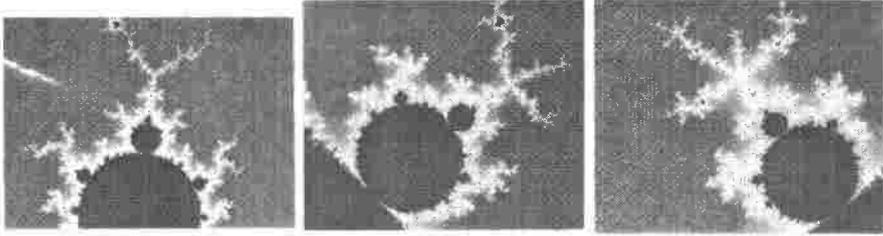
تعتبر النقطة $o + io$ النقطة الحرجة للدالة. فهي النقطة الوحيدة اللامتغيرة -invari ant تحت الدالة $z \rightarrow z^2 + c$. فكل النقط الأخرى في مجموعة ماندلبروت تختلف من تكرار مرحلي لتكرار آخر تالي. وبالتكرار المرحلي نجد أن بعض النقط C تستقر مباشرة في دورات دورية Periodic cycles. فمثلا بأخذ $c = -1 + oi$ فإن التكرارات المرحلية المتعاقبة تبدل بين النقطتين $o + oi$ و $-1 + oi$. مكونة دورة cy-cle من دورتين 2 periods. وبأخذ النقطة الابتدائية $c = 1.317 + oi$ فنجد النقط بالتكرار المرحلي تستقر في أربع دوريات تتكون من النقط:

$$-1.1429527 + oi ، -0.016591 + oi ،$$

$$-1.36884 + oi ، 0.4171897 + oi$$

ومن المثير في مجموعة ماندلبروت أن دوريات النقط تحت الدالة $z \rightarrow z^2 + c$ تجمع نفس الدورية مع الكرويات bulbs. فمثلا عند كل كرويه bulb الساق مع التفرعات (قرون الاستشعار) تكون دورية. فمثلا شكل (٤٥) أ قرن الاستشعار الرئيسي يتكون من ساق وفرعين مجموعهم ٣ لتشير إلى أن دورية الكروية هي ٣. وفي شكل (٤٥) ب - (١ ساق + ٣ فرع = ٤) تشير إلى أن الدورية ٤ للكروية الخارج منها أربعة قرون استشعار.

وشكل (٤٥) ج - يبين أن الدورية ٥ (الساق الخارج من الكروية الصغيرة + ٤ فروع متفرعة منها).



(i) Period 3 Bulb Antenna (ب) Period 4 Bulb Antenna (ج) Period 5 Bulb Antenna

شكل (٤٥)

عموماً الملامح السابقة تلقى الضوء على غموض وسحر وامكانية تبسيط المعالجات الرياضية لأغرب وأعقد فراكتال جاذب غريب مثير للتفكير والخيال يخلب الفؤاد والروح بجماله.

٦-٥ - أشكال بدیعة وزخارف حدودياتها فراكتالات

كلنا يعرف ألغاز تكوين الصور من أشكال صغيرة متعرجة Zigzag Puzzle.

هل تعتقد أن شكل السطح الناتج يكون متشابهاً ذاتياً؟ (أى فراكتال؟).

هل يمكن تغطية سطح بأشكال حدودها منحنيات فراكتال؟

من خلال الإجابة على السؤال الأول أمكن التوصل إلى هندسة عصرية جديدة هي الهندسة غير الابدالية اخترعها وبلورها الرياضى روجر بنروز فى آخر السبعينات. تضمن إثارتها تكوينات هندسية بدیعة لا تتكرر بانتظام أى لها صفة شبه دورية Semi - Periodic أو aperiodic.

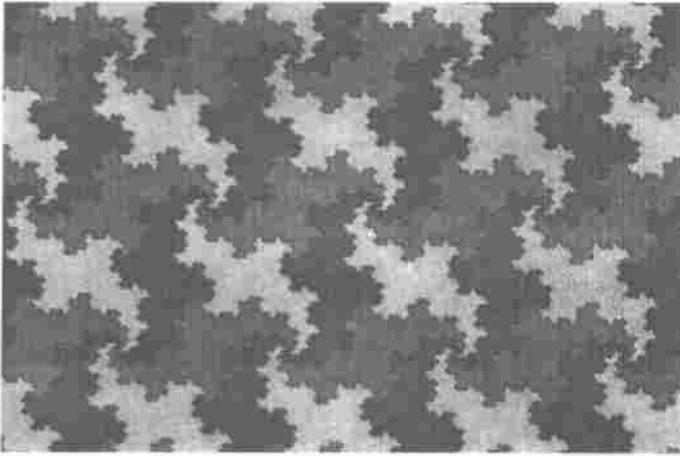
أما السؤال الثانى فكانت إجابته نتيجة اللعب بأفكار رياضية، وتوليد فراكتالات على حدود وحدات التكوينات الهندسية بعض رياضيين مثل الرياضى مارك مكلور.

ما يهمنا هنا هو تقديم بند (فقرة) لإراحة الذهن والتجديد العقلي يتضمن بديع تكوينات هندسية من هذا المنطلق.

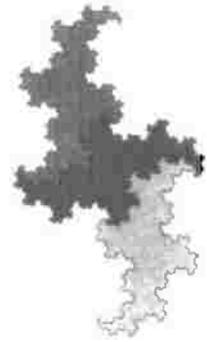
كما نعلم يمكن تغطية (أو بالأحرى تبييط tiling) سطح باستخدام مربعات (أو بلاطات tiles) غير متداخلة not overlapping لا تقع على بعض إلا عند الحدود (الاضلاع). وأيضاً يمكن تغطية (تبييط) السطح بأشكال هندسية منتظمة مثل الأشكال السداسية التي يقوم بعملها النحل.

وقد تكون الأشكال الهندسية التي تملأ السطح (تبلط السطح) غير بسيطة أو تتكون البلاطة من تجميع لأشكال بسيطة.

ولكن الغريب أننا نجد أنه يمكن تغطية السطح بأشكال (بلاطات) حدودياتها فراكتال حيث يبدو أن أجزاء من حدودها تتعشق مع بعض. انظر شكل (٤٦) أ، ب.



(ب)



(أ)

شكل (٤٦)

لاحظ أن الشكل (أ) يتكون من ثلاثة أشكال متطابقة، حدودياتها فراكتال تتعشق أجزاء منها مع بعضها البعض ويمكن توليد هذا الشكل (أ) وكذلك الشكل (ب) عن

طريق نظام من دوال انكماشية (تشابه بمعامل تصغير مع دوران، وانتقال) IFS. ويسمى كل شكل صغير بلاطة أو الشكل (ب) وحدة تكوين بلاطات Patch of tiles.

والمواقع أن ملء (أو تبليط السطح) بأشكال رسوم لكائنات في الطبيعة (حصان بحر أو slamender أو نباتات...) ابتدعها المهندس الفنان إشر Escher.

وبالتبع قد لا يكون الشكل الناتج (للسطح مثلا) متشابهاً ذاتياً. ولكن كما يسمى يكون التشابه الذاتي مختلطاً mixed، أو digraph similar sets^(٩) أو المتولد عن طريق digraph IFS. أى أن الشكل المتكون لا يكون متشابه ذاتياً كلية ولكن فيه بعض الدورية أى شبه دورى Semi Periodic.

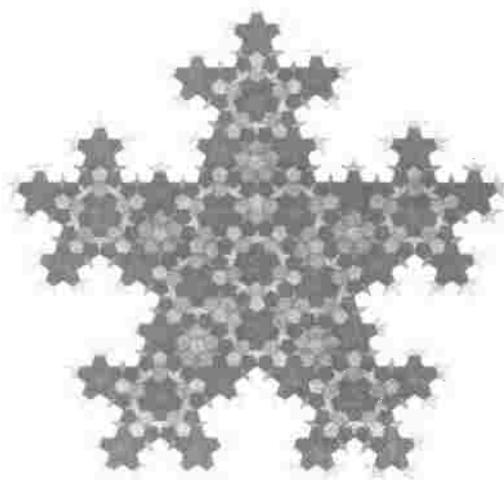
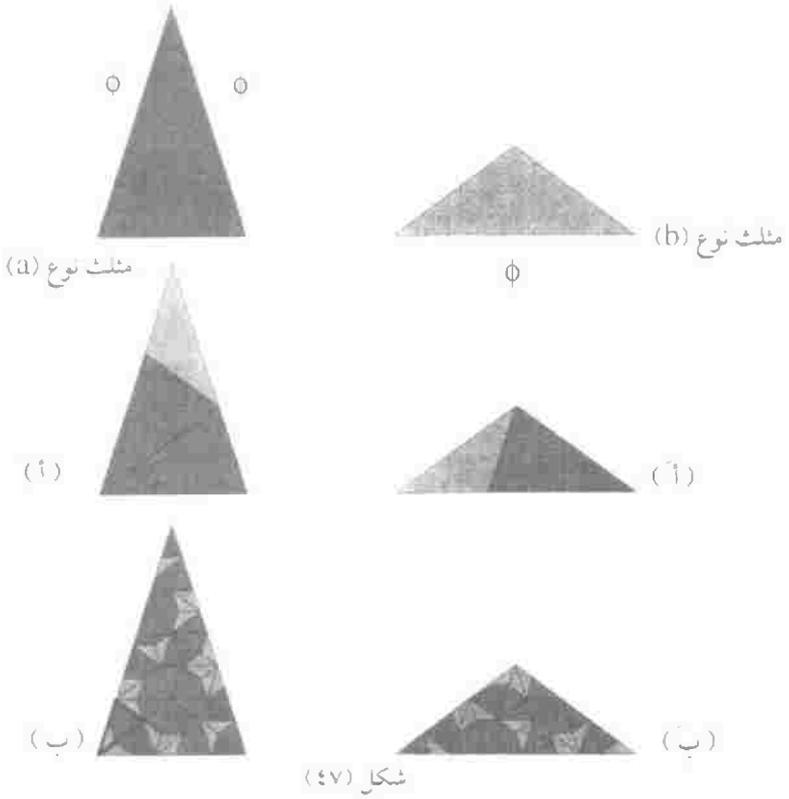
وقد استخدم بنروز نوعين من المثلثات (أ)، (ب) كبلطات أساسية.

النوع الأول (a) هو مثلث أبعاده $\phi, \phi, 1$ والنوع الثانى (b) مثلث أبعاده $1, 1, \phi$ حيث ϕ النسبة الذهبية $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

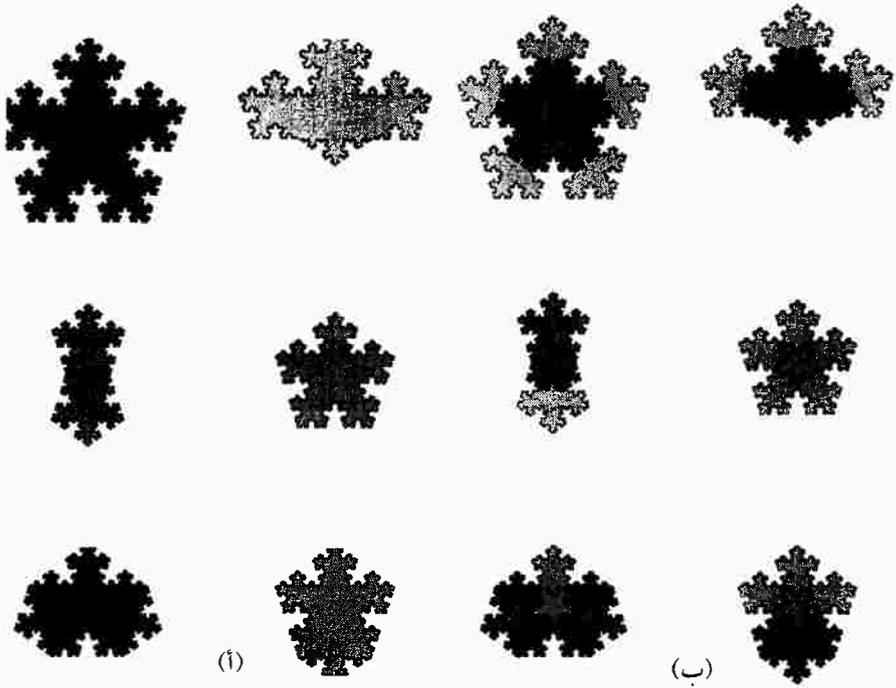
انظر شكل (٤٧). لاحظ أنه يمكن تكوين المثلث (أ) أيضا من مثلثين أصغر من نوع (a) ومثلث أصغر من نوع (b). كما يمكن تكوين المثلث (b) من مثلث من نوع (a) ومثلث من نوع (b) أصغر أيضا (باستخدام نظام الدوال المتكررة مرحليا IFS: تشابه تصغير، تحويل دوران وتحويل انتقال). وأيضا التوصل للمثلث (a)، (b) من تشكيلات بلاطات منها كما فى شكلى ب، ب.

ومن هذه البلاطات نوع (a)، (b) كون جميع Patches منها على شكل نجمة ونصف نجمة الخمس. ومعين والمخمس وسماها النجوميات الخماسية الساحرة لبنروز Penrose Pentacles لاحظ هذه النجوميات فى جزء من التبليط شكل (٤٨).

أما ماكيلور^(٩) فقد ولد أحرف نجوميات بنروز (النجمة - نصف النجمة - المعين المخمس) فراكتالات - لاحظ أن هذه الفراكتالات هى فراكتال منحنى كوخ لرقائق الثلج فى شكل (٤٩) أ ثم كون منها التجميعات فى شكل (٤٩) ج، ثم التبليط فى شكل (٥٠) بالاستعانة بـ IFS والتوبولوجى.



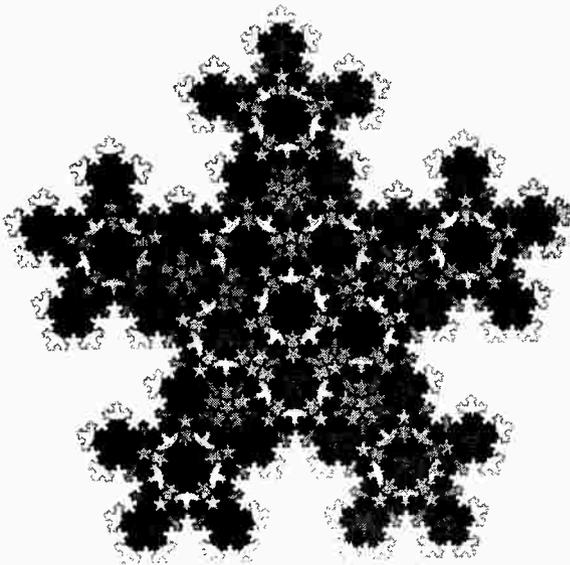
شکل (۴۸)



(i)

(ب)

شکل (۴۹)



شکل (۵۰)

تعقيب (٥) تضامين وانعكاسات حول تنمية الابتكار التريسي لعلم الرياضيات

حاولت من خلال عرض محتوى هذا الفصل إثارة دوافعك لأعمال ابتكارية وتنمية تذوقك للجمال الرياضى، وإكسابك مقدرات فى التحليل للربط بين النواحي الجبرية فى التحليل العدى والنواحي الهندسية. والانطلاق فى عمل التكوينات والتشكيلات الرياضية الفنية غير العادية. وتنمية المرونة فى التفكير الرياضى كما يفعل الرياضيون المعاصرون للتوصل إلى المستوى الأمثل. وكذلك معايشة الرياضيين خلال عملهم الابتكارى الرياضى من استثارة الفكرة عن طريق أعمال سابقة لرياضيين آخرين حتى بلورتها وإخترع كل متكامل (كهندسة جديدة أو موضوع جديد) منها. وذلك مروراً ببعض أو كل مراحل العمل الرياضى الابتكارى^(٣): التحضير - المعالجات الرياضية (الترييض) - mathematization - التحضيرين incubation - الالهام - التحقيق.

والآن بعد قراءتك لهذا الفصل مرةً أخرى. حاول أن تتلمس المواضيع التى أحاول فيها مساعدتك على تحقيق الأهداف السابقة وأهداف أخرى ذكرتها فى الفصول السابقة. بقصد تنمية النواحي الابتكارية فىك والتى تعكسها فى تدريسك الابتكارى مسترشداً ببعض النقط التى أقدمها فيما يلى. ثم استكمل هذه النقاط وسجل آراءك وأفكارك وانعكاساتك حولها فى مذكراتك.

(١) حير الرياضى هادامارد، الذى كتب كتاب «حول الاختراع الرياضى» وهو رياضى ابتكارى كبير من أن نظرية يقدمها هو يجد رياضياً آخر يبنى نظرية عليها ويثبتها. ويتعجب لماذا لم يستطع أن يثبت النظرية المبنية على نظريته بالرغم من أنها مباشرة من نظريته؟ ومن المشوق أن نعرف أن الرياضى الكبير هادامارد هو تلميذ الرياضى بوانكاريه (صاحب نظرية التوبولوجى الجبرى)، وأن هادامارد كان أستاذاً لأستاذى (المرحوم الأستاذ الدكتور سليمان عبدالعاطى) فى وقت كانت الجامعات المصرية تستقدم أكبر الرياضيين العالميين للتدريس فيها لفترة.

عموماً قدمت في هذا الفصل من خلال عرض نبذة تاريخية عن أفكار ما، أن رياضيين استثمروا بأعمال رياضيين آخرين، فكانت حافزاً لهم على استكمال هذه الأعمال وبلورتها وعمل بناء رياضى (نظرية أو هندسة...) منها. فمثلا قدمت:

(أ) نبذة تاريخية تبين تأثير وتعجب ماندلبروت لمجموعات جوليا حفزته إلى ابتكار أو عمل مجموعة ماندلبروت كأعجب وأجمل فراكتال.

(ب) نبذة تاريخية عن حل المعادلات بالتكرار المرحلى بطريقة نيوتن أثارت حل المعادلات المركبة وتوليد الفراكتالات الخاصة بها.

(ج) نبذة تاريخية عن لورنز مع الاشارة إلى أنه كان عاشقاً للرياضيات والألغاز الرياضية منذ صغره.. عكست اهتمامه بحل لغز التنبؤ بالطقس وأدت لإبتكاره جاذب لورنز العجيب، وتفسير مبدأ الحساسية للأحوال الابتدائية.

(د) جذور فكرة الحساسية للأحوال الابتدائية لهوانكريه وماكسويل... وذلك لأرى فيك الاستثارة من أى عمل رياضى قديم أو حديث لتنتقل وتشجع لإعادة بنائه أو تكملته.

(٢) التدريب على المرونة في التفكير الرياضى والتوصل إلى المستوى الأمثل. وذلك من خلال عرض طرق مختلفة للتكرار المرحلى لحل نفس المعادلة المركبة التكعيبية ($Z^3 - 1 = 0$) والتوصل إلى أشكال مختلفة بديعة للفراكتالات عند مناطق جذب الحلول. والتأكيد على أن هذه الطرق المختلفة هي طرق عصرية لرياضيين في التحليل العددي يحاول كل منهم التوصل إلى مستوى أمثل لسرعة التقارب وزيادة درجة التقارب مثلاً.

(٣) ابراز تزاوج التحليل العددي (النواحي الجبرية) بالأشكال الهندسية المختلفة الناتجة من استخدام الطرق التكرارية المرحلية المختلفة، ودور التكنولوجيا المتقدمة لرسم الكمبيوتر والتلوين في إظهار صور الفراكتالات المرتبطة بها.

(٤) إعطاء الفرصة لتنمية استقلالية التعلم عن طريق التنويه عن مراجع التحليل العددي لمعرفة المزيد عن اجراءات واشتقاق قواعد الطرق التكرارية المرحلية المذكورة.

(٥) إعطاء الفرصة لتتوصل إلى تعميم رياضى كعمل ابتكارى يمر بالمراحل: التحضير - الترييض - التحضين - الالهام - التحقيق عند تقديم الفراكتالات الخاصة بحل معادلات مركبة.

فمثلا لاستثارة تفكيرك قدمت صورة عن حل معادلة مركبة لخمسة جذور:
 $z^5 - 1 = 0$ ثم التركيز على حل معادلة مركبة تكعيبية بطرق تكرارية مختلفة $z^3 - 1 = 0$ وذلك لاعطاء الفرصة للتوصل إلى البحث عن القيم الصفرية للدالة (أو بالأحرى جذور المعادلة عندما $f(z) = 0$) المركبة بصفة عامة: $f(z) = z^n - 1$ فى المستوى المركب التى لها n من الجذور عند المواقع $e^{2k\pi/n}$ حيث $k=1,2,\dots,n$ وبتخمين (البداية) عند النقطة Z_0 وبالتكرار المرحلى تصل إلى أقرب جذر لها Z_k (أو Z_1)... وعلى ذلك يقسم المستوى بقطاعات (ن من المناطق). هذه المناطق هى فراكتالات.

(٦) التعود على اللعب بالأفكار والأشكال الرياضية لاستثارة الأعمال الابتكارية وللترويح عن الذهن والتجديد العقلى. وذلك من خلال تقديم تشكيلات نجوم Pentacles بنروز ونجوم ماكلور التى حدودياتها فراكتالات.

(٧) ربط أجزاء (الكرويات - رجل الثلج) عن فراكتالات مجموعة ماندلبروت بالفرعات منها بالدورية للتوصل من أشياء مختلفة غريبة لقوانين رياضية.

(٨) التشويق لمعرفة المزيد عن الهولية Chaos المرتبطة بتكوين فراكتالات الجاذب الغريب ومنها الفراكتالات المرتبطة بحلول المعادلات المركبة بالطرق التكرارية المرحلية.

والآن حاول استكمال ما سبق وتوظيفه لتنمية إبتكارك التدريسى فى مواقف مشابهة أو مغايرة.

المراجع

- ١- باري باركر (ترجمة على يوسف على) (٢٠٠٢): «الهيلولية في الكون» القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.
- ٢ - جيمس جلاليك (ترجمة على يوسف على) (٢٠٠٠): «الهيلولية تصنع علمًا جديدًا» - القاهرة - المجلس الأعلى للثقافة.
- ٣ - أ.د./ نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠١): «أصول تدريس الرياضيات» - الفصل الأول - القاهرة - عالم الكتب ط/ ١٠.
- 4- Drazin, P.G. (1998): "Non linear Systems" Cambridge Univ. Press.
- 5 - Gelbrich, G. & Giesche, K (1998): "Fracral Escher Salamenders and other Animals". The Mathematical Intelligencer Vol 20 no 20 New York, Springer Verlag pp 31 - 35.
- 6 - Gleick, J. (1987): "Chaos: Making a New Science" New York: Viking Press.
- 7 - Hafner, C (1999): "Post - Modern Electromagnetics Using Intelligent Maxwell Solvers: "England - John Wiley pp 42 - 83.
- 8 - Maganzini, c (1997): Cool Mathematics' U.S Price Stern Sloan Inc.
- 9 - McClure, M: Digraph Self - Similar Sets and Aperiodic Tiling" The Mathematical Intelligencer, Vol 24 No 2 , New York, Springer Verlag pp 33 - 41.
- 10 - Thomas, D.A (2002): "Modern Geometry" U.S. Brooks/ Cole Thomas Learning.
- 11 - Thompson, J.M.T & Stewart, H.B. (2002): None linear Dynamics and Chaos" England, John Wiley/ 2nd ed.
- 12- Varona, L.J (2002): "Graphic and Numerical comparizon between Iterative Methods": The Math Intel. Vol 24 No 2, New York Spriger. Verlag pp 39 - 45.
- 13 - Viana, M (2002): "whats New on Lorenz Strange Attractors". The Math Intel. Vol 22 No2 pp 4 - 19 New York, Springer Verlag.

الفصل السادس

معلم الرياضيات وتطوير تدريسه
من خلال هندسة الفراكتال

الفصل السادس

معلم الرياضيات وتطوير تدريسه من خلال هندسة الفراك탈

مقدمة:

فى الواقع يعد تراجع أعداد الطلبة (والطلاب) الدارسين للرياضيات فى المرحلة الثانوية بصفة خاصة وتدنى مستوى الرياضيات للتلاميذ بصفة عامة، مؤشراً خطيراً ينذر بالتخلف الحضارى والثقافى. وهذا يستدعى وقفة حاسمة لإعادة الثقة بالرياضيات لمعالجة جفاف الرياضيات بالمقرارات والكتب المدرسية بالمراحل المختلفة. ويرجع جفافها لاعتمادها (خاصة بالمرحلة الثانوية) على الصرامة الرياضية والتخصصية والشكلية على حساب المعنى أو الفائدة التطبيقية أو دلالتها فى الحياة العصرية. . أو عدم إنارتها للخيال والإبتكار.

هل يمكن للمعلم الأستعانة بأفكار وملامح هندسة الفراك탈 فى معالجة هذا العيب وذلك بتحبيب التلاميذ فى الرياضيات وإثارة دوافعهم للتعلم الاستقلالى فى تعلم الرياضيات مدى الحياة بإستمتاع وحب وتقدير ولتحفيزهم للمساهمة فى صنع المعرفة الرياضية وتطبيقاتها؟! ولهذا سوف أحاول مساعدة المعلم فى الاستفادة من قراءة الفصول السابقة حول هندسة الفراك탈 فى تطوير تدريسه للرياضيات المدرسية ليكون تعلمها أكثر متعة وإثارة للخيال والإبتكار، وتصبح ذات معنى وصلة بكافة فروع المعرفة، وقريبة منهم ومن عالمهم المعاصر. وذلك بإنسقاء أفكار منها وحول نشأتها ونموها وتطعيم تدريسه بها أو للآثراء المعرفى الرياضى للتلاميذ أو بتجديد الأنشطة الرياضية لهم. وكذلك بتطبيق ما تثيره ملامح وخصائص هندسة الفراك탈 فى تحسين تدريس الرياضيات المدرسية. هذا وقد استخدمت فى عرض محتوى الفصول السابقة مداخل وأساليب لتنمية الإبتكار التدريس بصفة عامة لمعلم الرياضيات أشرت إليها فى التعقيبات على هذه الفصول.

إلا أننى هنا أحاول إتاحة الفرصة للمعلم لأن يكون سيد نفسه فى توليد حافز داخلى يقتنع فيه بأهمية معرفته لهندسة الفراكتال ليتخذ موقفاً إيجابياً من تعلمه وتعليمه لها. ومساعدة المعلم للتعرف على كيفية استفادته منها ومن خصائصها (ملامحها وأفكارها..) ليجعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية، أكثر معلوماتية، أكثر إتاحة، أكثر واقعية، أكثر حداثة up to date كما نوضح فى بنود هذا الفصل الذى نختم به الباب الثانى.

٦-١ - معلم الرياضيات وموقفه من هندسة الفراكتال

المعلم هو الذى يستطيع تحديد استفادته من معرفته بهندسة الفراكتال فى تنمية ثقافته الرياضية المتجددة والمهنية وفى تحسين تدريسه. فهو الوحيد الذى يقدر مدى ما تأثر به وما تفاعل معه بعقله أو بإحساسه أو بعمله أثناء قراءته ودراسته لها، ويريد مشاركة الغير فيما جذب انتباهه وشوقه وأمتعته وحيه فيها من زملائه وتلاميذه وأقرانه وأهله... ويساعده فى ذلك إعادة القراءة والدراسة مرة أو مرات أخرى لزيادة الفهم وليكون انطباعات وانعكاسات وتأملات تحدد موقفه من هذه الهندسة العصرية. ثم يستغل موقفه منها فى توجيه اهتماماته إما بدراسة المزيد عن الموضوعات التى قدمناها فى الفصول المختلفة بقصد التعلم الاستقلالى -autono-mous learning أو فى إتاحة الفرصة لتلاميذه وزملائه... للتعرف عليها ودراستها، من خلال إنتقائه للأفكار والخصائص.. التى يشعر بأهميتها فى جذب وتحبيب تلاميذه فيها ثم ينطلق من ذلك إلى توظيفها فى خدمة تحسين تدريسه. وفى تربية جيل بعقلية رياضية إبتكارية واسع الاطلاع لكل جديد فى الرياضيات، عاشق للرياضيات ومتعلق بجمالها ومقدر لعظمتها وفائدتها، مثاراً بدوافع داخلية لتحقيق ذاته وللشاركة فى نمو المعرفة الرياضية وتطبيقاتها.

ومن الاتجاهات المعاصرة التى ينادى بها الرياضيون التربويون فى تدريس الرياضيات للقرن الواحد والعشرين هو التوصل إلى طرق مجددة تعمل على حل مشكلة : كيف تكون الرياضيات المدرسية أكثر حيوية، أكثر معلوماتية، أكثر واقعية، أكثر إتاحة، أكثر حداثة.

وأعتقد أن هندسة الفراكتال بما تتمتع به من خصائص وملامح يمكن أن يكون لها دور رائد في حل هذه المشكلة. ومن ثم فإننى أقدم فيما يلى توظيف هندسة الفراكتال وأفكار تثيرها خصائصها وملامحها لمساعدة المعلم فى هذا الصدد.

٦-٢- توظيف هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية more live

تكون الرياضيات أكثر حيوية (أو حياة) عندما يشعر التلميذ أنها : (أ) أقرب للطبيعة nature والحياة تفسرها وتنمو من خلالها ومن خلال التأمل والتدبر فى الطبيعة والكون (ب) أنها كائن يتميز بالديناميكية (الحركة والتغير) dynamics (جـ) أنها إنسانية ليس فقط بمدلول روبين هيرش ولكن لأنها تخاطب العقل والقلب والمشاعر والإحساس والخيال، بالإضافة إلى أن لها لمسات فنية وجمالية تدعو إلى الإنجذاب والتعلق بها.

والآن أدعوك أيها المعلم القارئ أن تجوب بخاطرك تجمع شتات ما قرأته للفصول السابقة لتؤيد أن هندسة الفراكتال مثال لرياضيات أكثر حيوية بتحقيق النقط السابقة. ستجد نفسك توصلت إلى الكثير ومنها ما أوضحه فيما يلى :

٦-٢-١: توضيح أن هندسة الفراكتال أكثر حيوية

أ- هندسة الفراكتال أكثر حيوية لأنها أقرب للطبيعة والحياة؛ ويتضح ذلك مما يأتى :

- ارتبطت نشأة هندسة الفراكتال من التأمل فى أشكال السحاب ، والأشجار، الشواطىء ... البحر... البرق كمحاولة لوصف كثير من الأشكال فى الطبيعة التى عجزت عنها الهندسة الاقليدية.

تعدد الأمثلة لفراكتالات فى الطبيعة توضح التماثل الذاتى مثل مقطع فى ثمرة القرنبيط - تفرعات الأغصان - تفرعات نهر وروافده - تفرعات الأوعية الدموية- تفرعات القصبه الهوائية - تفرعات جذور النبات... - انبعاجات سطح المعادن - تفرجات شاطئ بحر .. ريش طائر - قمم أشجار - قمم جبال.

- ارتبط نمو وبلورة هندسة الفراكتال بحل مشكلات لظواهر طبيعية كانت تغفل من قبل فى الإتصالات، التنبؤ بالطقس، البيولوجى. حركة مياه البحر نواحي

الشاطيء، فى الكون والأجرام السماوية (الفلك) .. وذلك عن طريق اكتشاف الهولويةchaos (أو جوازاً الفوضى) كمفهوم (ظاهرة) نشأ مرتبباً بهندسة الفراكتال ثم نما كعلم مستقل معاصر.

- تدعو هندسة الفراكتال إلى التأمل والتفكر فى الطبيعة ولذا سميت بهندسة الطبيعة فى بادى نشأتها .

ب- هندسة الفراكتال أكثر حيوية باعتبارها كائن يتميز بالديناميكية (الحركة والتغير)

Dyuamics

نما يميز أى كائن حى هو تركيبه الداخلى الذى يحافظ على خصائصه الفريدة، وحرته الدائبة حتى ولو يبدو ساكناً. حتى الحجر يمكن اعتباره كائناً حياً ما دام محافظاً على هيكله. وعلامة شيخوخته وفنائه تظهر عندما يتفتت من تلقاء نفسه. وقد حدث هذا عندما تفتت أجزاء من أحجار أبو الهول sphinx فكان ذلك مؤشراً أسرع العلماء بمعالجة بقية الأجزاء بمواد تحافظ على حياته. هذا الحجر الساكن يتحرك داخله بلايين الجسيمات فى ذراته. وقد يكون الهيكل محسوساً له حيز فى الفراغ أو غير محسوس ومتغير الا أنه يحافظ على خواصه مثل الهواء (والغازات) وحرته (البراونيه).

أما بالنسبة لهندسة الفراكتال فيمكن توضيح ديناميكياتها (الحركة والتغير) من خلال:

تتجلى الحركة الدائبة للنقط وتراقصها عند الحدود بعشوائية ولا نظام قبل أن يبرز من خلالها فى بطى وشيئا فشيئا فراكتالات الجاذب الغريب مثل:

(١) تصرفات الدوال المركبة complex للنقط القريبة من جذور معادلاتها (أو أصفار الدالة) وحرقاتها dynamism عند حدود الأحواض كنتاج لحرركات عشوائية لا نظامية كما تظهر شيئا فشيئا فراكتالات من بين تحرك دائم لمثل هذه النقط العشوائية (على شاشة الكمبيوتر).

(٢) تصرفات الدوال المركبة التربيعية بتحديد قيم معينة للبارامتر يجعل المسار فى مجموعة التنافر متصلاً، يؤدى إلى تكوين الأشكال البديعة الساحرة من خلال

ظهور وتحرك نقط عشوائياً (وكأنها الحركة البراونيه للغازات) ولا نظامياً. هذه الأشكال البديعة الساحرة التى تظهر رويداً رويداً هى فراكتالات مجموعة ماندلبروت ومجموعات جوليا حيث نجد النقط عند الحدود كأنها كائنات محتاره هل تتحرك نحو الفراكتال أو خارجه عنه ؟ وتأخذ وقتاً طويلاً حتى تحدد موقفها.

(٣) استخدام نظام الدوال التكرارية المرحلية IFS فى توليد فراكتالات تحاكي الطبيعة مثل ريشه طائر مثلاً. حيث يتيح الكمبيوتر الفرصة لمشاهدة الشكل دائب الحركة والتغير فى التكرارات المرحلية النهائية حتى ظهور شكل الريشة من بين النقط العشوائية اللانظامية.

(٤) استخدام برمجيات الصور المتحركة مع توليد الفراكتالات التى تحاكي الطبيعة تعطى حياة على المناظر الطبيعية (الفرضيه virtual) والظواهر الطبيعية التى تصاحبها. سواء فى استخدامها فى أفلام الكارتون أو فى دراسة وتمثيل الظواهر الطبيعية.

ج- هندسة الفراكتال أكثر حيوية لأنها أكثر إنسانية. ويتضح ذلك مما يأتى :

- بمدلول روبين هيرش فإن هندسة الفركتال تكون إنسانية لأن الرياضى الانسان هو الذى اخترعها، ولأنها اجتماعية بمعنى أن مجموعة من الرياضيين ساهموا فى تنميتها أو نتجت من أفكار رياضيين فى عقود مختلفة سابقة وحالية. مثل اعتماد هندسة الفراكتال على أعمال جوليا (ومجموعاته) وأعمال كانتور (ومجموعته) وأعمال هاوسدورف (وبعد الصندوق الذى قدمه).. وأعمال لورنز (وظاهرة الفراشة التى أثارها جاذبة الغريب). كما إتمد الرياضيون والعلماء على هندسة الفراكتال فى ابتكار هندسات وعلوم عصرية جديدة مثل هندسة حدوة الحصان للرياضى سمال Smale ونظرية الهوليه chaos .

- بالإضافة إلى ذلك فهندسة الفراكتال تخاطب العقل والمشاعر والخيال والأحاسيس وتتفاعل معها. فبساطة الرياضيات التى تولد الفراكتالات تبهر العقل ، وجمال الفراكتالات (المذبذبة) فى الرياضيات لها جمال نستشعره فى العقل.

وأيضا IFS يعتمد على أفكار بسيطة للتحويلات الهندسية الانكماشية فى فراغ المتجهات (الخطى) تجعل العقل يألفها. إلا أن عدم اعتماد ماندلبروت على المعالجات الرياضية الصارمة لا ترضى عقل الرياضيين الشكليين. بينما التحقق من أعماله بواسطة الكمبيوتر يجد الرياضيون التطبيقيون وشبه العمليين جمال عقلى فيها.

- الأشكال البديعة لفراكتالات مجموعة ماندلبروت ومجموعات جوليا وفراكتالات حلول المعادلات المركبة والجاذبات الغريبة الأخرى ، استطاع الكمبيوتر بتكنياته الحديثة فى الرسوم والألوان والزوم أن يبرز جمالها الأخاذ فتشعر بجمالها فى القلب والوجدان كلوحات فنية فريدة تنوه فيها بمشاعرك وخيالك وتختار فى جمال تشكيلاتها وكأنها لكائنات وأزهار متحركة مليئة بالحياة. فمثلا ارجع وتأمل مجموعة جوليا (شكل ٦) ، الفصل ٣) ، هل تتصور أنها إبداع (ابتكار) رياضى وليس تكوين فنى لأشياء طبيعية وتجريدية.

- لوحات بولاك لفراكتالات تعكس إحساسه لايقاعات الطبيعة تستأثر العقل والإحساس والقلب بجمالها وغرابة تكويناتها.

- اشتراك الفنانين مع الرياضيين واضعى برمجات الفراكتال أنتج لوحات فنية بالكمبيوتر على شاشته أو يمكن طبعها، لها مذاق جمالى مميز وغريب وفريد. يمكن تصنيفها تحت أنواع من فنون الرسم المعروفة.

- محاولة تكوينك فراكتالات مشهورة (مثل فراكتال كوخ لرقائق الثلج، فراكتال بينو، فراكتال سبيرنيسكى ..) عن طريق المولد بالتكرار المرحلى، تجدك تقوم بعمل شئ مشوق تشعر بالإثارة والسعادة فى نجاحك فى تكوينه شيئا فشيئا فى التكرار المرحلى الثانى والثالث. وتشعر أنك قمت بعمل شئ خاص بك . وتجدك تتطلع لعمل فراكتالات من مولد آخر من عندك. وهذا مدعاة لتسمية مقدراتك الابتكارية أيضاً.

- من إعجابك بجمال الفراكتالات أو لوحات من الفراكتالات .. ربما تود أن تكون هوايه لتجميع collection أشكال فراكتالات فى الطبيعة... لوحات فنية

مستوحاه من فراكتالات. أعمال قمت بها حول هندسة الفراكتالات - معلومات - أفكار...

وذلك على غرار هوايه جمع طوابع البريد أو الأحجار الطبيعية أو العملات النقدية... فتكامل المعرفة مع العمل مع الأحاسيس والخيال هى أساس العمل الإبتكارى المشوق. بالإضافة إلى أن ذلك يدفعك لتكوين هواية التجميع التى تقوى اعزازك بما تعمله وتعلمه كشيء خصوصى لك.

والآن تعال نستفيد من طبيعة هندسة الفراكتال الحيوية فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية، بعرض بعض الأفكار الارشادية فيما يلى.

٦-٢-٢: استفادة معلم الرياضيات لجعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية.

يمكنك الاستفادة من الملامح التى تجعل هندسة الفراكتال أكثر حيوية فى الاسترشاد بها لجعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية وذلك يجعلها أقرب للطبيعة، وديناميكية وإنسانية كما نوضح فيما يلى:

أ- كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية عن طريق ربطها بالطبيعية.

الطفل - الإنسان .. جزء من الطبيعة يجد نفسه فيها وبالقرب منها ويحب كل ما يقربه منها. التأمل فيها يحفر فى ذاكرة (الطفل) صورة عن العالم المحيط به يعدل فيها بخيراته ويتعلم منها [عن طريق عمليات الاستيعاب (التمثيل فى الذاكرة) والتطويع - كما يقول بياجيه]. أنظر شكل (٥١) لطفل غارق فى التأمل لكائنات ونباتات وحركة دائبة على سطح الماء وأسفله. من بديع صنع الخالق.



وعلى ذلك فيستحسن أن يستغل المعلم ذلك عند تقديمه لآى أفكار رياضية ابتدائية بسيطة أو متقدمة، فيربطها بالطبيعة أو معلومات عن الطبيعة مع إعطاء الفرصة للتأمل والتدبر فيها كمنبع للأفكار الرياضية. فمثلا:

(١) عند بداية تعلم الطفل الأعداد من المشوق ربط كل عدد بما يمثله فى الطبيعة حوله وفى جسمه وفى الكائنات مباشرة أو من خلال التفتيش والبحث عنها فى الصور والمصادر الأخرى ومساعدة الطفل على الاستكشاف والاستقراء من مجموعات متكافئة مختلفة كل الاختلاف فى طبيعتها وأشكالها:

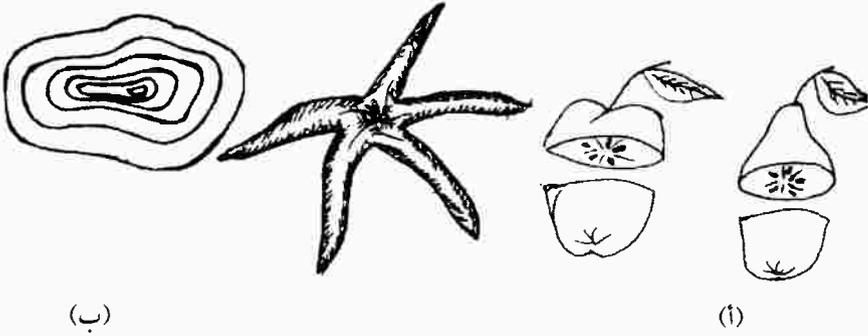
- ربط الواحد بالشمس الواحدة. القمر الواحد. القرن الواحد لوحد القرن.
المنقار الواحد للعصفور الأنف الواحد للطفل.....

- ربط الاثنين بالعينين، والأذنين، والرجلين للطفل، وجناحي طائر، وجناحي فراشة....

- ربط الثلاثة بخصلات ضفيرة الشعر، بأصابع بعض الطيور. بأصابع بعض الحيوانات (كالفيل)....

- ربط الأربعة بأرجل بعض الحيوانات. بحجرات القلب. بصوابع رجل التمساح....

- ربط الخمسة بأصابع يد الطفل ورجله. بالسمة النجمية.. ومن الممتع أن يستكشف الطفل أن مقطع أحد الثمار للفاكهه مثل الكمثرى تحتوى على خمس فتحات للبذور أنظر شكل (٥٢ أ). وإذا كانت المدرسة فيها أو فى مكان قريب منها مزرعة فواكه نعطى له الفرصة ليتأمل أشجار الفواكه التى نأكلها ويتأمل أزهارها فيجد كل زهرة تتكون من خمس وريقات (بتولات) وعندما تنضج الثمرة تتحول إلى ورقات خضراء أسفل الثمرة^(٧).... وهكذا.



شكل (٥٢)

أما الصفر فيمكن ربطه مثلاً بثعبان ليس له أرجل أو سمكة ليس لها منقار أو طائر ليس له زعنفة.. ويأتى الضرب فى الصفر عن طريق عدد أرجل فى ثعبان $٠ = ١ \times ٠$ ، وعدد أرجل فى ثعبانين $٠ = ٢ \times ٠$ وهكذا.

(١) عند تقديم الكسور يمكن ربط الكسر $\frac{٣}{١}$ بنسبة اليابس والماء على سطح الكرة الأرضية، وهى نفسها النسبة بين الأجزاء الصلبة والسائلة فى جسم الإنسان..

(٣) عند تقديم الأعداد الموجهة الصحيحة يمكن ربطها بمعلومات عن قمة أعلى جبل وعمق شاطئ بحر، مثلاً قمة إفرست ٨٨٤٨ م أعلى سطح البحر وعمق شاطئ البحر الميت ٤٠٠ م تحت سطح البحر.

(٣) عند تقديم الدالة التربيعية يمكن ربط شكلها البياني بمسار حركة دولفين أو ماء من نافورة أو فك أسنان...

(٤) عند تقديم الدوائر المتحدة المركز يمكن ربطها بمقطع ساق شجرة كشكل تقريبي (شكل (٥٢) ب)

(٥) ربط النظام العدى الثنائى بالانقسام الثنائى للأميبيا.

(٦) ربط الأعداد الكبيرة بعدد الثوانى فى السنة، وبعد الشمس عن الأرض وعن الكواكب الأخرى...

(٧) ربط المعادلات التفاضلية بنماذج منحنيات النمو والاحماد والنموذج اللوجستي [للبليجيكي فير هيلست].

هذا ويمكنك الاستعانة بمعلومات في كتب البيولوجي، وفي الانسكلوبيديات (ومن مواقع من الطبيعة في الأنترنت وربطها بالأفكار الرياضية التي تقدمها...

ب- كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية بإثارة وتوضيح الديناميكية (الحركة والتغير).

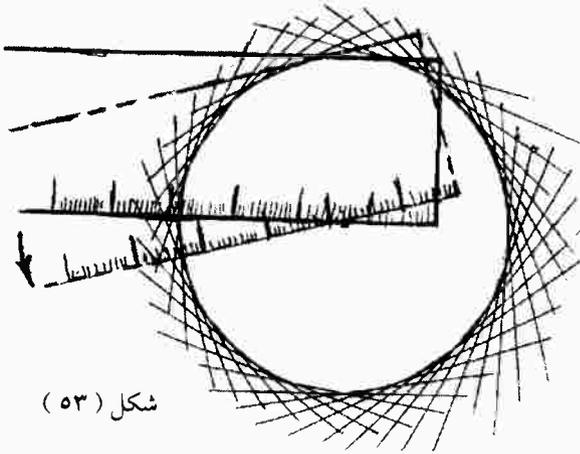
أول ما يتبادر إلى الذهن هو تطعيم تدريس الأعداد المركبة وحل المعادلات المركبة ببعض ما قدمناه عن حلول المعادلة $Z^3 - 1 = 0$ والدالة التربيعية $Z \rightarrow Z^2 + C$ واستخدام الكمبيوتر في توضيح ديناميكيات تصرف النقط بالقرب من جذور المعادلة أو حدود الدالة التربيعية، والهيولى chaos التي تسبق ظهور فراكتالات جذور المعادلة أو مجموعة ماندلبروت ومجموعات جوليا.

في الواقع كان الدافع وراء إختراع الرسوم المتحركة الكمبيوترية للعالم الرياضى والفنان والموسيقى المعاصر بلن Blenn هو جعل الرياضيات ممتعة في تعلمها وفي فهمها. حيث حرك دافعيته كتاباً يحوى رسوم كاريكاتيره قرأها في شبابه جعله يفهم النظرية النسبية. وعلى ذلك فالإحساس بالحركة والتغير يزيد من متعة المتعلم بحيوية ما يتعلمه.

والواقع أن الاحساس بالرياضيات ككائن متحرك يمكن أن تنميه ليس فقط عن طريق تحرك الأشكال بالتحويلات الهندسية أو عن طريق العمليات الانشائية ورسم المحل الهندسى. وأيضاً عن طريق تنمية الاحساس بتحريك النقط أثناء رسم الأشكال الهندسية والبيانية سواء بأدوات الرسم العادية أو بالرسم والحركة بالكمبيوتر. وأيضاً عن طريق التجزئ والتشكيل dissection وتكوين الأشكال .. فمثلاً:

(١) عند رسم قطعة مستقيمة (أو شكل هندسى بسيط) نتيح الفرصة للطفل (المتعلم) أن يستشعر حركة سن القلم محاذياً للمسطرة كأنه يحرك نقطاً مستقيمة متعاقبة.

(٢) عند زيارة الملاهى نتيح الفرصة للطفل مشاهدة العجلة الدائرة الرأسية قبل الركوب وهى ساكنة ثم وهى تتحرك وتزداد سرعتها كتمهيد لرسم الدائرة من نقط متحركة. وكذلك كتمهيد لتحويل الدوران. كما نوحى له وهو يرسم الدائرة بالبرجل كأنه يعبر النقط المتحركة حول محيطها أثناء الرسم أو يمكن رسم الدائرة كغلاف لمستقيمات باستخدام مسطرة متحركة تمس نقطة من جانب وترسم قطعة مستقيمة من جانب آخر شكل (٥٣).



شكل (٥٣)

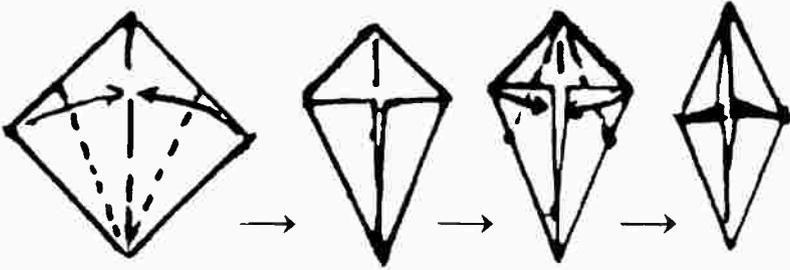
(٣) عند رسم الدالة الخطية نعطي نفسي الانطباع للنقط المتحركة التى يرسمها القلم فى تعاقب لتمثيل الدالة بيانياً. وعند رسم الدالة $ص = م س + ١$ أو $ص = س + ج$ بتغيير قيم البارامتر $م$ نوحى بالتحرك الموازى للمستقيم، وبتغيير قيم البارامتر $ج$ نوحى بالتحريك الدورانى للمستقيم.

(٤) عند رسم الدالة التربيعية $ص = أ س٢$ نوحى بتحريك فرعى القطع المكافئ من قرب إلى بعد بتغيير قيم البارمتر فى كل حالة من كسر موجب أقل من ١، ثم أعداد صحيحة موجبة وكذلك بالنسبة للدالة الأسية $ص = أ^س$ وتغيير قيم البارامتر وهكذا.

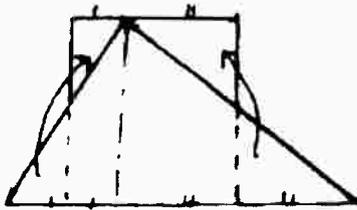
(٥) عند عمل الأشكال الهندسية المجسمة من شبكة (تفريد) مستويه (كشبكة مكعب من ست مربعات، يمكن توضيح الحركة من خلال الرسم (كمجموعة متحركة للنقط على حدود الشبكة) ومن خلال الطي واللتصق في عمل الجسم. وكذلك يمكن توضيح الحركة عند استخدام نماذج تجزئ الهرم وإعادة تركيبه.

(٦) يمكن استخدام التجزئ والتشكيل في توضيح قاعدة مساحة شكل أو نظرية (مثل نظرية فيثاغورث) لاثارة التغير والحركة كخاصية أساسية في تكوين الأشكال الرياضية شكل (٥٤) أ.

(٧) استخدام طي وثني وفرد الورق في عمل أشكال هندسية أو التوصل لعلاقات رياضية بالقص واللتصق يوضح أيضاً الديناميكية (والاحساس بالتغير والحركة) شكل (٥٤) ب.



(أ) عمل معين من طي ورقة مربعة



(ب) التوصل إلى قاعدة مساحة شنت

شكل (٥٤)

(٨) الاستعانة بوسائل Geometric Sketch pad , Gava Sketch pad الإلكترونية تظهر ديناميكية النماذج الهندسية بالكمبيوتر .

وعموماً البرمجيات لتحريك الأشكال الهندسية أو التي تظهر الحركة في تكوينها أو عرضها تضيف مزيداً من الديناميكية التي تؤدي إلى مزيد من الاستمتاع في التعلم.

ج- كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر حيوية يجعلها أكثر إنسانية.

تمشياً مع ما قدمناه لتوضيح أن هندسة الفراكتال أكثر إنسانية، فإن جعل الرياضيات المدرسية أكثر إنسانية مثلها يأتي عن طريق إتاحة الفرص للتلميذ (المتعلم) أن يصنع ويعمل الرياضيات بمفرده أو بالاشتراك مع غيره، وأن يشعر أن الرياضيات تخاطب عقله ووجدانه وإحساسه وخياله بما يدفعه لتعلمها وليتدقق جمالها في العقل والقلب.

وعلى ذلك فالطرق التي تساعد على الإكتشاف والإبتكار كالطريقة العملية.. أو طريقة مساعدة الأقران أو التعلم التعاوني تساهم في تنمية شعور المتعلم بأن الرياضيات إنسانية لأنها من صنع الإنسان، وهي إجتماعية يشترك في صنعها أكثر من فرد.

أما جعل الرياضيات المدرسية ممتعة للعقل والوجدان فيكون عن طريق توجيه الأهتمام والتشوق لجمالها الظاهر في أنماطها العددية والهندسية، بالإضافة إلى توفير الفرص لمساعدة المتعلم على النجاح في والاستقراء واكتشاف مفاهيمها وأفكارها من هذه الأنماط. كذلك توجيه الاهتمام إلى جمالها الباطن في استدلالاتها ومنطقتها وقوانينها، واستخدام المداخل التي تبسط الرياضيات تتيح للمتعلم استيعابها بحب وتقدير.

الاحساس بالجمال الرياضى يمكن تنميته أيضاً عن طريق الاحساس بعقب الماضى الذى يختص بإعادة ذكرى من ساهموا فى صنع (ابتكار) بعض موضوعات الرياضيات المدرسية وحكاياتهم حول نشأتها. وأيضاً عن طريق ربط الرياضيات بالفنون (الموسيقى التى كانت جزءاً من الرياضيات حتى القرن ١٦ ثم استقلت عنها،

الرسم، النحت، الزخرفة، الزخرفة القديمة لقدماء المصريين والزخرفة الاسلامية والزخرفة الحديثة

وعموماً فالأنشطة الرياضية تسهم مساهمة كبيرة فى تنمية الرياضيات الانسانية وذلك لما تتضمنها من ألغاز محيرة، وألعاب، وأنماط، وتشكيلات. وأعمال ماهرة مشوقة للرياضيين (كما سوف نوضح فى الجزء الثانى بإذن الله: معلم الرياضيات وتجديدات فى الأنشطة). كما أن التطبيقات الحيوية (غير المصطنعة) الحقيقية والمشاكل التى تثيرها تتطلب إحساس أكبر فى حلها بالطرق الرياضية الحالية أو المجددة.

٦-٣: توظيف هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر معلوماتيه.

يتميز عصرنا بأنه عصر المعلوماتيه نظراً للانفجار المعرفى والمعلوماتى، والتقدم التكنولوجى الكبير فى أجهزة الكمبيوتر والاتصالات. الذى أتاح التعامل مع تخزين واسترجاع ومعالجة الكم الهائل من البيانات والمعلومات وتداولها وإنجاز الأعمال المتعلقة بالمعلومات بدقة بالغة وسرعة كبيرة. كما أدى التطور الهائل فى أنظمة المعلومات، وأنظمة الخبير expert system التى تعتمد على قواعد معرفية ومنطقيه، إلى محاكات العقل والسلوك الإنسانى للقيام بأعمال وسلوكيات ذكية تخدم مجالات متعددة علمية ورياضية وتعليمية وصناعية وتجارية ...

وقد رأينا أنه لولا التقدم التكنولوجى الكبير لنظم المعلومات أو بالأحرى الكمبيوتر ما كانت لتتبلور وتظهر هندسة الفراكتال. من هذا المنطلق نوضح أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتيه والأستفادة من ذلك لتصور كيفية جعل الرياضيات المدرسية أكثر معلوماتيه.

٦-٣-١: توضيح أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتيه.

نحاول توضيح أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتيه من خلال إبراز اقتران اتضاح وتكوين وتفسير أفكارها وتطبيقاتها بالكمبيوتر (برمجيات + hard ware). وذلك باعتبار الكمبيوتر بإمكانياته المتقدمة كنظام معلوماتى فمثلاً:

(١) تكوين الفراكتالات من المولد بالتكرار المرحلي أو بأنظمة الدوال المرحلية التكرار IFS أو فراكتالات الجاذب الغريب يمكن إظهارها وتوضيح عملية تكوينها عن طريق الكمبيوتر.

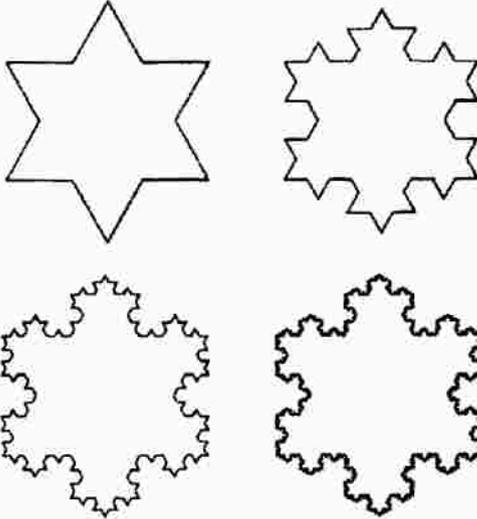
(٢) إمكانات الكمبيوتر المتطورة استطاعت إظهار الفراكتالات البديعة: مجموعة ماندلبروت. مجموعات جوليا. وفراكتالات حلول المعادلات المركبة خاصة التكميية.

(٣) يمكن عمل برامج كمبيوترية بأسطر قليلة لإنتاج الفراكتال مثل:

برامج بلغة اللوجو لعمل فراكتالات مشهورة أنظر شكل (٥٥) برنامج لعمل فراكتال (منحنى) كوخ لرقائق الثلج.

- برنامج لعمل فراكتال (مجموعة) جوليا بلغة البيسك انظر شكل (٥٦) الذى ينتج الشكل (٦) بالفصل الثالث.

- برنامج لعمل فراكتال (مجموعة) ماندلبروت بلغة البيسك أنظر شكل (٥٧) الذى ينتج الشكل (٧) بالفصل الثالث.



Logo Code	Comments
<pre> to flake : n pu ht rt 60 bk 90 It 30 pd make "*" 1 repest: n [make " * 3*:* make "1200 / :* repeat 3 [ifelse :n = 0 [fd:I] [line : n : I] rt 120] pu home pd setfc : n fill end to line : n : I ifelse : n = 1 [fd :I it 60 fd:1 rt 120 fd : I It 60 fd : I] [line n: - 1 :I It 60 line :n-1 : rt 120 line : n - 1 : I It 60 line : n - 1 : I] end </pre>	<p>The name of the main procedure is to flake :n. The notation : indicates a variable requiring a keyboard input, entered as flake 1, flake 2, flake 3, and so on.</p> <p>The length of the original segment is set by make "1200 / : *</p> <p>The original triangle is drawn by repeat 3 [ifelse : n = 0 [fd:I] [line : n : I] rt 120] Do not insert a carriage return in this line.</p>
	<p>The body of the procedure to line :n :I is a single line. Do not insert carriage returns at the end of first, second, or third lines.</p>

شكل (٥٥) برنامج بلغة اللوجو لتكوين فراكتال (منحنى) كوخ لرفائق الثلج^(٨)

List of the BASIC program JULIA

```

10 XS % = 80: YS % = 128: NIT % = 200 : M = 4
11 REM These specify the numbers of steps for x,y : the maximum number of
    iterations : and the effective size of infinity
20 INPUT "AR. AI". AR , AI
21 REM These are these are the real and imaginary parts of a
30 INPUT " XMIN, XMAX, YMIN, YMAX", XN, XX, YN, YX
31 REM These specify the rectangle of the complex plane for  $z = x + iy$ 
40 MODE 0
50 GAPX = ( XX - XN ) XS % : GOPY = ( YX - YN ) / YS %
51 REM These evaluate the steps for x and y
60 FOR NY % = 0 TO YS % - 1
70 FOR NX % = 0 TO XS % - 1
80 X = XN + GAPX * NX % : Y = YN + GOPY * NY % : COUN % = 0
81 REM This specifies the coordinates of the pixel (in the complex z - plane )
    whose colour must be found next
90 COUN % = COUN % + 1
100 X2 = X X : Y2 = Y Y
110 Y = 2 X Y + AI : x = X 2 - Y2 + AR
111 REM Lines 100. 110 replace  $z = x + iy$  by  $z^2 + a$ 
120 IF X 2 + Y2 < MAND COUN % < NIT % THEN GOTO 90
121 REM  $X2 + Y2 = 1 = 1^2$ 
130 C % = 7 COUN % NIT %
140 GCOL 0.7 - C %
141 REM Lines 120 - 140 determine crudely the colour of the pixel according
    to how many iterations COUN % it has taken for  $|z|^2$  to exceed M . a
    rough estimate of infinity.
150 PLOT 69 NX % 8 . NY % 4
160 NEXT NX % NEXT NY %
170 STOP

```

you need to answer the cue (line 20) by typing in the real and the imaginary parts of a to specify the set. The next four numbers specify the Cartesian coordinates of the four vertices of the rectangle in the complex z - plane in which the program will represent the Julia set. You might try, for your first run. to type in 0 . 32, 0.043 and thereafter - 2 ., 2., - 1.5, 1.5, For your second run try typing in - 0. 12375, 0.56508 and thereafter - 2., 2., - 1.5. 1.5. Then you might care to experiment for yourself.

شكل (٥٦) برنامج (جوليا) بلغة البيسك وأسفله ارشادات للتشغيل^(٤)

Table 3. 5 List of the BASIC program MANDEL

```

10 RS % = 80 : IS % = 128 : NIT % = 100 : M = 4
11 REM These specify the numbers of steps for ar, ai : the maximum number
    of iterations: and the effective size of infinity
20 INPUT " ARMIN, ARMIN, ARMAX, AIMIN, AIMAX" ARN, ARX,
    AIN, AIX
21 REM These specify the rectangle of the complex plane for a = ar + iai.
30 MODE 0
40 GAPR = ( ARX - ARN ) RS % : GAPI = ( AIX - AIN ) IS %
41 REM These evaluate the steps for ar and ai.
50 FOR NI % = 0 TO IS % - 1
60 AI = AIN + GAPI NI %
70 FOR NR % = 0 TO RS % - 1
80 AR = ARN + GAPR NR %
81 REM This specifies the coordinates of the pixel ( in the complex a- plane
    ) whose colour must be found next
90 X = 0 : Y = 0 : COUN % = 0
100 COUN % = COUN % + 1
110 X 2 = X X : Y 2 = Y Y
120 Y = 2 X Y + AI : X = X 2 - Y 2 + AR
121 REM Lines 110, 120 replace z = x + iy by z2 + a
130 IF X 2 + Y 2 < M AND COUN % < NIT % THEN GOTO 100
131 REM X 2 + Y 2 = | z |2
140 C % = COUN % / 10
150 IF C % = 5 THEN C % = 4
160 IF C % = 6 OR C % = 7 THEN C % = 5
170 IF C % = 8 OR C % = 9 THEN C % = 6
180 IF C % > 9 THEN C % = 7
190 GCOL 0, 7 - C %
191 REM Lines 140 - 190 determine the pixel colour from the value of
    COUN %
200 PLOT 69, NR % 8, NI % 4
210 NEXT NR % : NEXT NI %
220 STOP

```

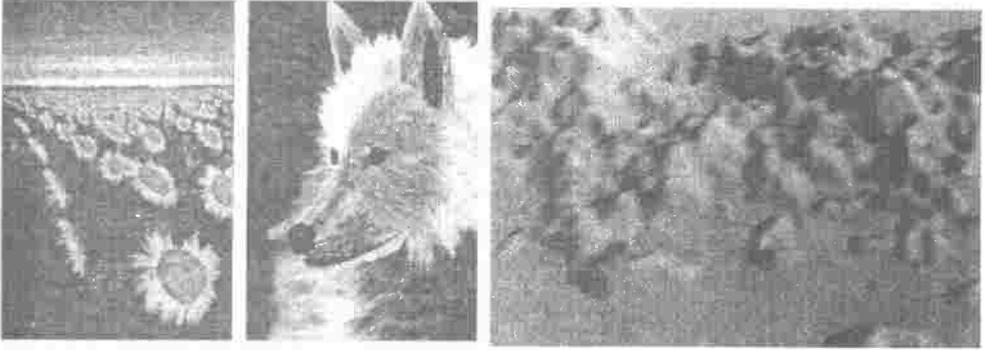
To run the program you need to answer the cue (line 20) by typing in four numbers to specify the Cartesian coordinates of the four vertices of the rectangle in the complex a- plane in which the program will plot the Mandelbrot set. You might the input - 2 . 25, 2 . 25, - 1.25, 1.25 for a start, and for your next run- 1.23, - 1.1, 0.25, 0.358 to emulate Fig . 3.13.

شكل (٥٧) برنامج (ماندل) بلغة البيسك وأسفله إرشادات للتشغيل (٤)

(٤) استخدام فنانيين لبرمجه الفراكتال أنتج لوحاً فنية متعددة فريدة بذوق عصري
أنظر شكل (٩) الفصل الثالث.

(٥) تطبيقات حيوية لهندسة الفراكتال مثل استخدامها لمحاكات الظواهر الطبيعية
جعلها تسهم في إمكانية عرضها. وبدونها كانت ستأخذ مكاناً للتخزين كبيراً
جداً يستحيل إيجادها حتى في الأجهزة الحديثة.

(٦) استخدام هندسة الفراكتال في تكوين الصور الفرضية لخلفيات أفلام القصص
الخيالية التلفزيونية والسينمائية. أنظر شكل (٥٨) الذي يبين استخدام هندسة
الفراكتال في عمل بقعة أرض خيالية كخلفية لأحد أفلام الخيال العلمي.



شكل (٥٨) فراكتال بقعة أرض

٦-٣-٢: استفادة معلم الرياضيات لجعل الرياضيات المدرسية أكثر معلوماتية:

على نفس المنوال الذي وضعنا فيه أن هندسة الفراكتال أكثر معلوماتية، بإقتران
تكوين مفاهيمها وأفكارها وتطبيقاتها بالكمبيوتر كنظام معلوماتي نقدم بعض
التصورات لجعل الرياضيات المدرسية أكثر معلوماتية ، مثل

(١) معظم الكتب المدرسية متوفرة على أقراص CD. Rom . ولو أنها نسخة
الالكترونية غير مشوقه (ولها عيوب الكتب المدرسية الحالية) ألا أن المعلم
يستحسن أن يشجع استخدامها.

(٢) الأستعانة ببعض الكتب الأجنبية التى يصاحبها CD. Rom لتوضيح الأشكال وتحريكها واستخدام الزوم ولعرض ديناميكيات عمل النماذج الهندسية وإمكانية عمل الوصل Link مع مواقع انترنت . بحيث تحوى هذه الكتب موضوعات رياضية لها علاقة بالرياضيات المدرسية.

(٣) تشجيع التلاميذ على إستخدام power point والبرمجيات التى تساعد على تحريك الأشكال والنصوص وإنتاج الرسوم على خطوات.

(٤) تشجيع الزيارة والأستعارة من المكتبات الالكترونية مثل الموجودة فى مراكز سوزان مبارك الاستكشافية والمرتبطة بموضوعات فى الرياضيات المدرسية.

(٥) تشجيع التلاميذ على إنتاج الرسوم الهندسية والأشكال البيانية والأشكال الإحصائية وجدولها باستخدام الكمبيوتر.

(٦) إستخدام مواقع تعليم الرياضيات على الإنترنت.

(٧) تشجيع التلاميذ والزملاء المعلمين على عمل search بالكمبيوتر لموضوع مرتبط بما فى الرياضيات المدرسية.

(٨) تشجيع التواصل مع المعلمين والتلاميذ بالخارج على الدردشة chatting حول موضوعات وأفكار وأساليب تدريس وعرض الرياضيات المدرسية.

(٩) يوجد العديد من الكتب الأجنبية والمجلات متوفرة على مواقع بالانترنت، يمكن الأستفادة منها فى المجالات القريبة من الرياضيات المدرسية وتدريسها يمكن أن يستفيد منها المعلم ويفيد تلاميذه بها.

٦-٣-٣: الأستفادة من هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر إتاحة.

يرتبط هذا البند بالبند السابق وقد ذكرنا فيما سبق (الفصل الثانى) وجود ١٨٠٠ موقع على الأنترنت يخص هندسة الفراكتال منها مئات الكتب فى هذه الهندسة. وهذا يعكس أن هندسة الفراكتال أكثر إتاحة access. وبالتالي الرياضيات المدرسية يمكن أن تكون أكثر إتاحة عن طريق التعرف على بعض مواقع الأنترنت

التي تغذيها. وأيضاً توفير المراجع والكتب والمجلات المصاحبة للرياضيات المدرسية، مع تسهيل الاتصالات بالمكتبات المدرسية والثقافية والمكتبات المحلية القومية . وبالإضافة لمواقع الأنترنت التي قدمتها مع مراجع الفصول السابقة أقدم بعض المواقع الأخرى.

- مع ملاحظة أنه يمكن استخدام هذه المواقع بدون كتابة <http://> في البداية.

(١) بعض مواقع على الأنترنت تخص هندسة الفراكتال؛

- Bogomonlym A : “fractal curves Dimension”

<http://cut.theknet.com/do-you-know/hilbert.html>

- fractal coast - lines

<http://polymer.bu.edu/java/java/coastline/coastline.htm>

- Mandelbrot, B., 1982 : The fractal Geamtry of Nature

<http://www.softronix.com/>

(٢) بعض مواقع على الأنترنت تخص كتب تاريخية واثرائية وتعليمية للرياضيات الدراسية

- <http://www-history.mc.stand.ac.uk/Hist/topics/>

Babylonian and Egyptian. html

- <http://www.history.mecst-and.ac.uk/>

Mathenematicians / pythagoras . html

- Brundige, E . N. 1996 . The library of Alexandria.

<http://www.persus.tufts.ed/Greek-science/studets/Elle/Museum.html>

- Abraham, R. H: The Visual Elements of Euclid

<http://thales.vismath.org/euclid>

- <http://www.NCTM.org>

- <http://www.math.rice.ed>

- The Ontari curricularum, Grades 1 - 8 (1997) Mathematics

Ministry of Education and training, Ontari

<http://www.ed.gov.on.ca>

- van de walle, J (2001) Elementary and middle

school mathematics : Teaching development , 4 Ed Addison wesley, Longman Newyork . N7

<http://mathworld.wdfram.com/leastquaresfitting.com>

<http://www.maa.org/Fractals/Welcome.html>

<http://www.maa.org/Fractals/Panoram/Welcome.html>

<http://www.mathooks.com>

٦-٣-٤ الاستفادة من هندسة الفراكتال الأكثر واقعية في جعل الرياضيات المدرسية أكثر واقعية.

ما يقرب الرياضيات من الواقع reality هو أن تجعلها ذات معنى للمتعلم، وذات دلالة عملية ملموسة في الحياة، وذات نفع (وصلة) في تطبيقات تمس أرجاء الحياة أو في التطبيقات الواقعية (غير المصطنعة) في العلوم والمعرفة. بالإضافة إلى أنها تعيش (ذات دلالة في) الواقع الحضارى الثقافى.

بعيداً عن الشكلية والطبيعة التجريدية الجافة للرياضيات نجد أن هندسة الفراكتال بالرغم من أنها متحديّة challenging ألا أنها بإمكانية إتاحتها وتبسيطها لتكون فى المتناول. بالإضافة إلى تطبيقاتها فى العلوم الأخرى ومحاكات الطبيعة وعمل الصور الفرضية لمحاكاة الطبيعة، وأيضاً لطبيعتها الحيوية والإنسانية نجد أن ذلك يبرر أنها أكثر واقعية

ويمكن الاستفادة من واقعية هندسة الفراكتال فى جعل الرياضيات المدرسية أكثر واقعية هو ما قدم فى النقاط السابقة بالإضافة إلى:

(١) العمل على أن تكون للرياضيات معنى للمتعلم. وأركز هنا على على توفير الفرص للمتعلم ليحجّل الرياضيات ذات معنى له وبما فى ذهنه فليس بالضرورة أن تكون الرياضيات ذات معنى عند المعلم (أو المؤلف للكتاب المدرسى) أن تكون أيضاً ذات معنى للتلميذ إلا إذا كان التدريس من القلب والمعلم متعلق بتلاميذه يحس إحساسهم ويفهم بعقولهم.

وفى الواقع يجمع البنائيون constructivist (مثل بياجيه) والسيكلوجيين المعاصرون مثل فايغوتسكى Vygotsky هو أن ما يتعلم هو ما يكون له معنى عند المتعلم. أو أن التعلم هو البحث عن المعنى. وما دمنا ذكرنا المتعلم فهو مركز التعلم. وما على المعلم إلا إتاحة الفرصة للمتعلم لتزويده بخبرات متكاملة وإبتكارية ومفردة وهادفة بطرق مختلفة. وذلك ليساعده على تكوين معنى للرياضيات وتكوين بتواصله مع الآخرين معنى للمواقف ولتكوين معنى لتصرفات actions الناس والأفكار.

ويوجد عدة أساليب لتنمية المعنى للرياضيات عند المتعلم ومنها ما قدمه فلويلنج Flewelling (٢٠٠٢) عن طويق الأعمال التعليمية الثرية rich learning tasks . والأعمال التعليمية الثرية هى التى تعطى التلاميذ الفرصة لكى:

- يستخدم ويتعلم أن يستخدم المعرفة بطريقة هادفة عصرية إبتكارية متكاملة ليدير الاستقصاءات والتساؤلات، والبحث investigation والتجارب لحل المشكلات ومن خلال ذلك : يكتسب المعرفة بفهم (المعرفة كمادة وكمعملية للحصول عليها) وينمى اتجاهاته وعادات تكوين المعنى مدى الحياة.

أما جيوجهيجان فهو يركز على العلاقات كأساس لتنمية تفكير الطفل الرياضى وأن كل من المتعلم (التلميذ) والمعلم يسبحان navigate فى المعرفة من خلال البحث والتفتيش search عن المعنى. حيث يفتش التلميذ عن المعنى ويفتش المعلم عن فهمه لمعنى الرياضيات عند التلميذ. وعلى ذلك فالتعلم ظاهرة إبدالية

(إنعكاسية Reflexive) بين المتعلم والمعلم تنشأ على أساس العلاقة التى تأتى عن طريق النواحي الاجتماعية والنشاطية والإجراءات الأبتكارية.

وعلى ذلك فتأسس المعنى يتطلب من وجهه نظرهم إيجابية من جانب المتعلم وتوفير أنشطة ثرية وفهم للمعنى الذى يكونه التلميذ عن الرياضيات.. من جانب المعلم. وهذا ضرورى ولكننى أرى أن مساعدة التلميذ لتكوين معنى للرياضيات

يكون على أساس تنمية وتكامل الإحساس مع الأفكار مع العمل فى مناخ إجتماعى دافئ يجمع زملاء التلاميذ والمعلم. فمثلا منذ ٢٠ عاماً قدمت طريقة يستطيع الطفل من خلالها إعطاء الاحساس والمعنى لعدد المليون. وفيها يشترك مجموعة من الأطفال عدد حبات القمح فى مكبال (وعاء) معين مملوء بالقمح ثم اشتركهم فى صب عدد من المكابيل فى مكان فيجدوا أن مليون جنيه قمح تعمل كومة كبيرة. وبذلك ينمو إحساسهم بكبر عدد المليون مقرونا بمعرفتهم عنه وبعملهم فى التوصل إلى معناه.

وعلى ذلك يمكن مساعدة التلميذ على تكوين معنى للرياضيات عن طريق إتاحة الفرصة له ومناقشته فى توضيح روابطها connections مع الحياة ومع العلوم الأخرى.

(٢) الاستفادة من المداخل المشتقة من رياضيات الشارع street math وقد تسمى الرياضيات غير الرسمية أو العرقية. وهى الرياضيات التى يستخدمها الأميون أو غير المتعلمين تعليماً نظامياً لها. مثل البائعين والشرائيين فى تعاملاتهم الحسابية، والحرفيين فى استخداماتهم للمقاييس والتكبير والتصغير وعمل الماكينات فى إنتاجهم والزراعيين فى استخداماتهم فى المسح survey والسرى وبذر البذور فى أحواض تعتمد بطريقة غير مباشرة على التقسيم الرأسى والأفقى (كالمواقع فى الهندسة التحليلية) وعلى التوازى..

(٣) تشجيع استخدام النماذج والأجهزة التركيبية والوسائل المعينة التعليمية فى تقريب وتبسيط وتفسير وإعطاء معنى ملموس للأفكار الرياضية المجردة

(٤) استخدام طرق منبثقة من رياضيات الشارع تقوم على الاستخدام الشفهى أكثر من الأستخدام الكتابى مثل الحساب الشفهى أكثر من الحساب الكتابى. المعالجات الذهنية والتصورية قبل المعالجات الرياضية الصارمة.. فهذا يعطى فرصة للتواصل والتلفظ غير الرسمى الذى يمهد للتجريد.

(٥) استخدام الأنشطة والألغاز والألعاب والرحلات لملاحظة الرياضيات في الأشياء بالبيئة والمصانع والمزارع وأماكن الصيد والأماكن التجارية.. وعند المناقشة مع الخبراء فيها.. حيث يجد التلميذ أن معظم اللغة التي يستخدمها بالأرقام أو الصور أو الرسوم الرمزية.. بالإضافة إلى أن تعاون التلاميذ في الإعداد للرحلة وتحديد الإشتراكات والمصروفات كلها تلزم تعاملات رياضية. وكذلك الإجابة على بعض الأسئلة والاستفسارات مثل رسم مسار طريق الرحلة، زمن الرحلة الذي أخذته، السرعة المتوسطة التي يسير بها أو توبيس الرحلة، أعداد الزائرين للموقع.. تقدم تطبيقات واقعية ملموسة للرياضيات في الحساب والرسوم الرياضية والإحصائية.

(٦) تشجيع الربط بين الرياضيات المدرسية والرياضيات فيما حول التلميذ في الصناعة والتكنولوجيا الحديثة على غرار ربط الرياضيات بالطبيعة، حتى يعيش التلميذ الرياضيات فيما حوله. فمثلا عند تقديم الداله من الدرجة الثانية في مجهول يمكن ربط تمثيلها البياني لقطع مكافئ بسلك متدلى أو عقد أو أبوة لكوبرى أو بشكل معمارى..

(٧) تشجيع الربط بين الرياضيات المدرسية والرياضيات في الفيزياء أو العلوم الكيميائية والبيولوجية وعلوم الفضاء وتوجد أمثلة لا حصر لها لهذه الروابط connections . وكذلك تشجيع الربط بين الرياضيات المدرسية وكافة المواد المعرفية والفنية التي يدرسها التلميذ (المتعلم) فمثلا فى دراسة قصة معينة يطلب من المتعلم رسم موقع فى أحد أحداثها..

(٨) التأكيد على تنمية الحماس والتحدى والمثابرة والتشوق فى دراسة أى موضوع فى الرياضيات المدرسية، وتشجيع البحث والتفتيش فى مصادر المعرفة من كتب ومجلات ومواقع على الأنترنت.. لما له علاقة بما يدرسه التلاميذ فى الرياضيات.

(٩) وأخيراً التأكيد على تنمية استقلالية التعليم وتنمية النواحي الابتكارية
التجديدية في التلاميذ والمعلمين على السواء .

٦-٣-٥: الاستفادة من هندسة الفراكتال في جعل الرياضيات المدرسية أكثر حداثة

قد نتفق جميعاً لتحقيق هذا الهدف أن نقوم بتطعيم الرياضيات المدرسية بهندسة
الفراكتال وبزرع وتنمية الفكر المعاصر الذي أنتجها سواء بإدخال أجزاء منها رسمياً
في المقررات أو من خلال عمل الروابط connections بموضوعات ذات علاقة
ببعض أفكارها. أو من خلال تقديم بعض أفكارها ومفاهيمها وأشكالها كنشاط غير
رسمي أو كنشاط ترويحى مصاحب أو كنشاط ثقافى حر. ويمكن الأستعانة بما جاء
في الفصول المختلفة لهذا الكتاب. بالإضافة إلى ما أثار تطلعاتك فى التعلم
الاستقلالى لك لدراسة المزيد عن هندسة الفراكتال والتعمق فيها أو دراسة رياضيات
عصرية أخرى مثل الهندسة غير الابدالية. هندسة حدوة الحصان. النظم الديناميكية
غير الخطية...

عموماً يمكن الإستعانة أيضاً بالمراجع والمواقع للأترنت للفصول المختلفة لاختيار
الروابط فى الرياضيات المعاصرة الأكثر لياقة تطعم بها الرياضيات المدرسية كمادة
وفكر.

تعقيب (٦) تضامين وانعكاسات حول تنمية الابتكار للتدريس لمعلم الرياضيات

أترك لك كتابة هذا التعقيب بصدق وبعقلية ابتكارية حاولت تمهيتها فيك. وذلك
من خلال الانطلاق نحو الماضى واحاضر فى عالم الرياضيات ونجوب الكون فى
السماء والبحر لنستكشف هندسة الفراكتال وجذورها ونجوب علوم وتكنولوجيا
الحاضر لتعرف على دلالة هندسة الفراكتال ثم نرسو على واقعنا بين الحين والحين
لنعمل دفعه نستعيد فيها حماسنا ومقدراتنا الابتكارية الرياضية لتحسين وضع
الرياضيات المدرسية وتدريسها . وقد حاولت أن أتقرب من المعلم القارى وأعيش مع
تفكيره وأضع نفسى فى مكانة كأنتى أحاول معرفة وتعلم ما أقرأه فى فصول هذا

الكتاب لأول مرة. فالمادة الرياضية العصرية الجديدة عليك في هذا الكتاب ليست بالسهلة ولا بالصعبة وهي تتطلب الانغماس والتركيز والتحدى والمثابرة لكي تتابعها. وقد بذلت مجهوداً كبيراً لتيسيرها لك استنفدت فيها : خبراتي الطويلة في تبسيط الرياضيات العالية المتقدمة (للصغير والكبير) لتنمية الإبتكار الرياضى وفي استخدام مدخل التدريس من القلب النابع من المنهج الإنسانى لأتفهمك من القلب حتى يكون عرض المحتوى منطقياً وإنسانياً وقريباً منك بقدر الإمكان.

كما إستغللت ثمرة أعمالى فى تنمية العبقرية المجددة وفى الاختراع الرياضى لأقدم المحتوى بأساليب ومداخل متعددة تنمى الابتكار التدريس لك.

والآن إقرأ مرة أخرى هذا الفصل وحاول كتابة انعكاساتك التى تشعر بها بقلبك وتفهّمها بعقلك وتدفعك إلى أعمال ابتكارية فى التدريس وفى اصلاح وتحسين وتجديد واقع الرياضيات المدرسية. وفقك الله.

المراجع

- ١ - أ. د / نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠١) : أصول تدريس الرياضيات - القاهرة - عالم الكتب ط / ١٠ .
- ٢ - أ. د / نظلة حسن أحمد خضر (٢٠٠٢) قضايا ومشكلات فى التربية العملية، القاهرة - عالم الكتب ط - ٣ .
- ٣ - أ. د / نظلة حسن أحمد خضر وآخرون : طرق تدريس الرياضيات (١) كتاب حكومى يصدر سنوياً لتأهيل معلمى المرحلة الابتدائية - هيئة الكتب - وزارة التربية والتعليم.
- 4) Drazin, P. G (1993) : "Non linear Systems"
uk - cambridge univ . press
- 5) Geoghegan, N (2002) "Learning Mathematics"
SEARCH FOR Meaning"
Proceedings of the International conference - the
Humanistic Renaissance in Matematics Education - The
Mathematues Education into the 21st century project P . P 141 - 144
- 6) Flewelling . G (2002) we need tasks that support
sense making.OP - cit pp. 130 - 134.
- 7) Maganzini c (1997) Cool Mathematics
US. Price Stern Sloan Inc.