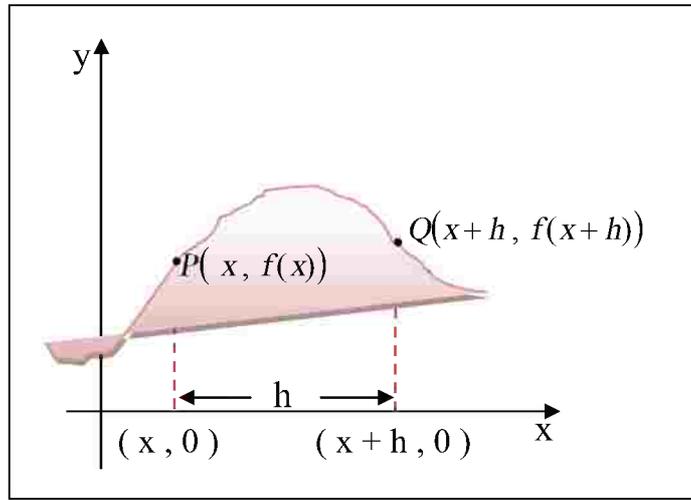


The Derivatives المشتقة

ليكن لدينا منحنى الدالة $f(x)$ ، ونأخذ النقطتين $(x, f(x))$ و $Q[x+h, f(x+h)]$ وعندها يكون h البعد بين النقطتين $(x,0)$ و $(x+h,0)$ على المحور X كما في الشكل التالي:



عندها يكون ميل الخط المستقيم \overline{PQ} :

$$m_{pQ} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وعندما $h \rightarrow 0$ فإن النقطة Q تقترب من النقطة P ، ويصبح المستقيم PQ مماساً لمنحنى الدالة f عند النقطة $P(x, f(x))$ ، ويكون ميله هو النهاية:

$$m_{pQ} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) = L$$

حيث L عدد حقيقي محدود وحيث رمزنا لقيمة النهاية بالرمز $f'(x)$.

تسمى $f'(x)$ بالمشتقة الأولى للدالة f عند النقطة $(x, f(x))$ وللمشتقة تفسير هندسي

هام. فالشكل البياني لدالة نمطية f مخطط كما في الشكل التالي:

لتكن $P(x, f(x))$, $Q(u, f(u))$ نقطتين على منحنى الدالة f ، وميل الخط PQ المار

بالنقطتين Q و P والمستنتج من إحداثيات هاتين النقطتين هو: $\frac{f(u) - f(x)}{(u - x)}$ إذا كانت الدالة f مستمرة عند x .

فإنه عندما تقترب u من x ، تتحرك Q على المنحنى ناحية P ، والخط المستقيم PQ يدور حول P ، وتقترب من المماس للمنحنى عند P .

لنفترض أنه في نفس الوقت يقترب ميل PQ من ميل المماس، ويمكن جعله يقترب منه كما نريد باختيار u قريبة قريباً كافياً من x ، لكن ذلك مجرد عملية نهائية، ويمكن أن نقول:

ميل المماس عند P يساوي (ميل PQ) $\lim_{u \rightarrow x}$ ؛ أي أن:

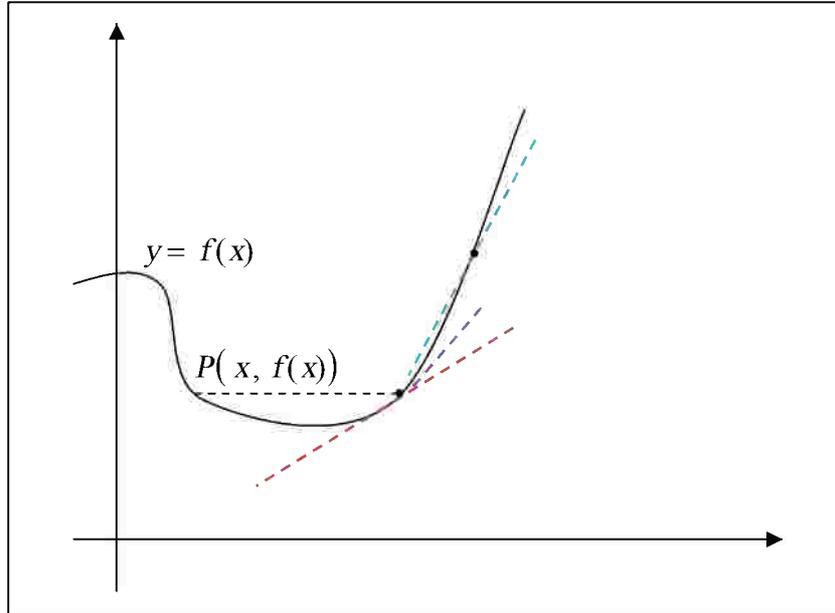
$$\lim_{h \rightarrow 0} PQ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

حيث h تعبر عن المسافة الأفقية بين Q و P بشرط وجود هذه النهاية

(يجب أن نأخذ في الاعتبار قيم u الأقل من و الأكبر من x)

أي أن مشتقة الدالة f عند x هي ميل المماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة

$(x, f(x))$.



إن للمشتقة أيضا معنى فيزيائي هام، فهي تعيين معدل تغير الدالة في أي موضع بالنسبة لمتغيرها كما أنها تمثل القيمة العددية لميل المماس لمنحنى الدالة في الموضع المحدد بـ X .

مثال:

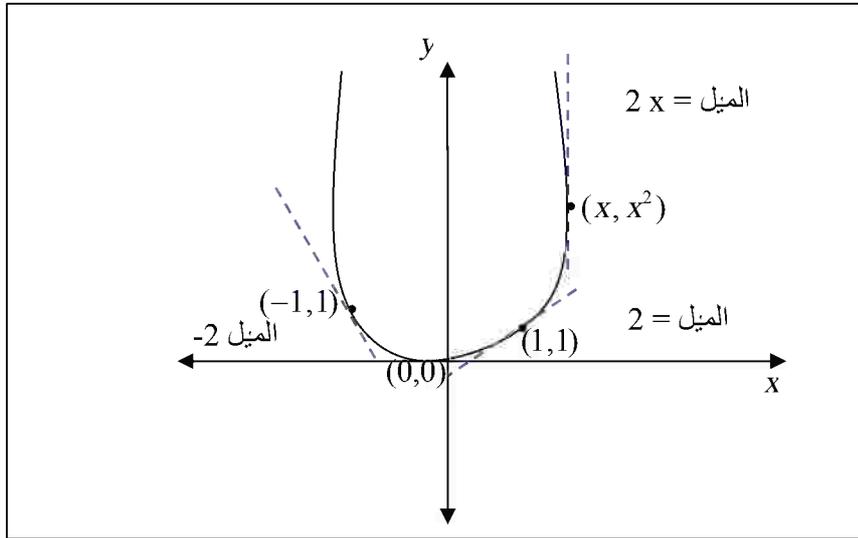
إذا كانت $f(x) = x^2$. فاوجد $f'(a)$ لأي a باستخدام التعريف السابقة.

الحل:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow a} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow a} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow a} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow a} \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= 2x \\ \lim_{x \rightarrow a} 2x &= 2a \end{aligned}$$

في هذا المثال أثبتنا أن الدالة $f(x) = x^2$ لها المشتقة $f'(x) = 2x$. هذا هو ميل المماس للمنحنى y عند النقطة (x, x^2) في منحنى الدالة $y = x^2$ ، مثلا يكون ميل المماس عند النقطة $(1, 1)$ هو $f'(1) = 2$.

وميل المماس عند النقطة $(2, 4)$ هو $f'(2) = 4$ وعندما تزداد x تتحرك النقطة (x, x^2) لأعلى على طول النصف الأيمن للمنحنى والميل $2x$ للمماس يزداد.



عند نقطة الأصل $x=0$ تكون $f'(0) = 0$ ، و ميل المماس عند النقطة $(-1, 1)$ هو $f'(-1) = -2$ و للنقط على النصف الأيسر للمنحنى ($x < 0$) يكون ميل المماس عند كل نقطة سالباً.

تعريف:

إذا كانت f دالة معرفة على فترة مفتوحة تحتوي العدد x ؛ فإن المشتقة الأولى للدالة f عند النقطة $P=(x, f(x))$ تعرف بالنهاية:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

بشرط وجود النهاية .

ملاحظات عامة:

1. المشتقة الأولى للدالة f عند النقطة $(x=a)$ هي النهاية:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

وتمثل ميل المستقيم المماس لمنحني الدالة f عند النقطة $(a, f(a))$.

2. نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة a إذا كانت النهاية التالية موجودة:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

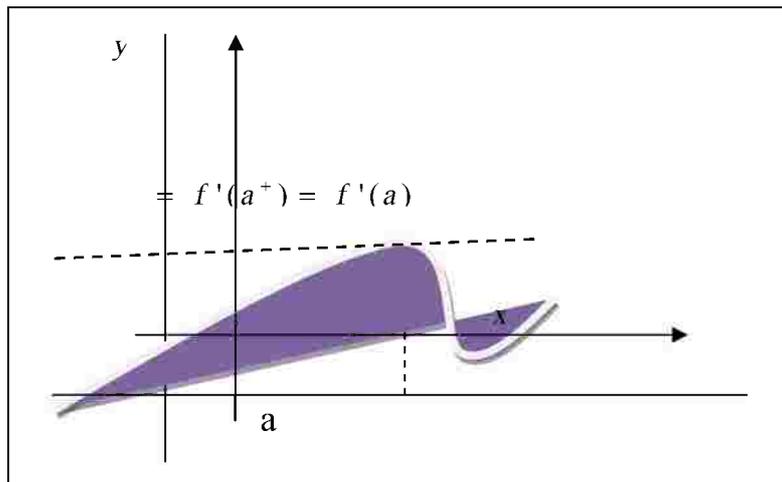
وهذا يعني أن النهايتان:

$$f'(a^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad , \quad f'(a^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

معرفتان ومتساويتان.

وتسمى $f'(a^-)$ بالمشتقة اليسرى عند العدد (a)

$f'(a^+)$ بالمشتقة اليمنى عند العدد (a)



مثال:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 2, & x < 1 \\ -x^2 + x, & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{أوجد } g'(x) \text{ إذا كانت:}$$

الحل:

$$\begin{aligned} g'(1^-) &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{g(u) - g(1)}{u - 1} = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{(u^2 - 3u + 2) - 0}{u - 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{(u - 2)(u - 1)}{u - 1} = \lim_{u \rightarrow 1^-} (u - 2) = -1 \\ g'(1^+) &= \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{g(u) - g(1)}{u - 1} = \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{(-u^2 + u) - 0}{u - 1} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1^+} \frac{-u(u - 1)}{u - 1} = \lim_{u \rightarrow 1^+} (-u) = -1 \end{aligned}$$

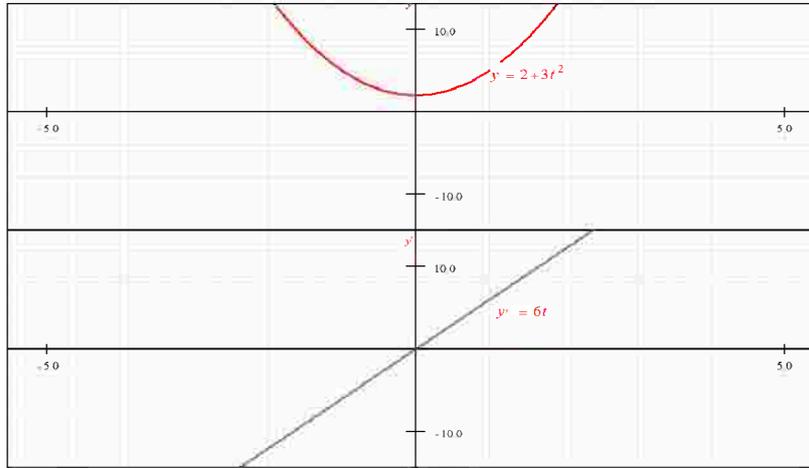
إذن $g'(1^-) = g'(1^+) = -1$ وبالتالي فإن $g'(1)$ موجودة وتساوي (-1)

مثال:

أوجد المشتقة الأولى باستخدام التعريف للدالة $f(t) = 2 + 3t^2$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

$$\begin{aligned} S' &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 + 3(t + \Delta t)^2 - 2 - 3t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{2 + 3t^2 + 6t\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 2 - 3t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{6t\Delta t + 3(\Delta t)^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (6t + 3\Delta t) = 6t \end{aligned}$$



3. نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) ، إذا كانت قابلة للاشتقاق عند كل نقطة في $a < c < b$.

4. نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، إذا كانت قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة ومعروفة عند الطرفين أي أن:

$$\lim_{h \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{h \rightarrow a^+} f(a)$$

$$\lim_{h \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{h \rightarrow b^-} f(b)$$

5. إذا كانت $y = f(x)$ فإنه يرمز للمشتقة الأولى بالرموز التالية:

$$\begin{aligned} f'(x) &= D_x[f(x)] = D_x y = y' \\ &= \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[f(x)] \end{aligned}$$

علمًا بأنه:

بوضع $u = x + h$ فإنه عندما $h \rightarrow 0$ فإن $u \rightarrow x$ وإن:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

فتصبح المعادلة:

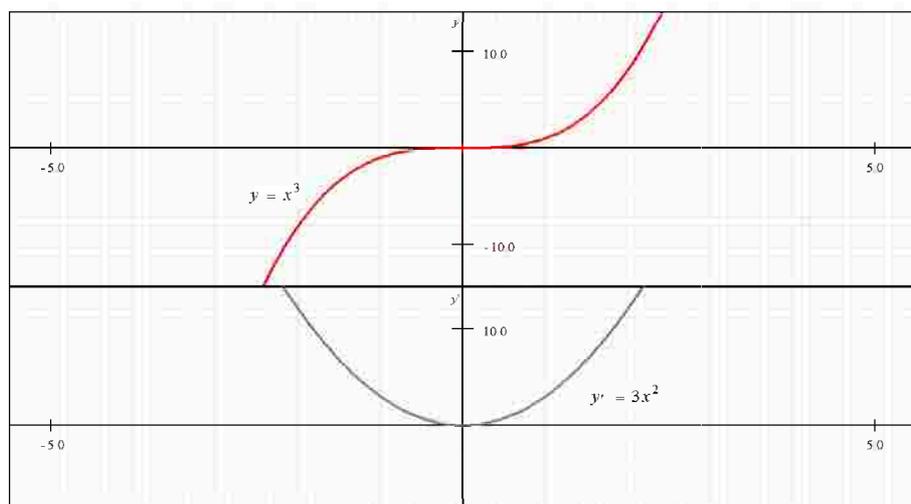
$$f'(x) = \lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة: $f(x) = x^3$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \\ f(x+h) - f(x) &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3 = h(3x^2 + 3xh + h^2) \\ \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 \\ \therefore f'(x) &= 3x^2 \end{aligned}$$

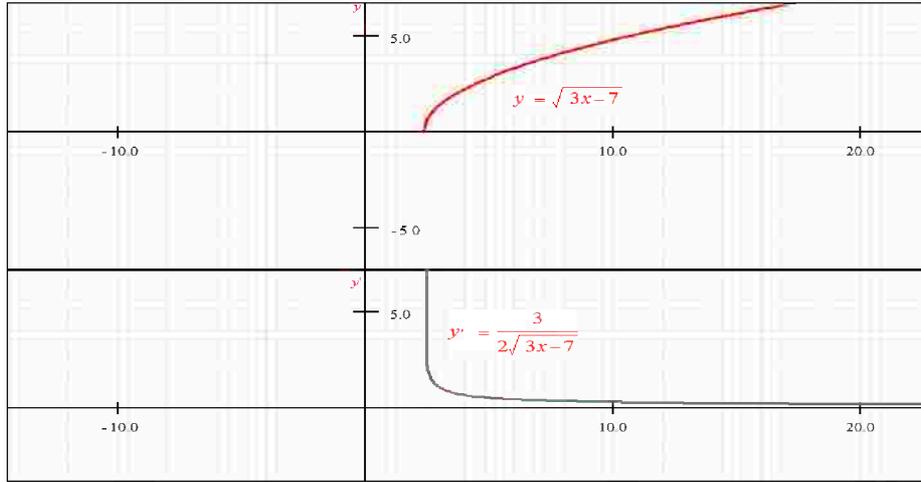


مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة: $f(x) = \sqrt{3x-7}$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)-7} - \sqrt{3x-7}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3(x+h)-7} - \sqrt{3x-7}}{h} \times \frac{\sqrt{3(x+h)-7} + \sqrt{3x-7}}{\sqrt{3(x+h)-7} + \sqrt{3x-7}} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)-7 - (3x-7)}{h(\sqrt{3(x+h)-7} + \sqrt{3x-7})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x+3h-7-3x+7}{h(\sqrt{3(x+h)-7} + \sqrt{3x-7})} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h(\sqrt{3x+3h-7} + \sqrt{3x-7})} \\
 &= \frac{3}{\sqrt{3x-7} + \sqrt{3x-7}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-7}}
 \end{aligned}$$



مثال:

اثبت أن الدالة $f(x) = |x|$ غير قابلة للاشتقاق عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

الحل:

$$f'(0^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'(0^-) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} -1 = -1$$

∴ المشتقة غير موجودة عند $x = 0$.

مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة:

$$f(x) = 2x^3 - 5x^2 + x$$

الحل:

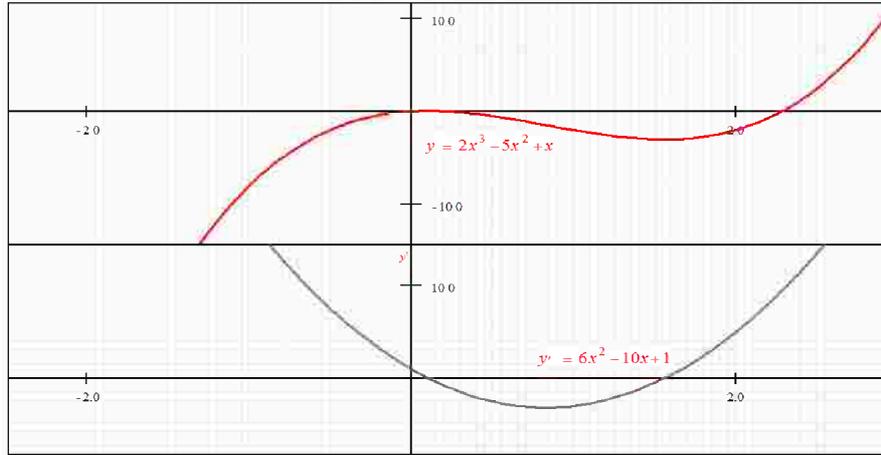
$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(x+h)^3 - 5(x+h)^2 + (x+h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x^3 + 6x^2h + 6xh^2 + 2h^3 - 5x^2 - 10xh - 5h^2 + x + h - 2x^3 + 5x^2 - x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(6x^2 + 6xh + 2h^2 - 10x - 5h + 1)}{h}$$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 - 10x + 1$$



مثال:

استخدم تعريف المشتقة لإيجاد مشتقة الدالة: $f(x) = -6x^2 + x + 5$

الحل:

$$\begin{aligned}
 \therefore f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) + 5}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6x^2 - 12x\Delta x - 6\Delta x^2 + x + \Delta x + 5 + 6x^2 - x - 5}{\Delta x} \\
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-12x - 6\Delta x + 1)}{\Delta x} \\
 \therefore f'(x) &= -12x + 1
 \end{aligned}$$

قواعد الاشتقاق: Derivative Rules

المشتقة الأولى للدوال الجبرية: First Derivative for Algebraic Functions

نلاحظ إنه إذا كانت f دالة قابلة للاشتقاق عند X_1 فإن الدالة f مستمرة عند X_1 والعكس غير صحيح.

1- إذا كانت الدالة f دالة ثابتة $f(x) = k$ حيث k مقدار ثابت فإن: $f'(x) = 0$

$$f(x) = 2^6 \quad \text{مثلا:}$$

$$f'(x) = 0$$

2- إذا كانت $f(x) = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب فإن: $f'(x) = nx^{n-1}$

$$f(x) = x^{18} \quad \text{مثلا:}$$

$$f'(x) = 18x^{17}$$

3- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق فإن الدالة kf تكون قابلة للاشتقاق أيضاً حيث:

$$\frac{d}{dx} kf = k \frac{df}{dx}$$

مثال:

$$\text{إذا كانت } f(x) = 9x^2 \text{ فإن } f'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(9x^2) = 9 \frac{dx^2}{dx}$$

$$f'(x) = 9(2x) = 18x$$

4- إذا كانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق فإن: الدالة $f+g$ تكون قابلة للاشتقاق أيضاً

$$\frac{d}{dx}(f+g)(x) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

مثال:

$$\text{إذا كانت } f(x) = 3x^5 + x^7 + x^2 \text{ ، فإن } f'(x) = 15x^4 + 7x^6 + 2x$$

5- إذا كانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق فإن الدالة $f \pm g$ تكون قابلة للاشتقاق أيضاً.

$$\frac{d}{dx}(f-g)(x) = \frac{d}{dx} f(x) - \frac{d}{dx} g(x)$$

مثلا:

$$f(x) = x^5 - x^2 \text{ إذا كانت}$$

$$f'(x) = 5x^4 - 2x \text{ فإن:}$$

إذا كانت $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ دوال قابلة للاشتقاق:

فإن الدالة $f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n$ التي تمثل مجموع أو فرق هذه الدوال تكون

قابلة للاشتقاق منها نجد أن:

$$\frac{d}{dx}(f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n)(x) = \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) + \dots + \frac{d}{dx} f_n(x)$$

مثلا:

$$g'(t) = -6t + 24t^3 \text{ إذا كانت } g(t) = 11 - 3t^2 + 6t^4 \text{ فإن:}$$

6- قانون الجداء (الضرب):

إذا كانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق فإن:

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x) + g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

مثلا:

إذا كانت $f = (x^2 - 5x), g = (x^3 - 10)$ فإن:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f \cdot g)(x) &= \frac{d}{dx}[(x^2 - 5x) \cdot (x^3 - 10)] \\ &= (x^2 - 5x)(3x^2) + (x^3 - 10)(2x - 5) \\ &= 3x^4 - 15x^3 + 2x^4 - 5x^3 - 20x + 50 \\ &= 5x^4 - 20x^3 - 20x + 50 \end{aligned}$$

7- قانون القسمة:

إذا كانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق عند x وكان $g(x) \neq 0$ فإن الدالة $\left(\frac{f}{g}\right)$ تكون

قابلة للاشتقاق عند x وتكون:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{[g(x)]^2}$$

إذا كان $f(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)$ فإن:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{x-1} \right) &= \frac{(x-1) \frac{d}{dx}(x) - (x) \frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)(1) - x(1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

8- إذا كانت $y = x^{-n}$ عندما يكون n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

$$\frac{dy}{dx} = (-n)x^{-n-1}$$

مثلاً: إذا كانت $f(x) = x^{-2}$ فإن:

$$x \neq 0 \quad \text{حيث} \quad f'(x) = (-2)(x^{-2-1}) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}, \quad x \neq 0$$

9- إذا كانت $y = \sqrt{f(x)}$ فإن: $y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

مثلاً: إذا كانت $y = \sqrt{2x^3 + 5x}$ فإن:

$$y' = \frac{1 \times (6x^2 + 5)}{2 \times \sqrt{2x^3 + 5x}} \rightarrow y' = \frac{6x^2 + 5}{2\sqrt{2x^3 + 5x}}$$

10- إذا كانت $y = (f(x))^n$ فإن: $y' = n(f(x))^{n-1} \times f'(x)$

مثلاً: إذا كانت $y = (2x^2 + 2x)^3$ فإن:

$$y' = 3(2x^2 + 2x)^2(4x + 2)$$

11- إذا كانت $y = \sqrt[n]{f(x)}$ فإن: $y' = \frac{1}{n}(f(x))^{\frac{1}{n}-1} \times f'(x)$

مثلاً: إذا كانت $y = \sqrt[6]{x^3 + 2x^2 + 1}$ فإن:

$$y' = (x^3 + 2x^2 + 1)^{\frac{1}{6}-1}$$

$$y' = \frac{1}{6}(x^3 + 2x^2 + 1)^{-\frac{5}{6}}(3x^2 + 4x)$$

المشتقة الأولى للدالة التركيبية (قاعدة السلسلة) Chain Rule Functions

لقد سبق أن درسنا الدالة التركيبية، وسنحاول الحصول على قانون لإيجاد المشتقة الأولى للدالة التركيبية:

إذا كانت f, g دالتين قابلتين للاشتقاق وكان $u = g(x)$ فإن الدالة التركيبية هي:

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$$

تكون قابلة للاشتقاق كالتالي:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{d}{d x} (f \circ g)(x) = f'(g(x))g'(x) = \frac{d y}{d u} \cdot \frac{d u}{d x}$$

مثال:

$$y = \frac{1}{(x^3 + 1)^5} \text{ إذا كانت}$$

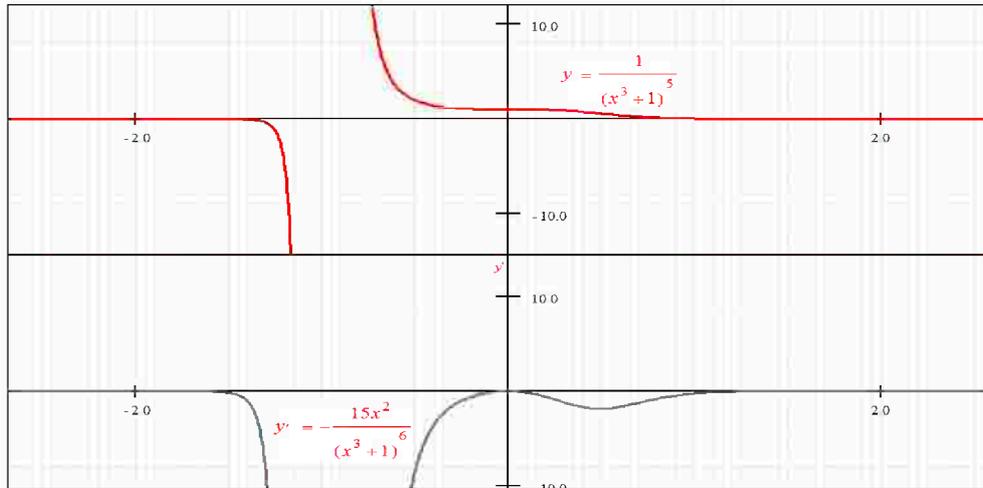
فاوجد $\frac{d y}{d x}$ مع رسم الدالة ومشتقاتها.

الحل:

نفرض أن $u = x^3 + 1$, $y = \frac{1}{u^5}$ منها يكون لدينا:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{d y}{d u} \cdot \frac{d u}{d x} = \frac{d}{d u} \left(\frac{1}{u^5} \right) \cdot \frac{d}{d x} (x^3 + 1)$$

$$\frac{d y}{d x} = \frac{-5}{u^6} \cdot 3x^2 = \frac{-15x^2}{(x^3 + 1)^6}$$



مثال:

إذا كانت $y = v^5 - 6$, $v = x^4 + 3x^2$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 5v^4 \cdot (4x^3 + 6x) = 5(x^4 + 3x^2)^4 (4x^3 + 6x)$$

مثال:

بفرض أن $y = \sin u^2$, $u = \ln x$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل:

نعلم بأن: $y' = 2uu' \cos u^2$ بذلك يكون لدينا $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

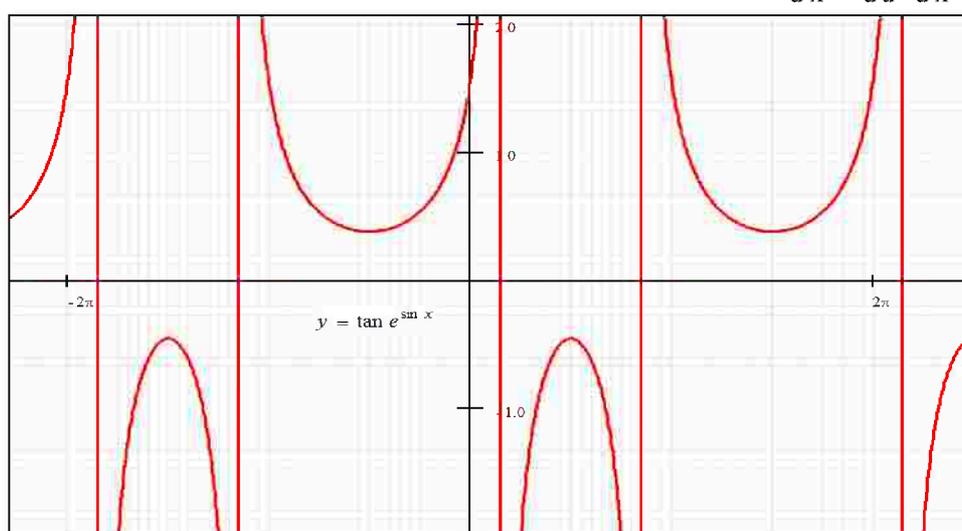
$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \ln x}{x} \cos(\ln x)^2 \quad u' = \frac{1}{x}$$

مثال:

بفرض أن $y = \tan u$, $u = e^{\sin x}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ مع رسم الدالة التركيبية.

الحل:

نعلم بأن: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ واضح أن $u' = \cos x e^{\sin x}$ منها يكون لدينا $\frac{dy}{dx} = \sec^2(e^{\sin x}) \cos x e^{\sin x}$



المشتقة الأولى لدوال القوى: First Derivative for Power functions

1- إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن المشتقة الأولى للدالة $y = x^{\frac{1}{n}}$ هي:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} \quad \text{حيث } x \neq 0$$

إذا كانت $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث أن n, m أعداد صحيحة؛ فإن المشتقة هي:

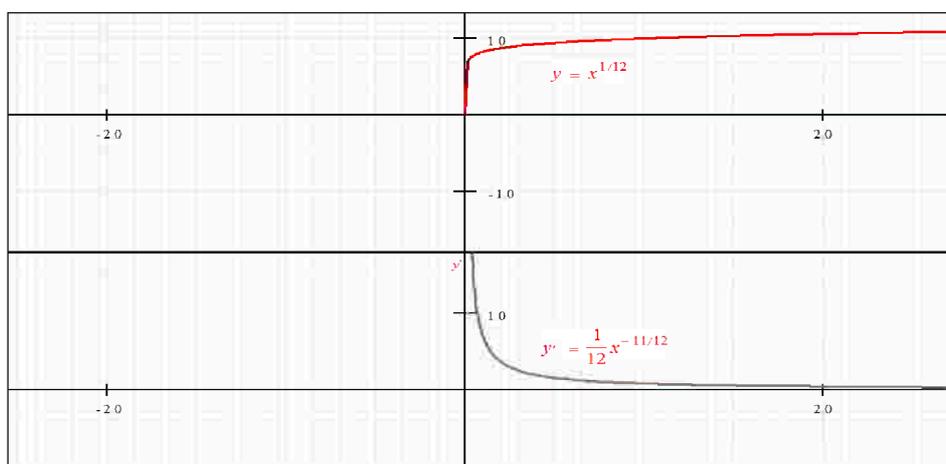
$$f'(x) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1} \quad \text{حيث } x \neq 0$$

مثال:

إذا كان $y = x^{\frac{1}{12}}$ ، فأوجد y' .

الحل:

$$y' = \frac{1}{12} x^{\frac{1}{12}-1} = \frac{1}{12} x^{\frac{-11}{12}} = \frac{1}{12 x^{\frac{11}{12}}}$$



مثال:

إذا كانت $y = x^{\frac{5}{6}}$ ، فأوجد y' .

$$y' = \frac{5}{6} x^{\frac{5}{6}-1} = \frac{5}{6} x^{\frac{-1}{6}} = \frac{5}{6 x^{\frac{1}{6}}}$$

الحل:

اشتقاق الدوال المثلثية: The Derivative of the Trig functions

1- إذا كانت $f(x) = \sin x$ فإن: $f'(x) = \cos x$

الإثبات:

$$f(x) = \sin x$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

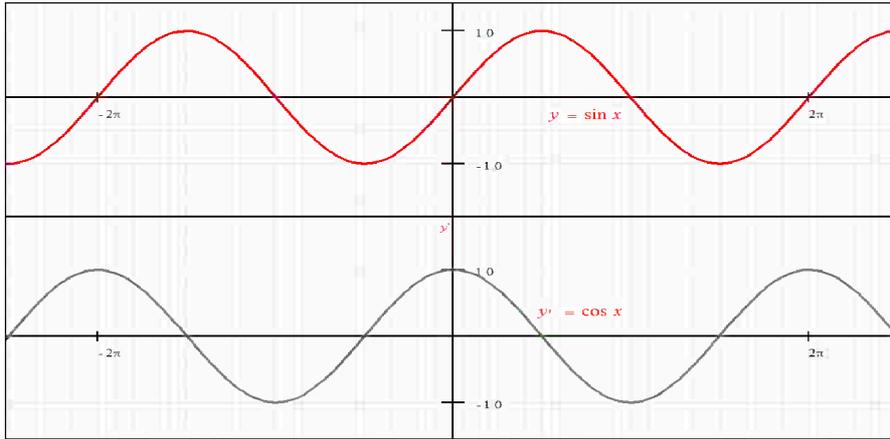
$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos(h) + \cos x \sin(h) - \sin x}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin(h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sin x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \cos x \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

$$f'(x) = \sin x(0) + \cos x(1) = \cos x$$



2- إذا كانت $f(x) = \cos x$ فإن: $f'(x) = -\sin x$

3- إذا كانت $f(x) = \tan x$ فإن: $f'(x) = \sec^2 x$

الإثبات:

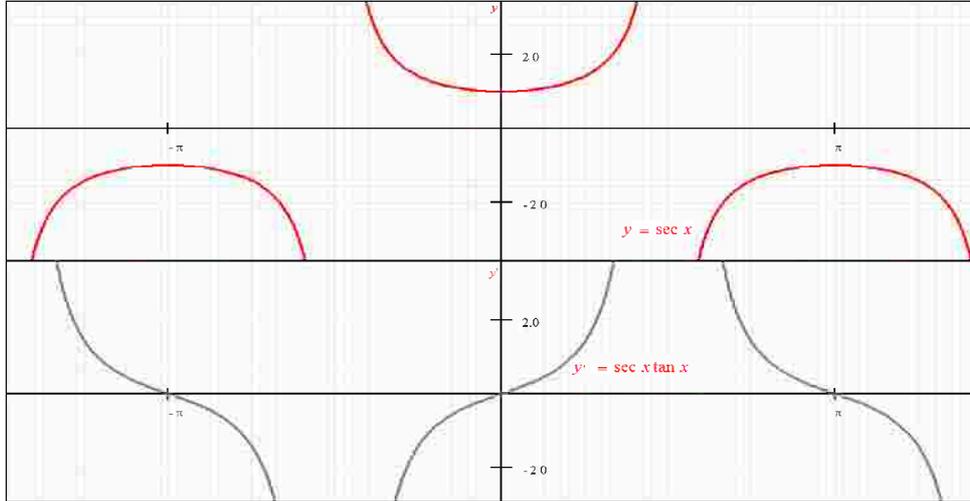
$$f(x) = \tan x \rightarrow \therefore f(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\therefore f'(x) = \sec^2 x$$

4- إذا كانت $f(x) = \sec x$ فإن: $f'(x) = \sec x \tan x$



5- إذا كانت $f(x) = \csc x$ فإن: $f'(x) = -\cot x \csc x$
الإثبات:

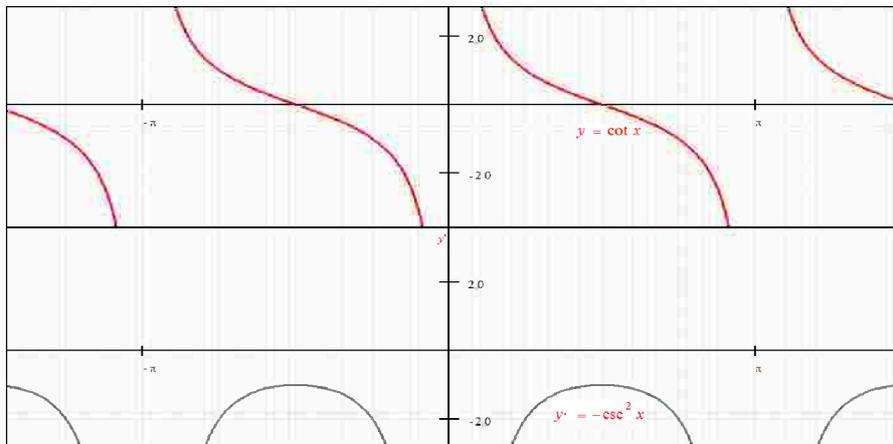
$$f(x) = \csc x \rightarrow \therefore f(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{\sin x \cdot (0) - (1) \cdot (\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \rightarrow f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore f'(x) = -\cot x \cdot \csc x$$

6- إذا كانت $f(x) = \cot x$ فإن: $f'(x) = -\csc^2 x$



اشتقاق الدوال المثلثية العكسية: The derivative of the inverse Trig functions:

- لقد وجدنا عند دراسة الدوال المثلثية أن الدالة:

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1] \quad , \quad x \rightarrow \sin x$$

دالة مستمرة ومنتزيدة وتحقق $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ و $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ وهي دالة أحادية والدالة

$$\text{العكسية هي } \sin^{-1} \text{ بذلك تكون: } \sin^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

لحساب مشتقة الدالة $y = \sin^{-1} x$ نعلم أن:

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y$$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$1 = \cos y y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 y}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \text{منها}$$

- لقد وجدنا عند دراسة الدوال المثلثية أن الدالة:

$$\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1] \quad , \quad x \rightarrow \cos x$$

دالة مستمرة ومنتاقصة وتحقق $\cos(0) = 1$ و $\cos(\pi) = -1$ وهي دالة أحادية والدالة العكسية

$$\text{هي } \cos^{-1} \text{ بذلك تكون: } \cos^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi].$$

لحساب مشتقة الدالة $y = \cos^{-1} x$ نعلم أن:

$$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow x = \cos y$$

باشتقاق الطرفين نجد:

$$1 = -\sin y y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{\sin^2 y}}$$

منها نحصل على:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- لقد وجدنا عند دراسة الدوال المثلثية أن الدالة:

$$\tan : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad , \quad x \rightarrow \tan x$$

دالة مستمرة ومنتزاید وتحقق $\lim_{x \rightarrow +\frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ وهي دالة أحادية والدالة

العكسية هي \tan^{-1} بذلك تكون: $\tan^{-1} : R \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

لحساب مشتقة الدالة $y = \tan^{-1} x$ نعلم أن: $y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow x = \tan y$ باشتقاق الطرفين نجد:

$$1 = \sec^2 y y' \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}$$

$$\left(\sec^2 y = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} \right)$$

$$y' = \frac{1}{1 + x^2} \quad \text{وبالتالي يكون لدينا:}$$

مثال:

$$y' = \frac{-1}{1 + x^2} \quad \text{اثبت انه إذا كان } y = \cot^{-1} x \text{ ، فإن}$$

الحل:

بما أن $y = \cot^{-1} x$ فإن $x = \cot y$ وباشتقاق الطرفين نجد:

$$1 = -\cos^2 y y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \cot^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

مثال:

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{اثبت انه إذا كان } y = \sec^{-1} x \text{ ، فإن}$$

الحل:

بما أن $y = \sec^{-1} x$ فإن $x = \sec y$ وباشتقاق الطرفين نجد:

$$y' = \frac{-1}{\sec y \tan y} \quad \text{وبالتالي يكون لدينا:}$$

$$\left(1 + \tan^2 y = \sec^2 y \Rightarrow \tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1} \right)$$

$$y' = \frac{1}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}} \quad \text{يكون لدينا}$$

مثال:

$$\text{اثبت أنه إذا كان } y = \operatorname{cosec}^{-1} x \text{ ، فإن } y' = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

الحل:

$$\text{بما أن } y = \operatorname{cosec}^{-1} x \text{ فإن } x = \operatorname{cosec} y$$

$$\text{وباشتقاق الطرفين نجد: } 1 = -\operatorname{cosec} y \cot y y'$$

$$\text{ويكون لدينا: } y' = \frac{-1}{\operatorname{cosec} y \cot y} = \frac{1}{\operatorname{cosec} y \sqrt{\operatorname{cosec}^2 y - 1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

نتيجة:

من قاعدة السلسلة نستنتج العلاقات التالية:

$$-1 \text{ إذا كانت } y = \sin^{-1}(u(x)) \text{ فإن: } y' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

$$-2 \text{ إذا كانت } y = \cos^{-1} u(x) \text{ فإن: } y' = \frac{-u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

$$-3 \text{ إذا كانت } f(x) = \tan^{-1} u(x) \text{ فإن: } y' = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

$$-4 \text{ إذا كانت } f(x) = \cot^{-1} u(x) \text{ فإن: } y' = \frac{-u'(x)}{1+u(x)^2}$$

$$-5 \text{ إذا كانت } f(x) = \sec^{-1} u(x) \text{ فإن: } y' = \frac{u'(x)}{u(x)\sqrt{u(x)^2-1}}$$

$$-6 \text{ إذا كانت } f(x) = \operatorname{cosec}^{-1} u(x) \text{ فإن: } y' = \frac{-u'(x)}{u(x)\sqrt{u(x)^2-1}}$$

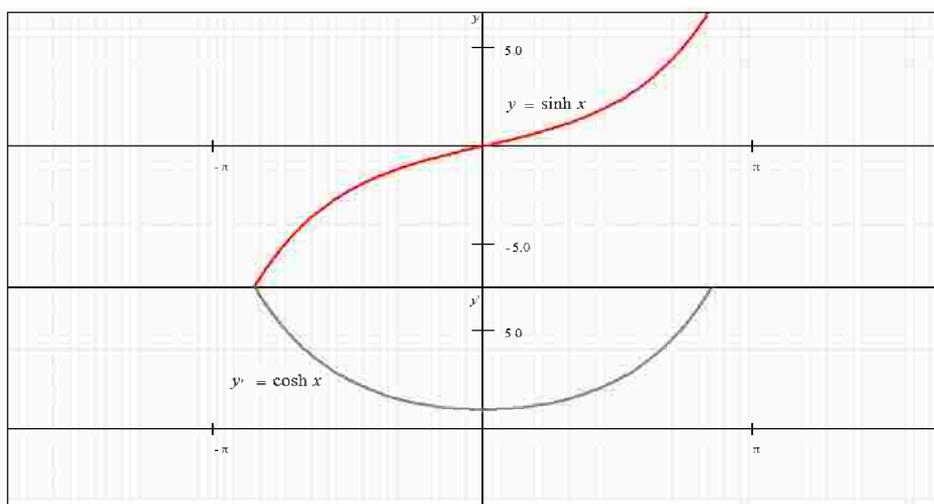
اشتقاق الدوال الزائدية: Derivative of Hyperbolic functions

من تعريف ودراسة خواص الدوال الزائدية نحصل على:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{وبالتالي فإن} \quad (\sinh x)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (1)$$

ومنها نحصل على: $(\sinh x)' = \cosh x$

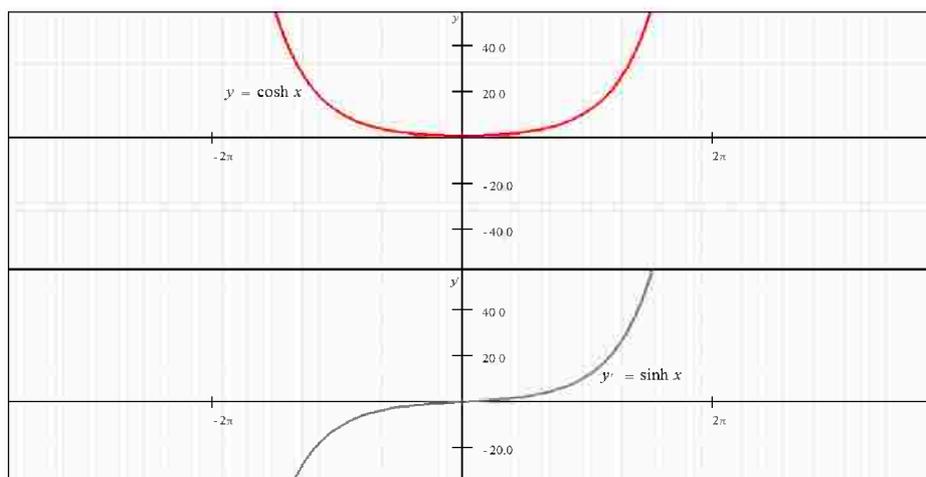
كما موضح بالشكل التالي:



$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{وبالتالي فإن} \quad (\cosh x)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2)$$

منها نحصل على: $(\cosh x)' = \sinh x$

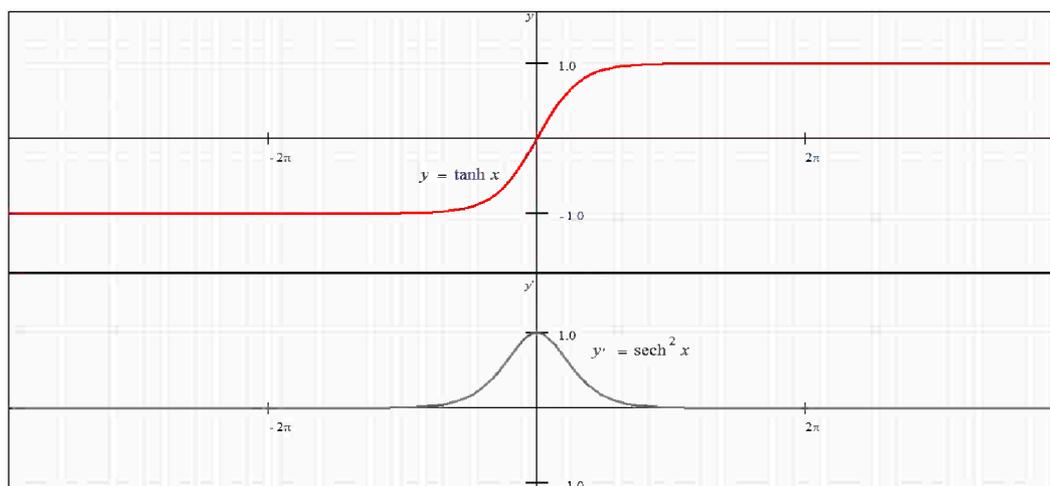
ما موضح بالشكل التالي:



(3) نعلم بأن: $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ وبالتالي فإن:

$$(\tanh x)' = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$$

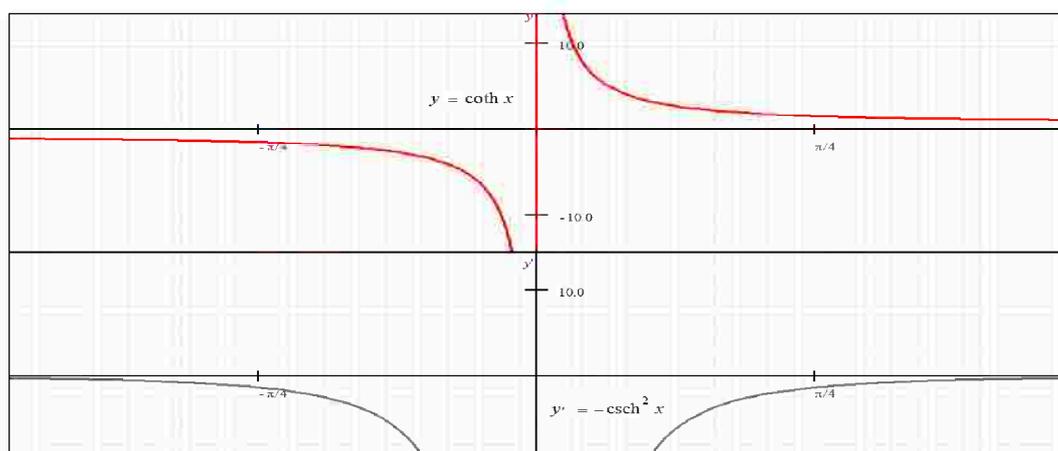
كما موضح بالشكل التالي:



(4) علم بأن: $\coth x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$ وبالتالي فإن:

$$(\coth x)' = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = \frac{1}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2 x = -\operatorname{csch}^2 x$$

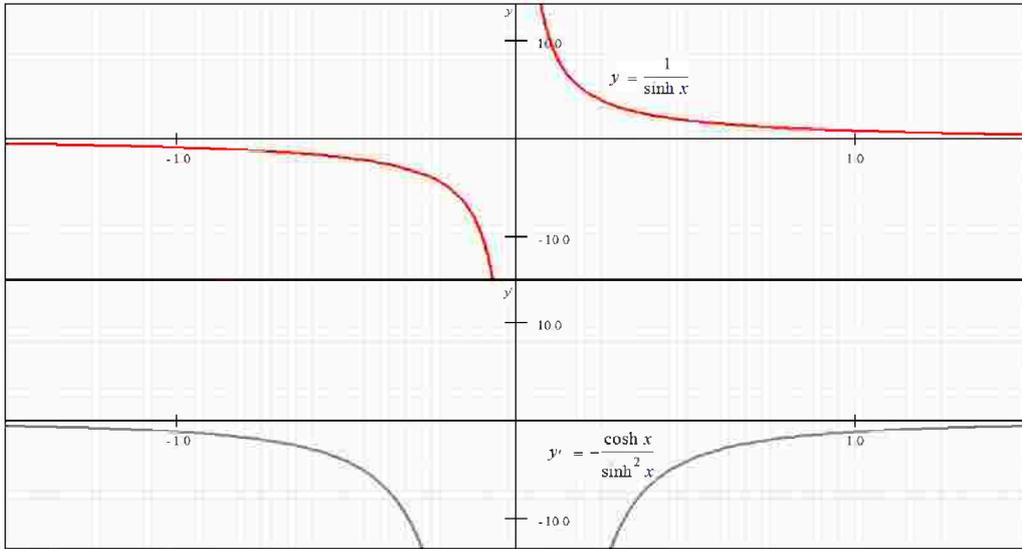
كما موضح بالشكل التالي:



بالتالي فإن: $c \sec hx = \frac{1}{\sinh x}$ (5)

$$\begin{aligned} (c \sec hx)' &= \frac{-\cosh x}{\sinh^2 x} \\ &= -\frac{\cosh x}{\sinh x} \times \frac{1}{\sinh x} \\ &= 1 - \coth^2 x \\ &= -c \sec hx \coth x \end{aligned}$$

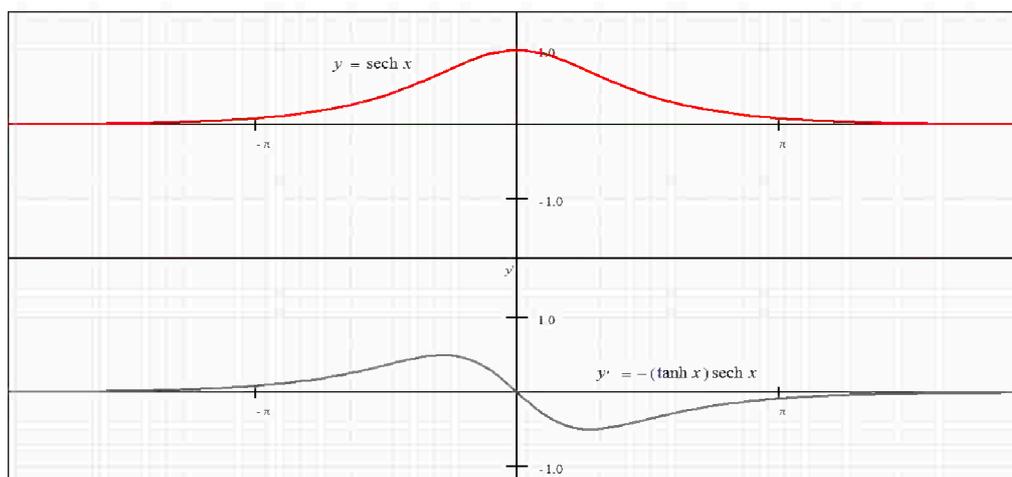
كما موضح بالشكل التالي:



وبالتالي فإن: $\sec hx = \frac{1}{\cosh x}$ (6)

$$(\sec hx)' = \frac{-\sinh x}{\cosh^2 x} = -\frac{\sinh x}{\cosh x} \times \frac{1}{\cosh x} = -\sec hx \tanh x$$

كما موضح بالشكل التالي:



مثال:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \sinh x^2 + \cosh(\sqrt{x^3})$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا: $\frac{dy}{dx} = 2x \cosh x^2 + \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} \sinh(\sqrt{x^3})$

مثال:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \tanh x + \cosh(\sin(e^x))$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا: $\frac{dy}{dx} = \sec^2 x + e^x \sinh(\sin(e^x)) \cos(e^x)$

مثال:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \cosh(\cos x)$.

الحل:

واضح أن الدالة تركيبية بذلك يكون لدينا:

$$y' = \sinh(\cos x)(\cos x)' = \sinh(\cos x)(-\sin x) = -\sin x \sinh(\cos x)$$

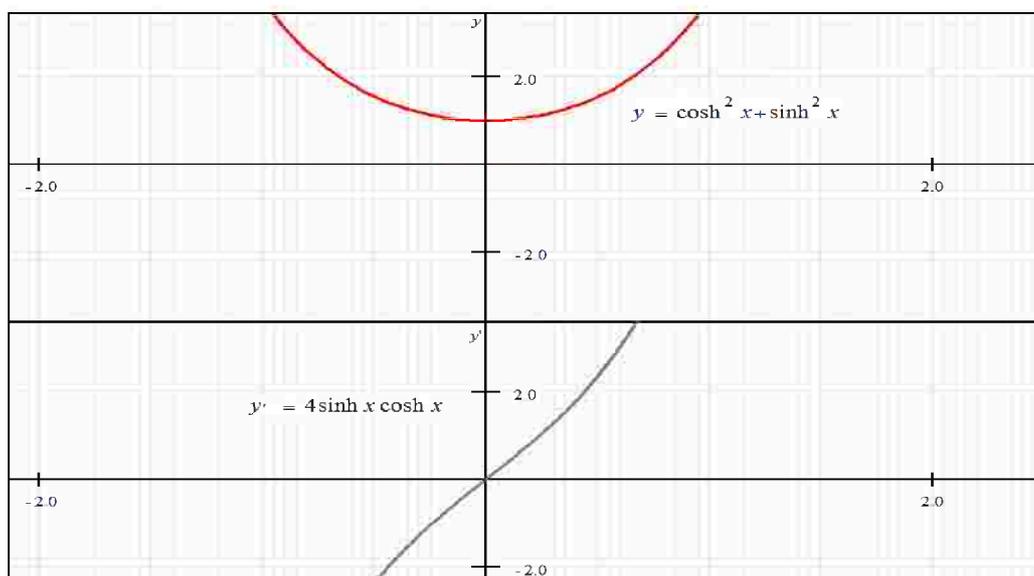
مثال:

أوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

الحل:

واضح أن الدالة تركيبية بذلك يكون لدينا:

$$y' = 2 \cosh x \sinh x + 2 \sinh x \cosh x \\ = 4 \sinh x \cosh x$$



مثال:

أوجد y' للدالة $y = \sinh^2 x - \cosh^2 x$ مع الرسم؟

الحل:

واضح أن مشتقة الدالة هي :

$$y' = 2 \sinh x \cosh x - 2 \cosh x \sinh x \\ = 0$$

طريقة ثانية للحل :

نعلم بأن : $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ وبالتالي يكون لدينا:

$$y = \sinh^2 x - \cosh^2 x = -(\cosh^2 x - \sinh^2 x) = -1$$

منه تكون قيمة المشتقة هي $y' = 0$

اشتقاق الدوال الزائدية العكسية: Derivation of Inverse Hyperbolic functions:

من تعريف ودراسة خواص الدوال الزائدية العكسية والدوال الزائدية نستنتج العلاقات التالية:

1- مشتقة الدالة \sinh^{-1} :

نعلم بأن: $y = \sinh^{-1} x \Leftrightarrow x = \sinh y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1 = \cosh y y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 y}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \text{ منها}$$

2- مشتقة الدالة \cosh^{-1} :

نعلم بأن: $y = \cosh^{-1} x \Leftrightarrow x = \cosh y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1 = \sinh y y' \Rightarrow y' = \frac{1}{\sinh y} = \frac{1}{\sinh^2 y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \text{ و منها}$$

3- مشتقة الدالة \tanh^{-1} :

نعلم بأن: $y = \tanh^{-1} x \Leftrightarrow x = \tanh y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1 = \sec^2 y y' = (1 - \tanh^2 y) y'$$

$$y' = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2} \text{ منها نحصل على:}$$

4- مشتقة الدالة \coth^{-1} :

نعلم بأن: $y = \coth^{-1} x \Leftrightarrow x = \coth y$ باشتقاق الطرفين نجد أن:

$$1 = (1 - \coth^2 y) y' \Rightarrow y' = \frac{1}{1 - \coth^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

منها نحصل على:

$$y' = \frac{1}{1 - \tanh^2 y} = \frac{1}{1 - x^2}$$

مثال:

• اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \sinh^{-1}(x^4 + 4x^3 - 4)e^{3x+1}$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا:

$$y = \sinh^{-1}(x^4 + 4x^3 - 4)e^{3x+1} + e^{3x+1} \frac{4x^3 + 12x^2}{\sqrt{1 + (x^4 + 4x^3 - 4)}}$$

مثال:

• اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \cosh^{-1}(\sin(3x + 23)) \sinh \frac{1}{x}$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2} \cosh^{-1} \sqrt{(\sin(3x + 23))} \cosh \left(\frac{1}{x} \right) + \sinh \left(\frac{1}{x} \right) \frac{3 \cos(3x + 23)}{\sqrt{(\sin(3x + 23))^2 - 1}}$$

مثال:

• اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \tanh^{-1}(x^3 + 3x + 6) + \frac{1}{x^2}$.

الحل:

من اشتقاق الدوال الزائدية يكون لدينا:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 3}{1 - (x^3 + 3x + 6)^2} - \frac{1}{x^3}$$

مثال:

• اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \sec h^{-1} x$.

الحل:

باستخدام خواص الدوال المثلثية العكسية نجد أن:

$$y = \sec h^{-1} x \Rightarrow x = \sec hy = \frac{1}{\cosh y}$$

بذلك تكون $x = \frac{2}{e^y + e^{-y}}$ وباشتقاق الطرفين نجد:

$$1 = \frac{-\sinh y y'}{\cosh^2 y}$$

ولكن: $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$ وبالتالي يكون لدينا:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\cosh^2 y}{\sinh y} = \frac{-\cosh^2 y}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \\ &= \frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}} = -\frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

مثال:

اوجد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = u^2 - 2u + 5$ إذا كان $u = \sinh x + \cosh x$ مع رسم الدالة التركيبية؟

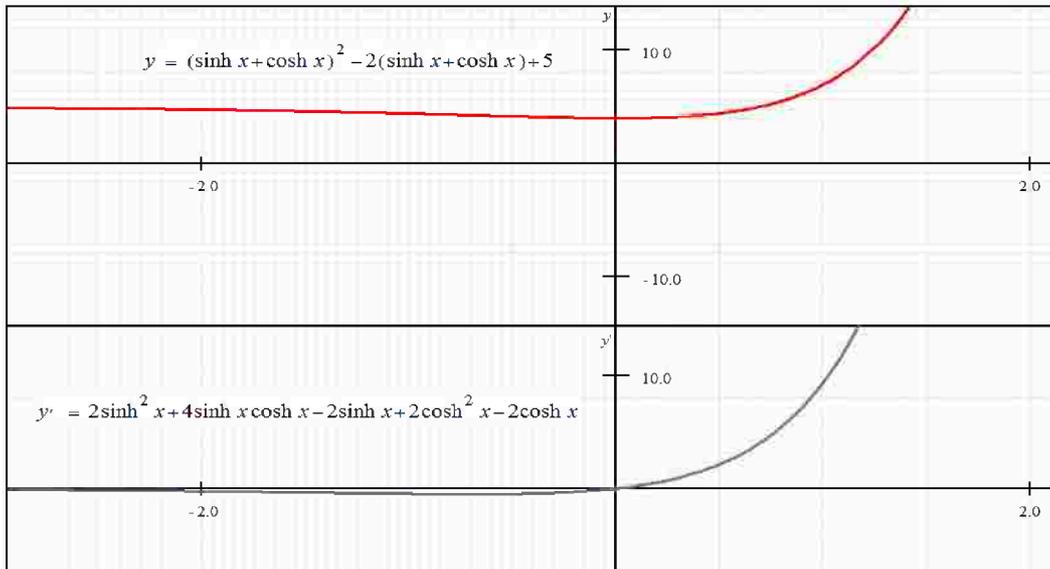
الحل:

نوجد مشتقة الدالة u والتي تكون على الصورة :

$$u' = \cosh x + \sinh x$$

$$\text{نعلم بأن: } y' = 2uu' - 2u' = 2u'(u - 1)$$

بذلك تكون المشتقة على النحو التالي: $y' = (\cosh x + \sinh x)(\sinh x + \cosh x - 1)$

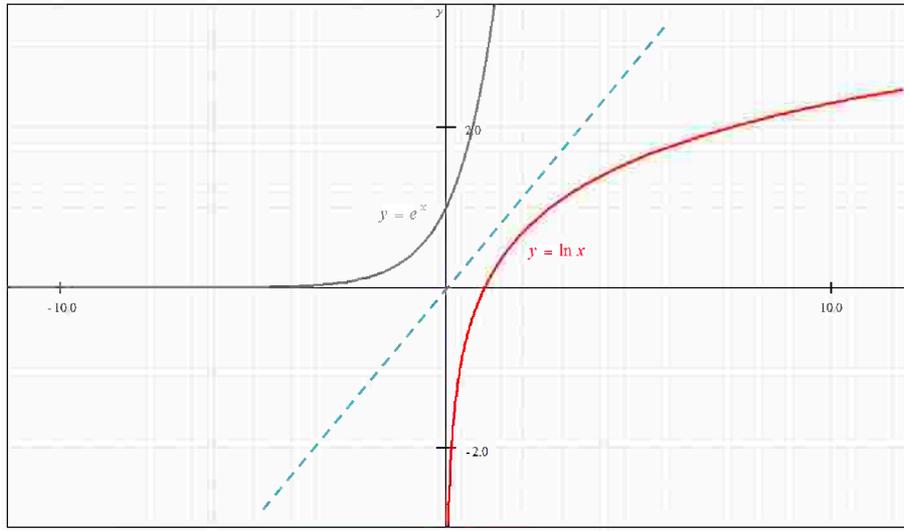


اشتقاق الدوال الأسية واللوغاريتمية:

The Derivation of Exponential and Logarithm functions

نلخص فيما يلي بعض الخواص الأساسية للدوال الأسية و اللوغاريتمية:

- الدالة الأسية نرسم لها بالرمز \exp تعرف $x \rightarrow e^x$ ، $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وهي دالة تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} ومشتقاتها بشكل عام $(\exp(x))' = \exp(x)$ وإذا كانت $x=0$ فإن $\exp(0) = e^0 = 1$ وهي دالة حقيقية والوحيدة التي تحقق هذه الخواص.



- الدالة الأسية دالة مستمرة و متزايدة على \mathbb{R} وبصفة عامة:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

- الدالة الأسية تحقق الخاصية التالية:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \text{لكل } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- الدالة $x \rightarrow e^x$ مستمرة و متزايدة على \mathbb{R} وهي الدالة العكسية للدالة اللوغاريتمية وتعرف على الشكل التالي:

$$\ln: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \rightarrow \ln x \quad \text{إذا } (y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y) \quad \text{لكل } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

- الدالة اللوغاريتمية قابله للاشتقاق على \mathbb{R} ومشتقاتها بشكل عام $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ لكل $x \in \mathbb{R}$

- الدالة الأسية دالة مستمرة و متزايدة على \mathbb{R} وبصفة عامة:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \ln(x) = -\infty$$

اشتقاق الدوال الأسية: The derivation of Exponential functions

1- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = f(x) = a^x ; a > 0$$

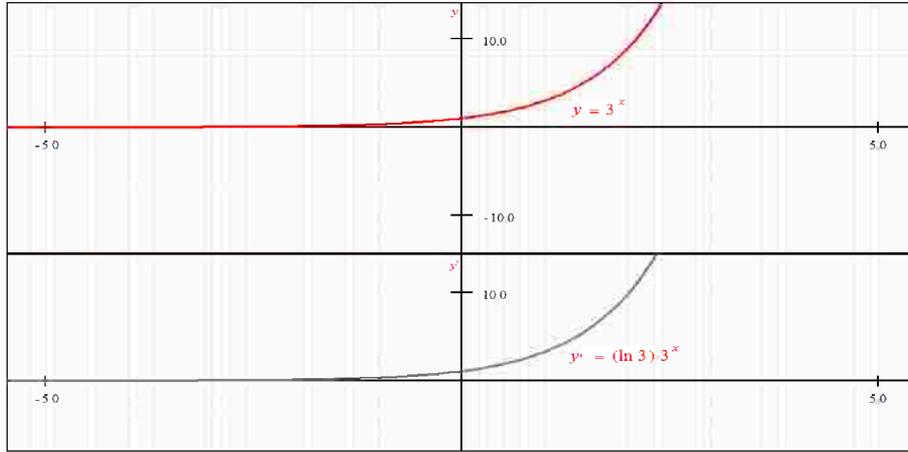
فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى :

$$y' = a^x \ln a$$

مثلا:

إذا كانت $y = 3^x$ فإنه كما هو موضح بالرسم:

$$y' = 3^x \ln 3$$



2- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = f(x) = ba^x ; a > 0$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى :

$$y' = ba^x \ln a$$

مثلا:

إذا كانت $f(x) = 5 \times 6^x$ فإن:

$$f'(x) = 5 \times 6^x \ln 6$$

3- إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$f(x) = ba^{f(x)}$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى كما يلي:

بوضع $u = f(x)$ حيث u قابلة للاشتقاق في x .

$$\therefore y = ba^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \cdot u'$$

مثال:

إذا كانت $f(x) = 8 \cdot 2^{(3x^2+4x+5)}$ فأوجد $f'(x)$.

الحل:

$$f'(x) = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)} \times \ln 2 \times (6x+4)$$

$$f'(x) = (48x+32) \times 2^{(3x^2+4x+5)} \times \ln 2$$

4- اشتقاق الدالة الأسية ذات الأساس $e \cong 2.718$

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة $y = be^x$ فإن:

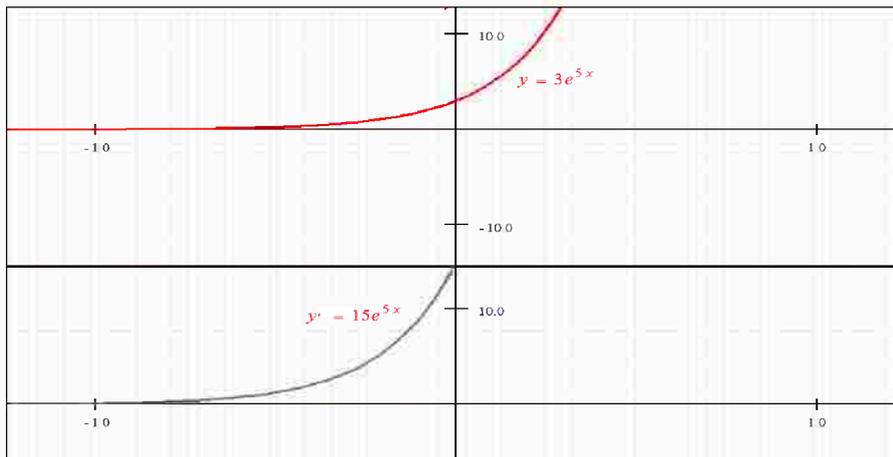
$$y' = be^x \ln e \frac{d}{dx}(x)$$

وحيث أن: $\ln e = 1$ عليه فإن: $y' = be^x$

مثلا:

إذا كانت $f(x) = 3e^{5x}$ فإن:

$$f'(x) = 15e^{5x}$$



اشتقاق الدوال اللوغاريتمية: The Derivative of Logarithm functions

1- إذا كانت $f'(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = b \log_a x \quad ; \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ تعطى:

$$y' = \frac{b \log_a e}{x}$$

مثلا:

إذا كانت $y = 3 \text{Log}_6(x)$ فإن:

$$y' = \frac{3 \log_6 e}{x}$$

2- إذا كانت $y = b \log_a f(x)$ حيث $a > 0, \quad a \neq 1$ فإن المشتقة الأولى تكون كما يلي:

$$y = b \text{Log}_a u \quad \text{حيث } u = f(x) \text{ قابلة للاشتقاق في } X$$

ومنه فإن المشتقة الأولى:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = b \frac{u'}{u} \text{Log}_a e$$

مثلا:

إذا كانت $y = 3 \text{Log}(6x^5)$ فإن:

$$y' = \frac{3(30x^4) \text{Log} x}{6x^5} = \frac{15x^4}{x^5} \text{Log} e = \frac{15}{x} \text{Log} e$$

3- إذا كانت $f(x)$ معرفة كما يلي:

$$y = b \ln x$$

فإن المشتقة الأولى للدالة $f(x)$ هي:

$$y' = \frac{b}{x} \quad \text{وحيث أن } \ln e = 1 \text{ بذلك } y' = \frac{b \ln e}{x}$$

مثلا:

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{v} \quad \text{فإن } y = \ln v$$

مثلا:

$$y' = \frac{2}{x} \quad \text{فإن } y = 2 \ln x$$

4- إذا كانت الدالة $y = b \ln f(x)$ فإن المشتقة الأولى يتم إيجادها كما يلي:

بوضع $u = f(x)$ حيث u قابلة للاشتقاق في x أي أن $y = b \ln u$

وبالتالي فإن المشتقة الأولى تكون:

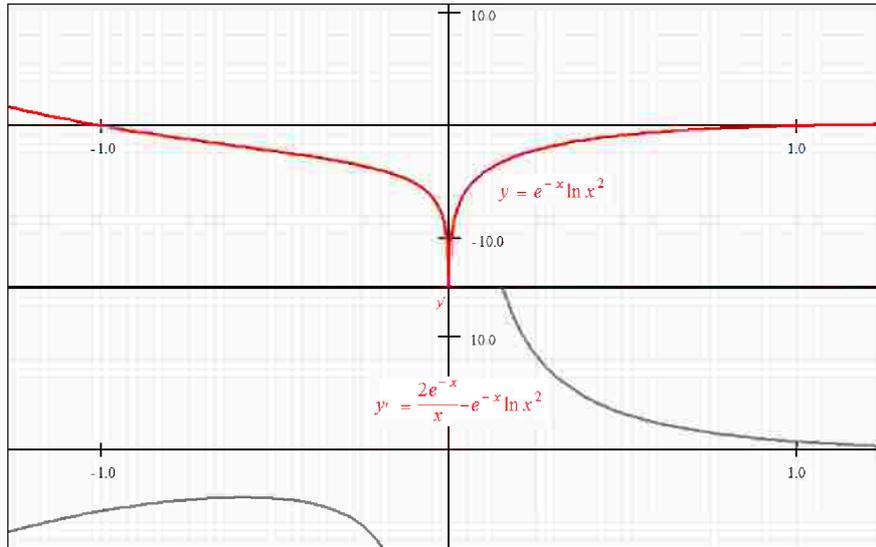
$$\frac{d y}{d x} = \frac{d y}{d u} \cdot \frac{d u}{d x} = b \frac{u'}{u} \ln e \quad ; \quad \ln e = 1$$

$$\therefore y' = \frac{d y}{d x} = b \frac{u'}{u}$$

مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = e^{-x} \ln x^2$

الحل:
$$y' = -e^{-x} \ln x^2 + e^{-x} \left(\frac{2x}{x} \right) = \left(\frac{2}{x} - \ln x^2 \right) e^{-x}$$



مثال:

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = e^{-2x} \ln x \sin 2x$

الحل:

تفاضل حاصل ضرب ثلاثة دوال:

$$y' = -2 e^{-2x} \ln x \sin 2x + e^{-2x} \frac{1}{x} \sin 2x + 2 e^{-2x} \ln x \cos 2x$$

التفاضل الضمني للدوال: derivative of Implicit functions

يقال عن الدالة $y = f(x)$ دالة صريحة لأنه يمكن فيها التعبير عن الدالة بواسطة المتغير x وبشكل عام وهذا هو الحال في معظم الأحيان كما في الدوال المدروسة في هذا الكتاب على سبيل المثال كل الدوال التالية صريحة:

$$y = |x+8| , \quad y = \sin x , \quad y = \sqrt{x+3} , \quad y = 3x^3 + 2x^2 - 7x - 10$$

ولكن نتداول أحياناً مع الصيغ دالية لا يمكن فيها فصل المتغير x عن الدالة y وتعطى المعادلة بالصيغة $f(x,y)=0$ وهنا تسمى الدالة ضمنية فمثلاً المعادلة: $y^2 - 2x^2y + \sqrt{x^2 + 3y^2} = 2x$ يصعب فيها فصل y وحسابها بدلالة x ، لإيجاد y' في دالة ضمنية نتبع الخطوات التالية:

1. بطريقة المباشرة:

أ. نشتق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x .

ب. نحل المعادلة الناتجة لحساب y' بدلالة x و y .

مثال:

$$\text{أوجد } \frac{dy}{dx} \text{ للدالة } xy^3 - 3x^2 = xy + 5$$

الحل:

المطلوب هنا اشتقاق y بالنسبة لـ x وهذا يعني أن y متعلقة بـ x يعني وجود دالة f حيث $y = f(x)$ ولكن f غير واضحة لدينا ، لذلك علينا الاشتقاق ضمناً فنحصل على:

$$\begin{aligned} y^3 + x(3y^2y') - 6x &= xy' + y \\ 3xy^2y' - xy' &= y - y^3 + 6x \\ y'(3xy^2 - x) &= y - y^3 + 6x \\ \therefore y' &= \frac{y - y^3 + 6x}{3xy^2 - x} \end{aligned}$$

مثال:

$$\text{إذا كانت المعادلة: } y^4 + 3y - 4x^3 = 5x + 1 \text{ فأوجد } \frac{dy}{dx}$$

الحل:

نفاضل بالنسبة للمتغير x :

$$\frac{d}{d x} (y^4 + 3 y - 4 x^3) = \frac{d}{d x} (5 x + 1)$$

$$4 y^3 \frac{d y}{d x} + 3 \frac{d y}{d x} - 12 x^2 = 5$$

$$\frac{d y}{d x} = \frac{12 x^2 + 5}{4 y^3 + 3}$$

2. تفاضل الدوال الضمنية بواسطة اللوغاريتم Logarithm differentiation

نفرض $f(x)$ و $g(x)$ دالتان قابلتان للتفاضل عندئذ لإيجاد المشتقة الأولى للدالة

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

1. نأخذ \ln الطرفين وعندها يكون لدينا:

$$\ln y = \ln [f(x)]^{g(x)} = g(x) \ln f(x)$$

2. نشتق طرفي المعادلة (1) لنحصل على:

$$\frac{y'}{y} = g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x)$$

3. نضرب طرفي المعادلة (2) بـ y لنحصل على:

$$y' = y \left[g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x) \right]$$

4. نعوض عن y بما تساوي فنجد أن:

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \left[g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x) \right]$$

مثال:

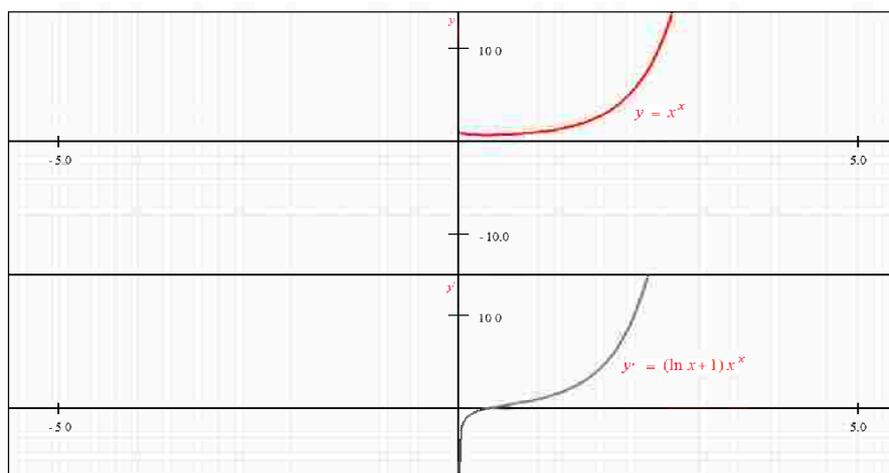
أوجد y' للدالة $y = x^x$ موضعاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نأخذ \ln طرفي المعادلة $y = x^x$ نحصل على $\ln y = \ln x^x = x \ln x$ نشتق

طرفي المعادلة على النحو التالي $\frac{y'}{y} = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$ نضرب طرفي المعادلة

بـ y نحصل على: $y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$.



مثال:

أوجد y' للدالة $y = (\sin x)^{\tan x}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نأخذ \ln طرفي المعادلة $y = (\sin x)^{\tan x}$ نحصل على

$$\ln y = \ln(\sin x)^{\tan x} = \tan x \ln \sin x$$

نشتق طرفي المعادلة على النحو التالي

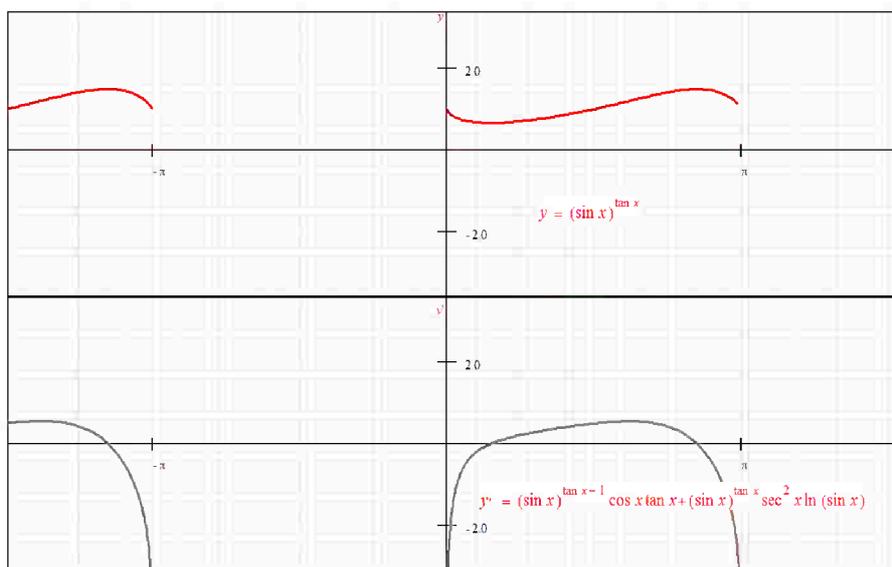
$$\frac{y'}{y} = \sec^2 x \ln \sin x + \tan x \cot x = \sec^2 x \ln \sin x + 1$$

نضرب طرفي المعادلة بـ y نحصل على:

$$y' = y(\sec^2 x \ln \sin x + \tan x \cot x = \sec^2 x \ln \sin x + 1)$$

بالتعويض عن $y = (\sin x)^{\tan x}$ نحصل على:

$$y' = (\sin x)^{\tan x} (\sec^2 x \ln \sin x + \tan x \cot x = \sec^2 x \ln \sin x + 1)$$



مثال:

أوجد y' للدالة $y = (x^2 + 1)^x$

الحل:

نأخذ \ln طرفي المعادلة $y = (x^2 + 1)^x$ نحصل على $\ln y = x \ln(x^2 + 1)$ نشتق

طرفي المعادلة على النحو التالي

$$\frac{y'}{y} = \ln(x^2 + 1) + x \times \frac{2x}{x^2 + 1} = \ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ y نحصل على

$$y' = y \left(\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right)$$

بالتعويض عن $y = (x^2 + 1)^x$ عن نحصل على:

$$y' = (x^2 + 1)^x \left(\ln(x^2 + 1) + \frac{2x^2}{x^2 + 1} \right)$$

مثال:

أوجد y' للدالة $y = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2(x^2+1)^3}{(x-1)^3(x^2+4)^2}}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

نأخذ لوغارثم طرفي المعادلة $y = \left(\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2} \right)^{\frac{1}{5}}$

لنحصل على $\ln y = \frac{1}{5} \ln \left(\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2} \right)$

وهذا يعني أن:

$$\begin{aligned} \ln y &= \frac{1}{5} (\ln(x+1)^2 + \ln(x^2+1)^3 - \ln(x-1)^3 - \ln(x^2+4)^2) \\ &= \frac{2}{5} \ln(x+1) + \frac{3}{5} \ln(x^2+1) - \frac{3}{5} \ln(x-1) - \frac{2}{5} \ln(x^2+4) \end{aligned}$$

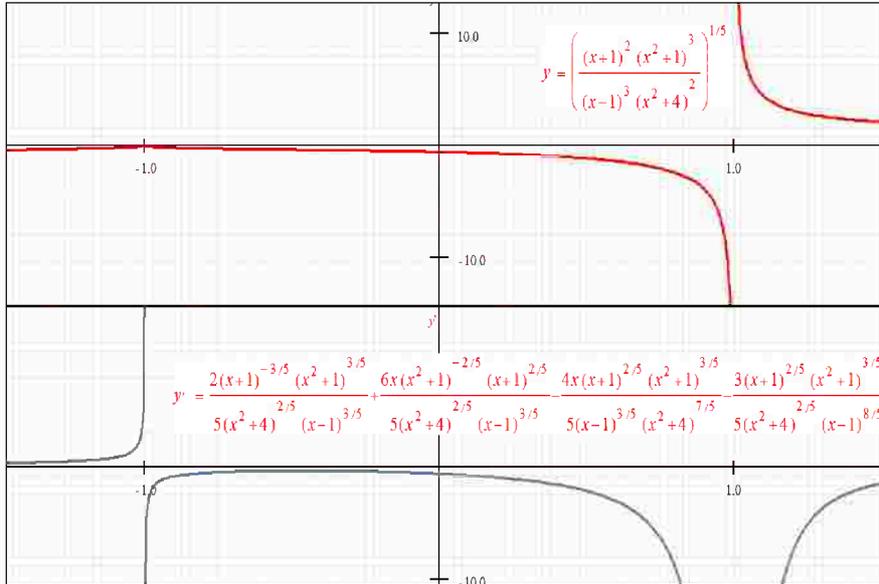
الآن نشتق ضمينا طرفي المعادلة لنحصل على:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{5} \frac{1}{1+x} + \frac{6}{5} \frac{1}{x^2+1} - \frac{3}{5} \frac{1}{x-1} - \frac{4}{5} \frac{x}{x^2+4}$$

نضرب طرفي المعادلة بـ $y = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2}}$

لنحصل على:

$$y' = \sqrt[5]{\frac{(x+1)^2 (x^2+1)^3}{(x-1)^3 (x^2+4)^2}} \left[\frac{2}{5} \frac{1}{1+x} + \frac{6}{5} \frac{x}{x^2+1} - \frac{3}{5} \frac{1}{x-1} - \frac{4}{5} \frac{x}{x^2+4} \right]$$



المشتقات من مراتب عليا High- order derivatives

نتكّن $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق عندها يمكن حساب المشتقة y' فإذا كانت قابلة للاشتقاق يمكن حساب المشتقة الثانية y'' وهكذا نتابع لحساب مشتقات من مراتب أعلى ولنرمز لهذه المشتقات بالشكل:

$$y', y'', y''', y^{(4)}, y^{(5)}, \dots, y^{(n)}$$

وتسمى $y^{(n)}$ المشتقة من المرتبة n للدالة $f(x)$.

مثال:

أوجد y' ، y'' ، y''' للدالة $y = x^4 + 2x^3 + x^2 + 3x + 5$.

الحل:

نوجد أولاً: y' على النحو التالي: $y' = 4x^3 + 6x^2 + 2x + 3$

وكذلك: $y'' = 12x^2 + 12x + 2$

ثم: $y''' = 24x + 12$

منها نحصل على: $y^{(4)} = 24$

مثال:

أوجد، y' ، y'' للدالة $y = x^4 + \sin 4x + \frac{1}{x} + e^{3x}$.

الحل:

نوجد أولاً: y' على النحو التالي: $y' = 4x^3 + 4 \cos 4x - \frac{1}{x^2} + 3e^{3x}$

ثم: $y'' = 12x^2 - 16 \sin 4x + \frac{2}{x^3} + 9e^{3x}$

مثال:

أوجد، y' ، y'' للدالة $y = \sqrt{x} + x^5 + \ln x$.

الحل:

نوجد أولاً: y' على النحو التالي: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 5x^4 + \frac{1}{x}$

ثم: $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} + 20x^3 - \frac{2}{x^3}$

مثال:

إذا كان $y = \sin(m \cos^{-1} x)$ برهن أن:

$$(1 - x^2) y'' - xy' + m^2 y = 0$$

الحل:

من الواضح أن $y' = \cos(m \cos^{-1} x) \frac{-m}{\sqrt{1-x^2}}$ بضرب y' في $\sqrt{1-x^2}$

نحصل على $\sqrt{1-x^2} y' = -m \cos(m \cos^{-1} x)$ ثم نوجد y'' على الشكل التالي:

$$\sqrt{1-x^2} y'' - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y' = -m(-\sin(m \cos^{-1} x) \frac{-m}{\sqrt{1-x^2}})$$

$$\sqrt{1-x^2} y'' - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} y' = -m^2 \left(\frac{\sin(m \cos^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

بالضرب في المقدار $\sqrt{1-x^2}$ نحصل على:

$$(1 - x^2) y'' - xy' + m^2 y = 0$$

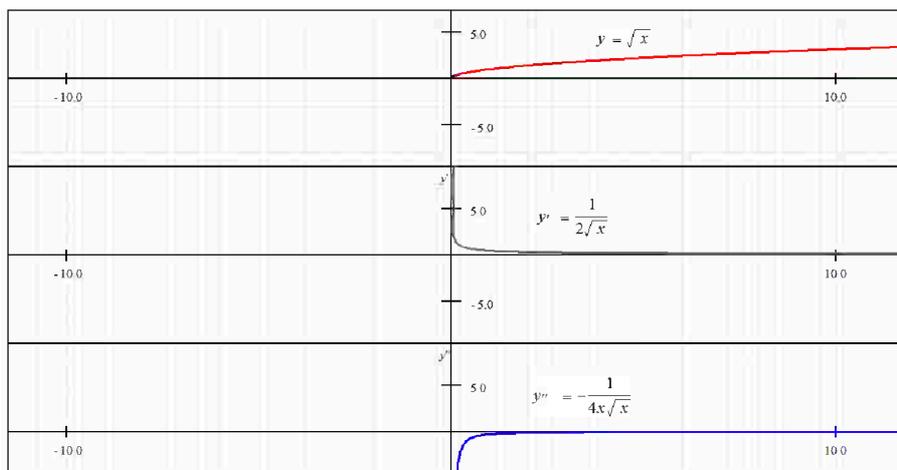
مثال:

إذا كان $y = \sqrt{x}$ أوجد y' ، y'' موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

وجد أولاً: y' على النحو التالي: $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ثم نوجد: $y'' = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}$



أمثلة محلولة 

1- إذا كانت $y = \frac{x}{2} - \frac{5x^{-3}}{2}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: من خواص تفاضل كثيرات الحدود نحصل على:

$$\therefore y = \frac{x}{2} - \frac{5x^{-3}}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} - \left(\frac{5}{2}\right)(-3)(x^{-4}) = \frac{1}{2} + \frac{15}{2}x^{-4}$$

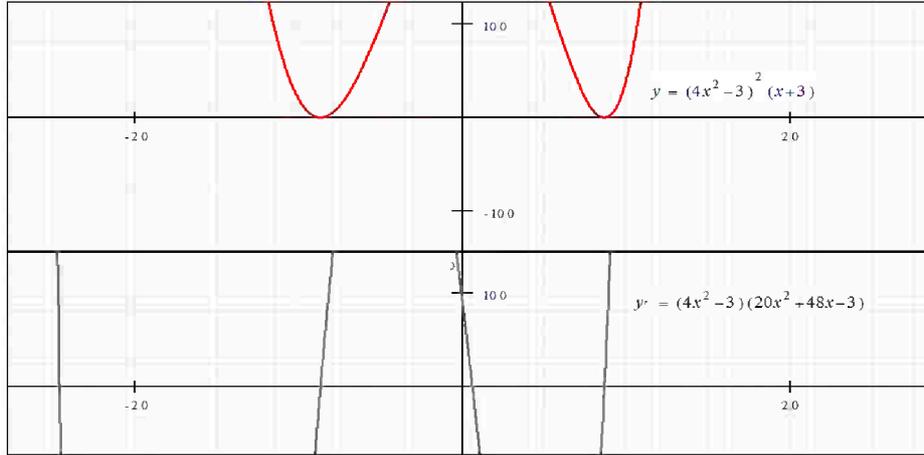
2- إذا كانت $y = (4x^2 - 3)^2(x + 5)$ أوجد $\frac{dy}{dx}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل كثيرات الحدود نحصل على:

$$\therefore y = (4x^2 - 3)^2(x + 5)$$

$$\frac{dy}{dx} = 2(4x^2 - 3)(8x)(x + 5) + (4x^2 - 3)^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (16x)(4x^2 - 3)(x + 5) + (4x^2 - 3)^2$$



3- إذا كانت $y = \frac{(2x^2 - 3)}{(x^2 + 7)^{\frac{1}{3}}}$ أوجد $\frac{dy}{dx}$.

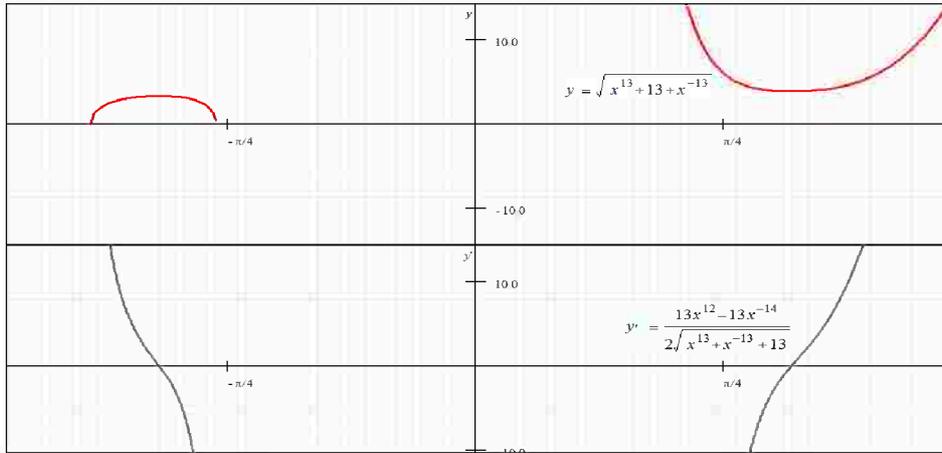
الحل: من خواص تفاضل الدوال القياسية نحصل على:

$$\begin{aligned} \frac{d y}{d x} &= \frac{(x^2 + 7)^{\frac{1}{3}}(4x) - (2x^2 - 3)\left(\frac{1}{3}(x^2 + 7)^{\frac{-2}{3}}\right)(2x)}{\left((x^2 + 7)^{\frac{1}{3}}\right)^2} \\ &= \frac{4x - \left(\frac{2}{3}x\right)(2x^2 - 3)(x^2 + 7)^{-1}}{(x^2 + 7)^{\frac{1}{3}}} \end{aligned}$$

4- إذا كانت $y = \sqrt{x^{13} + 13 + x^{-13}}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ موضعاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل الدوال الجذرية نحصل على:

$$\begin{aligned} \therefore y &= \sqrt[2]{x^{13} + 13 + x^{-13}} \\ \frac{d y}{d x} &= \frac{(1)(y'(x))}{2\sqrt{y(x)}} = \frac{(1)(13x^{12} - 13x^{-14})}{2\sqrt[2]{x^{13} + 13 + x^{-13}}} \\ \therefore \frac{d y}{d x} &= \frac{(13x^{12} - 13x^{-14})}{2\sqrt[2]{x^{13} + 13 + x^{-13}}} \end{aligned}$$



5- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = x^3 \sin^3 x^3$

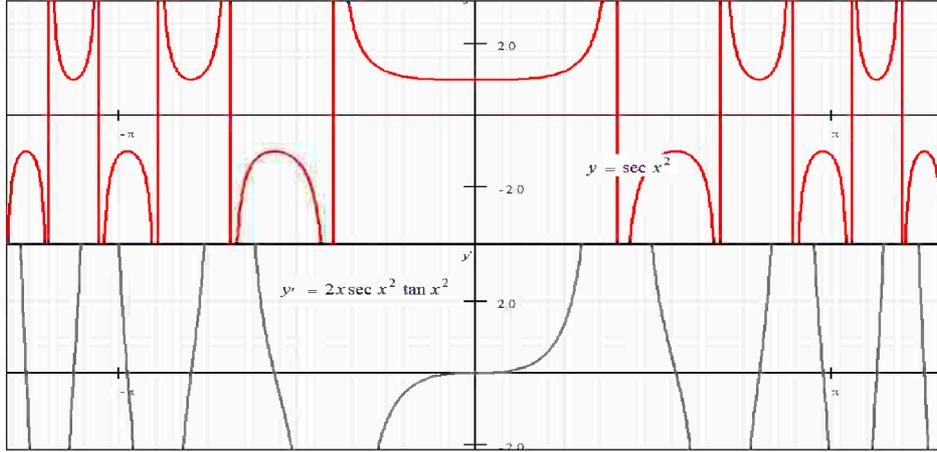
الحل: من خواص تفاضل الدوال الأسية و المثلثية نحصل على:

$$\begin{aligned} y' &= x^3 (3 \sin^2 x^3 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2) + \sin^3 x^3 (3x^2) \\ y' &= 9x^5 \sin^2 x^3 \cos x^3 + 3x^2 \sin^3 x^3 \end{aligned}$$

6- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = \sec x^2$ موضعاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل الدوال المتثلثة نحصل على:

نعلم أن $(\sec x)' = \tan x \sec x$ وبالتالي: $y' = 2x(\tan x^2 \sec x^2)$



7- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

الحل: من خواص تفاضل الدوال المتثلثة نحصل على:

$$y'(x) = \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2}$$

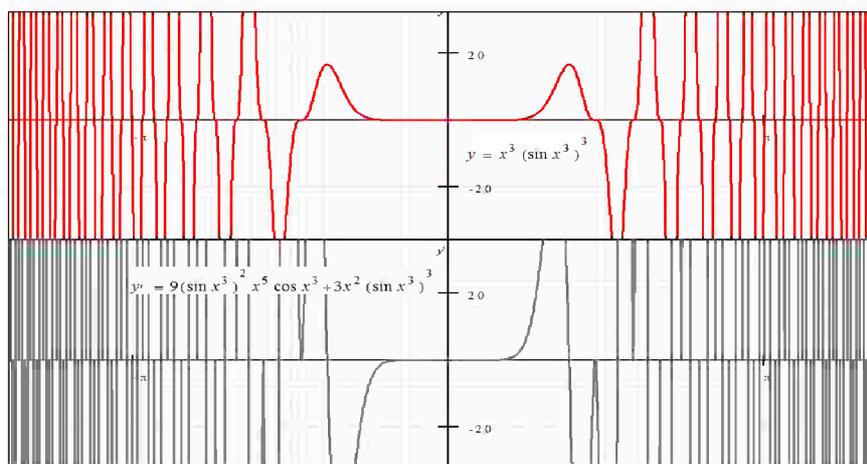
$$y'(x) = \frac{1 + \cos x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}$$

8- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = x^3(\sin x^3)^3$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل: من خواص تفاضل الدوال الأسية و المتثلثة نحصل على:

$$y' = x^3 3(\sin x^3)^2 \cos x^3 3x^2 + 3x^2(\sin x^3)^3$$

$$y' = 9x^5(\sin x^3)^2 \cos x^3 + 3x^2(\sin x^3)^3$$



9- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = \sqrt{\csc x^3}$.

الحل:

$$y = \sqrt{\csc x^3} \rightarrow y = (\csc x^3)^{\frac{1}{2}} \rightarrow y = \csc^{\frac{1}{2}} x^3$$

$$y' = \frac{1}{2} (\csc x^3)^{-\frac{1}{2}} (3x^2)(-\cot x^3 \csc x^3)$$

$$y' = \frac{-3}{2} \csc^{\frac{1}{2}} x^3 \cot x^3 \csc x^3$$

10- أوجد $y'(x)$ ، إذا كان $y = x \tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

الحل: من خواص تفاضل الدوال المثلثية نحصل على:

$$y' = \tan\left(\frac{1}{x}\right) + \left(x \cdot \frac{-1}{x^2} \sec^2\left[\frac{1}{x}\right]\right)$$

$$y' = \tan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \sec^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

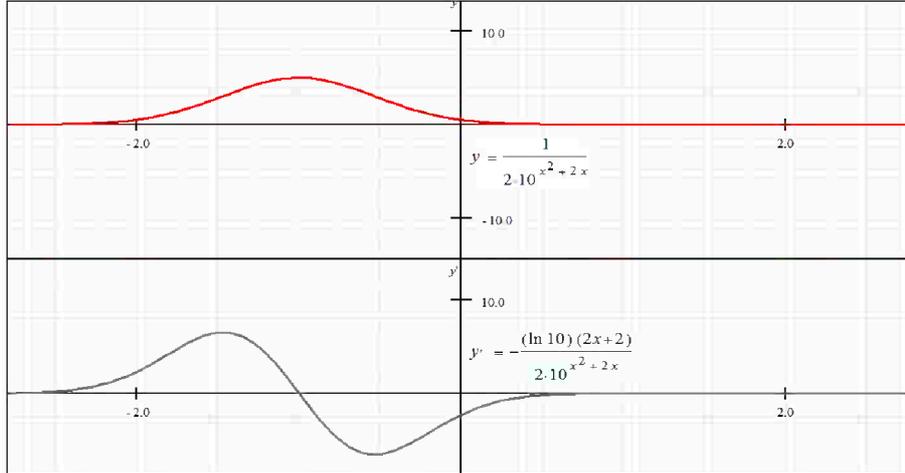
11- أوجد المشتقة الأولى إذا كانت $y = \frac{1}{2 \times 10^{x^2+2x}}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$\therefore y = \frac{1}{2 \times 10^{x^2+2x}}$$

$$y' = \frac{-1 \times (2 \cdot 10^{x^2+2x} \cdot \ln 10)(2x+2)}{(2 \times 10^{x^2+2x})^2}$$

منها نحصل على: $\therefore y' = \frac{-4 \times (10^{x^2+2x} \cdot \ln 10)(x+1)}{(2 \times 10^{x^2+2x})^2} = \frac{-\ln 10(x+1)}{10^{x^2+2x}}$



12- أوجد المشتقة الأولى ، إذا كانت $y = x^2 3^x$

الحل:

$$\begin{aligned} y' &= x^2 \cdot \frac{d}{dx}(3^x) + 3^x \frac{d}{dx}(x^2) \\ &= x^2 3^x \ln 3 + 3^x (2x) \\ \therefore y' &= x 3^x [x \ln 3 + 2] \end{aligned}$$

13- أوجد المشتقة الأولى ، إذا كانت $y = e^{-2x} \sin 3x$

الحل:

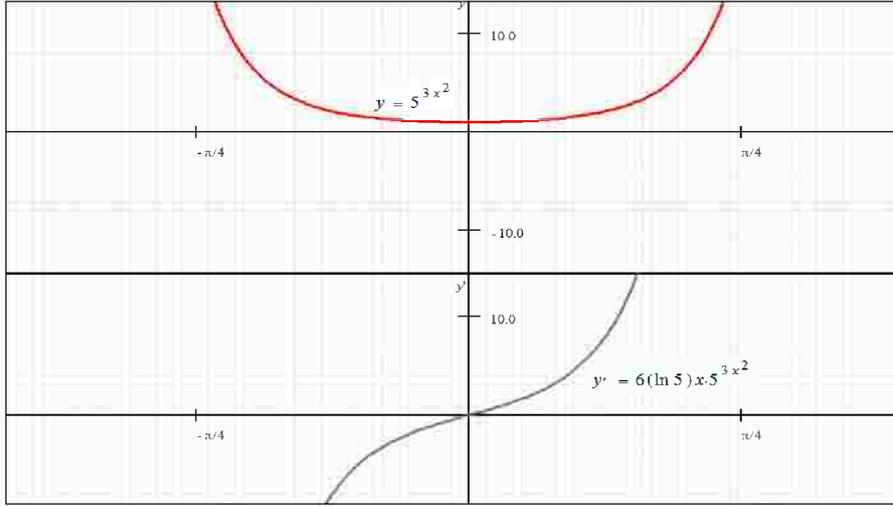
$$\begin{aligned} \therefore y &= e^{-2x} \sin 3x \\ y' &= e^{-2x} \left(\frac{d}{dx}(\sin 3x) \right) + \sin 3x \left(\frac{d}{dx}(e^{-2x}) \right) \\ &= e^{-2x} (3 \cos 3x) + \sin 3x (e^{-2x}(-2)) \\ &= 3e^{-2x} \cos 3x - 2e^{-2x} \sin 3x \\ \therefore &= e^{-2x} (3 \cos 3x - 2 \sin 3x) \end{aligned}$$

14- أوجد المشتقة الأولى، إذا كانت $y = 5^{3x^2}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y' = 5^{3x^2} (\ln 5) \cdot \frac{d}{dx} (3x^2)$$

منها نحصل على: $y' = 5^{3x^2} (\ln 5)(6x)$



15- أوجد المشتقة الأولى y' ، إذا كان $y = \ln(x+3)^2$

الحل:

$$\because y = \ln(x+3)^2$$

$$y = 2 \ln(x+3)$$

$$\therefore y' = 2 \left(\frac{1}{x+3} \right) \cdot \frac{d}{dx} (x+3) = \frac{2}{x+3}$$

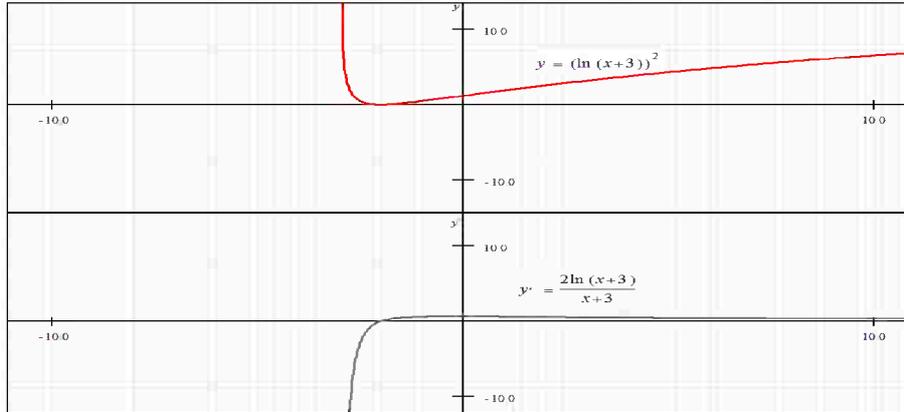
16- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كان $y = \ln^2(x+3)$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$y' = 2 \ln(x+3) \cdot \frac{d}{dx} \ln(x+3)$$

$$= 2 \ln(x+3) \cdot \left(\frac{1}{x+3} \right) \cdot \frac{d}{dx} (x+3)$$

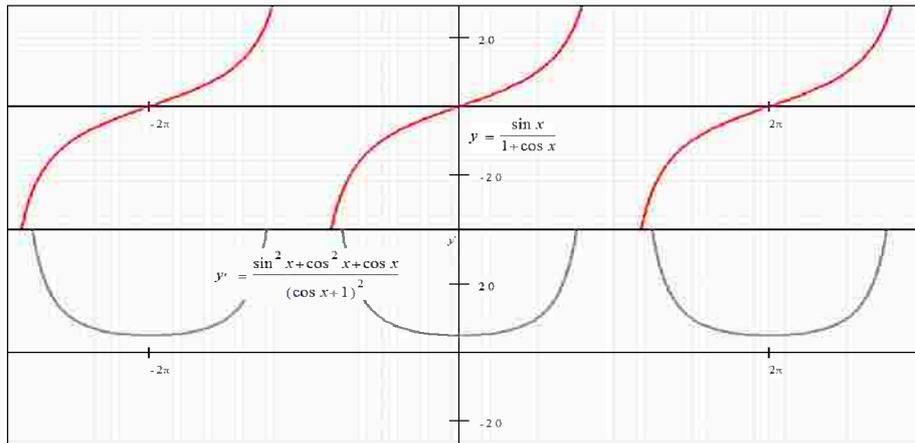
$$= \frac{2 \ln(x+3)}{x+3}$$



17- أوجد y' إذا كانت $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - (\sin x)(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\ &= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x} \end{aligned}$$



18- أوجد y' إذا كانت $y = (3x+1)^6 \sqrt{2x-5}$.

الحل:

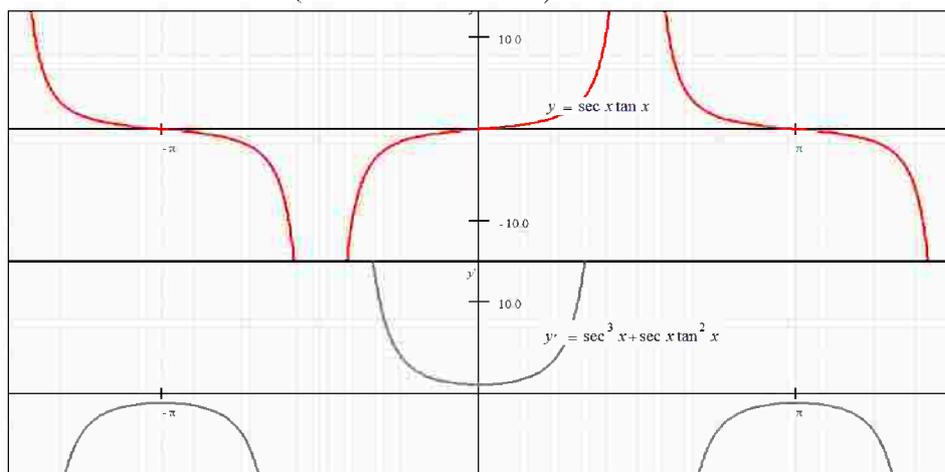
$$y = (3x + 1)^6 (2x - 5)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}
 y' &= (3+1)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)(2x-5)^{-1/2} \cdot (2) + (2x-5)^{1/2} \cdot (6)(3x+1)^5 \\
 &= \frac{(3x+1)^6}{\sqrt{2x-5}} + 18 \times 3x+1) \sqrt{2x-5} \\
 &= \frac{(3x+1)^6 + 18(3+1)^5(2x-5)}{\sqrt{2x-5}} \\
 &= \frac{(3x+1)^5(39x-89)}{\sqrt{2x-5}}
 \end{aligned}$$

19- أوجد y' إذا كانت $y = \sec x \tan x$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل:

$$\begin{aligned}
 y' &= \sec x \sec^2 x + \tan x \sec x \tan x \\
 &= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x \\
 &= \sec x (\sec^2 x + \tan^2 x)
 \end{aligned}$$



20- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كان $y = \log_3(3x^2 - 5)$

الحل:

$$\begin{aligned}
 \because y &= \log_3(3x^2 - 5) \\
 \therefore y' &= \frac{1}{3x^2 - 5} \log_3 e \cdot \frac{d}{dx}(3x^2 - 5) = \frac{6x}{3x^2 - 5} \log_3 e
 \end{aligned}$$

21- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \frac{1}{(4x^2 + 6x - 7)^3}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

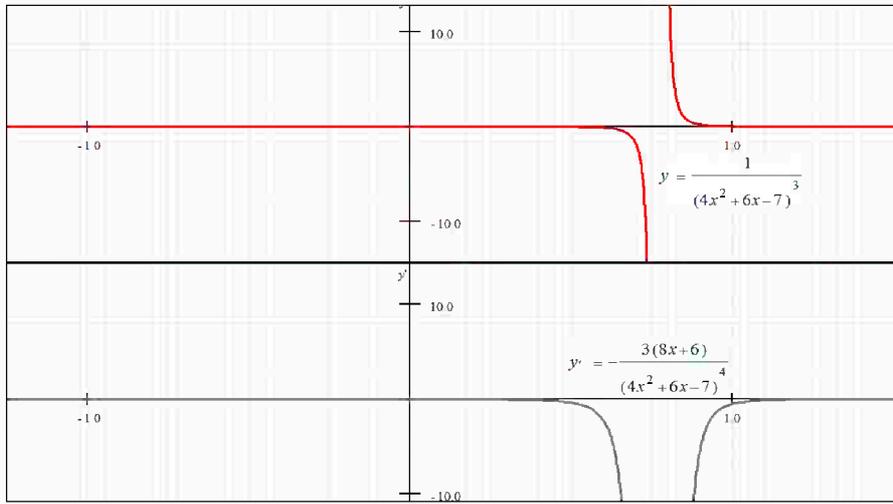
الحل:

$$y = (4x^2 + 6x - 7)^{-3}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -3(4x^2 + 6x - 7)^{-4} \cdot (8x + 6) = \frac{-6(4x + 3)}{(4x^2 + 6x - 7)^4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6(4x + 3)}{(4x^2 + 6x - 7)^4}$$

منها



22- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كان $y = \log_3(\tan e^{x^2})$.

الحل:

$$\because y = \ln_3(\tan e^{x^2})$$

$$\therefore y' = \frac{1}{\tan e^{x^2}} \cdot \frac{d}{dx}(\tan e^{x^2}) = \frac{1}{\tan e^{x^2}} \cdot \sec e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{x^2} = \frac{2x e^{x^2} \sec e^{x^2}}{\tan e^{x^2}}$$

23- أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = (2x + 5)^3 \cdot (3x - 1)^4$.

الحل:

$$f'(x) = (2x + 5)^3 \cdot 4(3x - 1)^3 \cdot (3) + (3x - 1)^4 \cdot 3(2x + 5)^2 (2)$$

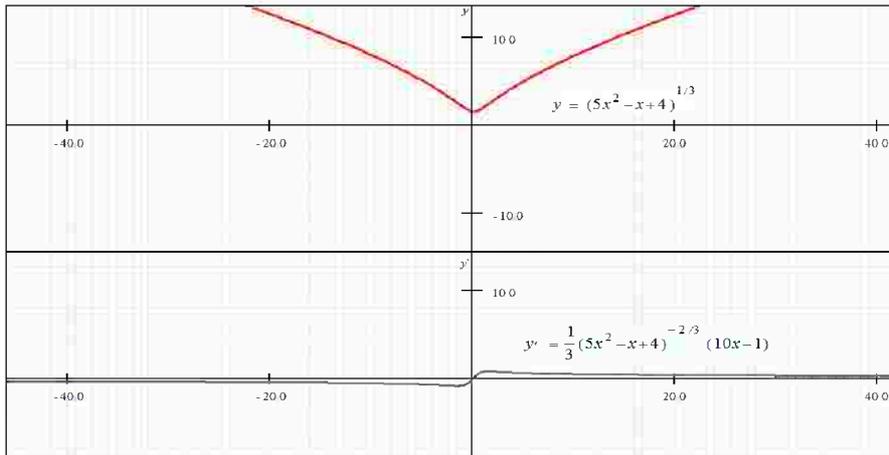
$$= 6(2x + 5)^2 (3x - 1)^3 [2(2x + 5) + (3x - 1)]$$

$$= 6(2x + 5)^2 (3x - 1)^3 (7x + 9)$$

24- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $f(x) = y = \sqrt[3]{5x^2 - x + 4}$ موضحاً الإجابة بالرسم.

الحل: $y = (5x^2 - x + 4)^{1/3}$

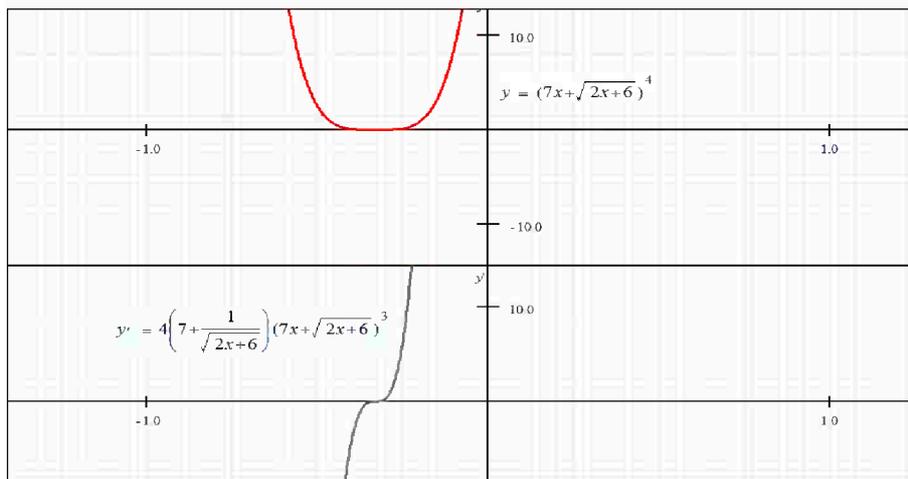
$$\frac{dy}{dx} = \frac{10x-1}{3\sqrt[3]{(5x^2-x+4)^2}} \text{ منها } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}(5x^2-x+4)^{-2/3} \cdot (10x-1)$$



25- أوجد $f'(x)$ إذا كانت $f(x) = (7x + \sqrt{2x+6})^4$.

الحل:

$$f'(x) = 4(7x + \sqrt{2x+6})^3 \cdot \left(7 + \frac{2x}{2\sqrt{2x+6}} \right)$$



26- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = \tan^3 4x$.

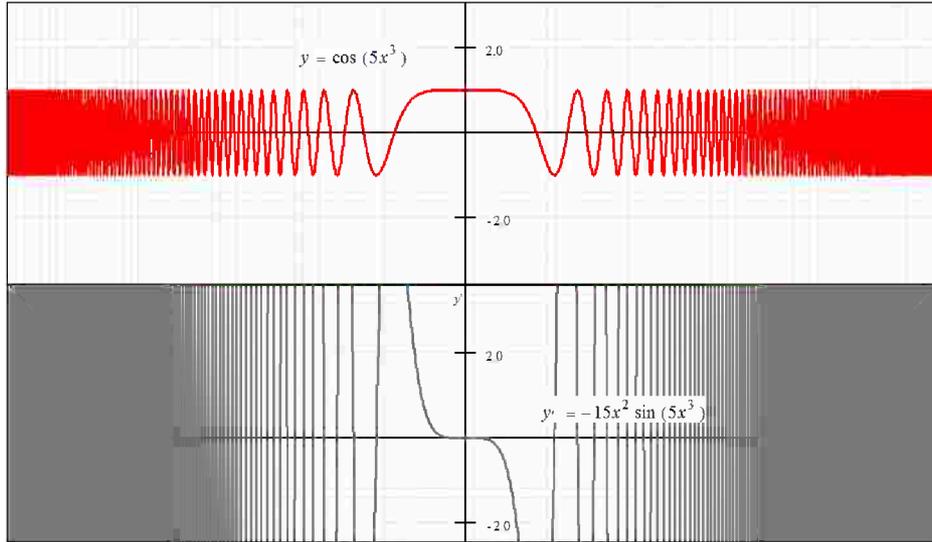
الحل:

$$\begin{aligned} y' &= 3(\tan 4x)^2 \cdot \sec^2 4x \cdot (4) \\ &= 3(\tan^2 4x)(4 \sec^2 4x) \\ &= 12 \tan^2 4x \sec^2 4x \end{aligned}$$

27- أوجد y' إذا كانت $y = \cos(5x^3)$.

الحل:

$$y' = [-\sin(5x^3)] \cdot 15x^2 = -15x^2 \sin(5x^3)$$



28- أوجد y' إذا كانت $y = \sqrt{\sin 6x}$.

الحل:

$$\begin{aligned} y &= (\sin 6x)^{1/2} \\ y' &= \frac{1}{2} (\sin 6x)^{-1/2} \cdot \cos 6x \cdot (6) \\ &= \frac{3 \cos 6x}{\sqrt{\sin 6x}} \end{aligned}$$

29- أوجد y' إذا كانت $y = x^2 \sin y$.

الحل: من خواص التفاضل الضمني نحصل على:

$$y' = (x^2)(\cos y \cdot y') + (\sin y)(2x)$$

$$y' = (x^2 \cos y) y' + 2x \sin y$$

$$y' - (x^2 \cos y) y' = 2x \sin y$$

$$y'(1 - x^2 \cos y) = 2x \sin y$$

$$y' = \frac{2x \sin y}{(1 - x^2 \cos y)}$$

30- أوجد y' إذا كانت $4xy^3 - x^3y + x^3 - 5x + 6 = 0$.

الحل: من خواص التفاضل الضمني نحصل على:

$$4x(3y^2 y') + 4y^3 - (x^3 y' + 3x^2 y) + 3x^2 - 5 = 0$$

$$7xy^2 y' + 4y^3 - x^3 y' - 3x^2 y + 3x^2 - 5 = 0$$

$$y'(7xy^2 - x^3) + 4y^3 - 3x^2 y + 3x^2 - 5 = 0$$

$$y' = \frac{-4y^3 + 3x^2 y - 3x^2 + 5}{7xy^2 - x^3}$$

31- أوجد y' إذا كانت $\sin(\cos(xy) + x^3 y) = 0$.

$$\cos(\cos(xy))(-\sin(xy))(xy' + y) + x^3 y' + y3x^2 = 0$$

$$-\cos(\cos(xy)) \sin(xy)(xy') + x^3 y'$$

الحل:

32- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $e^{xy} = x$.

الحل:

$$\therefore e^{xy} = x$$

$$(y + x y') e^{xy} = 1$$

$$y e^{xy} + x y' e^{xy} = 1$$

$$x y' e^{xy} = 1 - y e^{xy}$$

$$\therefore y' = \frac{1 - y e^{xy}}{x e^{xy}}$$

33- أوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كان $y^3 e^{xy} = \tan x$.

الحل:

$$\therefore y^3 e^{xy} = \tan x$$

$$3y^2 y' e^{xy} + (y + xy') e^{xy} y^3 = \sec^2 x$$

$$3y^2 y e^{xy'} + y^4 e^{xy} + xy' y^3 e^{xy} = \sec^2 x$$

$$y'(3y^2 e^{xy} + xy^3 e^{xy}) = \sec^2 x - y^4 e^{xy}$$

$$\therefore y' = \frac{\sec^2 x - y^4 e^{xy}}{3y^2 e^{xy} + xy^3 e^{xy}}$$

34- إذا كانت $x^2 - 2xy + y^2 = 0$ فاثبت أن $y' = 1$.

الحل:

$$\frac{d}{dx}(x^2 - 2xy + y^2) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x - 2y - 2x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(2y - 2x) = 2y - 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x}{2y - 2x} = 1$$

35- أوجد y' إذا كانت $x^2 + y^2 = 1$.

الحل: من خواص التفاضل الضمني نحصل على:

$$2x + 2yy' = 0$$

$$yy' = -x$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Summary

- Let $y = f(x)$ be defined on an open interval (a, b) :

Then the derivative of $f(x)$ at $x \in (a, b)$, denoted by $f'(x)$, is defined by:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Whenever the limit exists.

- The function $y = f(x)$ is differentiable at the point $x = x_0$ if the derivative of $f(x)$ exists at this point. That is, if

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{exists.}$$

- **Theorem:**

If the function $y = f(x)$ is differentiable at the point $x = x_0$, Then this function is continuous at this point.

- **Some laws of differentiations:**

Let C be a constant and $f(x)$ and $g(x)$ be two differentiable at the point x , then:

$$1: \frac{d}{dx} C = 0$$

$$2: \frac{d}{dx} (Cf(x)) = Cf'(x)$$

$$3: \frac{d}{dx} (f(x) \pm g(x)) = f'(x) \pm g'(x)$$

$$4: \frac{d}{dx} (f(x) \times g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$5: \frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}, \quad g(x) \neq 0$$

- The first derivative of the composite function (Chain rule)

Let $f(x)$ and $g(x)$ be two differentiable functions at x , If $y = f(u)$ and $u = g(x)$, then **composite function:**

$$y = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u)$$

Is differentiable at x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- **From Chain rule, we deduce the following laws:**

$$1: \frac{d}{dx} [f(x)]^n = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$$

$$2: \frac{d}{dx} a^{f(x)} = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x) \quad , \quad a > 0$$

$$3: \frac{d}{dx} e^{f(x)} = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

$$4: \frac{d}{dx} \text{Log}_a f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \text{Log}_a e$$

$$5: \frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$6: \frac{d}{dx} \sin[f(x)] = \cos[f(x)] f'(x)$$

$$7: \frac{d}{dx} \cos[f(x)] = -\sin[f(x)] f'(x)$$

$$8: \frac{d}{dx} \tan[f(x)] = \sec^2[f(x)] f'(x)$$

$$9: \frac{d}{dx} \cot[f(x)] = -\csc^2[f(x)] f'(x)$$

$$10: \frac{d}{dx} \sec[f(x)] = \sec[f(x)] \tan[f(x)] f'(x)$$

$$11: \frac{d}{dx} \csc[f(x)] = -\csc[f(x)] \cot[f(x)] f'(x)$$

The derivative of the inverse Trig functions:

$$1: \frac{d}{dx} \sin^{-1}[f(x)] = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$2: \frac{d}{dx} \cos^{-1}[f(x)] = \frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

$$3: \frac{d}{dx} \tan^{-1}[f(x)] = \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$4: \frac{d}{dx} \cot^{-1}[f(x)] = \frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}$$

$$5: \frac{d}{dx} \sec^{-1}[f(x)] = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}}$$

$$6: \frac{d}{dx} \csc^{-1}[f(x)] = \frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{f^2(x)-1}}$$

- If the variables x and y were given implicitly as in the equation $f(x, y) = 0$ then to find y' of the implicit function we follow these steps:

1. We differentiate both sides with respect to x .

2. We solve the resulting equation in y' and find y' as a function of x, y .

- Let $f(x)$ and $g(x)$ be two differentiable functions to find first derivative of $y = [f(x)]^{g(x)}$ we follow the next steps:

1. Take logarithm both sides then:

$$\ln y = \ln [f(x)]^{g(x)} = g(x) \cdot \ln f(x)$$

2. differentiale both sides:

$$\frac{y'}{y} = g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x)$$

3. Multiplying by y :

$$y' = y \left[g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x) \right]$$

4. Substituting by the value of y :

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \left[g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} + g'(x) \ln f(x) \right]$$

تمارين على الفصل الرابع

1- أوجد المشتقة الأولى $f'(x)$ باستخدام التعريف للدوال التالية: ✎

1: $f(x) = 4x^6$

2: $f(x) = (x^2 + 3)(x - 6)$

3: $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3$

4: $f(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 5)$

5: $f(x) = (x^3 + x^2)(x - 1)$

6: $f(x) = \tan x^4 + \cos(\sin x^2) - \sec(\sqrt{x^3})$

7: $f(x) = (x^2 + 12)(\sqrt{x} - 1)$

8: $f(x) = x^{\frac{4}{7}} + 13x^{\frac{2}{3}} - 10 \sin x$

9: $f(x) = e^{x^3} + \ln x^2 + \cos x - \tan(\sqrt{x})$

10: $f(x) = \sec x^4 + \cot 3x^2 - 15x$

2- أوجد المشتقة الأولى $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية موضحاً الإجابة بالرسم: ✎

1: $y = x^2 \cos \sqrt{x}$

2: $y = \frac{x}{(x^2 - 1)^4}$

3: $y = \frac{x}{(x^2 - 1)^4}$

4: $y = \frac{x}{(x^2 - 1)^4}$

5: $y = (6x - 7)^3 \cdot (8x^3 + 9)^2$

6: $y = x^3 \sin x$

7: $y = 2x \cot x + x^2 \tan x$

8: $y = \sqrt[3]{8x^3 + 27}$

9: $y = 10\sqrt{x^3} + \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$

10: $y = \frac{4}{(9x^2 + 16)^{2/3}}$

3- أوجد المشتقة الأولى y' إذا كانت: ✎

1: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 100$

2: $8x^2 + y^2 = 10$

$$3: y^2 = x \cos y$$

$$4: 2x^2 + \sin(xy) - \tan \sqrt{x} = xy$$

$$5: \cos y \sqrt{x} + \cot x^2 \sqrt{y} = \sec(x^2 y)$$

$$6: \cot(yx^2) + \frac{y^2}{\sin(xy)} = \csc(x)$$

$$7: e^{\sin(x)} + \ln(xy) = \sqrt{\ln(xy)}$$

$$8: \cot\left(\frac{x\sqrt{y}}{y}\right) + e^{x^4} = \ln(\sin(xy))$$

$$9: 18x^2y + y^2e^{xy} = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{xy}}\right)$$

$$10: (x^3 - y\sqrt{x})(\sqrt{yx} - \csc(x)) = \cot(x)$$

4- إذا كانت $y = e^x \sin x$ برهن أن:

$$y'' - 2y' + 2y = 0$$

5- أوجد المشتقة الرابعة لكل من الدوال التالية:

$$1: y = x^5 - 3x^3 + 5x^2 + 1$$

$$2: y = e^{x^2+1}$$

$$3: y = \sin 3x$$

6- أوجد مشتقة الدوال التالية إلى الدرجة n ثم حدد درجة كل مشتقة فيها:

$$1: y = 5x^3 - 2x^2 + 5x + 1$$

$$2: y = x^3 e^{x^2+1}$$

$$3: y = x^2 - 5x + 9$$
