

الباب الثاني

تأثير الإجهادات على الصخور

الفصل الثالث

تحليل مجال الإجهادات

مقدمة :

يمكن التعبير عن المتادير الهندسية بوجه عام إما بمقادير كمية (Scaler) أو متجهات (Vector) أو مصنفوات (Tensor) . ويمكن تحديد المقادير الكمية إذا عرف مقدارها فقط مثل المسافة والحرارة والوزن أى أنه يمكن التعبير عن المتادير الكمية برقم واحد أو متغير واحد . أما المتجهة فهى عبارة عن كمية لها مقدار واتجاه ونقطة تأثير وتحتاج المتجهة إلى ثلاثة مقادير لتحديدتها تحديداً كاملاً . فمثلاً تعرف المتجهة إذا عرف مقدار ثلاث مركبات لها فى اتجاه المحاور الكارتيزية (X,Y,Z) أو إذا عرف طول المتجهة ومقدار الزاويتين اللتين تصنعهما مع أى محورين من المحاور الثلاثة . ومن أمثلة المقادير التى يعبر عنها بالمتجهة القوة والسرعة . وذلك لأنه من المعروف أن القوة تميل لتوليد حركة فى الجسم الذى تؤثر فيه أو تعمل على تغيير حركته ولتحديد القوة تحديداً كاملاً يجب معرفة مقدارها واتجاهها ونقطة تأثيرها . أما المصفوفة فيعبر بها عن الكميات التى تحتاج إلى أكثر من ثلاثة مقادير لتحديدتها تحديداً كاملاً كالمجالات فيعبر مثلاً عن مجال الإجهادات بالمصفوفة لأنه يحتاج إلى ست مركبات لتحديدته تحديداً كاملاً ثلاثة منها عبارة عن المقادير اللازمة

لتحديد المتجهت أي المقدار والاتجاه ونقطة التأثير ، أما الثلاثة الأخرى فهي اللازمة لتحديد المستوى الذي يؤثر فيه الإجهاد .

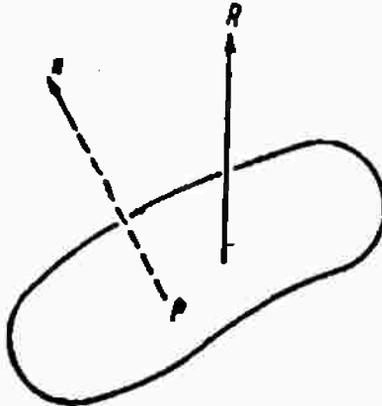
أولا - الإجهادات

تعريف الاجهاد :

يعرف الإجهاد بأنه القوة الداخلية المؤثرة على وحدة المساحة في نقطة معلومة من مقطع جسم معين .

تحديد مقدار واتجاه الإجهادات :

إذا أردنا تحديد مقدار واتجاه الإجهادات التي يتعرض لها جسم معين فإنه يمكن تصور نقطة ما في هذا الجسم وتكن نقطة (P) كما في شكل (٥٧) وتصور مستوى ما يقطع هذه النقطة خلال هذا الجسم ، ثم نعتبر المساحة المتناهية في الصغر والتي تحيط بالنقطة (P) في هذا المستوى (δa) ونفرض أن الاتجاه (n) عمودي على المساحة (δa) ، ثم نعتبر الاتجاه الذي أقيم منه



(شكل ٥٧)

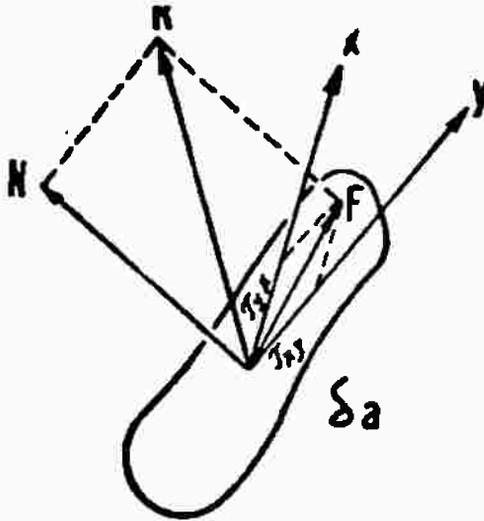
تحديد مقدار واتجاه الإجهادات

العمود موجياً وعكس هذا الاتجاه سالباً كما هو موضح بالشكل .
 يمكن اعتبار (R) محصلة القوى التي تؤثر على الجانب الموجب من
 المستوى داخل المساحة (δa) وبذلك يكون الإجهاد الذي يؤثر على المساحة
 $\frac{R}{\delta a}$ هو (δa)

ويتضح من الشكل (٥٨) أن اتجاه المحصلة (R) لا يشترط أن يكون
 عمودياً على المستوى (δa) ولذلك فإنه يمكن تحليل (R) إلى مركبتين في اتجاهين
 إحداهما عمودي على المستوى والآخر مماس ويرمز لهما بالرمزين (N, F) .

وبذلك يكون مقدار الإجهاد العمودي على المساحة (δa) هو $\frac{N}{\delta a}$ فإذا
 تضاءلت المساحة (δa) حتى وصلت إلى الصفر فإن المقدار $\lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{N}{\delta a}$
 يكون هو مقدار الإجهاد العمودي عند النقطة (P) الموجودة في المستوى الذي
 يقطع الجسم ، ويرمز عادة للإجهاد العمودي بالرمز (σ) ، أما الإجهاد

المماس أو القاص فمقداره عند النقطة (P) هو $\lim_{\delta a \rightarrow 0} \frac{F}{\delta a}$ ويرمز

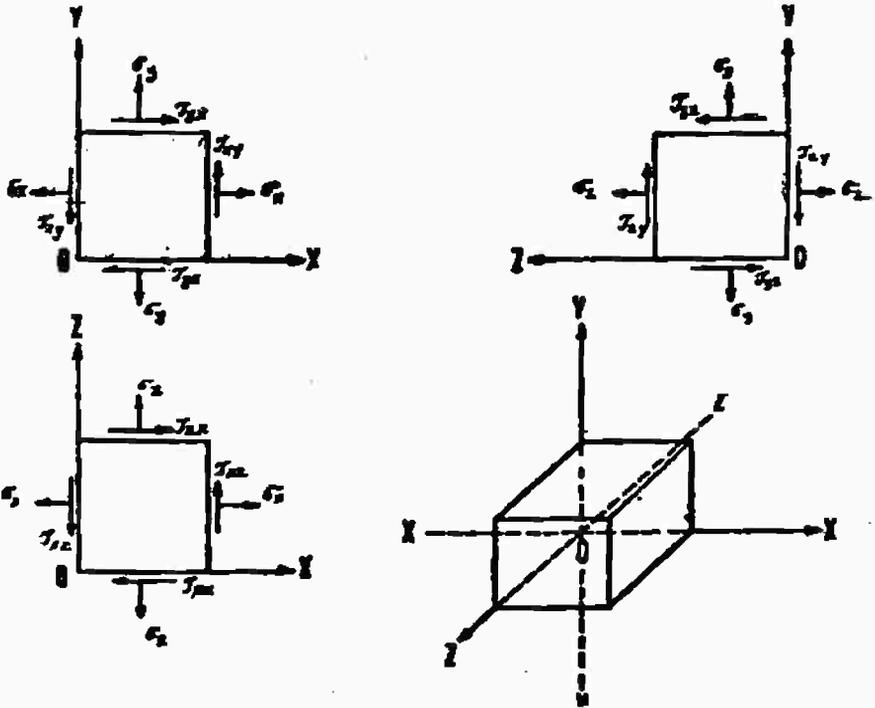


(شكل ٥٨) تحليل الإجهادات إلى عمودية وقاصّة

لهذا الإجهاد عادة بالرمز (τ) ولكي يمكن تحديد هذا الإجهاد تحديداً كاملاً في هذا المستوى يمكن اختيار محورين متعامدين (x, y) وتحليل الإجهاد إلى مركبته بالنسبة لهذين المحورين ويرمز لهاتين المركبتين بالرمزين (τ_{xy}, τ_{yx})

مجال الإجهادات المنتظمة :

موضح بالشكل (٥٩) مجال إجهادات منتظم منسوب إلى ثلاثة محاور متعامدة (كارتيزية) فثلاً الإجهاد (σ_x) يمثل إجهاداً عمودياً يؤثر على الوجه المتعامد على المحور $(x-x)$ والإجهاد القاص (τ) له مركبتين يعبران عن مكانه واتجاهه بالنسبة للمحاور وهما : (τ_{xy}) وتمثل الإجهاد القاص الذي يؤثر على الوجه المتعامد على المحور $(x-x)$ واتجاهه في اتجاه المحور $(y-y)$ ،



(شكل ٥٩)

مجال الإجهادات المنتظمة

(τ_{xy}) وهى تمثل مركبة الإجهاد القاص الثانية . ويتضح من الشكل (٥٩) أن الإجهادات المنتظمة المنسوبة إلى ثلاثة محاور يمكن تحديدها تحديداً كاملاً إذا عرفنا التسعة مركبات لهذه الإجهادات ويعبر عنها بالمصفوفة العامة لمجال الإجهادات المنتظمة كما يلي :

$$\begin{matrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{matrix} \quad (1)$$

وترتبط المركبات التسعة لمجال الإجهادات المنتظمة فيما بينهما بعلاقات رياضية . يمكن الحصول عليها نتيجة اتران الجسم الموضح بالشكل (٥٩) فإذا ساوينا العزوم الناتجة من تأثير القوى الموضحة بالشكل نحصل على المعادلات الآتية :

$$(\tau_{xy} \, dy \, dz) \, dx = (\tau_{yx} \, dx \, dz) \, dy \quad (2)$$

$$(\tau_{xy} \, dy \, dx) \, dz = (\tau_{yz} \, dz \, dx) \, dy \quad (3)$$

$$(\tau_{xz} \, dz \, dy) \, dx = (\tau_{zx} \, dx \, dy) \, dz \quad (4)$$

من هذه المعادلات يمكن أن نستنتج أن :

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} \end{aligned} \quad (5)$$

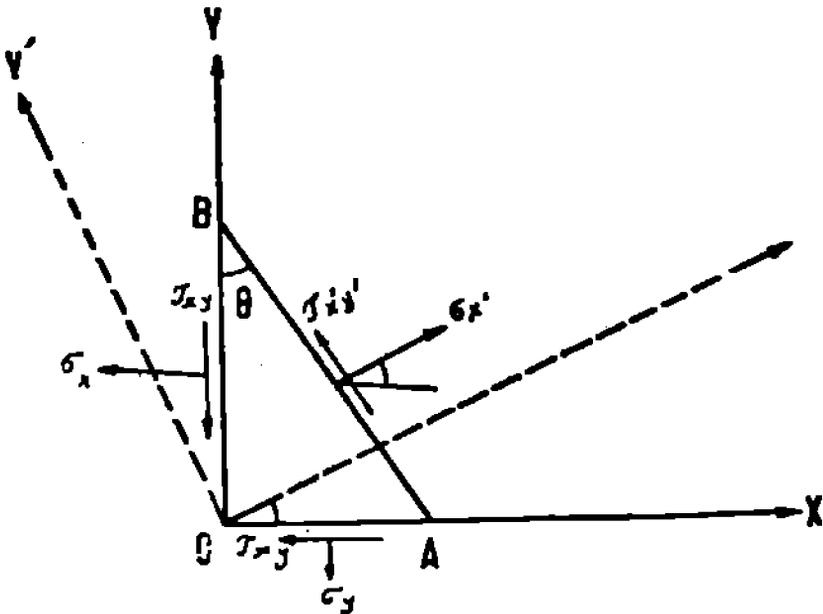
ومن ذلك يتضح أنه يمكن تحديد مجال الإجهادات المنتظمة إذا حددت ست مركبات للإجهادات فقط وهى :

$$\begin{matrix} \sigma_x , \sigma_y , \sigma_z & \text{مركبات الإجهادات العمودية الثلاثة} \\ \tau_{xy} , \tau_{yz} , \tau_{xz} & \text{مركبات الإجهادات القاصة الثلاثة} \end{matrix}$$

خصائص الإجهادات المنتظمة :

إذا تصورنا جسماً رقيقاً على شكل مثلث OAB في حالة اتزان تحت تأثير الإجهادات $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ منسوبة إلى المحورين (σ_x, σ_y) كما هو موضح بالشكل (٦٠) . وإذا فرضنا أن اتجاه العمود على الخط AB يصنع زاوية مقدارها (θ) مع المحور (σ_x) . لما كان الجسم رقيقاً جداً فإنه يمكن إهمال الإجهادات العمودية على المستوى OAB ونتيجة لذلك تكون الإجهادات المؤثرة على هذا الجسم هي العمودية $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ والإجهادات القصية هي $(\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zy})$. فإذا رمزنا لسلك هذا الجسم الرقيق بالرمز (d) فإنه يمكن إيجاد مجموع القوى التي تؤثر في الاتجاه (σ_x) ومساواتها بالصفر نتيجة اتزان الجسم .

$$\sigma_x \cdot AB \cdot d \cos\theta - \tau_{xy} \cdot AB \cdot d \sin\theta - \sigma_y \cdot OB \cdot d - \tau_{yz} \cdot AO \cdot d = 0 \quad (6)$$



(شكل ٦٠)

خصائص الإجهادات المنتظمة

ولكن من المثلث OAB يمكن أن نستنتج

$$OA = AB \cdot \sin \theta$$

$$OB = AB \cdot \cos \theta$$

ومن المعادلة (٥) يمكن أن نستنتج أن $\tau_{xx} = \tau_{yy}$ وبتعويض هذه المقادير في المعادلة (٦) نحصل على المعادلة الآتية :

$$\sigma_x \cos \theta - \tau_{xy} \sin \theta = \sigma_x \cos \theta + \tau_{xy} \sin \theta \quad (7)$$

وبالمثل يمكن الحصول على معادلة مماثلة إذا ساوينا مجموع القوى في الاتجاه Oy بالصفر

$$\sigma_x \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta = \sigma_y \sin \theta + \tau_{xy} \cos \theta \quad (8)$$

وبضرب المعادلتين (٧) ، (٨) في $\sin \theta$ ، $\cos \theta$ على التوالي وبالجمع نحصل على المعادلة

$$\sigma_x = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2 \theta \quad (9)$$

وبالمثل يمكن استنتاج أن

$$\sigma_y = \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2 \theta \quad (10)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2 \theta + \tau_{xy} \cos 2 \theta \quad (11)$$

من ذلك يتضح أنه إذا أمكن معرفة مقدار الإجهادات العمودية والقاسية منسوبة إلى محورين (Ox , Oy) فإنه يمكن بواسطة المعادلات (٩) ، (١٠) ، (١١) إيجاد قيمة هذه الإجهادات بالنسبة لأي محاور أخرى مثل (x , y) في نفس المستوى . كما يتضح من المعادلة (١١) أنه يمكن الحصول على مقدار الزاوية التي يكون عندها مقدار إجهاد القص مساوياً للصفر .

$$0 = \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2 \theta + \tau_{xy} \cos 2 \theta$$

$$\frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2 \theta = \tau_{xy} \cos 2 \theta$$

$$\tan 2 \theta = \frac{2 \tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)} \quad (12)$$

من المعادلة (١٢) يمكن أن نستنتج أنه مهما كانت قيمة الإجهادات σ_x ، σ_y ، τ_{xy} فإنه يوجد دائماً مقداران للزاوية يحققان المعادلة (١٢) وهذان المقداران هما (θ) ، $(\theta + 90)$ أو بتعبير آخر إنه مهما كانت حالة الإجهادات عند النقطة O فإنه يوجد دائماً اتجاهين متعامدين يكون فيهما مقدار إجهاد القص مساوياً للصفر وهذان الاتجاهان يختلفان من نقطة لأخرى ويطلق عليهما اتجاه المحاور الرئيسية للإجهادات ويبرز لهما بالرمزين (σ_1 , σ_2) . فإذا عوضنا بقيمة الزاوية (θ) التي حصلنا عليها من المعادلة (١٢) في المعادلات (٩ ، ١٠ ، ١١) فإننا سوف نحصل على قيمة الإجهادات الرئيسية كما يأتي :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (13)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (14)$$

$$\tau = 0 \quad (15)$$

ويمكن استخدام المعادلات (٩ ، ١٠ ، ١١) لإيجاد قيمة الإجهادات عند أى نقطة بدلالة الإجهادات الرئيسية وذلك بالاستعانة بما سبق استنتاجه من أن مقدار إجهاد القص في اتجاه المحاور الرئيسية يساوى صفراً ، وبذلك يمكن كتابة المعادلات الآتية :

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta \quad (16)$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \theta + \sigma_2 \cos^2 \theta \quad (17)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2 \theta \quad (18)$$

ويجمع المعادلتين (١٦ ، ١٧) نحصل على المعادلة الآتية :

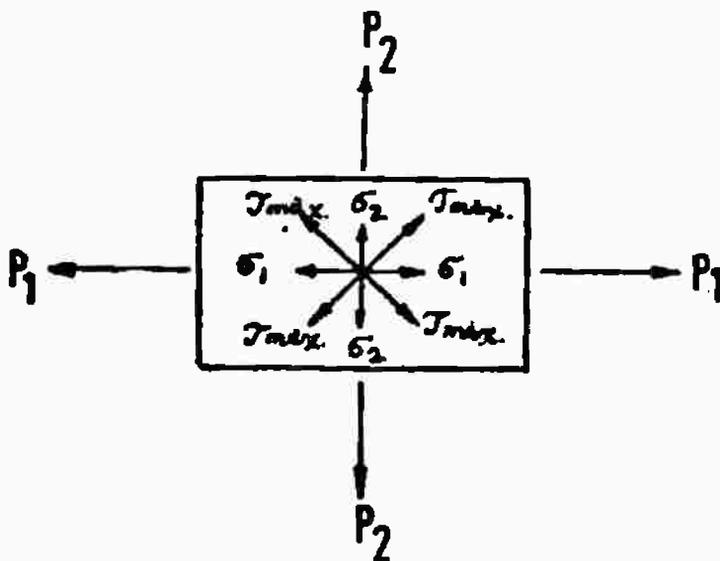
$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (19)$$

أى أن مجموع الإجهادات العمودية في أى اتجاهين متعامدين عند النقطة O يساوى مقداراً ثابتاً مساوياً لمجموع الإجهادين الرئيسيين عند هذه النقطة .

وبمراجعة المعادلة (١٨) نجد أن $\sin 2\theta$ تصل إلى نهايتها العظمى عندما تكون الزاوية θ مساوية 45° ، ومن ذلك نستنتج أن قيمة النهاية العظمى لإجهاد القص عند أى نقطة تساوى نصف الفرق بين الإجهادين الرئيسيين وتؤثر في اتجاه ينصف الزاوية بينهما . أى أنه يمكن كتابة المعادلة (١٨) في حالة النهاية العظمى لإجهاد القص كما يأتي :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (20)$$

ويوضح الشكل (٦١) توزيع الإجهادات الرئيسية والنهاية العظمى لإجهاد القص في حالة تأثير قوى الشد (P_1, P_2) في اتجاه محورين متعامدين . وباتباع نفس الطريقة في التحليل الرياضى يمكن إيجاد مقادير الإجهادات عند أى نقطة منسوبة إلى الثلاثة محاور الكارتيزية (x, y, z) بدلالة



(شكل ٦١)

الإجهادات الرئيسية التي يرمز لها بالرموز $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ على التوالي كما يلي :

$$\sigma_s = \sigma_1 \cos^2 \alpha C + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma \quad (21)$$

حيث $\alpha C, \beta, \gamma$

هي الزوايا التي يصنعها العمود على المستوى موضع الاعتبار مع اتجاه الإجهادات الرئيسية على التوالي .

وتتحول المعادلة (٢١) كما هو متوقع في حالة المستوى الذي يحتوي محورين فقط إلى المعادلة (١٦) التي سبق استنتاجها وذلك لأنه في هذه الحالة تكون

$$\cos \gamma = 0$$

$$\cos \beta = \sin \alpha C$$

وكذلك يمكن الحصول على مقدار إجهاد القص منسوباً إلى المحاور الكارثيزية الثلاثة طبقاً للمعادلة الآتية :

$$\tau = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha C + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma - (\sigma_1 \cos^2 \alpha C + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma) \quad (22)$$

وتتحول هذه المعادلة أيضاً إلى المعادلة (١٨) التي سبق استنتاجها في حالة المستوى الذي يحتوي على محورين فقط .

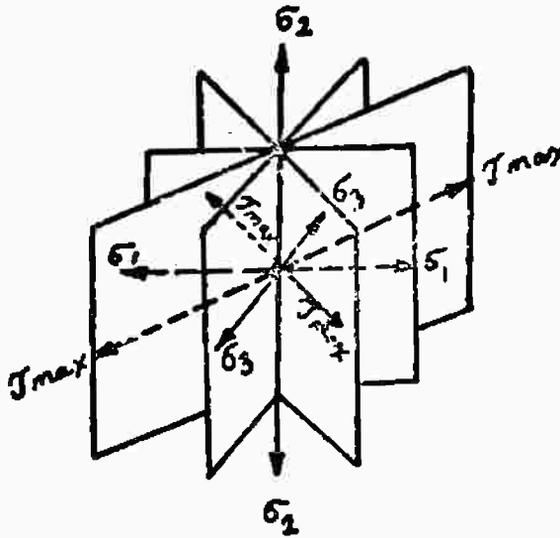
ومن المعادلة (٢٢) يمكن أن نستنتج أن الإجهاد القاص يصل إلى نهايته العظمى عندما يؤثر في المستوى الذي ينصف الزاوية بين الإجهادات الرئيسية ويساوي نصف الفرق بين الإجهادين الرئيسيين .

$$\tau = \pm \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) , \quad \tau = \pm \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) , \quad \tau = \pm \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1)$$

$$\tau_{\max} = \pm (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2$$

ويوضح الشكل (٦٢) الإجهادات الرئيسية والقاص منسوبة إلى المحاور

اطلاعة .

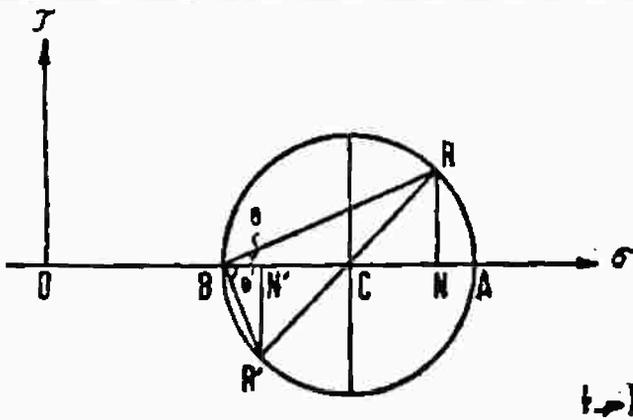
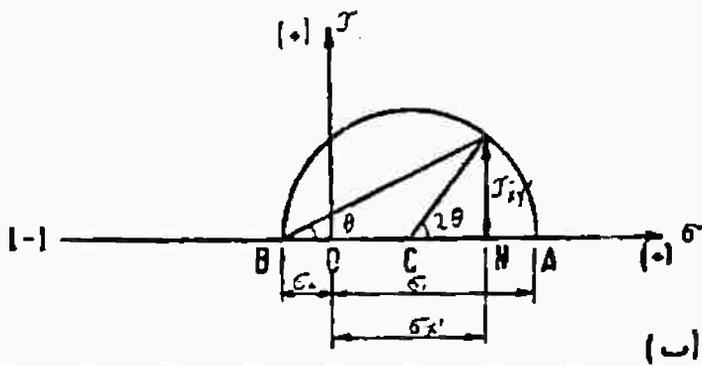
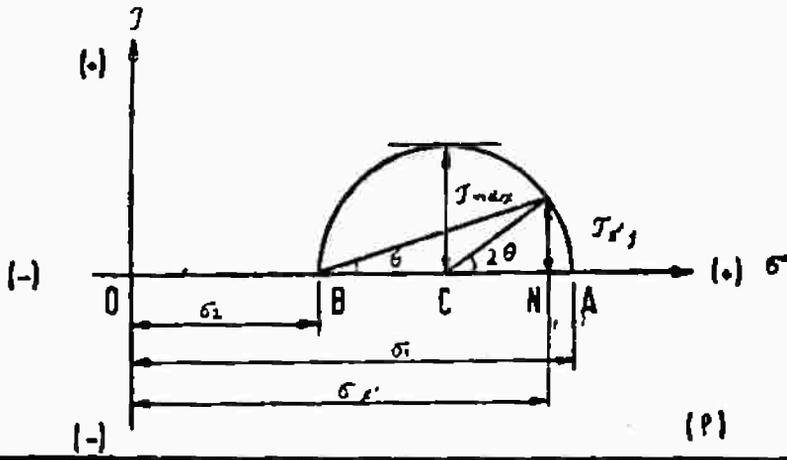


(شكل ٦٢)

دوائر موهر :

استطاع موهر إيجاد الإجهادات في أى اتجاه بواسطة دوائر عرفت باسمه وطريقة رسم هذه الدوائر موضحة بالشكل (٦٣) . ارسم الخطين OA , OB من أى نقطة O ليمثلا الإجهادين الرئيسيين σ_1 , σ_2 على التوالى شكل (٦٣ - ١) يمثل الحالة عندما يكون كل من σ_1 , σ_2 موجباً ، أما الشكل (٦٣ - ب) فيبين الحالة عندما يكون الإجهاد σ_1 موجباً و σ_2 سالباً . ارسم الدائرة التي تمر بالنقطتين (B , A) والتي مركزها C بالنظر إلى هذه الدائرة نجد أن نصف قطرها يساوى $\frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$ بينما القطر OC يساوى $\frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$ فإذا أردنا إيجاد قيمة الإجهادات التي تؤثر في أى اتجاه يصنع زاوية (θ) مع اتجاه الإجهادات الرئيسية فإننا نرسم الخط (BR) الذي يصنع زاوية مقدارها (θ) مع الخط (BA) ويقطع محيط الدائرة في نقطة (R) ثم نصل (CR) ونسقط العمود (RN) على الخط (AB) فيكون لدينا

$$ON = OC + CN = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$



(شکل ۱۲)

دوائر موهر

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة بالاستعانة بقوانين حساب المثلثات بصورة بسيطة كما يلي .

$$ON = \sigma_1 \cos^2 \theta + \sigma_2 \sin^2 \theta$$

فإذا قارنا هذه المعادلة بالمعادلة رقم (١٦) يمكن أن نستنتج أن الخط (ON) يمثل قيمة الإجهاد العمودي الذى يؤثر فى اتجاه يصنع زاوية مقدارها (θ) مع محور الإجهادات الرئيسية . أما إذا وقعت النقطة (N) على يسار النقطة (O) فإن (ON) يصبح مقدارها سالباً أى أنه إجهاد شد ولإيجاد إجهاد القص فى نفس الاتجاه نلاحظ أن

$$RN = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2 \theta$$

وبمقارنة هذه النتيجة بالمعادلة رقم (١٨) نجد أنها مطابقة لمقدار إجهاد القص .

وعلى ذلك يتبين أن هنا الحل الهندسى لإيجاد قيمة الإجهادات العمودية والقاصة فى أى اتجاه يصنع أى زاوية مطلوبة مع محاور الإجهادات الرئيسية يعرف باستخدام دوائر موهر . كما أنه يمكن بواسطة هذه الدوائر إيجاد مقادير الإجهادات الرئيسية إذا علم مقدار الإجهادات العمودية والقاصة منسوبة إلى أى محاور معروف اتجاهها بالنسبة للمحاور الرئيسية .

وبفضل دوائر موهر يمكن استنتاج كثير من صفات الإجهادات فى حالة المرونة ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

(أ) عندما تكون $\sigma_1 = \sigma_2$ أى عندما يتساوى مقدار الإجهادين الرئيسيين) فإن نصف قطر الدائرة يساوى صفراً وبالتالي لا يكون هناك إجهاد قص وذلك يتفق تماماً مع ما أمكن استنتاجه من المعادلة (١٨) .

(ب) من الشكل رقم (٦٣) نستطيع ملاحظة أن إجهاد القص (RN) يصل إلى نهايته العظمى عندما تكون الزاوية (θ) مساوية (45°) وهنا يصبح مقدار إجهاد القص مساوياً لنصف قطر الدائرة أى مساوياً المقدار $\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$

وذلك يؤكد مرة أخرى النتيجة التي سبق الحصول عليها من المعادلة (١٨) .

(ج) إذا رسمنا (BR') كما في الشكل (٦٣ - ج) يصنع زاوية (θ') بحيث تسم الزاوية (θ) وأسقطنا العمود (R' N') على الخط (AB) فإن (ON') يمثل الإجهاد العمودي على المستوى المتعامد مع المستوى الأصلي . (أى المستوى الذى يصنع زاوية مقدارها θ مع مستوى الإجهادات الرئيسية) . ومن الشكل (٦٣ - ج) يمكن أن نستنتج أن .

$$ON + ON' = 2 OC = \sigma_1 + \sigma_2$$

وهذه النتيجة تؤكد ما سبق أن حصلنا عليه من المعادلة (١٩)

(د) من دوائر موهر الموضحة بالشكل (٦٣) يمكن أن نستنتج أيضاً أن النهاية العظمى لإجهاد القص تكون عندما يؤثر هذا الإجهاد في منتصف الزاوية بين الإجهادات الرئيسية أى أن .

$$\begin{aligned} \tau_{max} &= \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned}$$

(هـ) يلاحظ في دوائر موهر أن قيمة الإجهادات القاصة الموجبة هي التي تحاول أن تجعل دوران الجسم في اتجاه عقرب الساعة أما السالبة فإنها تلك التي تجعله يدور في عكس اتجاه عقرب الساعة .

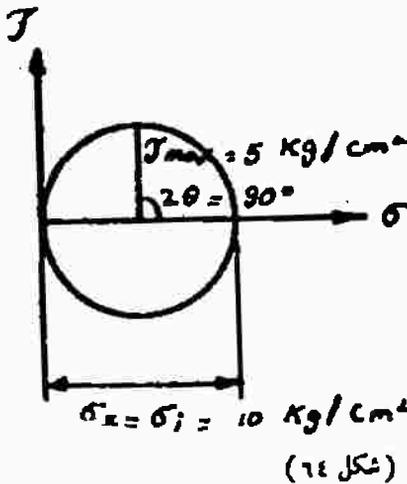
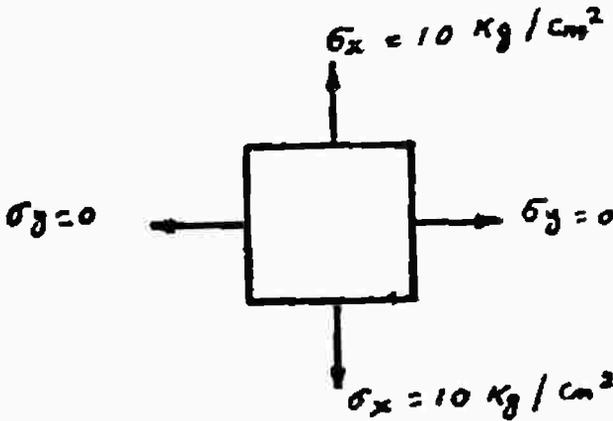
بعض الأمثلة المحلولة :

مثال ١ - تأثرت عينة من صخر لإجهادات كالموضحة بالشكل (٦٤ - أ) فإذا كانت مساحة مقطع العينة ١ سم^٢ ومقدار الإجهاد المؤثر في اتجاه (x - x) ١٠ كيلو جرام / سم^٢ فالمطلوب حساب مقدار النهاية العظمى لاجهاد القص واتجاهه .

الحل : ارسم المحاور $(x-x)$ التي يمثل محور الإجهادات العمودية ووضح مجال الإجهادات التي يتعرض لها مقطع العينة مستخدماً دوائر موهر كما في الشكل (٦٤ - ب) وبواسطة دوائر موهر يمكن استنتاج قيمة النهاية العظمى للإجهاد القص وهي تساوي σ كياو جرامات / سم^٢ وتصنع زاوية مقدارها

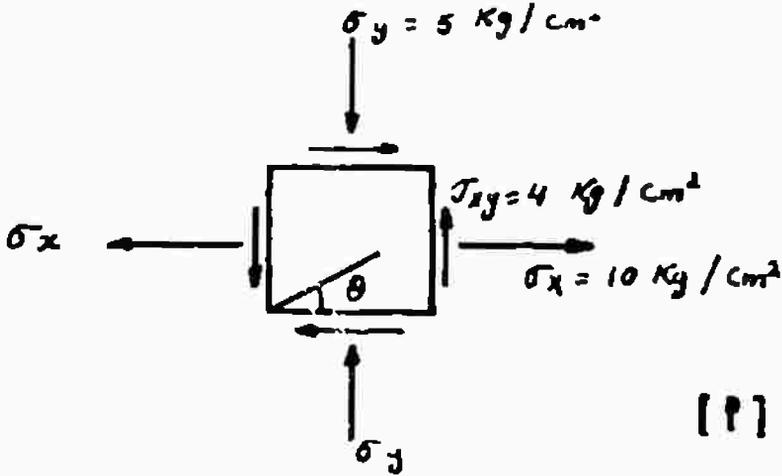
$$2\theta = 90$$

$$\theta = 45$$

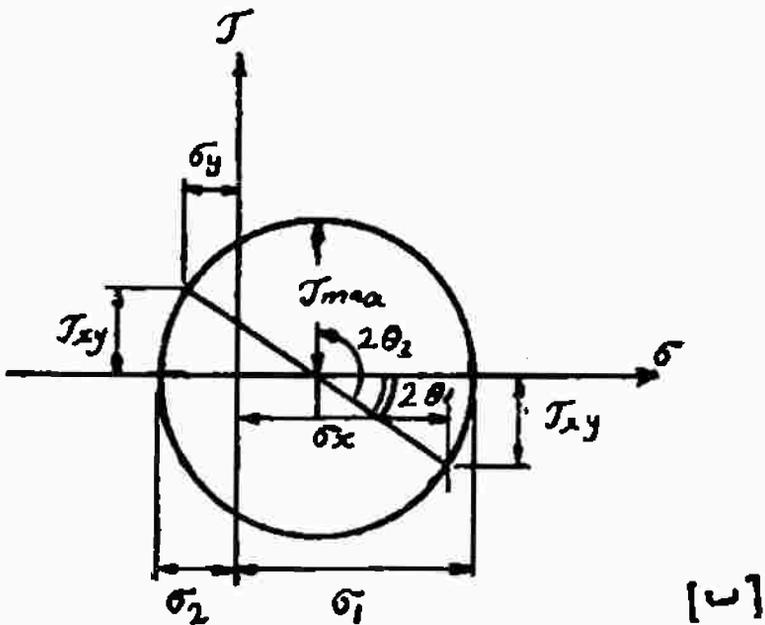


مثال ٢ : تعرضت عينة من صخر للإجهادات الموضحة بالشكل

(٦٥ - ١) . لما هو مقدار واتجاه الإجهادات الرئيسية وما هو مقدار النهاية للمغنى لإجهاد القص .



[٢]



[٣]

(شكل ٦٥)

الحل : من دوائر موهز الموضحة بالشكل (٦٥ - ب) نستطيع تحديد موقع المحاور الرئيسية كما نستطيع تحديد قيمة الإجهادات الرئيسية والنهاية العظمى لإجهاد القص .

وبقياس الزاوية $(2\theta_1)$ على الشكل يتضح أن قيمتها هي

$$2\theta_1 = 28,08^\circ$$

$$\theta_1 = 14,04^\circ$$

حيث الزاوية (θ_1) تمثل الزاوية التي يصنعها إجهاد القص الناتج عن مجال الإجهادات المثلثة بدوائر موهز .

وبقياس مقدار الإجهادات الرئيسية على الشكل يتضح أن

$$(\sigma_1) = 11,00 \text{ كيلو جرام/سم}^2 \text{ شد}$$

$$(\sigma_2) = 6,00 \text{ كيلو جرام/سم}^2 \text{ ضغط}$$

أما النهاية العظمى لإجهاد القص فتساوى $8,5$ كيلو جرام/سم²

ويقع في مستوى يصنع زاوية مقدارها (θ_2) مع المحور $(x-x)$

والتي يمكن قياسها من دائرة موهز الموضحة بالشكل حيث

$$2 = 2\theta_2 + (\theta_1) + 90$$

$$118,08 =$$

$$56,04 = \theta_2$$

تأثير الإجهادات على الصخور :

عندما تتعرض الصخور لتأثير الأحمال الخارجية المترتبة والتي لا ينتج عنها حركة خطية أو دورانية فإنها تعاني تغيراً في شكلها الأصلي أو في حجمها أو في الاثنين معاً ويطلق على هذا التغير « التشوه » وتتعرض الصخور لتأثير ضغوط رأسية ينتج عنها إجهادات عمودية كما تتعرض لضغوط عرضية « أفقية » وإجهادات قص . ويرجع السبب في نشأة هذه الضغوط غالباً إلى تأثير

الحركات الأرضية العنيفة التي تحدث على نطاق كبير وتسمى بالحركات التكتونية (Diastrophism)

وتنقسم هذه الحركات إلى نوعين رئيسيين :

(أ) الحركات البنائية للجبال (Orogenic Movements)

ويزداد فيها تأثير الإجهادات القاصة وينتج عنها تشوهات كبيرة بالصخور مما يؤدي إلى نشأة تراكيب ثانوية مثل الطيات والفوالق والفواصل .

(ب) الحركات البنائية للمرتفعات والمنخفضات

(Epirogenic Movements)

ويزداد فيها تأثير الإجهادات العمودية وتؤثر على مساحة كبيرة من صخور القشرة الأرضية مكونة المنخفضات والهضبات ولكن لا تنشأ عنها تغييرات هامة في شكل الصخور .

ومن أهم أسباب نشأة الإجهادات في صخور القشرة الأرضية ما يأتي :

١ - القوة الطاردة المركزية لدوران الأرض ، وما ينتج عنها من حركات تفاضلية نتيجة اختلاف الثقل النوعي للصخور المكونة للقشرة الأرضية والتي ينتج عنها إجهادات التواء (Torsion stresses) .

٢ - تسبب عوامل المد والجزر في ظهور ضغوط بصخور القشرة الأرضية ويرجع السبب في ظهور عوامل المد والجزر إلى اختلاف قوى جذب الشمس للأرض عندما تكون شمال أو جنوب خط الاستواء مما يسبب بعض الإجهادات التفاضلية المتكررة المجال والتي تتغير تدريجياً مقداراً واتجاهاً .

٣ - تأثير قوى الجاذبية الأرضية وما يصاحب ذلك من إجهادات مختلفة في الصخور.

٤ - تأثير الإجهادات التي تنتج من عوامل التآكل والتعرية وما يترتب على ذلك من نقل آلاف الأمتار المكعبة من فئات الصخور على هيئة مواد عالقة أو ذائبة بواسطة المياه الجارية أو الرياح أو التلاجات إلى الأحواض

الرسيبية في المحيطات والبحار والبحيرات والقارات وشواطئها ، وما يصاحب مثل هذه العمليات الجيولوجية من تغير في الاتزان الايزوستاتيكي ونشأة إجهادات بالصخور لاستعادة حالة الاتزان .

٥ - ذوبان كميات هائلة من الجليد بالمناطق القطبية عند ارتفاع درجة الحرارة وما يصاحب ذلك من حركات كتل هائلة من الجليد فتسبب إجهادات كبيرة في الصخور .

٦ - خروج كميات كبيرة من الحمم البركانية من فوهات البراكين والشقوق السحيقة من باطن الأرض إلى سطحها أو إلى قاع المحيطات والبحار ، وينشأ عن ذلك وجود فراغ في باطن الأرض يسبب ضغطاً كبيراً في صخور القشرة الأرضية كما يصاحب ذلك إجهادات حرارية .

٧ - تؤدي التغيرات الطبيعية والكيميائية التي تحدث في صخور القشرة الأرضية إلى ظهور إجهادات بالصخور ومن أمثلة هذه التغيرات : تغير المجال المغناطيسي للأرض في العصور الجيولوجية المختلفة ، وعمليات التجوية الكيميائية التي تؤدي إلى تحلل بعض المعادن المكونة للصخور وأكسلتها أو تميؤها إلى غير ذلك من التغيرات .

٨ - يسبب ضغط الطبقات العليا من صخور القشرة الأرضية إلى تماسك بعض أنواع الصخور الرسوبية ، كما تؤدي أحياناً إلى ارتفاع طبقات الملح ، أو الجبس أو الانهيدرايت نتيجة الانسياب اللدن الذي تمتاز به هذه الأنواع من الصخور . وتلعب عملية إذابة بعض أنواع الصخور مثل الصخور الجيرية بواسطة محاليل المياه المشبعة بثاني أكسيد الكربون دوراً هاماً في تكوين فجوات وكهوف كبيرة في الصخور تؤدي إلى نشأة ضغوط كبيرة فيها حولها من طبقات .

ثانياً - التشوهات

أنواع التشوهات في الصخور :

تعرض الصخور لثلاثة أنواع رئيسية من التشوهات :

(أ) التشوه المرن أو الانفعال (Elastic deformation)

(ب) التشوه اللدن (Plastic deformation)

(ج) التصدع أو الانهيار (Rupture)

١ - التشوه المرن أو الانفعال :

تسبب ظاهرتنا المد والجزر وسريان الموجات الزلزالية بصخور القشرة الأرضية رد فعل سريع يؤدي إلى تغيير مؤقت في شكل هذه الصخور وبمجرد زوال القوة المؤثرة تعود الصخور إلى حالتها الأولى ، ويعرف التشوه في هذه الحالة بالتشوه المرن أو الانفعال ومن البديهي أن مثل هذا التشوه المرن أو الانفعال لا يسبب نشأة تراكيب دائمة بالصخور .

ب - التشوه اللدن .

وتنشأ عنه تراكيب دائمة مثل الطيات وبعض أنواع الشقوق ، كما ينتج عنه تغيير في حجم الصخور وشكلها لا يزول بزوال القوة المؤثرة . وتعرض الطبقات الرسوبية بصفة تكاد تكون دائمة لعمليات الطي بالإضافة إلى انزلاق بعض الطبقات الواحدة تلو الأخرى في بعض الأحيان وخاصة في حالة الصخور التي تسلك سلوكاً انسيابياً لدناً قبل أن تصدع . ويمتاز السارك الانسيابي اللدن للصخور بأن مقدار التشوه الناتج عن تأثير الإجهادات يزداد بازدياد زمن التعرض لهذه الإجهادات دون زيادة في مقدارها وتسمى هذه الظاهرة « زحف الصخور » .

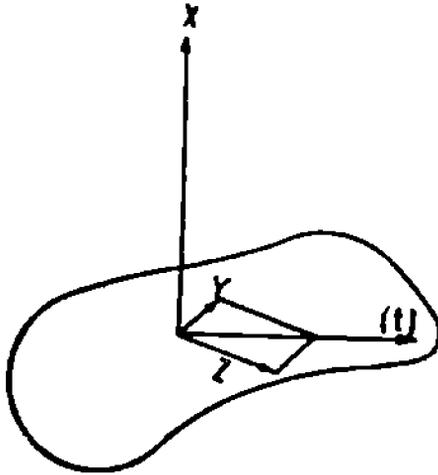
٢ - الصدع أو الانهيار :

قد يزداد تشوه الصخور لدرجة تزيد عن قوة مقاومتها الداخلية مما يؤدي إلى تصدعها على مستويات يختلف اتجاهها باختلاف مجال الإجهاد المؤثر ويطلق على هذه المستويات مستويات الصدع وتنشأ عن الصدع الفوالق والفواصل وبعض أنواع الشقوق الأخرى بالصخور . فإذا تحركت إحدى الكتل الصخرية حركة تفاضلية على أحد جانبي سطح الصدع فإن التركيب الناتج يعرف بالفالق ، أما إذا لم تحدث حركة تفاضلية على جانبي مستوى الصدع فإن الكسور الناتجة تعرف بالفواصل .

تحديد مقدار واتجاه التشوهات :

يمكن نسبة حركة الجزيئات الناتجة من التشوه إلى بعضها البعض فتكون عمودية إذا نتجت عن الحركة النسبية لجزيئين في اتجاه الخط الذي يصل بينهما أو قاصة إذا نتجت عن الحركة النسبية لجزيئين في الاتجاه العمودي على الخط الواصل بينهما . ويمكن التعبير عن التشوهات بواسطة الجمع بين هذين النوعين وذلك بنفس الطريقة التي اتبعت عند تحديد مقادير واتجاهات الإجهادات وذلك بأن نفترض مساحة متناهية في الصغر (δa) داخل الجسم الذي تعرض للتشوه ونعتبر العمود على هذه المساحة له الاتجاه (x) كما هو موضح بالشكل (٦٦) وبدراسة حركة الجزيئات في اتجاه أحد جانبي هذه المساحة بالنسبة للجزيئات الموجودة في الجانب الآخر نجد أنها تتكون من مركبتين إحداهما في الاتجاه (x) العمودي على المساحة (δa) والآخر في الاتجاه المماسي (t) ويمكن تحليل مقدار التشوه في الاتجاه (t) إلى مركبته في اتجاهين متعامدين بالمستوى وهما (y, z) .

ويقاس التشوه في الاتجاهين العمودي والمماسي بالحركة النسبية لجزيئين متقاربين واقعيين في الاتجاهين المتضادين للمستوى الذي تقع فيه المساحة (δa) التراكيب والحرائط الجيولوجية



(شكل ٦٦)

تحديد مقدار واتجاه التشوهات المرونة

ومقسوماً على المسافة بين هذين الجزئيين عندما تتضاءل كل من المساحة والمسافة حتى تصل إلى الصفر .

فاذا رمزنا للتشوه العمودي في الاتجاه (x) بالرمز (ϵ_x) وكانت $(\mu ; \mu')$ يمثلان المسافة الأصلية والمسافة بعد التشوه بين الجزئيين في الاتجاه الموازي للمحور (x) فإن التشوه يمكن التعبير عنه بالمعادلة الآتية :

$$\epsilon_x = \frac{\mu - \mu'}{\mu} \quad (23)$$

$$\mu' = \mu (1 + \epsilon_x) \quad (24)$$

ويتضح من المعادلة (٢٤) أن التشوهات التي يتسبب عنها استطالة تكون موجبة أما تلك التي ينتج عنها انكماش تكون سالبة . ويمكن التعبير عن التشوهات منسوبة للمحاور الكارتيزية بالمعادلات الآتية :

$$\epsilon_x = \frac{\delta_x}{\delta_x}$$

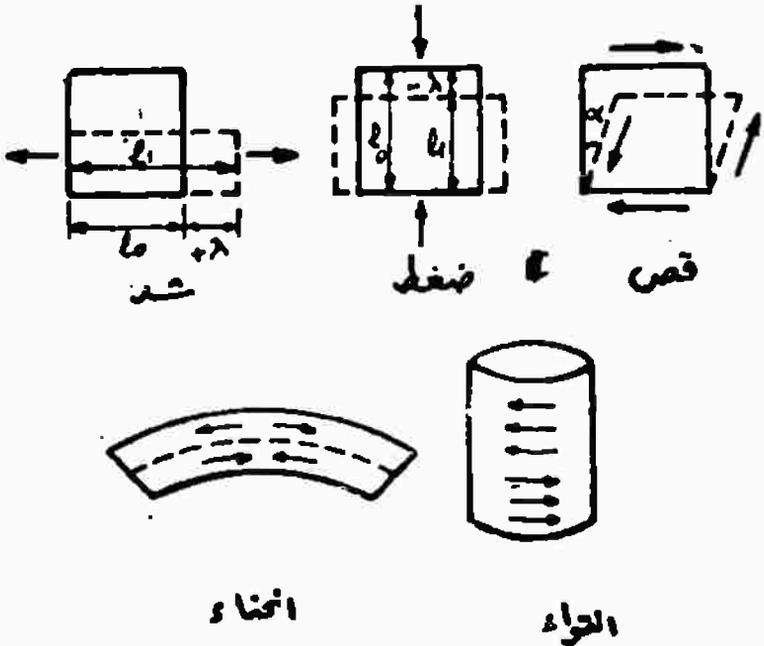
$$\epsilon_y = \frac{\delta_y}{\delta_y}$$

$$\epsilon_z = \frac{\delta_z}{\delta_z}$$

حيث (u, v, w) هي الحركة النسبية في اتجاه المحاور (x, y, z) على التوالي .

وتقاوم معظم أنواع الصخور بدرجات متفاوتة تأثير الإجهادات المسببة للتشوه . ويتوقف نوع التشوهات على نوع الإجهادات المؤثرة على الصخور ويوضح شكل (٦٧) بعض أنواع التشوهات التي تسببها الإجهادات البسيطة التي تؤثر على الصخور . ويتضح من الشكل وجود تشوه قاص يتبع عن تأثير لإجهادين متساويين في المقدار ومتضادين في الاتجاه ويتبع عنهما التشوه القاص الذي يسبب اختلافاً في الزاوية بين خطين كانا قبل التشوه متعامدين، ويبرز عادة للتشوه القاص بالنسبة للمحاور الكارتيزية (x, y, z) بالرموز $(\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$.

وبالرجوع إلى الشكل (٦٨) يتضح ان مقادير التشوهات القاصة يمكن



(شكل ٦٧)

بعض أنواع التشوهات التي تسببها الإجهادات البسيطة

التعبير عنها بالمعادلات الآتية بالنسبة للمستويات (xy , yz , zx) على التوالي:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\delta w}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta z} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

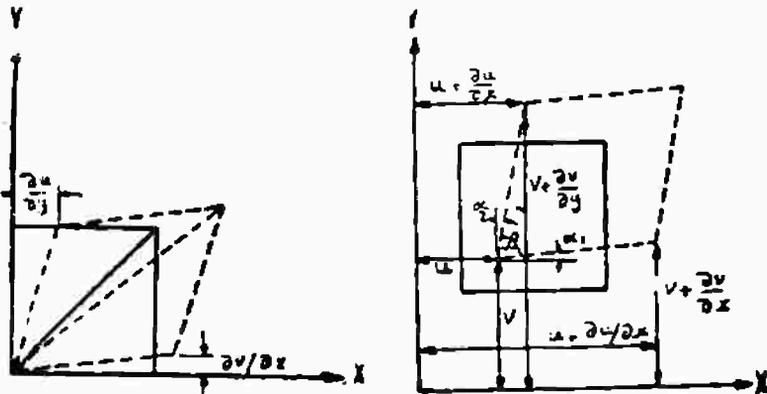
وذلك لأنه كما يتضح من الشكل أن التشوه المرن القاص في المستوى يمكن التعبير عنه كما يأتي :

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) \text{ (in radians)}$$

$$\gamma_{xy} = \alpha C_1 + \alpha C_2$$

$$\tan \alpha C_1 = \frac{\delta v / \delta x}{1 + (\delta u / \delta x)}$$

$$\tan \alpha C_2 = \frac{\delta u / \delta y}{1 + (\delta v / \delta y)}$$



(شكل ٦٨) تحديد مقدار التشوهات القاصة

لكن في حالة الزوايا الصغيرة التي تحدث نتيجة التشوهات المرنة يمكن اعتبار أن :

$$\tan \alpha_1 = \alpha_1 \quad \tan \alpha_2 = \alpha_2$$

ولما كانت المقادير $\frac{\delta u}{\delta x}$ ، $\frac{\delta v}{\delta y}$ صغيرة جداً وأقل بكثير من الواحد

الصحيح فإن مقدار التشوه المرن التماس في المستوى (xy)

$$\gamma_{xy} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y}$$

التشوهات المنتظمة :

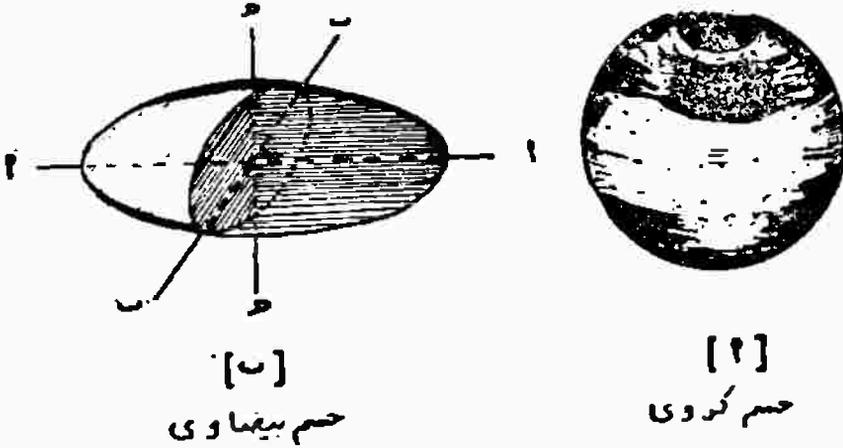
يمكن تحليل الإجهادات المؤثرة على الصخور في اتجاه المحاور الكارتيزية (x, y, z) فنحصل نتيجة لذلك على إجهادات ضغط أو شد ذات مقادير مختلفة في اتجاه هذه المحاور يرمز لها بالرمز $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$. كما نحصل على إجهادات قاصة يرمز لها بالرموز $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$

وفي كثير من الأحيان تنطبق هذه المحاور الكارتيزية مع محاور الإجهادات الرئيسية وفي حالة الصخور المتجانسة والمتشابهة الخواص « الايزوتروبية » تنطبق محاور الإجهادات الرئيسية مع محاور التشوهات وفي هذه الحالة يمكن التعبير عن التشوهات بحجم بيضاوي للتشوهات (Strain ellipsoid) .

فإذا تصورنا جسمًا كروبيًا كالموضح بالشكل (٦٩ - ١) قبل تأثير الإجهادات عليه فلذا تعرض لتأثير قوى شد أو ضغط مختلفة المقدار وفي اتجاه ثلاثة محاور متعامدة مركزها هو مركز الكرة فإنها سوف تتشوه ويصبح لها شكل بيضاوي كالموضح بالشكل (٦٩ - ب) ويمثل التغير في أطوال محاور الشكل البيضاوي مقدار التشوه النسبي في اتجاه هذه المحاور .

ويقال إن التشوه منتظم إذا كانت جميع مقاطع الكرة قد تشوهت بانتظام وكانت المحاور الرئيسية في اتجاه ثابت في جميع أجزاء الكرة . ويقال إن

التشوه غير منتظم إذا اختلف مقدار التشوه وكذلك إذا اختلف اتجاه المحاور من مقطع لآخر - وتحدث التشوهات غير المنتظمة عادة في الصخور نحت تأثير إجهادات الانحناء أو الالتواء ، بينما التشوهات المنتظمة تحدث نحت تأثير إجهادات الشد أو الضغط .



(شكل ١٩)

بيضاوى التشوهات

خصائص التشوهات المرنة أو الانفعالات :

إذا فرضنا وجود مستطيل (OAPB) موضوع في نقطة الأصل O ، كما هو موضح بالشكل (٧٠) فإذا كانت مقادير التشوهات المرنة هي $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ فإن هذا المستطيل سوف يأخذ الشكل OA' P' B' حيث

$$OA' = OA (1 + \epsilon_x)$$

$$OB' = OB (1 + \epsilon_y)$$

$$BOB' = \gamma_{xy} \quad (\text{In radians})$$

وحيث إن الزاوية BOB' صغيرة جداً فإنه يمكن إثبات أن

$$\gamma_{xy} = \sin BOB' = \cos A'OB'$$

فإذا رمزنا للاتجاه (OP) بالرمز (x') فإن مقدار التشوه في الاتجاه

(x') يمكن الحصول عليه كما يأتي :

$$OP' = OP (1 + \epsilon'_x)$$

$$(OP')^2 = (OA')^2 + (OB')^2 + 2 (OA') (OB') \cos A'OB'$$

فإذا عوضنا عن OP' ، OB' ، OA' بالمقادير التي تساويها نحصل على المعادلة الآتية بعد حذف مقادير التشوه المرفوعة إلى أس أكبر من الواحد الصحيح

$$2 OP' \epsilon'_x = 2 \epsilon_x OA^2 + 2 \epsilon_y OB^2 + 2 \gamma_{xy} (OA) (OB)$$

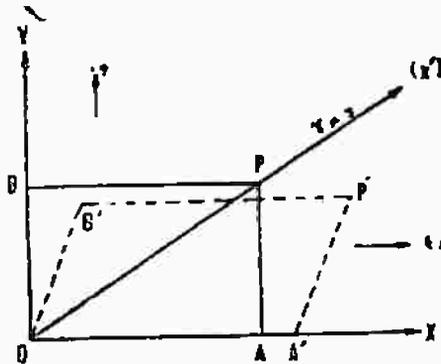
وحيث إن

$$\frac{OA}{OP} = \cos \theta \quad , \quad \frac{OB}{OP} = \sin \theta$$

$$\therefore \epsilon'_x = \epsilon_x \cos^2 \theta + \epsilon_y \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2 \theta \quad (26)$$

فإذا قارنا هذه المعادلة بالمعادلة رقم (٩) الخاصة بالإجهاد العمودي نجد أنها نفس المعادلة فيما عدا المعامل ($\frac{1}{2}$) الذي يظهر في الحد الثالث من المعادلة (٢٦) ويرجع ذلك إلى ما سبق ذكره من أن التشوه القاص لا ينتج إلا من إجهادين متساويين في المقدار ومتضادين في الاتجاه . وبالمثل يمكن إثبات أن

$$\epsilon'_y = \epsilon_x \sin^2 \theta + \epsilon_y \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2 \theta \quad (27)$$



(شكل ٧٠)

خصائص التشوهات

الاتجاه الذى يساوى فيه التشوه القاص صفرأ :

ارسم المستقيمين (OA , OB) المتساويين والمتعامدين والواقعين فى المستوى (xy) وافرض أن طولهما يساوى (a) كما هو موضح بالشكل (٧١) ثم نفرض أن المثلث (OAB) قد اتخذ الشكل (OA'B') بعد التشوه وأن مقادير التشوه هى $(\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy})$ ولكى يكون مقدار التشوه القاص مساوياً للصفر يجب أن تغل الزاوية A'O'B' قائمة بعد التشوه :

$$OA' = OA (1 + \epsilon_x)$$

$$(OA')^2 = a^2 (1 + 2 \epsilon_x)$$

$$(OB')^2 = a^2 (1 + 2 \epsilon_y)$$

$$(AB')^2 = 2a^2 (1 + 2 \epsilon_y)$$

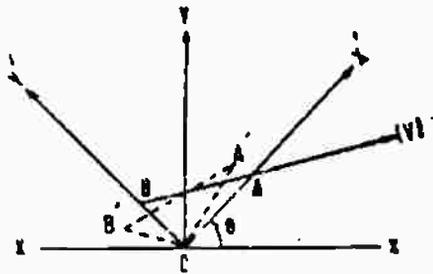
حيث (ϵ_v) هى مقدار التشوه فى الاتجاه (v) الموضح بالشكل .
فإذا ظلت الزاوية A'O'B' قائمة فإن

$$(A'B')^2 = (OA')^2 + (OB')^2$$

وبالتعويض نحصل على

$$2 \epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y$$

ولكن الاتجاه (v) يميل بزاوية 45° على الاتجاه (x) ولذلك فإنه



(شكل ٧١)

الاتجاه الذى يساوى فيه التشوه القاص صفرأ

يمكن التحويل عن الزاوية (θ) في المعادلة (٢٦) بالزاوية $(\theta - 45^\circ)$ فنحصل على المعادلة الآتية :

$$\epsilon(v) = \epsilon_x \cos^2(\theta-45) + \epsilon_y \sin^2(\theta-45) + \frac{1}{2} \gamma_{xy} \sin 2(\theta-45)$$

وبالاستعانة بالمعادلتين (٢٦ ، ٢٧) وبنفس الطريقة التي اتبعت عند استنتاج المعادلة (١٢) يمكن إثبات أن

$$\tan 2 \theta = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$

وهكذا يتضح أنه : كما هو الحال عند دراسة الإجهادات ، مهما كانت قيمة التشوهات ϵ_x ، ϵ_y ، γ_{xy} فإنه يوجد دائماً اتجاهان متعامدان هما $(\theta + 90)$ ، (θ) يمكن بواسطتهما حل المعادلة (٢٨) حيث تكون قيمة التشوهات القاصة مساوية للصفر وهذان الاتجاهان هما محورا التشوهات الرئيسية ويطلق على التشوهات في هذين الاتجاهين التشوهات الرئيسية . فإذا اتخذنا هذين الاتجاهين محورين أساسيين فإننا نجد التشوهات العمودية في أى اتجاه يمكن الحصول عليها منسوبة إلى هذين المحورين . وبنفس الطريقة التي اتبعت في حالة الإجهادات للحصول على المعادلة (١١) يمكن إثبات أن

$$\gamma_{xy} = (\epsilon_x - \epsilon_y) \sin 2 \theta \quad (29)$$

وكما هو الحال عند دراسة الإجهادات نجد أن قيمة هذا التشوه القاص تبلغ نهايتها العظمى عندما يصل مقدار الزاوية (θ) إلى (45°) ويمكن التعبير عن التشوه العمودى في الاتجاه الذى يصنع زاوية (θ) مع المحور الرئيسى للاتصالات بالمعادلة الآتية :

$$\epsilon_x = \epsilon_r \cos^2 \theta + \epsilon_t \sin^2 \theta \quad (30)$$

ويمكن مقارنة هذه المعادلة بمثلتها في حالة الإجهادات بالمعادلة رقم (١٦) . هذا ويمكن استخدام دوائر موهر لتحديد التشوهات بنفس الطريقة التي اتبعت عند تحديد الإجهادات كما هو موضح بالشكل (٦٣) فإذا رسمنا

(OA) مساوياً التشوه (ϵ_x) ، (OB) مساوياً التشوه ϵ_y ثم أتممنا رسم دائرة موهز كما هو الحال في الإجهادات نجد أن الفرق الوحيد بين الحالتين هو أن الطول (RN) العمودي على قطر الدائرة والذي يمثل الإجهاد القاص τ_{xy} يمثل الآن في حالة التشوهات نصف قيمة التشوه القاص γ_{xy} . أما باقي قيمة التشوهات فتظهر في دوائر موهز كما هو الحال في الإجهادات فمثلا التشوه العمودي في الاتجاه (θ) يمثل المستقيم (ON) أى أن $\epsilon_x = ON$

ثالثاً-العلاقة بين الاجهادات والتشوهات المرنة «الانفعالات»

المعادلات العامة لقانون هوك :

يؤكد قانون هوك أن التشوهات التي تطرأ على الأجسام في حالة المرونة تتناسب تناسباً طردياً مع الإجهادات التي تؤثر على هذه الأجسام . وعلى ذلك ترتبط المركبات الستة للإجهادات عند أى نقطة في جسم مرن بمركبات التشوهات الستة التي تحدث عند هذه النقطة نتيجة تأثير هذه الإجهادات . ويمكن التعبير رياضياً عن قانون هوك بالمعادلات العامة الآتية :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= C_{11}\epsilon_x + C_{12}\epsilon_y + C_{13}\epsilon_z + C_{14}\gamma_{xy} + C_{15}\gamma_{yz} + C_{16}\gamma_{zx} \\ \sigma_y &= C_{21}\epsilon_x + C_{22}\epsilon_y + C_{23}\epsilon_z + C_{24}\gamma_{xy} + C_{25}\gamma_{yz} + C_{26}\gamma_{zx} \\ \sigma_z &= C_{31}\epsilon_x + C_{32}\epsilon_y + C_{33}\epsilon_z + C_{34}\gamma_{xy} + C_{35}\gamma_{yz} + C_{36}\gamma_{zx} \\ \tau_{xy} &= C_{41}\epsilon_x + C_{42}\epsilon_y + C_{43}\epsilon_z + C_{44}\gamma_{xy} + C_{45}\gamma_{yz} + C_{46}\gamma_{zx} \\ \tau_{yz} &= C_{51}\epsilon_x + C_{52}\epsilon_y + C_{53}\epsilon_z + C_{54}\gamma_{xy} + C_{55}\gamma_{yz} + C_{56}\gamma_{zx} \\ \tau_{zx} &= C_{61}\epsilon_x + C_{62}\epsilon_y + C_{63}\epsilon_z + C_{64}\gamma_{xy} + C_{65}\gamma_{yz} + C_{66}\gamma_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

حيث $C_{11}, C_{12}, C_{13}, \dots$ عبارة عن المعاملات التي تمثل ثوابت المرونة للجسم وحيث إن هذه الثوابت ترتبط بالعلاقة

$$Crs = Csr$$

$$r,s = (1, 2 \dots \dots \dots 6)$$

حيث

فإن عدد المعادلات الستة والثلاثين الموضحة في المعادلات العامة لقانون هوك تختصر إلى ٢١ فقط . أى، أنه في الحالة العامة مثل حالة البلورات غير المتجانسة وغير المتشابهة الخواص (غير ايزوتروبية) ينبغي تحديد ٢١ ثابتاً مرناً لكي يمكن الوصول إلى العلاقة بين الإجهادات والتشوهات وتحديدتها تحديداً كاملاً في الأجسام التي تتعرض لها . ولكن للأعراض العملية يكفي دراسة حالة الأجسام المتجانسة والمتشابهة الخواص « الايزوتروبية » وهذا يجعل عدد المعاملات يختصر إلى اثنين فقط . ويرجع السبب في نقص عدد هذه المعاملات إلى خواص الأجسام المرنة المتجانسة والمتشابهة الخواص الموضحة فيما يلي :

(ا) الإجهاد العمودي الذي يؤثر على مثل هذه الأجسام لا ينتج عنه إجهاد قص لنفس المحاور المنسوب إليها الإجهاد العمودي .

(ب) إجهاد القص لا ينتج عنه إجهاد ضغط أو شد بالنسبة لنفس المحاور .

(ج) إجهاد القص لا ينتج عنه تشوهات قاصة إلا في المستوى الذي يؤثر فيه .

ومن هذه الحقائق التي أمكن إثباتها بواسطة التجارب المعملية يمكن إعادة كتابة المعادلات العامة لقانون هوك بالنسبة لهذه الأجسام كما يلي :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= F_1 (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \\ \epsilon_y &= F_2 (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \\ \epsilon_z &= F_3 (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z) \\ \gamma_{xy} &= F_4 (\tau_{xy}) \\ \gamma_{yz} &= F_5 (\tau_{yz}) \\ \gamma_{zx} &= F_6 (\tau_{zx}) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

وللحصول على مقدار التشوه المرن في اتجاه المحور $(x \cdot x)$ يمكن كتابة المعادلة الأولى من المعادلات (٣٢) في الصورة الآتية :

$$\epsilon_x = \alpha C_1 \sigma_x + \alpha C_2 \sigma_y + \alpha C_3 \sigma_z \quad (33)$$

حيث يرمز لمعاملات المرونة بالرموز $(\alpha C_1, \alpha C_2, \alpha C_3)$ وحيث إن المادة متجانسة وأيزوتروبية فإن تأثير الإجهاد (σ_y) على الانفعال (ϵ_x) يساوي تأثير الإجهاد (σ_z) على الانفعال (ϵ_x) ، وعلى ذلك فإن $\alpha C_2 = \alpha C_3$ ولقد ثبت أيضاً من التجارب العملية أنه إذا تعرض جسم مرن لإجهاد بسيط في اتجاه واحد سواء كان إجهاد شد أو ضغط ، فإنه يتشوه في نفس اتجاه الإجهاد ويتناسب التشوه الذي يحدث لهذا الجسم مع مقدار الإجهاد المؤثر عليه .

أى أنه إذا كان الإجهاد العمودى (σ_y) هو الإجهاد الوحيد الذى يؤثر على جسم مرن فإن مقدار التشوه الذى يحدث في هذا الجسم يمكن الحصول عليه من المعادلة الآتية :

$$\sigma_x = E \epsilon_x \quad (34)$$

حيث E مقدار ثابت يعرف بمعامل بينج (Youngs Modulus) أو معامل المرونة . وما كان التشوه في هذه الحالة عبارة عن نسبة بين طولين ، أى مقدار ليست له وحدات فإنه يمكن استنتاج أن وحدات معامل المرونة يجب أن تكون لها نفس وحدات الإجهاد (σ_y) أى كجم / سم^٢ أو رطل / بوصة^٢ . ولقد أثبتت التجارب العملية أيضاً أنه إذا تعرض جسم مرن لإجهاد أحادى بسيط « سواء كان شد أو ضغط » فإنه يتشوه في اتجاه الإجهاد وكذلك في الاتجاهات العمودية على اتجاه الإجهاد . أى أنه إذا تأثرت أسطوانة تحت تأثير إجهاد شد في اتجاه المحور فإنها تتمدد في هذا الاتجاه كما أن قطرها سوف يقل في الاتجاهات العمودية على المحور وبالمثل يقل طول هذه الأسطوانة إذا تعرضت لإجهاد ضغط في الاتجاه المحورى ويزداد قطرها في الاتجاهات العمودية على المحور . ولقد أثبت بواسون « Poisson » من تجاربه العملية أن مقدار التشوه العمودى

على اتجاه الإجهاد يتناسب تناسباً طردياً مع مقدار الإجهاد كما أنه يختلف معه في الإشارة . ولذلك فإنه إذا تعرض جسم الإجهادات (σ_x) فقط فإنه يتشوه في الاتجاهات العمودية على المحور (x) ويمكن الحصول على مقادير التشوهات الناتجة من المعادلة الآتية :

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\mu \epsilon_z = -\frac{1}{m} \epsilon_z \quad (35)$$

ويطلق على المعامل (μ) نسبة بواسون وهي النسبة بين مقدار التشوه في الاتجاه العمودي على الإجهاد إلى مقدار التشوه في اتجاه الإجهاد . كما يطلق على المعامل (m) رقم بواسون . وعلى ذلك فإن قيمة المعاملات الواردة بالمعادلة (٣٣) هي كما يأتي :

$$\alpha\alpha_2 = \alpha\alpha_3 = -\frac{\mu}{E} = -\frac{1}{mE} \quad (36)$$

ويمكن التعبير عن التشوهات المرنة في الاتجاهات (x, y, z) من المعادلات الآتية :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \frac{1}{m} (\sigma_y + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_z) \right] = \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \frac{1}{m} (\sigma_x + \sigma_y) \right] = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

معامل الحجمية :

لقد أثبت التجارب العملية أنه إذا تعرض جسم مرن لإجهاد قص (τ_{xy}, τ_{yx}) فإن هذا الجسم يحدث به تشوه قاص γ_{xy} ، وأنه يوجد

تناسب طردى بين مقدار الإجهاد القاص والتشو القاص يمكن التعبير عنه بالمعادلات الآتية :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ويطلق على المعامل (G) معامل الجمودة كما يطلق على مجموعة المعادلات (٣٨) معادلات الجمودة ، ويلاحظ أن معامل الجمودة له نفس وحدات الإجهاد كجم / سم^٢ أو رطل / بوصة^٢ . وبالرجوع إلى المعادلات (٣٧) نجد أن المجموع الجبرى للتشوهات العمودية في اتجاه المحاور الثلاثة يساوى

$$\begin{aligned} \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \left(\frac{m-2}{mE} \right) \\ &= (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \left(\frac{1-2\mu}{E} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

فإذا كانت الإجهادات العمودية المؤثرة على الجسم متساوية أطلق على حالة الإجهادات الحالة المبدروستاتيكية للإجهادات ويكون المتوسط (σ_{mean}) مساوياً لما يأتى :

$$\sigma_{\text{mean}} = 1/3 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (40)$$

ويلاحظ أن إجهاد القص في مثل هذه الحالة يساوى صفراً .

إذا تصورنا مكعباً حجمه (V) يساوى الوحدة تعرض لإجهادات أدت إلى تشوئه فصار حجمه (V + ΔV)

$$V + \Delta V = (1 + \epsilon_x) (1 + \epsilon_y) (1 + \epsilon_z) \\ = 1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \dots$$

فإذا أهملنا مقدار التشوهات المرفوعة للدرجة تزيد عن الواحد الصحيح نحصل على المعادلة الآتية :

$$\Delta V = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

وبالاستعانة بالمعادلة (٣٩) ، (٤٠) نحصل على ما يأتي :

$$\Delta V = \frac{3}{E} \left(\frac{m-2}{m} \right) \sigma_{\text{mean}} \\ = \frac{3}{E} (1 - 2\mu) \sigma_{\text{mean}}$$

ويطلق على القيمة $\frac{3}{E} \left(\frac{m-2}{m} \right) \sigma_{\text{mean}}$ أو $\frac{3}{E} (1-2\mu) \sigma_{\text{mean}}$

نسبة الانضغاط أو التمدد الحجمي كما يطلق على مقابل هذه القيمة معامل التمدد الحجمي «Bulk's modulus»

$$C = \frac{mE}{3(m-2)} = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

حيث معامل التمدد الحجمي C

ومن هذه المعادلة يمكن أن نستنتج حدرد نسبة بواسون أو رقم بواسون بالنسبة للأجسام المرنة .

$$\infty \geq m \geq 2 \quad 0 \leq \mu \leq 0.5$$

وذلك لأنه إذا كانت $\mu > 0.5$ فإن حجم المكعب يزداد تحت تأثير الضغط وهنا محال ، كذلك إذا كانت $\mu < 0$ نحصل على تمدد في الاتجاه العمودي على المحور $(x-x)$ الذي يؤثر فيه إجهاد شد مواز لهذا المحور وهنا أيضاً محال بالنسبة للأجسام المرنة المتجانسة والمتشابهة (الايزوتروبية) .

وإنه يمكن الحصول على قيمة معامل الانضغاط بالنسبة لكثير من المواد بدقة كبيرة وهي تحت تأثير ضغوط كبيرة . كما أمكن تحديد معامل ينح ومعامل الجمونة بواسطة التجارب العملية التي أجراها كثير من الباحثين ؛ أما نسبة بواسون فإنها تحتاج إلى تجارب أكثر تعقيداً للحصول على مقدارها . ويمكن قياس قيمة نسبة بواسون مباشرة ولكن نتائج القياس غالباً ما تكون غير دقيقة نتيجة صغر التشوهات المرنة التي يتحتم قياسها بدقة كبيرة ، ولذلك نستخدم في كثير من الأحيان الطرق الضوئية في عمليات القياس للحصول على نتائج دقيقة لنسبة بواسون .

وما نعلم يتضح أن عدد ثوابت المرونة اللازم تحديدها لمعرفة مجال الإجهادات والتشوهات المرنة هي :

(E) معامل المرونة «معامل ينح»

(G) معامل الجمونة

(μ) نسبة بواسون

وهذه الثوابت ليست مستقلة بعضها عن بعض ولكنها ترتبط بعلاقات رياضية بحيث يمكن إيجاد قيمة كل منها بدلالة الاثنين الآخرين كما يأتي .

$$E = 2G(1 + \mu) , G = \frac{E}{2(1 + \mu)} , \mu = \frac{E - 2G}{2G}$$

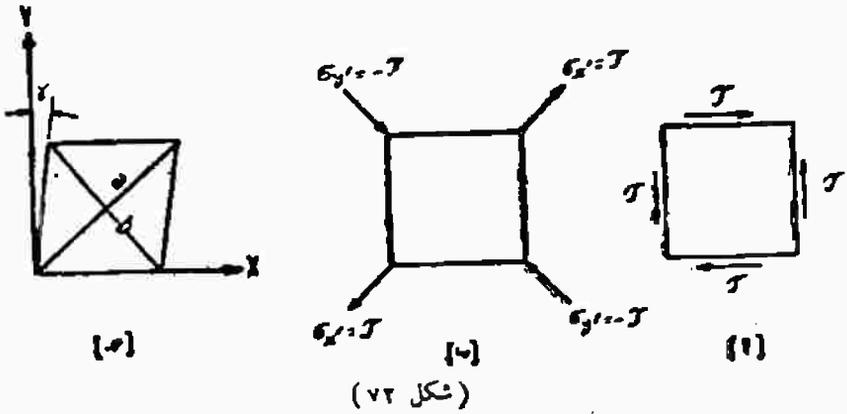
العلاقة بين التشوهات القاسية والعمودية :

إذا فرضنا مربعاً طول ضلعه يساوي الوحدة كما أوضح بالشكل (٧٢ - ١) تعرض لإجهاد قص (τ) فقط .

بالرجوع إلى دوائر موهر لتمثيل مجال الإجهادات نجد أن إجهاد القص يكفي لإجهادين متعامدين أحدهما شد والآخر ضغط ويؤثران بزاوية تصنع 45° مع إتجاه إجهاد القص كما هو موضح بالشكل (٧٢ - ب)

$$\sigma_x = \tau$$

$$\sigma_y = -\tau$$



العلاقة بين التشوه الفاس والممدود

فإذا كان طول ضلع المربع قبل التشوه يساوي الوحدة ، فإن قطري المربع بعد التشوه يصير

$$a^2 = (1 + 1 \sin \gamma)^2 + 1^2$$

$$= (1 + \gamma) + 1$$

$$b^2 = (1 - \gamma)^2 + 1$$

وبحذف المقادير التي تزيد في رتبها عن الواحد الصحيح

$$a = \sqrt{1 + 2\gamma + \gamma^2 + 1} = \sqrt{2 + 2\gamma} = \sqrt{(1 + \gamma) \times 2}$$

$$= \sqrt{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \right)$$

ولكن طول قطر المربع قبل التشوه يساوي $\sqrt{2}$ وعلى ذلك يمكن أن نستنتج أن مقدار التشوه في الاتجاه (x)

$$\epsilon_x' = \frac{\sqrt{2} \left(1 + \frac{\gamma}{2} \right) - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2}$$

$$\epsilon_y' = -\frac{\gamma}{2} \quad (42)$$

ولكن من المعادلات (٣٧) يمكن أن نستنتج مقدار التشوه العمودي في المستوى (xy)

$$\epsilon_x' = \frac{1}{E} (\sigma_x' - \mu \sigma_y') = \frac{\tau}{E} (1 + \mu) \dots (43)$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{ولكن من معادلات الجسمنة (٣٨)}$$

$$\therefore \epsilon_x' = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{2G} = \frac{\tau}{E} (1 + \mu)$$

$$\therefore G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

وهكذا يتضح كما سبق أن ذكرنا أن الثوابت (E, G, μ) ترتبط ببعضها. فإذا أخذنا في الاعتبار حدود نسبة بواسون التي سبق استنتاجها فإنه يمكن إثبات ما يأتي :

$$\frac{E}{2} > G > \frac{E}{3}$$

وتوضح هذه العلاقة حدود معامل الجسمنة بالنسبة للأجسام المرنة .

دالة الاجهادات (دالة إيرى) Airy's Function

تمكن عالم الرياضيات إيرى «Airy» من استنتاج دالة للاجهادات يمكن بواسطتها تحديد مجال الاجهادات وذلك بالاستعانة بمعادلات الاتزان والشروط .

وتتكون هذه الدالة من معادلة تفاضلية من الدرجة الرابعة بالنسبة لـ x وبالاجهادات في المستوى وستة معادلات تفاضلية من الدرجة الرابعة بالنسبة للحالة العامة للاجهادات المنسوبة للمحاور الثلاثة «إكارتيزية» .

معادلات اتزان الاجهادات في المستوى في حالة عدم وجود قوى داخلية

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} &= 0 \\ \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

ولكن سبق أثبات

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\delta u}{\delta x} \quad \text{و} \quad \delta y = \frac{\delta v}{\delta y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\delta v}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} \\ \frac{\delta^2 \epsilon_x}{\delta y^2} &= \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta y^2} \quad \text{و} \quad \frac{\delta^2 \epsilon_y}{\delta x^2} = \frac{\delta^3 v}{\delta y \delta x^2} \quad \text{و} \quad \frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^3 v}{\delta y \delta x^2} + \frac{\delta^3 u}{\delta x \delta y^2} \end{aligned}$$

ومن ذلك نستنتج أن

$$\frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 \epsilon_y}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \epsilon_x}{\delta x^2}$$

وبالاستعانة بالمعادلتين (٣٧) ، (٣٨) يمكن إعادة كتابة هذه المعادلة

بالصورة الآتية :

$$-2 \frac{\delta^2 \tau_{xy}}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 \sigma_x}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \sigma_y}{\delta x^2} = \mu \left(\frac{\delta^2 \sigma_x}{\delta x^2} + 2 \frac{\delta^2 \tau_{xy}}{\delta x \delta y} + \frac{\delta^2 \sigma_y}{\delta y^2} \right) \quad (46)$$

فإذا اخترنا الآن دالة ولتكن ϕ بحيث يكون

$$\sigma_x = \frac{\delta^2 \phi}{\delta y^2} \quad , \quad \sigma_y = \frac{\delta^2 \phi}{\delta x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = \frac{\delta^2 \phi}{\delta x \delta y} \quad (47)$$

ϕ ونستطيع أن نبين أن معادلات الاتزان (٤٥) تتحقق لكل قيم ϕ

وبالرجوع إلى المعادلتين (٤٦) ، (٤٧) وبعد إجراء عمليات التبويض

نحصل على معادلة الاجهادات كما يأتي :

$$\frac{\delta^4 \phi}{\delta x^4} + 2 \frac{\delta^4 \phi}{\delta x^2 \delta y^2} + \frac{\delta^4 \phi}{\delta y^4} - 0 = \nabla^4 \phi \quad (48)$$

حيث ϕ هي دالة الاجهادات أو دالة إيرى «Airy»

$$\nabla^2 \text{ يرمز للتفاضل الجزئي } \left(\frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} \right)$$

وحيث إن المعادلة (٤٧) تحقق كلا من معادلات الاتزان (٤٥) ومعادلة مجال الاجهاد (٤٦) فإن أى حل يمثل توزيع الاجهادات في الجسم المرن σ ويمثل حل هذه المعادلة مسألة بعينها يجب زيادة على ذلك أن تحقق المعادلة الشروط التي نختارها لحل هذه المسألة .

طاقة التشوهات في الصخور المرنة :

إذا تعرض صخر من لتأثير قوى خارجية أو داخلية فإنه يتشوه أى تتحرك جزيئاته حركة تتناسب مع مقدار القوى المؤثرة عايه . ويرتبط مقدار هذه الحركة «الإزاحة» بقيمة الثوابت الطبيعية والميكانيكية في الصخر .

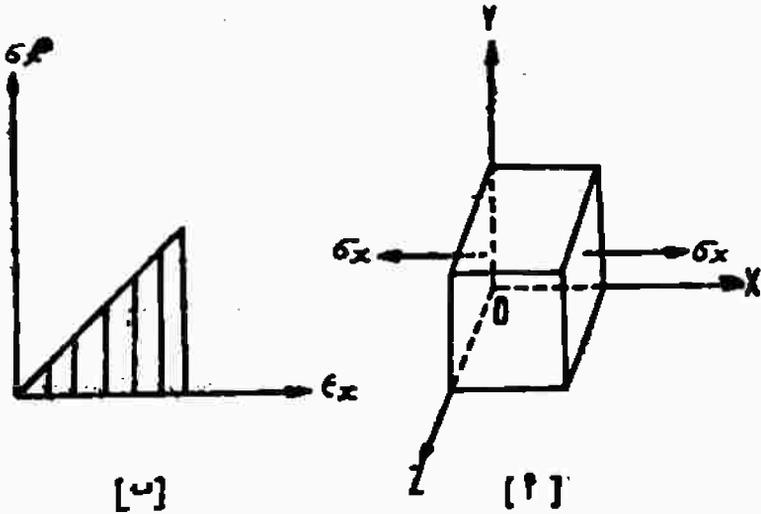
ولما كان الشغل أو الطاقة هو حاصل ضرب القوة في المسافة لذلك فإن حاصل ضرب الإزاحة الناتجة من التشوه في مقدار القوة المسببة له فإن الناتج يعرف بطاقة التشوه في الصخور المرنة .

نفرض أن قطعة من الصخور المرنة كالموضح بالشكل (٧٣-١) تعرضت لاجهاد يؤثر عليها تدريجياً من الصفر حتى يصل إلى المقدار σ_x . يمكن إيجاد التشوه الذي يحدث في هذه القطعة من قانون هوك $\epsilon_x , \epsilon_y , \epsilon_z$

وحيث إن العلاقة بين الاجهادات والتشوهات في هذه الحالة علاقة خطية كما هو موضح بالشكل (٧٣-ب) ، فإن طاقة التشوه تساوى حاصل ضرب القوة في المسافة . ولما كانت القوة تتغير تغيراً خطياً من الصفر إلى $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ فإن :

$$U = \left(\frac{0 + \sigma_x}{2} \right) dy \cdot dz \epsilon_x dx$$

$$= \frac{1}{2} \sigma_x \epsilon_x dx dy dz \quad (49)$$



(شكل ٧٣)

طاقة التشوه في الصخور المرنّة

حيث $U =$ طاقة التشوه $\sigma_x =$ مقدار الاجهاد العمودي $dx, dy, dz =$ مقدار الأطوال في اتجاه المحاور x, y, z $\epsilon_x =$ مقدار التشوه في اتجاه المحاور x

ولما كانت (σ_y, σ_z) مساوية للصفر في هذه الحالة فإنه لن تولد طاقة تشوه من كل من الاجهادين (σ_y, σ_z) وبإذئذ يمكن إيجاد معادلات مماثلة للمعادلة (٤٩) بالنسبة إلى كل من الاجهادين σ_y, σ_z

أما اجهادات القص وتشوهات القص فيمكن الحصول على طاقة التشوه الخاصة بها من المعادلة $U = \text{Moment} \times \text{angle}$

وعلى ذلك فإن طاقة التشوه تساوي

$$U = \frac{0 + \tau_{xy}}{2} dx dz dy \gamma_{xy}$$

$$= \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} dx dy dz \quad (50)$$

وبالمثل يمكن إيجاد معادلات ثلاثة لاجهادى القص τ_{yz} , τ_{zx} وعلى ذلك فإن للمعادلة العامة التي نحصل عليها لطاقة التشوهات منسوبة إلى الاجهادات الستة معاً هي :

$$U = \int_V \left(\frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) \right) dx dy dz \quad (51)$$

وإذا أردنا الحصول على طاقة التشوه منسوبة إلى وحدة الحجم فإنها تساوى

$$U_0 = \frac{1}{2} (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$$

ولاحصول على الطاقة الكلية للتشوه يمكن إجراء عمليات التكامل الموضحة بالمعادلة الآتية :

$$U = \int_V \int_V \int_V U_0 dx dy dz \quad (52)$$

ويستخدم العلاقة بين الاجهادات والتشوهات في حالة المرونة توتر

المعادلة (٥٢) إلى معادلة تحتوى الاجهادات فقط أو التشوهات فقط :