طريقتان لحساب ميل فلك البروج
(من إخراج محمد بن الصباح)

للدكتور عبد المجيد نصير
(عضو المجمع)

مقدمة :

فلك البروج هو الدائرة العظمى على الكرة السماوية ، التي تمثل فلك الشمس في سنة كاملة . وهي تتقاطع مع خط الاستواء السماوي في نقطتين، هما نقطة الاعتدال الربيعي (نقطة الشرق) ونقطة الاعتدال الخريفي . ويكون فلك الشمس اليومي ، يوم الاعتدال الربيعي ، هو على وجه التقريب ، خط الاستواء السماوي . وكذلك الامر في يوم الاعتدال الخريفي ؛ وهما يومان يتساوى فيهما الليل والنهار . وبعد انقضاء يوم الاعتدال الربيعي ، تتقدم الشمس يوما شمالا على فلك البروج ، ويكون مدارها لأي يوم من هذا اليوم دائرة صغرى موازية لدائرة خط الاستواء السماوي . وتقطع هذه الدائرة الصغرى الافق في نقطة تبعد قليلا او كثيرا عن نقطة المشرق . ومقدار القوس الافقي بين نقطة المشرق ونقطة تقاطع الدائرة الصغرى مع الافق تسمى مطلعة المشرق . ونرمز لها بالرمز ( ) .

والقوس θ يعتمد على خط الطول الشمسي λ ، الذي يحدد موضع الشمس بالنسبة الى فلك البروج ، وعلى ϕ التي تقيس خط العرض على الارض بالنسبة الى من يرصد الحركة . اما الفرق بين دائرتي خط الاستواء وفلك البروج فرمزه ϵ ويسمى ميل فلك البروج . وهذا المقال يهتم بمقياس مقدار ϵ اعتمادا على طريقتين متنوعتين عن فلكي اسلامي اسمه محمد بن الصباح .

ومحمد بن الصباح هو احد اخوة ثلاثة هم محمد وابرهيم والحسن ، اهتموا بالهندسة والفلك ، وكانوا معاصرين لبني موسى المشهورين ، في ايام الخليفة المأمون ، كما يذكر فؤاد سيزكين [١] ص ٢٥٢ ، ٢٥٣ . وذكرهم ابن النديم والقفطي . ومن مؤلفات محمد ابن الصباح : « رسالة في العمل بساعة المبسوطة » و « رسالة في امتحان موضع الشمس وميلها وساعة مشرقها وكمية مسارها » ؛ وينقل ابو نصر بن عراق مقتطفات من هذه الرسالة ويعلق عليها في مخطوطاته « رسالة في امتحان الشمس » ، المنشورة ضمن مجموعة « رسائل ابي نصر الى البيروني » ، الصادرة عن هيئة النشر الشرقية العثمانية بحيدرآباد بالهند . ولمحمد بن الصباح رسائل وكتب اخرى بالاشتراك مع اخوته .

والذي نقدمه هنا هو نقل عن كتاب البيروني « تحديد نهايات الاماكن لتصحيح مسافات المساكن » المنشور في القاهرة سنة ١٩٦٢ [٢] . ويذكر فيه ، ابتداء من ص ١٤٦ ، (ص ١٤٩ بالمخطوطة) الى ص ١٥٥ (ص ١٦٠ بالمخطوطة) طريقتين لاستخراج سعة المشرق الكلي ، ينسبهما البيروني الى محمد بن الصباح ، نقلا عن استاذه ابن العراق . ويحسن تقديمهما محققين .

مبـــادىء فلكيـــة :

في الشكل الاول نتقدم بعض المبادىء الفلكية اللازمة . وتبين ان مدار الشمس في اليوم ذي اطول نهار ، اي تقاطع مدار الشمس مع فلك البروج . يكون مدار الشمس في ذلك اليوم دائرة صغرى يقع القطب الشمالي في موضع قطبهـــا . وهذه الدائرة مماسة اينما لدائرة السرطان . وتقاطع تلك الدائرة مع الافـــق هو النقطة المسماة $\theta_ع$ (θ المطلع) وتمثل اعظـــم قيمة لساعة المشرق . فاذا رسمنا دائرة صغرى افقيـــة تمـــر بالنقطة $\theta_ع$ ، وقطبها هو النقطة ش ، فانهـــا تمثل دائرة مساعة المشرق . والآن نسقط دائرة فلـــك البروج على دائرة ساعـــة المشرق . افرض نقطة مـــا ، $\lambda_م$ ، على فلك البروج . اسقط $\lambda_م$ على الافـــق لتحصل على $\theta_م$ برسم دائرة صغرى توازي خط الاستواء . ثـــم اسقط $\theta_م$ على دائـــرة ساعة المشرق حسب دائـــرة صغرى توازي المحور الرئيسي ش ز ، لتحصل على النقطـــة هـ

وبهـــذا الاسلوب فان صورة نقطة الاعتدال الربيعي ح تســـ ي ، ونحصل على ان درجات القوس ع'م تساوي درجات القوس ع ، وهكذا لجميع النقـــاط على فلك البروج . ومعنى هذا ان حركة الشمس على فلك البروج يمكـــن ان يمثلها حركة على دائـــرة ســـاعـــة المشرق وبالسرعة نفسها . وهذا المبـــدأ الرياضي كان واضحا لمحمـــد بن الصباح لانه استعمله في طريقته ، ولـــو انـــه لم يبرهن عليه . للبرهان انظـــر المرجـــع [٢] .

طريقة محمد بن الصباح :

يذكر البيروني ان محمدا بن الصباح عنده طريق من الحساب لاستخراج سعة المشرق الكلي من رصد سعة ثلاثة مشارق ، على نهاية مدنيين متقابلتين ، قد ارسله في مقالته مجردا من غير برهان وهو حسن ، وان بني امره على تساهل . ويذكر البيروني حسابه ، ويستعمل ارصادا فلكية للتدليل عليه ؛ وفيما يلي نقدم البنية الجبرية الرمزية لما يذكره البيروني .

ورغم ما ذكره اعلاه عن اسقاط فلك البروج على دائرة ساعة المشرق ، فان البيروني لا يقيس الزوايا على دائرة فلك المشرق لصعوبة ذلك ، بل يقوم بالقياس على دائرة اخرى اسمها دائرة الميل ؛ فاذا ادير الافق حتى يصبح دائرة خط الزوال ومعامدا لخط الاستواء ، فان دائرة ساعة المشرق تصغر حتى تنطبق على دائرة الميل ذات نصف قطر يساوي جا ϕ . وعلى هذا فان القياسات على الميل هي القياسات λ هي القياسات نفسها على دائرة ساعة المشرق من نقطة تقع على خط استواء الارض ، انظر الشكل (٢) .

وهنا ننبه الى ان العلاقات المثلثية التي استخدمها الرياضيون المسلمون والتي نقدمها فيما يتلو ، ونميزها بكتابتها بخط غليظ ، مختلفة قليلا عن العلاقات المثلثية المستخدمة اليوم ، والعلاقة بينها هي جا θ = ل جا θ ، حيث

ل هو نصف قطر دائرة التعريف ، ونفرضه = ٦٠ في هذا المثال ، فان ٦٠ = ن

اساس النظام الستيني . والقياسات المذكورة هي بالنظام الستيني حيث

الفاصلة المنقوطة (؛) تقوم مقام الفاصلة العشرية . مثلا :

٤١؛٥٥ ؛٦ (ستيني) = ٥٥ + ٤١ × ٦٠ + ٦ × ٦٠ × ٦٠ = ١٤١١٠ (عشري)

وكما نعلم ، فان النظام الستيني يحوي درجات ، دقائق ، وثوان . وفي الشكل (٣) منقول عن البيروني (ص ١٤٩) . فالدائرة الكبرى هي دائرة البروج ونصف قطرها ر ، والدائرة الصغرى هي دائرة الميل ونصف قطرها ر جتا ε .

حيث ε زاوية ميل فلك البروج .

افرض أ = λ ، وهو خط طول الشمس في وقت ما ، فان ميل λ هو أب ، و

أس يساوي س ومن المثلثات المتشابهة فان

$$\frac{\text{جا } \lambda}{\text{ر}} = \frac{\text{جا } \delta}{\text{ر جتا } \varepsilon} = \frac{\text{جا } \delta}{\text{جا } \varepsilon}$$

ولاي رصدين ى ، ك بحيث ان ط ى = ى ط = ى ك فان س م = م ل ، هذا هو الاساس لاي

انتظام حركة الشمس . وهو من التساهل الذي يذكره البيروني .

ولاشتقاق الطريقة الاولى لابن الصباح ، فاننا نفرض دائرة الميل (ج د) ،

وافرض الاقواس أب ، أجـ ، أد تمثل قياسات الزمن الثلاثة δ_1 ، δ_2 ، δ_3 على التوالي

فان ب ج = ج د (الافتراض انتظام حركة الشمس ، ولان القياسات الزمنية

ستساوية في فصل واحد) .

فان الاقواس د ز = د هـ = ٢ ب ج + ٢ أب = ٢ أ جـ .

لذلك ب هـ = ٢ جا δ_1 = $م_1$

د ز = ٢ جا δ_2 = $م_2$

ب ز = ٢ جا δ_3 = $م_3$

ويسمى البيروني م ز = د ب = و بالوتر المستخرج

د م = د ز ـ م ز = هـ د ـ ب د = هـ ب = $م_1$

وكذلك ا هـ ز = ب هـ + ب ه = $\frac{م_1^2 + م_3^2}{2}$ ، حيث اعتبرنا هـ ب ز خطا واحدا ،

وبتطبيق نظرية بطليموس على ب ز م د فان

$$م_2^2 = م_1 م_3 + و^2$$

$$ع^2 = م_2^2 - \frac{(م_1^2 + م_3^2)^2}{2}$$

ومنها و = $\sqrt{م_2^2 - م_1 م_3}$ ، ع = $\frac{1}{2}\sqrt{[م_2^2 - (\frac{م_1^2 + م_3^2}{2})]}$

ومن تشابه المثلثين د هـ ب ، د ز ط فان

$$\frac{د هـ}{د ز} = \frac{د ب}{د ط}$$ ، اى ان $\frac{ع}{م_2} = \frac{و}{2 ر}$ = $\frac{و}{2 جا هـ}$

لذلك جا هـ = $\frac{و \cdot م_2}{2 ع}$

او هـ = معكوس جا $\frac{و \cdot م_2}{2 ع}$

الرصد الفلكي

تتطلب هذه الطريقة ثلاثة ارصاد على فترات متساوية وفي الربع ذاته .

ولذلك قام البيروني بقياساته في مرصده بخوارزم (الآن تحت الحكم السوفيتي) حيث درجة العرض $\phi = 41^\circ 42'$.

وقاس الزوايا δم عند ساعة الزوال على فترات متساوية مدة كل منها ثلاثون يوما . والقياس الاول يوم الجمعه بتاريخ ٢ مرداد سنة ٣٨٥ (بعد يزدجرد) الموافق ٢ صفر سنة ٧٠٤ للهجرة والموافق ١١ تموز سنة ١٠١٦ م والقياسات هي

$\delta_1 = 28^\circ 21'$ ، $\delta_2 = 0^\circ 14'$ ، $\delta_3 = 12^\circ 30'$

على ان البيروني يبدل δ_1 ، δ_3 ليحفظ ترتيب الزوايا .

هناك بعض الاخطاء في الحسابات التي يذكرها البيروني في كتابه . ورسم بعض الارقام اما بالحروف على طريقة حساب الجمل ، او بالنظام العشري . وبعض الحسابات كما يذكرها البيروني ،ونضع بين حاصرتين < > الصحيح حيث يجب . ونرجح ان البيروني لم يخطىء . بل ان الخطأ قد جاء ربما من الناسخين الذين حسبوا او كتبوا .

$م_1$ = ١٥ ٤١٠ ٦ ؛ والصحيح < ٦٠ ٤٢٥٥ >

$م_2$ = ٥٠ ١٠ ٢٩ ؛

$م_3$ = ٥٥ ٥٤٠ ٤٣ ؛

$\frac{م_1^2 + م_3^2}{2}$ = ١٨٠ ٢٥ ؛ ٢٥

وحسب النظام العشري فان $م_1$ = ١٤٠٧٥ شواني < ١٤١١٥ >

$م_2$ = ١٠٤٥١٠ شواني

$م_3$ = ١٥٨٠٩٥ شواني

$\frac{م_1^2 + م_3^2}{2}$ = ٩١١٠٥ شواني

$م_1 \cdot م_3$ = ٣٨١٢٤٦٠٩ روابع

$م_2^2$ = ١٠٩٤٠٣٤٠١٠٠ روابع

$م_2^1$ = $م_1^2 \cdot م_3^2$ = ٧١٢٧٨٧٩٩٧٥ < ٧١٠٩٨٧٩١٧٥ > روابع

د = ٨٤٤٢٧ < ٨٤٣٢٠ > شواني

$م^2 - \frac{(م_1^2 + م_3^2)}{2}^2$ = ٢٦٤٠٢١٩٠٧٥ < ٢٦٢٢٢١٩٠٧٥ > روابع

ع = ٥١٢٨٢ ثواني < ٥١٢٠٨ >

ر = ٨٥٨٦٠ ثواني (٨٦٨٦٠) ثواني

ج = ٠ ، ٢٥٠ ، ٢٣° ٢٣ (٢٣ ، ٢٨٠ ، ٢٣)

تعليق

يعلل البيروني عدم دقة الجواب الى سببين :-

(١) افتراض انتظام حركة الشمس ، وقد احتجناه من فرضنا ب ج = ج د ، وهذا غير صحيح .

(٢) عدد الخطوات اللازمة لإستخراج الجواب كبير نسبيا ، مما يؤدي الى الغلط في الحساب والتقدير ، خصوصا من حساب الجذور والجيوب .

ويلاحظ ان البيروني ، رغم معرفته بالتساهل الموجود في هذه الطريقة ، لاعتمادها على فرض غير صحيح ، فانه آثر ان يبرهن على عدم دقتها بالرصد والمثل العددي ، وهذا مثل آخر على الدقة التي كان يتوخاها العالم المسلم ، وعلى حبه للتجربة ، وتحمله المشاق في سبيل ذلك .

الطريقة الثانية

والتغلب على مزالق الطريقة الاولى ، فإن البيروني يقدم لنا طريقا آخر ، وان كان لايجزم بصحة نسبته الى محمد بن الصباح لفساد في النسخة من مقالة ابن الصباح التي كانت وقعت بين يدي البيروني ، "فاستخرج ابو نصر بن عراق طريقا اما ان يطابق صحيح ذلك ، واما ان يكون طريقا ثالثا" . وهذا الطريق يحتاج الى رصدين للشمس وهي في ربع واحد . ولاشتقاق المعادلة الخاصة فان الخطوات المتبعة هي كما يلي . انظر الشكل (٥) .

ارسم دائرة تمثل سعة المشرق ونصف قطرها يساوي جيا ج ، ومركزها ع . افرض القوس أ ب سعة المشرق الاول - اي مقدار الرصد الاول - وخذ على المحيط القوس [illegible] القوس أ ب . وافرض القوس ب ج سعة المشرق الثاني - اي مقدار الرصد الثاني - [illegible] بحيث ان القوس ب ز ضعف القوس ب ج . نصف القوس

هـ ب ز في د ، وانزل د ح عمودًا على الوتر ب ز ،

فاذا ب هـ = ٢ جا $\frac{\theta}{1}$ = $م_1$

ب ر = ٢ جا $\frac{\theta}{1}$ = $م_2$

فان ز ح = $\frac{م_1 + م_2}{2}$

وكذلك د ج = أ ب = ب ح = ب د

و = د ب = $\frac{م_1 - م_2}{2}$ = الوتر المستخرج

نصف الزاويه د ع ب بالمنصف ع ف ، فان الزاويه المركزية د ع ف تساوي الزاوية المحيطية ب ز د وهي الزاوية $\frac{\theta}{2}$ ، ينصف ع د ف = تمام الزاوية

د ع ف = $90^\circ - \frac{\theta}{2}$

ولذلك فان

$$\frac{\text{ز د}}{\text{ز ح}} = \frac{\text{جا } 90}{\text{جا}(90 - \frac{\theta}{2})} = \frac{\text{ل}}{\text{جتا } \frac{\theta}{2}}$$

لذلك س = ز د = $\frac{\text{ل} \left(\frac{م_1 + م_2}{2} \right)}{\text{جتا } \frac{\theta}{2}}$

وفي المثلث ب د ز فان

$و^2 = ب د^2 = ب ز^2 + ز د^2 - 2 ب ز \cdot د ز$ جتا $\frac{\theta}{2}$

$= ر د^2 + م_2^2 - 2 م_2 \cdot \left(\frac{م_1 + م_2}{2} \right)$

$= س^2 - م_2 \cdot م_1$

$$\frac{\text{ل}}{\text{ن}} = \frac{\text{ل}}{\text{ن}}$$

ومن المعلوم أن

$$\text{ل} = \text{نق} \times \text{جا} \frac{\text{ه}}{\text{ن}}$$

$$\text{جا} \frac{\text{ه}}{\text{ن}} = \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$$

$$\frac{\text{ه}}{\text{ن}} = \text{جا}^{-1} \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$$

$$\text{ه} = \frac{\text{ن}}{\text{ن}} \text{جا}^{-1} \frac{\text{ل}}{\text{نق}}$$

البرهد الفلكي والحساب

يذكر البيروني رصدين متشاليين بينهما ثلاثون يوما ،كما في الطريقة الاولى

$$\delta_1 = ١٢؛ ٣^\circ \qquad \text{م}_1 = ٤١٠ ٥٥؛ ٦$$

$$\delta_2 = ٠؛ ١٤ \qquad \text{م}_2 = ١٠ ٥٠؛ ٢٩$$

$$\text{م}_1 - \text{م}_2 = ٣٢؛ ٥١٠ ١٧ \quad \langle ٥٣؛ ٥١٠ ١٧ \rangle = \langle ٦٤٢٩٢ \rangle$$ ثواني

(لا خطأ) في معدل م١ ، م٢ ، والارقام مكتوبة بالاحرف ، مما يدل على انها خطأ املائي وليست خطأ كتابيا لكن القيمة الصحيحة هي المستعملة بعد ذلك).

ومن فرق جيبي ، يستخرج البيروني

$$\text{ه} = ٢٩؛ ١٧^\circ$$

ل الى متمم ٣٨ = ن = ١٩٠٥٧؛ ٥٢$^\circ$ $\langle$ ٤٢ ٥٧٠ ١٩٠؛ ٥٢$^\circ$ $\rangle$.

(وليس لهذا الخطأ أثر فيما بعد لأنه لايستعمله).

$$\frac{\lambda\Delta}{2} = ٣٠\ ٣٨\ ٠\ ١٤\ ;^{\circ}$$

$$\underline{\text{جا}}\ \frac{\lambda\Delta}{2} = ٥٩\ ٠\ ٩٠\ ;١٥ = ٥٤٥٩٩ \text{ ثواني}$$

$$٩٠^{\circ} - \frac{\lambda\Delta}{2} = ٣٠\ ٢١\ ٠\ ٧٥\ ;^{\circ}$$

$$\text{جا} \left(٩٠^{\circ} - \frac{\lambda\Delta}{2} \right) : \underline{\text{جتا}}\ \frac{\lambda\Delta}{2} = ٣٠\ ٠\ ٠\ ;٨٥ = ٢٠٨٩٨٠ \text{ ثواني}$$

$$ل = ٦٠$$

$$س = \frac{٦٠ \times ٦٤٢٩٢}{٢٠٨٩٨٠} = ٥٥\ ٢٥٠\ ,\ ١٨ < ٢١\ ٢٢٠\ ;١٨ >$$

(والخطأ هنا في القسمة ،وسؤثر في الجواب الاخير)٠

$$س = ٦٦٣٥٥ < ٦٦٤٥٢ > \text{ ثواني}$$

$$س^{٢} = ٤٤٠٢٩٨٦٠٢٥ < ٤٤١٥٨٦٨٣٠٤ > \text{ روابع}$$

$$م_{١}\ .\ م_{٢} = ٢٥٢٠٢٥٨٦٥٠ \text{ روابع}$$

$$س^{٣} - م_{١}\ .\ م_{٢} = ١٨٨٢٧٢٧٢٧٥ < ١٨٩٥٦٠٩٦١٥٤ > \text{ روابع}$$

$$و = ٤٣٢٩٠ < ٤٤٥٧٢ > \text{ثواني}$$

$$\underline{و}_{٢} = ٢١٦٩٥ < ٢١٧٨٦ > \text{ثواني}$$

$$\underline{\text{جا}} = ٨٥٨٢٨ < ٨٥٨٣٢ > \text{ ثواني}$$

$$= ٢٨\ ٥٠٠\ ٢٣٠\ ٣٢ < ٢٣\ ٥٠٠\ ٣٢\ ٤ >$$

وعليه فان $= ٢٤٠٤٦\ ;\ ٢٢^{\circ} < ٢٣\ ;٢٤٠\ ٤^{\circ} >$

ولانعرف القيمة الصحيحة للزواية ← في ذلك الوقت [illegible]

النتائج ٠

عرفان (يشكر المؤلف استاذه ادوارد كندى اذ قرأ المسودة وعلق [illegible] على اخطائها)٠

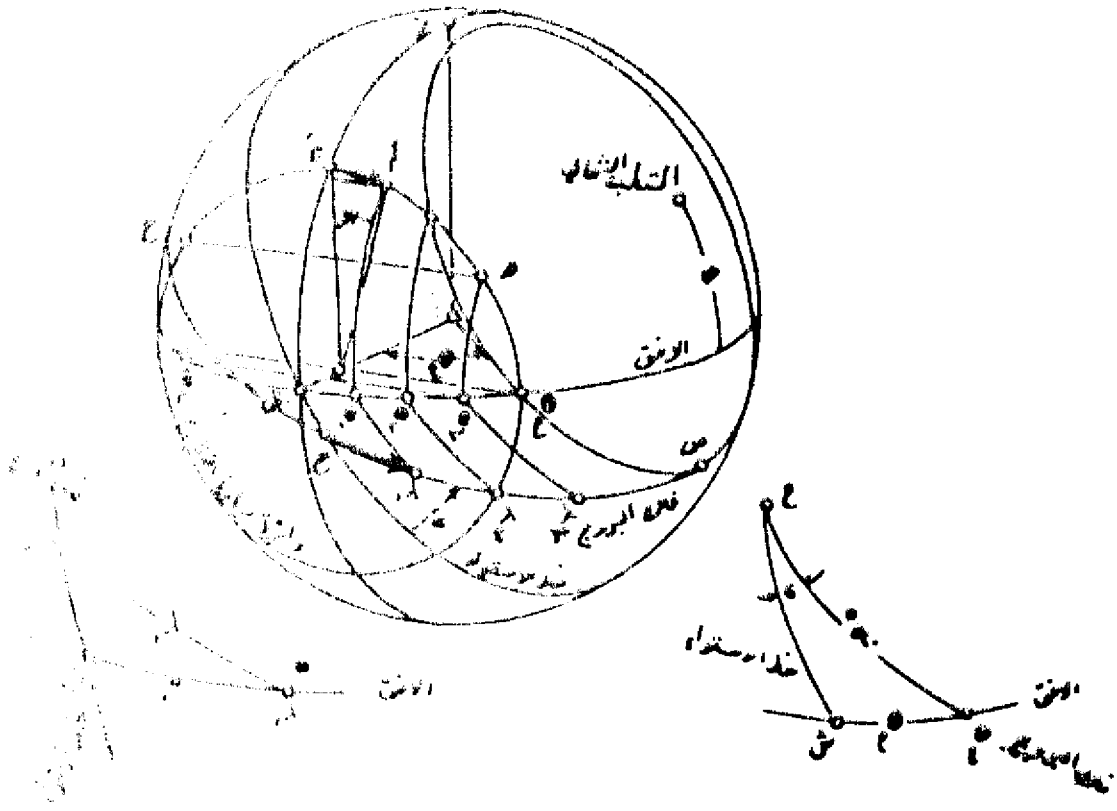
(١) Sezkin , Fuat , Geschichte Des Arabischen Schriftums. Band V , Leiden , 1974.

(٢) البيروني ، ابو الريحان ، " تحديد نهايات الاماكن في تصحيح مسافات المساكن " طبع القاهره ١٩٦٢ .

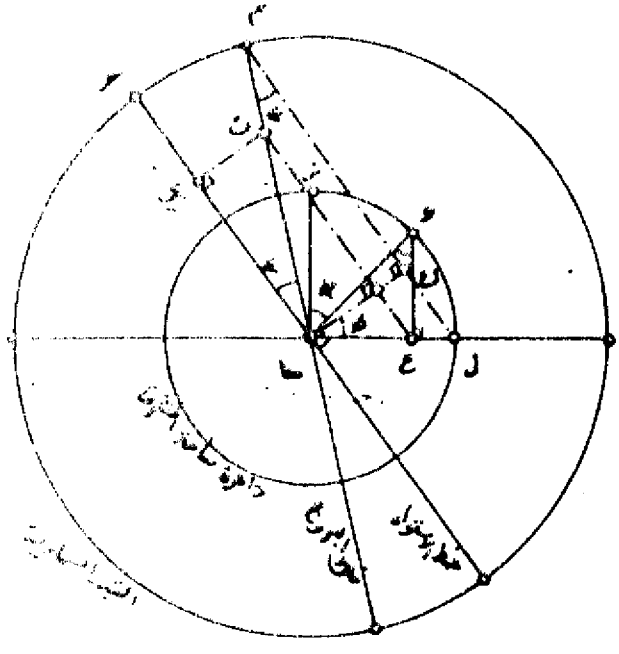
(٣) Kennedy, E.S. and Sharkas , H., " Two Medieval Methods for Determining the obliquity of the Ecliptic", The Mathehmatics Teacher , Vol. LV No 4 , April 1962

(٤) Colliers Encyclopedia , Vol. 5 P604 , Macmillan Educational Corporation , New York.

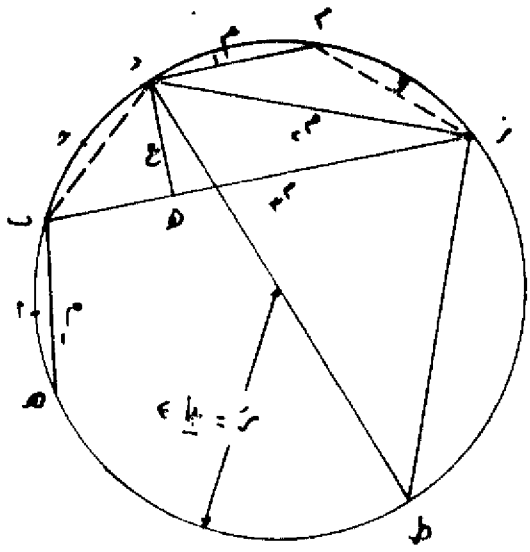
(٥) القفطي ، جمال الدين ابو الحسن علي بن القاضي الاشرف يوسف ، " اخبار العلماء في اخبار الحكماء " دار الآثار للطباعة والنشر والتوزيع ، بيروت .



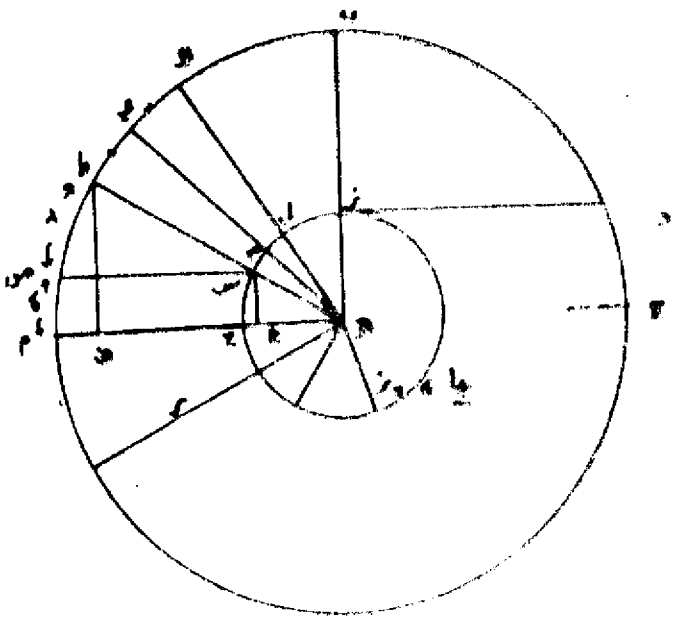
الشكل (١)



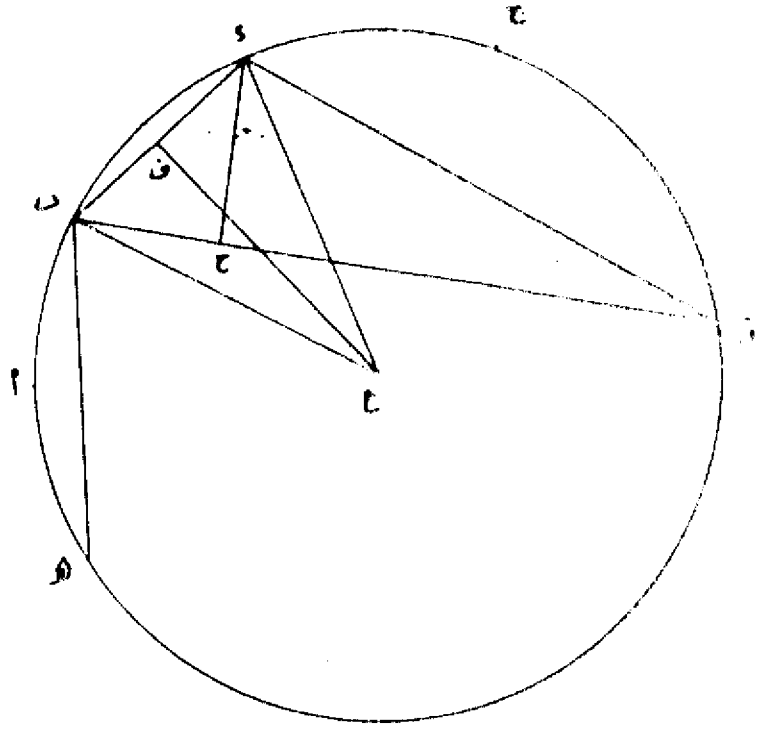
الشكل (٢)



الشكل (٤)



الشكل (٣)



الشكل (٥)