الفصل السادس

الملائمة باستخدام طريقة المربعات الصغرى

يحتوي هذا الفصل على:

1.6 تقديم

في المعتاد يكون بمعيتنا جدول به بيانات كما بالجدول (1.6) حيث $(x_i, f(x_i))$ تمثل النقطة i و f الدالة تحت الدراسة.

فإذا افترضنا أن القيم الموجودة بالجدول دقيقة فإنه يمكننا الحصول على قيمة f عند أي نقطة $\overline{X}$ وذلك باستخدام الطرق العددية المعروفة من استكمال وغيره .

غير أن القيم بالجدول عادة ما تكون تقريبية مثلا القياسات بمعمل فيزياء أو قياسات هندسية وعليه فإن هذه القيم ترتبط بأخطاء مصدرها الأجهزة المستخدمة للقياس أو الإنسان أو غير ذلك .

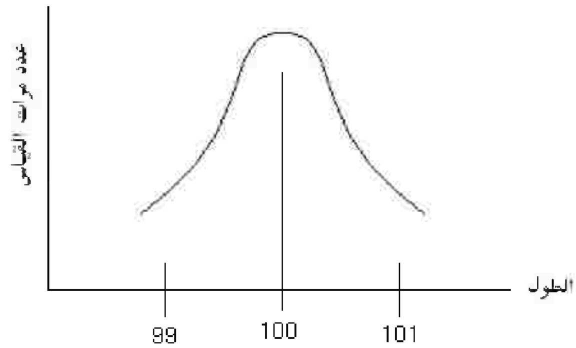
الجدول (1.6)- بيانات

$f(x_i)$	x_i
$f(x_1)$	x_1
$f(x_2)$	x_2
$\vdots$	$\vdots$
$f(x_n)$	x_n

لنفترض أن الأخطاء في $f(x_i)$ هي ε_i وحيث ε_i يمكن أن تكون موجبة أو سالبة . فمثلا لو طلب منا قياس قطعة معدنية طولها مائة سنتمتر بمسطرة طولها 30 سم فإننا سوف نقوم بقياسها العديد من المرات وفي كل مرة نحصل على جواب قريب من المائة ولكنها كلها تختلف بمليمترات بسيطة.

ولو قمنا بالعديد من القياسات وقمنا برسمها بيانياً لحصلنا على الشكل (1.6)

الذي يمثل، فيه المحور الأفقي الطول والمحور الرأسي عدد مرات القياس ؛و الشكل الذي حصلنا عليه يسمى بشكل الجرس.



الشكل (1.6)- شكل الجرس

وتوزيعة الأخطاء في مثل هذه الحالة تسمى بالتوزيعة الجاوسية أو التوزيعة الطبيعية.

من المنحنى نلاحظ أن معظم القياسات كانت بالقرب من 100 سم وقليل منها هنا وهناك. هذا بدوره يقودنا إلى أن الأخطاء العشوائية يمكن التخلص منها (بطريقة متوسطية) من جدول بيانات إذا تواجدت لدينا قياسات كافية.

وعليه فإن طريقة ملائمة المنحنيات (curve fitting) هي في الحقيقة عملية أخذ متوسط للعديد من القياسات لكميات مختلفة، وفي ذلك نفترض أن هذه الكميات تتبع معادلة ما بسيطة.

وحيث إنه يمكن ملائمة عدد من المنحنيات السلسة (smooth curves) لنفس

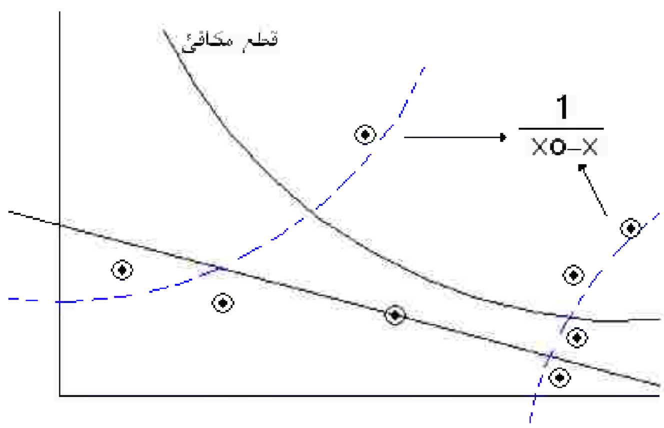
الفئة من البيانات، عليه نحن بحاجة إلى تدقيق وحكم حول اختيار ((الملائم الجيد)) وهذا يعني: نحن بحاجة إلى إجابة على السؤال ((إلى أي مدى يكون المنحنى سلساً؟)).

فمثلا لو نظرنا للشكل (2.6) للاحظنا أنه توجد ثلاثة منحنيات يمكن أن تتنافس على ملائمة المعلومات التجريبية (experimental data) أو المعملية الموضحة . لكننا نلاحظ أن المنحنى $\frac{1}{x_0 - x}$ أقلها سلاسة حيث إنه غير معرف عند $x = x_0$.وهنا نقع في حيرة من أمرنا : أيها نأخذ؟

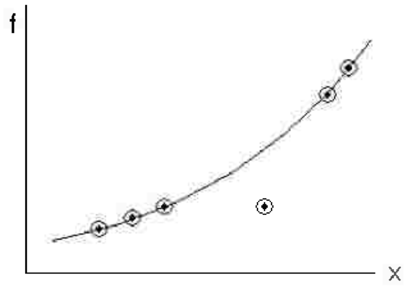
أيضا لو نظرنا للثكل (3.6) لوجدنا أن المنحنى يلائم كل البيانات عدا نقطة واحدة والتي تمثل خطأ فادحاً وعلينا إهمالها.

وعليه ومما تقدم، وقبل أن نبدأ بأي ملائمة أو تقريب علينا أن نقرر نوعية المنحنى الذي سنعمل به. أهو خط مستقيم ؟ أم قطع مكافئ؟ أو دالة تكعيبية ؟

أم حدودية من درجة أعلى ؟ أو دالة مثلثية ؟ أو دالة آسية ؟



الشكل (2.6)– ملائمة نقاط تجريبية (⊙) بعدة منحنيات



الشكل (3.6) – نقطة شاذة.

وخير قرار في هذا الصدد يأتي عادة من مصدر البيانات؛ فالمصدر الذي أتت من خلاله البيانات دائماً يكون مصدر معلومات جيد لنا لاختيار الشكل العام للمنحني؛ فمثلا في مجال الفيزياء النووية لو اهتمينا بالقطاعات النووية عند دراستنا للتفاعلات النووية يكون عادة القطاع ممثلا بحدوديات لجاندر (Legendre polynomials)؛ كما أنه لو علمنا بأن البيانات بمسألة ما هي بيانات عن حركة مقذوفة فإنه وبالتأكيد يكون المنحى الملائم الجيد عبارة عن قطع مكافئ كما هو ثابت بعلم الميكانيكا...... . و.هكذا.

في المعتاد نستعمل حدوديات،. فلو كان لدينا $n+1$ من النقاط عند $x_o,\ldots\ldots,x_n$ وتقابلها قيم الدالة $f(x_o),\ f(x_1),\ldots\ldots,\ f(x_n)$ وقررنا تقريبها بحدودية درجتها m فإنه توجد ثلاث حالات :

1) $m=n$

أي أن الحدودية الاستكمالية $\phi_n(x)$ تمر بالضبط بكل النقاط، غير أن هذا؛ وكما ذكرنا، غير وارد حيث إنه ربما تكون القيم غير دقيقة.

2) $m>n$

وهذه حالة لن تستعمل وذلك لنقص في عدد النقاط ويكون المنحنى غير سلس.

3) $m < n$

هنا يكون عدد النقاط كبير بالنسبة لدرجة الحدودية وعليه يكون المنحنى تقريبياً وهذا هو المطلوب دراسته. لاحظ أنه ربما لن يمر المنحنى بأي نقطة بالجدول ولكن سيكون المنحنى. سلساً.

عليه نفترض الحالة الثالثة أي أنه توجد $n+1$ من النقاط والمطلوب تقريبها بحدودية من الدرجة m ($p_m(x)$) (حيث $m < n$) و

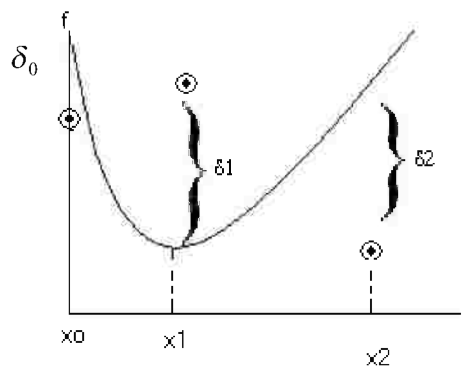
$$p_m(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} \ldots + a_1 x + a_o \qquad \ldots\ldots (1.6)$$

وحيث تساوي $p_m(x_i)$ تقريباً القيم بالجدول عند x_i (أي $f(x_i)$) :

وإذا كان الانحراف هو δ_i (Deviation) للقيمة عند x_i عن المنحنى فإنه يمكننا كتابة:

$$p_m(x_i) - f(x_i) = \delta_i \qquad i = 1, \ldots, n \qquad \ldots\ldots (2.6)$$

والشكل (4.6) يوضح مثل هذه الانحرافات لثلاث نقاط .



الشكل (4.6)- توضيح للانحرافات.

الآن وبعد أن قمنا بتعريف الانحرافات نقرر ما معنى ((أجود ملائمة أو تقريب)) (Best Fit!?). هل يعني هذا أن تكون كل δ_i صفراً؟ هذا غير ممكن عموماً. أو هل نجعل $\sum \delta_i = 0$ ؟ هذا ممكن غير أنه ليس المطلوب!؟

أيضا لا يمكن أن نجعل $\sum|\delta_i| = 0$ حيث إن ذلك يعني أن نجعل $|\delta_i| = 0$ لكل i عندئذ؟ وهذا غير ممكن كما أسلفنا؟ ولكن نستطيع أن نجعل هذا الجمع أقل ما يمكن، بيد أن التعامل مع القيم المطلقة صعب نوعاً ما وعليه ربما نتخذ القرار أن نجعل الجمع:

$$\sum_i \delta_i^2 = \delta_0^2 + ... + \delta_n^2 \qquad ...... (3.6)$$

أصغر ما يمكن. هذه الطريقة سهلة في التعامل كما أنها تتميز بإبعاد الانحرافات الكبيرة ما أمكن ذلك .

هذه الطريقة تسمى بطريقة ملائمة المنحنيات باستخدام المربعات الصغرى (least-Squares Curve Fitting) أو باختصار طريقة المربعات الصغرى. وهي شائعة جداً في العديد من المجالات.

2.6 ملائمة المنحنيات (Curve Fitting)

لكي يكون عملنا شاملاً وعاماً وبدلاً من استخدام حدوديات ؛ دعنا نستخدم أي فئة من الدوال:

$$\{g_i(x)\}_{i=0}^{i=m}$$

وأن نضع:

$$p_m(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\, g_i\,(x) \qquad \ldots\ldots (4.6)$$

وحيث $g_i\,(x)$ أي دوال معرفة فمثلا في حالة استعمال حدوديات تكون:

$$g_i\,(x) = x^i \qquad i = 0,1,\ldots\ldots, n$$

كما نطلب من الدوال $g_i\,(x)$ أن تكون مستقلة خطياً أي أنه لا تعتمد إحداها على الأخرى وذلك في أبسط معنى للاستقلالية الخطية. (لاحظ أن $1, x, \ldots\ldots x^m$ مستقلة خطيا).

الآن نحسب الانحرافات: $\delta_i = p_m(x_i) - f(x_i) \qquad i = 0,\ldots, n$

ونطلب أن يكون المقدار $\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2$ قيمة صغرى.

أو أن:

$$\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2 = \sum_{0}^{n} [p_m(x_i) - f(x_i)]^2$$

$$= \sum_{0}^{n} [a_m g_m(x_i) + \ldots\ldots + a_o g_o(x_i) - f(x_i)]^2 = \text{صغرى} \qquad \text{قيمة}$$

لاحظ أن الأشياء غير المعلومة في هذه المعادلة هي المعاملات a_i ؛كما أن الجمع دالة في هذه الـ $m+1$ من المعاملات؛ وعليه لكي نحصل على القيمة الصغرى نضع :

$$\frac{\partial}{\partial a_o}\left(\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2\right) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial}{\partial a_m}\left(\sum_{i=0}^{n} \delta_i^2\right) = 0$$

أو نضع عموماً:

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\left(\sum_{i=0}^{n}\delta_i^2\right)=0 \qquad j=0,1,....,m \qquad ......(5.6)$$

وهذا يعني أن:

$$\sum_{i=0}^{n}2\delta_i\frac{\partial\delta_i}{\partial a_j}=0$$

أو أن:

$$\sum_{i=0}^{n}\delta_i\frac{\partial\delta_i}{\partial a_j}=0 \qquad ......(6.6)$$

وحيث أن:

$$\delta_i=a_m g_m(x_i)+.....+a_j g_j(x_i)+.....+a_o g_o(x_i)-f(x_i) \qquad ......(7.6)$$

فإن:

$$\frac{\partial\delta_i}{\partial a_j}=g_j(x_i) \qquad ......(8.6)$$

وهكذا تصبح المعادلة (6.6) على النحو:

$$\sum_{i=0}^{n}\delta_i g_j(x_i)=0 \quad j=0,1,2,...m \qquad ......(9.6)$$

أو بطريقة أخرى:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(p_m(x_i)-f(x_i)\right)g_j(x_i)=0 \qquad ......(10.6)$$

الآن نستخدم (4.6) و (10.6) لنحصل على:

$$\sum_k a_k\left(\sum_i g_k(x_i)g_j(x_i)\right)=\sum f(x_i)g_j(x_i)$$

ولو وضعنا:

$$\alpha_{kj} = \sum_i g_k(x_i) g_j(x_i) \qquad k = 0,1,....,m$$

لكانت المعادلات في صورتها النهائية :

$$\sum_k a_k \alpha_{kj} = \sum f(x_i) g_j(x_i) \qquad j = 0,1,....,m \qquad ...... (11.6)$$

الآن a_k غير معلومة ونستطيع حسابها إذا زودنا بجدول بالبيانات x_i و $f(x_i)$ وإذا عرفنا الدوال المستخدمة للملائمة.

لا ننسى أن $\alpha_{kj} = \alpha_{jk}$ ؛أي أنه يوجد تماثل في مصفوفة هذه المعاملات وهذا يوفر علينا الجهد .و يقلل من العمليات إلى النصف.

مثال (1.6)

لنفترض أننا بدأنا بدراسة سقوط جسم و أن .العلاقة بين الارتفاع $h(t)$ والزمن t معطاة بالصيغة $h(t) = 1100 - 16t^2$ [حيث كان الجسم على علو 1100 عند لحظة البدء].

من هذه العلاقة نستطيع حساب الارتفاع للأزمنة $t = 0,1,2,3,4$ والجدول (2.6) يبين هذه القيم .

ولنفترض الآن أننا بدأنا بمعلومات غير دقيقة كأن قربنا الأرقام لأقرب عشرة؛ عندئذ تكون البيانات كما بالجدول (3.6).

الجدول (2.6)- القيم الدقيقة لـ h المثال (1.6)

t	h
0	1100
1	1084
2	1036
3	956
4	844

الجدول (3.6)- قيم h غير الدقيقة (المثال(1.6))

t	h
0	1100
1	1080
2	1040
3	960
4	840

ومن ثم نستعمل التقريب بطريقة المربعات الصغرى، ومن خلال المسألة الفيزيائية يكون الشكل للمنحني عبارة عن قطع مكافئ وعليه تكون حدودية الملائمة هي:

$$p_2(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_o$$

أو أن:

$$g_2(t) = t^2$$
$$g_1(t) = t$$
$$g_o(t) = 1$$

لا ننسى أيضا أن $n+1=5$ أو أن $n=4$.

وهكذا نرى أن:

$$\alpha_{00}=\sum_{i=0}^{4}g_0(t_i)g_0(t_i)=1+1+1+1+1=5$$

$$\alpha_{01}=\alpha_{10}=\sum_{i=0}^{4}g_1(t_i)g_0(t_i)=\sum t_i=10$$

$$\alpha_{02}=\alpha_{20}=\sum_{i=0}^{4}g_2(t_i)g_0(t_i)=\sum t_i^2=30$$

$$\alpha_{11}=\sum_{i=0}^{4}g_1(t_i)g_1(t_i)=\sum t_i^2=30$$

$$\alpha_{12}=\alpha_{21}=\sum_{i=0}^{4}g_1(t_i)g_2(t_i)=\sum t_i^3=100$$

$$\alpha_{22}=\sum_{i=0}^{4}g_2^2(t_i)=\sum t_i^4=354$$

وتكون المعادلات المطلوب حلها هي:

$$\alpha_{00}a_0+\alpha_{01}a_1+\alpha_{02}a_2=\sum f(t_i)g_0(t_i)$$

$$\alpha_{10}a_0+\alpha_{11}a_1+\alpha_{12}a_2=\sum f(t_i)g_1(t_i)$$

$$\alpha_{20}a_0+\alpha_{21}a_1+\alpha_{22}a_2=\sum f(t_i)g_2(t_i)$$

أو أن:

$$\begin{aligned}5a_0+10a_1+30a_2&=5020\\10a_0+30a_1+100a_2&=9400\\30a_0+100a_1+354a_2&=27320\end{aligned}$$

وبحلها نجد أن:

$$\begin{aligned}a_0&=1097.7143\\a_1&=4.5734\\a_2&=-17.1429\end{aligned}$$

أي أن المنحنى يعطى بالعلاقة:

$$p_2(x) = -17.1429\,t^2 + 4.573\,t + 1097.7143$$

نقارن الآن بين البيانات المعطاة و البيانات النظرية التي تم الحصول عليها بالملائمة من خلال الجدول (4.6).

الجدول (4.6) – مقارنة بين قيم h المختلفة

الزمن t	دقيقة h	غير دقيقة h	h بطريقة المربعات الصغرى
0	1100	1100	1097.7
1	1084	1080	1085.1
2	1036	1040	1038.3
3	956	960	957.1
4	844	840	841.7

ومنه نرى أن طريقة الملائمة بالمربعات الصغرى أعطت تقريباً معقولا بل وحاولت أن توازن بين الأخطاء، كما نلاحظ وجود أربع (من خمس) قيم قد أعطت تقريبا للقيم الحقيقية أحسن من القيم غير الدقيقة (المقربة إلى أقرب عشرة).

نلاحظ أيضا أن التقريب الذي حصلنا عليه يصلح لكل القيم x التي تقع في مدى الجدول ولا يوجد لدينا ما يؤكد أننا نستطيع حساب h عند $x = 8$ مثلا!؟

3.6 الانكفاء الخطي (Linear Regression)

في هذه الحالة

$$p_1(x) = a + b\,x$$

و

$$s \equiv \sum_{k} \delta_1^2 = \sum (y_i - a - bx_i)^2 \qquad \ldots\ldots (12.6)$$

وبوضع

$$\frac{\partial s}{\partial b} = 0 \quad , \quad \frac{\partial s}{\partial a} = 0$$

نحصل على:

$$\sum (y_i - a - bx_i)(-1) = 0$$

و

$$\sum (y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0$$

أو أن:

$$na + b\left(\sum x_i\right) = \sum y_i$$

$$a\left(\sum x_i\right) + b\left(\sum x_i^2\right) = \sum x_i y_i$$

بحل هاتين المعادلتين في a و b نجد أن:

$$a = \frac{\left(\sum y_i\right)\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \qquad \ldots\ldots (13.6)$$

$$b=\frac{n\sum x_i y_i-\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\sum x_i^2-\left(\sum x_i\right)^2} \quad \ldots\ldots (14.6)$$

وهكذا بحصولنا على a و b نحصل على التقريب $y=a+bx$ ؛وهذه المعادلة تعرف بالملائمة الخطية أو الانكفاء الخطي لـ y على x .

مثال (2.6)

لو كانت لدينا البيانات بالجدول (5.6).

الجدول (5.6)

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

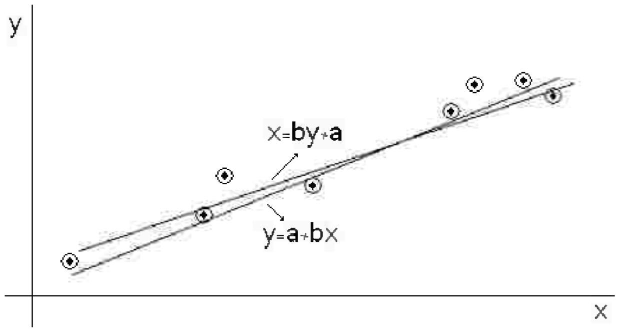
وأردنا ملائمة هذه البيانات خطياً فإنه يمكننا تكوين الجدول التالي:

x	y	x^2	xy
1	1	1	1
3	2	9	6
4	4	16	16
6	4	36	24
8	5	64	40
9	7	81	63
11	8	121	88
14	9	196	126
$\sum x_i=56$	$\sum y_i=40$	$\sum x_i^2=524$	$\sum x_i y_i=364$

ومن هذا الجدول الأخير نستطيع حساب a و b حيث نحصل على $a=6/11$ و $b=7/11$ أي أن المنحنى هو:

$$y=\frac{6}{11}+\frac{7}{11}x$$

والشكل (5.6) يوضح النقاط التجريبية والمنحنى الملائم . لاحظ أن الحالة في هذا المثال حسبت بحيث كانت الأخطاء هي في قيم y ،أما قيم x فهي دقيقة ومضبوطة.



الشكل (5.6)- الانكفاء الخطي لـ x على y ولـ y على x .

غير أنه يمكن أن تكون الأخطاء بقيم x بدلا وقيم y مضبوطة. في هذه الحالة الأخيرة نضع :

$$x=by+a$$

وبنفس الطريقة نحسب a و b حيث:

$$a=\frac{\left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i^2\right)-\left(\sum y_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{n\sum y_i^2-\left(\sum y_i\right)^2}$$

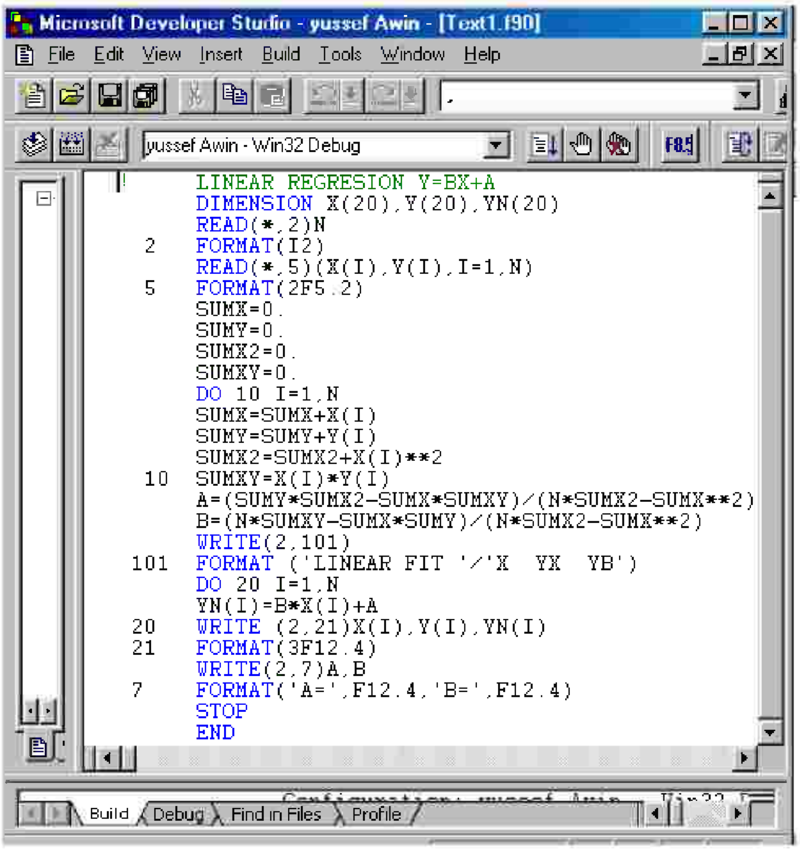
و

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{n\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2}$$

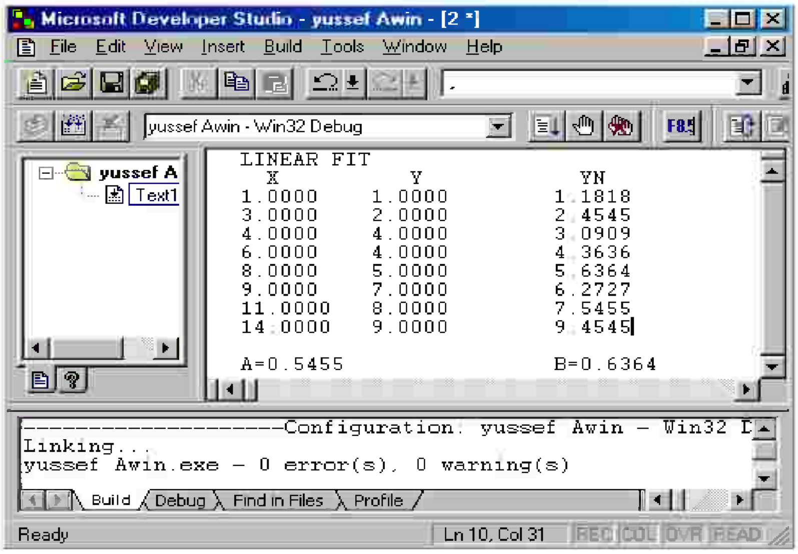
وبذلك نحصل على الانكفاء الخطي لـ x على y .

ويكون عندئذ $a = -\frac{1}{2}$ و $b = \frac{3}{2}$. أنظر الشكل (5.6).

يمكننا أيضا كتابة برنامج للانكفاء الخطي كما هو موضح بالشكل (6.6) والحصول على النتائج $a = 0.5455$ و $b = 0.6364$ كما هو متوقع.




```
!       LINEAR REGRESION Y=BX+A
        DIMENSION X(20),Y(20),YN(20)
        READ(*,2)N
2       FORMAT(I2)
        READ(*,5)(X(I),Y(I),I=1,N)
5       FORMAT(2F5.2)
        SUMX=0.
        SUMY=0.
        SUMX2=0.
        SUMXY=0.
        DO 10 I=1,N
        SUMX=SUMX+X(I)
        SUMY=SUMY+Y(I)
        SUMX2=SUMX2+X(I)**2
10      SUMXY=X(I)*Y(I)
        A=(SUMY*SUMX2-SUMX*SUMXY)/(N*SUMX2-SUMX**2)
        B=(N*SUMXY-SUMX*SUMY)/(N*SUMX2-SUMX**2)
        WRITE(2,101)
101     FORMAT ('LINEAR FIT '/'X   YX   YB')
        DO 20 I=1,N
        YN(I)=B*X(I)+A
20      WRITE (2,21)X(I),Y(I),YN(I)
21      FORMAT(3F12.4)
        WRITE(2,7)A,B
7       FORMAT('A=',F12.4,'B=',F12.4)
        STOP
        END
```



الشكل (6.6)– برنامج الانكفاء الخطي بنتائجه .

4.6 الدوال الحدودية

هنا نضع

$$y = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_1 x + a_o$$

و

$$s = \sum \left(y_i - a_m x_i^m - .... - a_o \right)^2 \qquad ......(15.6)$$

وبتفاضل المعادلة (15.6) بالنسبة لـ a_i $(i = 0,1,......,m)$ ووضع ناتج التفاضل مساويا لصفر، نحصل على المعادلات التالية:

$$
\begin{aligned}
& n a_o+\left(\sum x_i\right) a_1+\ldots\ldots+\left(\sum x_i^m\right) a_m=\sum y_i \\
& \left(\sum x_i\right) a_o+\left(\sum x_i^2\right) a_1+\ldots\ldots+\left(\sum x_i^{m+1}\right) a_m=\sum x_i y_i \\
& \vdots \\
& \left(\sum x_i^p\right) a_o+\left(\sum x_i^{p+1}\right) a_1+\ldots\ldots+\left(\sum x_i^{m+p}\right) a_m=\sum x_i^p y_i \\
& \vdots \\
& \left(\sum x_i^m\right) a_o+\left(\sum x_i^{m+1}\right) a_1+\ldots\ldots+\left(\sum x_i^{2m}\right) a_m=\sum x_i^m y_i
\end{aligned}
$$

والتي تسمى بالمعادلات العمودية (أو الطبيعية) وهي $m+1$ من المعادلات في $m+1$ من المجاهيل $a_0,......,a_m$.وحل مثل هذه المعادلات يتم بطرق عدة إما بطريقة المحددات أو الحذف لجاوس أو غيرها [راجع الفصل الخامس].

مثال (3.6)

إذا كان الجدول (6.6) يمثل قيم الحرارة النوعية c_p للماء كدالة في درجة الحرارة وإذا أمكن تقريب هذه القيم بحدودية تكعيبية باستخدام طريقة المربعات الصغرى، فاحسب مختلف المعاملات.

الجدول (**6.6**)- قيم الحرارة النوعية للماء بدلالة درجة الحرارة

T	c_p	T	c_p
0	1.00762	55	0.99919
5	1.00392	60	0.99967
10	1.00153	65	1.00024
15	1.00000	70	1.00091
20	0.99907	75	1.00167
25	0.99852	80	1.00253
30	0.99826	85	1.00351
35	0.99818	90	1.00461
40	0.99828	95	1.00586
45	0.99849	100	1.00721
50	0.99878		

نلاحظ أن $n = 21$ وأن $m = 3$.

و هكذا تكون المعادلات العمودية لهذا المثال هي:

$$21a_o + \left(\sum x_i\right)a_1 + \left(\sum x_i^2\right)a_2 + \left(\sum x_i^3\right)a_3 = \sum y_i$$

$$\left(\sum x_i\right)a_o + \left(\sum x_i^2\right)a_1 + \left(\sum x_i^3\right)a_2 + \left(\sum x_i^4\right)a_3 = \sum x_i y_i$$

$$\left(\sum x_i^2\right)a_o + \left(\sum x_i^3\right)a_1 + \left(\sum x_i^4\right)a_2 + \left(\sum x_i^5\right)a_3 = \sum x_i^2 y_i$$

$$\left(\sum x_i^3\right)a_o + \left(\sum x_i^4\right)a_1 + \left(\sum x_i^5\right)a_2 + \left(\sum x_i^6\right)a_3 = \sum x_i^3 y_i$$

الآن بحل هذه المعادلات نحصل عل قيم a_o, a_1, a_2, a_3 (وحيث نستخدم الجدول (6.6))

و $$c_p = 1.00653 - 0.00051T + 0.0000087T^2 - 0.000000036T^3$$

(لاحظ أننا أشرنا هنا إلى درجة الحرارة بـــ x و الحرارة النوعية بـــــ y)

5.6 دوال أخر ى

كثيرا ما يكون الانكفاء الخطي غير كاف وتكون الدالة التقريبية عبارة عن قطع ناقص مثلاً أو منحنى أسي أو مثلثي . . . الخ .

وبعض هذه الدوال المهمة ، والتي توجد من ضمن ما يواجه القارئ من حين لآخر أثناء دراسته لحل مشكلة ما، تتلخص في الأقسام التالية :

أ- قطع زائدي على الشكل $y=\dfrac{1}{a+bx}$

ب- منحن أسي مثل $y=ab^x$

ج- منحنى هندسي علي النحو $y=ax^b$

د- منحنى مثلثي من النوع $y=a_o+a_1\cos\omega x$

أو من النوع الأكثر عمومية:

$$y=a_o+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(k\omega x)+b_k\sin(k\omega x)\right)$$

وكما ذكرنا في السابق مصدر البيانات هو خير دليل لاختيار المنحى المناسب كما أن رسم المنحنى من خلال النقاط المعطاة يخبرنا أيضا بالتقريب المناسب، فمثلا لو كان $\log y$ خطية بالنسبة لـ x فهذا يعني أن نختار الدالة الأسية للملائمة والتقريب، أما إذا كانت البيانات بحيث كانت $\log y$ خطية بالنسبة لـ $\log x$ فإننا نهتدي إلى اختيار المنحنى الهندسي؟ أما إذا كانت النقاط متذبذبة و دورية فإن الدالة المثلثية تمثل أحسن تقريب. وهكذا.

أمثلـــة

مثال (4.6)

إذا كان المنحي عبارة عن قطع زائدي فإن:

$$y = \frac{1}{a+bx} \equiv \frac{1}{z}$$

أو أن:

$$z = \frac{1}{y} = a + bx$$

وهكذا نرجع مرة أخرى للانكفاء الخطى وتكون المعادلات العمودية هي:

$$n\,a_o + \left(\sum x_i\right)b = \sum \frac{1}{y_i}$$

$$\left(\sum x_i\right)a + \left(\sum x_i^2\right)b = \sum \frac{x_i}{y_i}$$

وبمعرفة (x_i, y_i) نستطيع حساب a و b .

مثال (5.6)

دالة مثلثية من النوع: $y = a + b\cos\omega x$

نحسب الجمع:

$$s = \sum\left(y_i - a - b\cos\omega x_i\right)^2$$

ثم نحسب المعادلات العمودية:

$$na + b\sum\cos\omega x_i = \sum y_i$$

$$\left(\sum\cos\omega x_i\right)a + b\sum\cos^2\omega x_i = \sum y_i\cos\omega x_i$$

ومنها نحسب a و b عند معرفة النقاط (x_i, y_i) .

مثال (6.6)

المنحني أسي: أي أن $y = ab^x$.

نأخذ لوغاريتم الطرف لنجد أن: $\ln y = \ln a + x \ln b$

ولو وضعنا $B = \ln b$, $A = \ln a$, $z = \ln y$.

فإننا نحصل على: $z = A + Bx$

وهكذا نرجع، مرة أخرى للانكفاء الخطي.

هنا نحسب الجمع: $s = \sum (\ln y_i - A - Bx_i)^2$

وتكون المعادلات العمودية:

$$n A + \left(\sum x_i \right) B = \sum \ln y_i$$

$$\left(\sum x_i \right) A + \left(\sum x_i^2 \right) B = \sum x_i \ln y_i$$

الآن نوجد الحلول لـ A و B ثم نحسب a و b كالآتي:

$$a = \exp \left\{ \left[\sum \ln y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i \ln y_i \right] \Big/ \left[n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 \right] \right\}$$

$$b = \exp \left\{ \left[n \sum x_i \ln y_i - \sum x_i \sum \ln y_i \right] \Big/ \left[n \sum x_i^2 - \left(\sum x_i \right)^2 \right] \right\}$$

وباعتبار الجدول (7.6) المبين أسفله والذي يمكن أن يمثل بمنحنى أسي ؛ نكتب البرنامج الموضح بالشكل (7.6) ومن خلاله نحصل على $y \cong 3.2^x$.

الجدول (7.6)- المثال(6.6)

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4
y	3	4	6	9	12	17	24	33	48

6.6 الانكفاء المتعدد (Multiple Regression)

في كثير من الحالات يكون لدينا ببيانات معملية تحتوي على أكثر من متغير كأن تعتمد الدالة تحت الدراسة على الحرارة والضغط معا مثلا.

لتكن $z = f(x, y)$

والبيانات هي n من النقاط

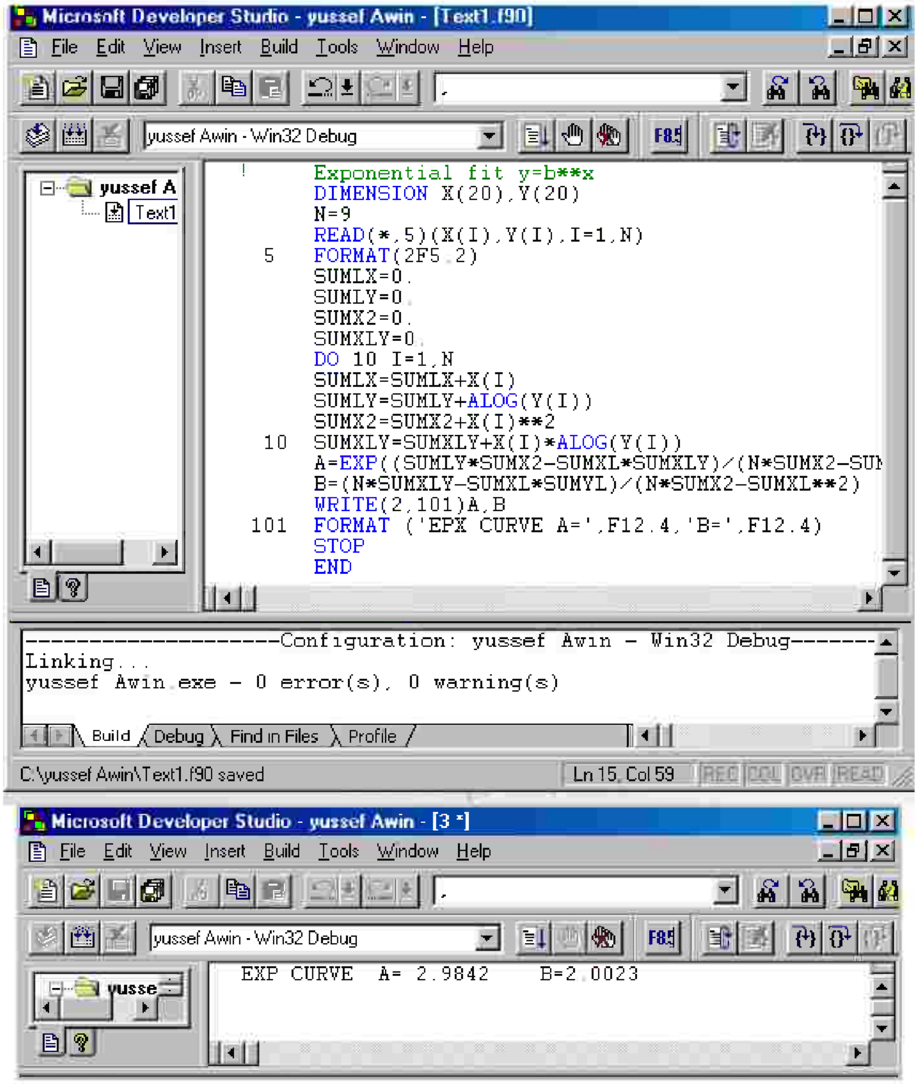
$$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ..., (x_n, y_n, z_n)$$

وإذا افترضنا للبساطة والتوضيح أننا نتعامل مع الانكفاء الخطي المتعدد أي أن:

$$z = A + Bx + Cy$$

فإننا نحسب الانحرافات ونحسب:

$$s = \sum (z_i - A - Bx_i - Cy_i)^2$$



الشكل (7.6)– برنامج الانكفاء الأسي متبوعاً بنتيجة قيم A و B .

ومرة أخرى نفاضل بالنسبة للمعاملات ثم نضع ناتج التفاضل مساوياً للصفر لنحصل على المعادلات العمودية:

$$n\,A+\left(\sum x_i\right)B+\left(\sum y_i\right)C=\sum z_i$$

$$\left(\sum x_i\right)A+\left(\sum x_i^2\right)B+\left(\sum x_i\,y_i\right)C=\sum x_i z_i$$

$$\left(\sum y_i\right)A+\left(\sum x_i\,y_i\right)B+\left(\sum y_i^2\right)C=\sum x_i z_i$$

وبحساب A ,B و C من هذه المعادلات نحصل على المنحنى التقريبي المطلوب.

نود أن نلاحظ أنه لن نتعامل كثيراً مع الانكفاء المتعدد ولهذا مررنا مروراً سريعاً بهذا الموضوع.

أمثلة متنوعة

مثال (7.6)

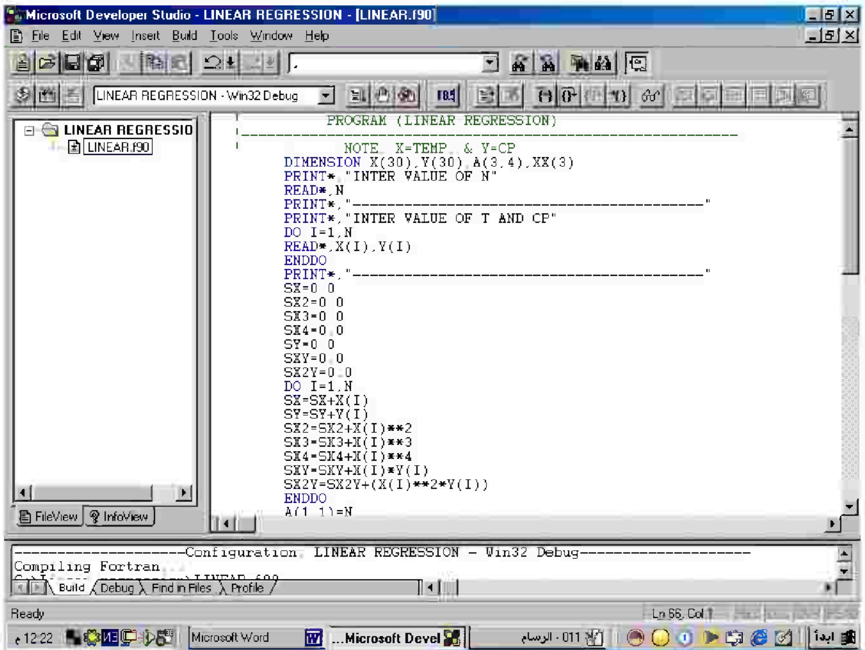
أعد حل المثال (3.6) بافتراض أن الحرارة النوعية للماء هي دالة تربيعية في درجة الحرارة.

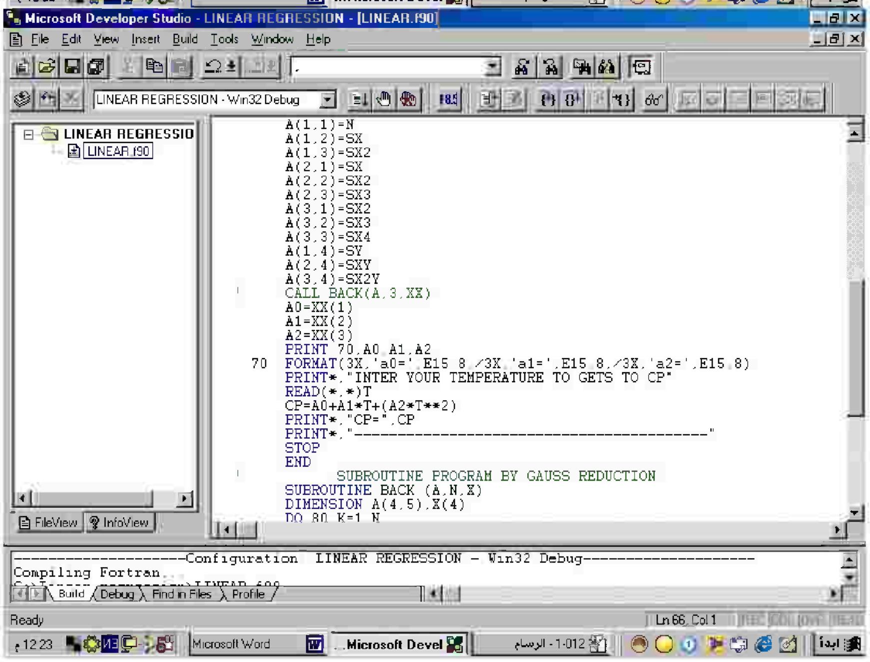
الحل:

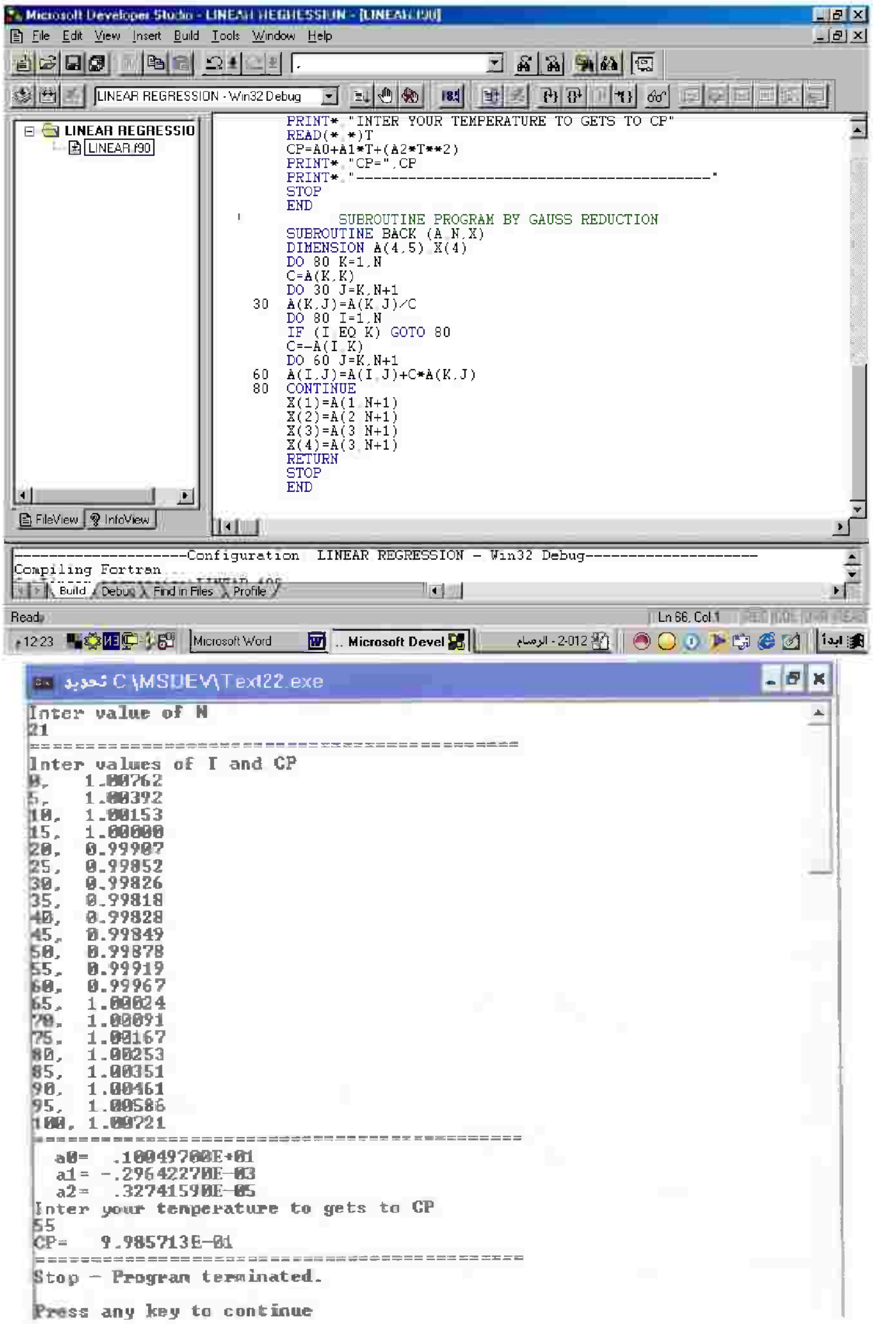
عدد النقاط هنا هو 21، كما أن منحنى الملائمة هو من الشكل:

$$C_p = a_o + a_1 T + a_2 T^2$$

عليه بعد كتابة الخوارزمية المناسبة و البرنامج الحاسوبي نحصل على النتائج بالشكل (8.6).

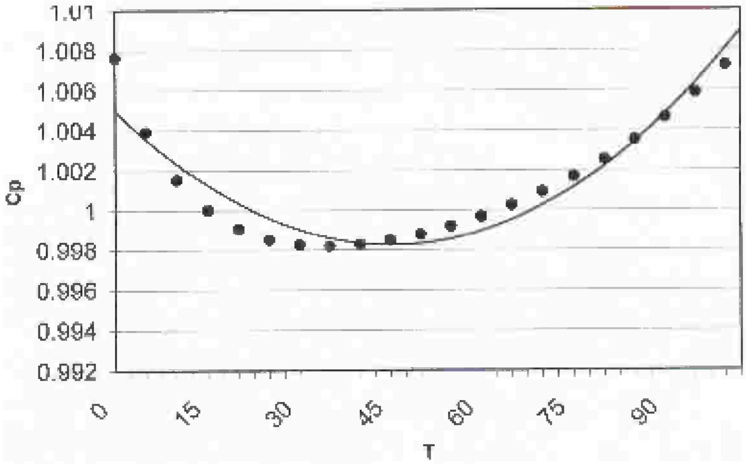

Microsoft Developer Studio - LINEAR REGRESSION - [LINEAR.f90]
! PROGRAM (LINEAR REGRESSION)
!---
! NOTE X=TEMP & Y=CP
DIMENSION X(30),Y(30),A(3,4),XX(3)
PRINT*,"INTER VALUE OF N"
READ*,N
PRINT*,"--"
PRINT*,"INTER VALUE OF T AND CP"
DO I=1,N
READ*,X(I),Y(I)
ENDDO
PRINT*,"--"
SX=0.0
SX2=0.0
SX3=0.0
SX4=0.0
SY=0.0
SXY=0.0
SX2Y=0.0
DO I=1,N
SX=SX+X(I)
SY=SY+Y(I)
SX2=SX2+X(I)**2
SX3=SX3+X(I)**3
SX4=SX4+X(I)**4
SXY=SXY+X(I)*Y(I)
SX2Y=SX2Y+(X(I)**2*Y(I))
ENDDO
A(1,1)=N
--------------------Configuration: LINEAR REGRESSION - Win32 Debug--------------------
Compiling Fortran...
Ready
Ln 66, Col 1


Microsoft Developer Studio - LINEAR REGRESSION - [LINEAR.f90]
A(1,1)=N
A(1,2)=SX
A(1,3)=SX2
A(2,1)=SX
A(2,2)=SX2
A(2,3)=SX3
A(3,1)=SX2
A(3,2)=SX3
A(3,3)=SX4
A(1,4)=SY
A(2,4)=SXY
A(3,4)=SX2Y
! CALL BACK(A,3,XX)
A0=XX(1)
A1=XX(2)
A2=XX(3)
PRINT 70,A0,A1,A2
70 FORMAT(3X,'a0=',E15.8,/3X,'a1=',E15.8,/3X,'a2=',E15.8)
PRINT*,"INTER YOUR TEMPERATURE TO GETS TO CP"
READ(*,*)T
CP=A0+A1*T+(A2*T**2)
PRINT*,"CP=",CP
PRINT*,"--"
STOP
END
! SUBROUTINE PROGRAM BY GAUSS REDUCTION
SUBROUTINE BACK (A,N,X)
DIMENSION A(4,5),X(4)
DO 80 K=1,N
--------------------Configuration: LINEAR REGRESSION - Win32 Debug--------------------
Compiling Fortran...
Ready
Ln 66, Col 1



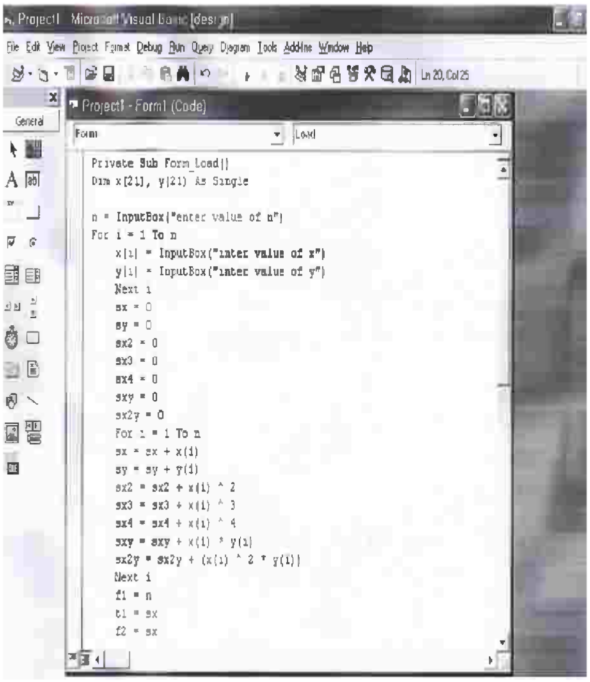
الشكل (8.6) برنامج بلغة الفوتوران و نتائجه– مثال (7.6)

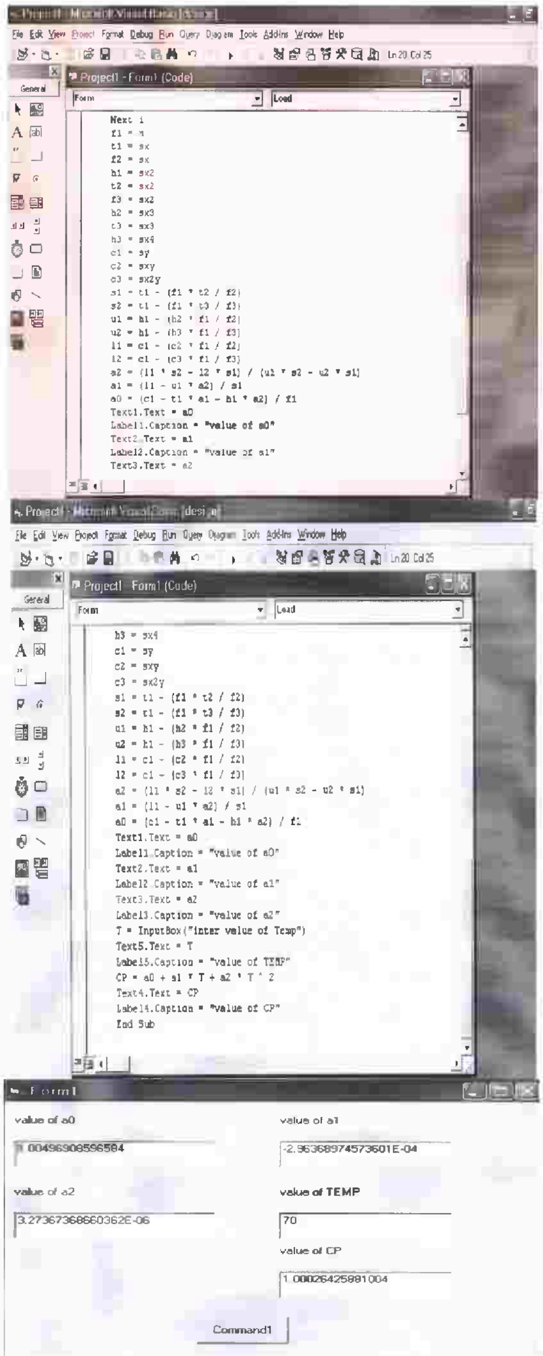
و توضح النتائج بأن الحرارة النوعية عند $T = 55$ هي $C_p = 0.9985713$ هذا ويبين الشكل (9.6) مقارنة بين القيم العملية (●) والقيم النظرية (المنحنى الملائم–المتصل) .



الشكل (9.6) مقارنة بين القيم العملية (●) والقيم النظرية.

بالشكل (10.6) نعطي نفس الحسابات ولكن بلغة بيسك المرئية.





الشكل (10.6) نفس الحسابات بلغة بيسك المرئية-المثال(7.6)

مثال (8.6)

قذفت مقذوفة بزاوية معينة فإذا كانت العلاقة بين ارتفاعها y والمسافة الأفقية x معطاة بالبيانات بالجدول (8.6) أسفله؛ فاحسب $y(2.5)$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى.

الجدول(8.6)

x	0	1	2	3	4
y	0	8	19	32	50

الحل:

حيث أن العلاقة بين x و y هي حدودية من الدرجة الثانية، عليه نقوم باستعمال الملائمة بواسطة المربعات الصغرى وكتابة البرنامج الموضح بالشكل (11.6) [وهو برنامج مكتوب بلغة C] لنحصل على $y(2.5) = 25 \cdot 25$ [أنظر الشكل (12.6)].

```
#include<math.h>
#include<conio.h>
#include<iostream.h>

main()
{
float
d[3][3],d2[3][3],s[7],x[5],y[5],x4[5],x3[5],x2[5],yx[5],y2x[5],det[3],m[3]
,ddet,a,b,c,yy,xx;

int i,j,k;

clrscr();
cout<<"ENTER VALUES FOR X AND Y?"<<'\n';
for(i=0;i<5;++i)
{
cin>>x[i]>>y[i];
```

```
yx[i]=x[i]*y[i];
y2x[i]=y[i]*x[i]*x[i];

x4[i]=pow(x[i],4);
x3[i]=pow(x[i],3);
x2[i]=pow(x[i],2);
}

cout<<'\n'<<"input value for x?"<<'\n';
cin>>xx;


for(i=0;i<7;++i)
s[i]=0;

for(i=0;i<5;++i)
{
s[0]+=x4[i];s[1]+=x3[i];s[2]+=x2[i];s[3]+=x[i];s[4]+=y[i];s[5]+=yx[i];s[6
]+=y2x[i];
}

m[0]=s[4];
m[1]=s[5];
m[2]=s[6];

d[0][0]=5;d[0][1]=s[3];d[0][2]=s[2];

d[1][0]=s[3];d[1][1]=s[2];d[1][2]=s[1];

d[2][0]=s[2];d[2][1]=s[1];d[2][2]=s[0];

ddet=(d[0][0]*(d[1][1]*d[2][2]-d[1][2]*d[2][1]))-
(d[0][1]*(d[1][0]*d[2][2]-d[1][2]*d[2][0]))+(d[0][2]*(d[1][0]*d[2][1]-
d[1][1]*d[2][0]));



for(k=0;k<=2;++k)
{
for(i=0;i<3;++i)
for(j=0;j<3;++j)
if(j==k)
        d2[i][j]=m[i];
else
```

```
        d2[i][j]=d[i][j];

 det[k]=d2[0][0]*(d2[1][1]*d2[2][2]-d2[1][2]*d2[2][1])-
 d2[0][1]*(d2[1][0]*d2[2][2]-
 d2[1][2]*d2[2][0])+d2[0][2]*(d2[1][0]*d2[2][1]-d2[1][1]*d2[2][0]);
 }



 a=float(det[0])/float(ddet);
 b=float(det[1])/float(ddet);
 c=float(det[2])/float(ddet);

 cout<<'\n'<<'\n'<<"A="<<a<<'\n'<<"B="<<b<<'\n'<<"C="<<c<<'\n'<<'\n
 ';

 yy=a+b*xx+c*xx*xx;
 cout<<"Y="<<yy;


 }
```

الشكل (11.6) – المثال (8.6) بلغة C.

```
ENTER VALUES FOR X AND Y?
0 0
1 8
2 19
3 32
4 50

input value for x?
2.5


A=0.142857
B=6.114286
C=1.571429

Y=25.25
```

الشكل (12.6) – نتائج المثال (8.6) بلغة C.

مثال (9.6)

الجدول (9.6) أسفله يعطي درجة الحرارة الحرجة $T_c(^oK)$ بدلالة الضغط الحرج $p_c(atm)$ لثمانية مركبات عضوية. فإذا افترض بأن العلاقة T_c و p_c هي علاقة تربيعية،فاحسب T_c لمثيل الأثير $p_c = 53\ atm$ وقارن بالقيمة التجريبية $T_c = 400.1\ ^oK$.

الجدول(9.6)

$p_c(atm)$	44	57.1	46.6	48.4	63	35.6	71	78.5	71	78.5
$T_c(^0K)$	461	594.8	508.7	560	516	467	369	513.2	369	513.2

الحل:

نكتب $T_c = a + bp_c + Cp_c^2$ ، ثم نستخدم أسلوب الملائمة بطريقة المربعات الصغرى فنكتب خوارزمية الحل ومن ثم البرنامج الموضح بالشكل (13.6). و تكون النتائج معطاة بالشكل (14.6) ومنها نرى أن:

$$T_c(53\ atm) = 524.7625$$

وهي قيمة ليست قريبة من القيمة التجريبية ولكنها تقع بين $T_c(44)$ و $T_c(57.1)$.

```
      Dimension Pc(8),Tc(8)
      WRITE(*,*)'    N    ,     PC'
      READ(*,*)N,Pc
      WRITE(*,*)'Tc'
      READ(*,*)Tc
C!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
      SUMX=0.0
      SUMX2=0.0
      SUMX3=0.0
      SUMX4=0.0
      SUMY=0.0
      SUMYX=0.0
      SUMYX2=0.0
C-------------------------------------------------------------------
C-------------------------------------------------------------------
      DO 10 I=1,N
      SUMX=SUMX+PC(I)
      SUMX2=SUMX2+(PC(I))**2
      SUMX3=SUMX3+(PC(I))**3
      SUMX4=SUMX4+(PC(I))**4
      SUMY=SUMY+TC(I)
      SUMYX=SUMYX+PC(I)*TC(I)
      SUMYX2=SUMYX2+TC(I)*PC(I)**2
   10 CONTINUE
      WRITE(*,*)'SUMXi,SUMXi**2,SUMXi**3,SUMXi**4, SUMYi,SUMYX,SUMYX**2'
      WRITE(*,*)SUMX,SUMX2,SUMX3,SUMX4,SUMY,SUMYX,SUMYX2
C++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++

      del=N*(SUMX2*SUMX4-SUMX3*SUMX3)-SUMX*(SUMX*SUMX4-SUMX3*SUMX2)
     &+SUMX2*(SUMX*SUMX3-SUMX2*SUMX2)
      WRITE(*,*)'DEL'
      WRITE(*,*)DEL
C**************************************************************************

     a2=(SUMY*(SUMX2*SUMX4-SUMX3*SUMX3)-SUMX*(SUMYX*SUMX4-SUMX3*SUMYX2)
    &+SUMX2*(SUMYX*SUMX3-SUMX2*SUMYX2))/DEL
     WRITE(*,*)'a2'
     WRITE(*,*)A2
C///////////////////////////////////////////////////////////////////////////

     a1=(N*(SUMYX*SUMX4-SUMX3*SUMYX2)-SUMY*(SUMX*SUMX4-SUMX3*SUMX2)
    &+SUMX2*(SUMX*SUMYX2-SUMYX*SUMX2))/DEL
     WRITE(*,*)'a1'
     WRITE(*,*)A1
C!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

     a0=(N*(SUMX2*SUMYX2-SUMYX*SUMX3)-SUMX*(SUMX*SUMYX2-SUMYX*SUMX2)
    &+SUMY*(SUMX*SUMX3-SUMX2*SUMX2))/DEL
     WRITE(*,*)'a0'
     WRITE(*,*)a0
C##########################################################################

     WRITE(*,*)'PC'
     READ(*,*)X
     TT=a2+a1*x+a0*x**2
     WRITE(*,*)'Tc from Equiation in Pro. No 19 Page 163'
     WRITE(*,*)X,TT

C^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^
     STOP
     END
```

الشكل (13.6) – المثال (9.6) بلغة فورتران 77

```
RUN
   N     ,      PC
   8            44   57.1   46.6   48.4   63   35.6   71   28.5
Tc
461    594.8   508.7   560   516   467   369   513.2
```

```
Tc
461    594.8   508.7   560   516   467   369   513.2
SUMXi.SUMXi**2,SUMXi**3.SUMXi**4, SUMYi.SUMYX,SUMYX**2
                  444.2000000                26150.1400000              1622741.0000000
  0.1053258E+007              3989.7000000
             220674.9000000              12910750.0000000
DEL
             0.2676228E+010
a2
                 99.9420100
a1
                 16.4697700
a0
                 -0.1148477
PC
53
Tc from Equiation in Pro. No 19 Page 163
                 53.0000000                        524.7625000
```

الشكل (14.6) – نتائج المثال (9.6) بلغة فورتران 77

مثال (10.6)

أكتب برنامجا حاسوبيا لملائمة بيانات ما بالمنحنى :

$$y = a + b\cos x + c\sin x$$

ثم استخدم البيانات بالجدول (10.6) أسفله لحساب مختلف المعاملات؛ قارن القيم النظرية بالبيانات المعطاة بالجدول .

الجدول(10.6)

x	0	0.4	0.8	1.2	1.60	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y	3	2.1	1.3	0.5	0	0.2	0.0	0.3	1.1	2.0	2.9

الحل:

نكتب المعادلات العمودية، ثم نكتب خوارزمية الحل ومنها نكتب البرنامج الموضح بالشكل (15.6) ومنه نحصل على النتائج بالشكل (16.6) الذي يعطي المعاملات a , b , c والقيم العملية والنظرية والخطأ في كل منها. والشكل (17.6) يوضح هذه المقارنة بيانياً.

```
                          LINEAR.CPP
#include<conio.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>
 main()
{
double s5=0.0,s6=0.0,s7=0.0,s8=0.0,a,b,c,A,B,C,D;
double x[50],y[50],Y[50],s1=0.0,s2=0.0,s3=0.0,s4=0.0;
int i,n;
 clrscr();
 printf ("Enter the number of points n =");
 scanf("%d",&n);
 for ( i=1; i<=n; i++)
 {
 printf ("Enter the initial value of x = ");
 scanf("%lf",&x[i]);
 printf ("Enter the initial value of y = ");
 scanf("%lf",&y[i]);
 }
 for (i=1; i<=n; i++)
 {
 s1=s1+cos(x[i]); s2=s2+sin(x[i]); s3=s3+y[i]*sin(x[i]);
 s4=s4+y[i]*cos(x[i]);
s5=s5+sin(x[i])*cos(x[i]);s6=s6+y[i];
 s8=s8+pow(sin(x[i]),2); s7=s7+pow(cos(x[i]),2);
 }
D=((n*s7*s8)+(s1*s5*s2)+(s2*s1*s5))-((s1*s1*s8)+(n*s5*s5)
+(s2*s7*s2));
a=((s6*s7*s8)+(s1*s5*s3)+(s2*s4*s5))-((s1*s4*s8)+(s6*s5*s
5)+(s2*s7*s3));
b=((n*s4*s8)+(s6*s5*s2)+(s2*s1*s3))-((s6*s1*s8)+(n*s5*s3)
+(s2*s4*s2));
c=((n*s7*s3)+(s1*s4*s2)+(s6*s1*s5))-((s1*s1*s3)+(n*s4*s5)
+(s6*s7*s2));
A=a/D;   B=b/D;   C=c/D;
printf ("\n\n a = %lf   , b = %lf   , c = %lf\n\n ",A,B,C);
printf ("Linear            Y               YN
ERROR  \n\n ");
for (i=1; i<=n; i++)
{
Y[i]=A+B*cos(x[i])+C*sin(x[i]);
printf ("%lf      %lf      %lf     ;",x[i],y[i],Y[i]);
Y[i]=Y[i]-y[i];
printf ("     %lf   \n",Y[i]);
}
  getche();
    return(0);
}
```

الشكل (15.6) – المثال (10.6) بلغة C.

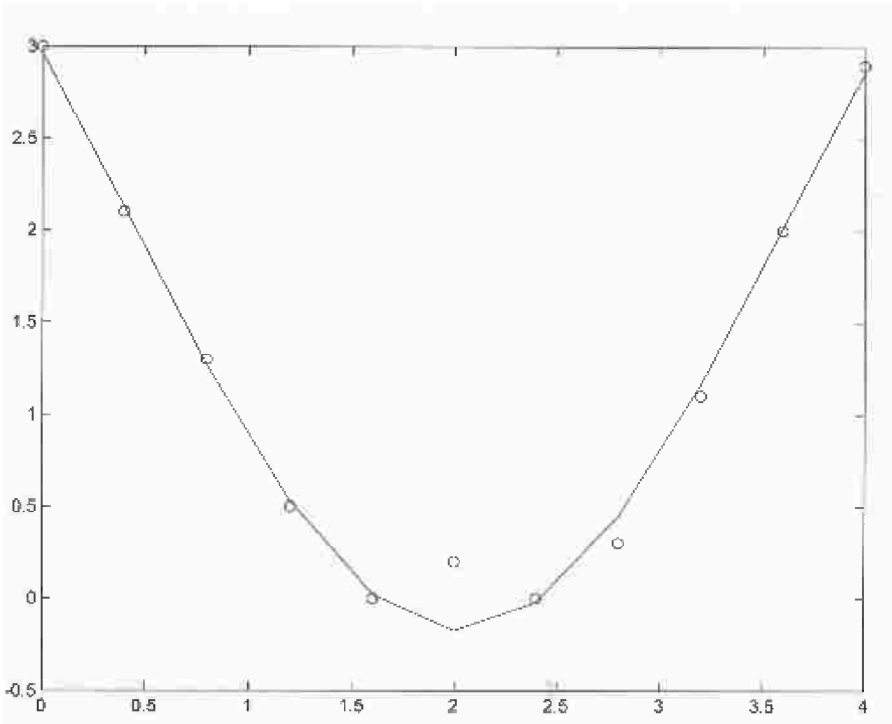
```
                    results1.txt

 a = 2.006167   , b = 0.956807   , c = -1.904491

 Linear          Y             YN              ERROR

0.000000     3.000000     2.962973     ;     -0.037027
0.400000     2.100000     2.145800     ;      0.045800
0.800000     1.300000     1.306582     ;      0.006582
1.200000     0.500000     0.577813     ;      0.077813
1.600000     0.000000     0.074550     ;      0.074550
2.000000     0.200000     -0.123754    ;     -0.323754
2.400000     0.000000     0.014210     ;      0.014210
2.800000     0.300000     0.466661     ;      0.166661
3.200000     1.100000     1.162165     ;      0.062165
3.600000     2.000000     1.990919     ;     -0.009081
4.000000     2.900000     2.822080     ;     -0.077920
```

الشكل (16.6) – نتائج المثال (10.6) بلغة C.



الشكل (17.6) مقارنة بين المنحنى العملي والمنحنى النظري (خط مستمر) للمثال (10.6).

7.6 الأخطاء التجريبية (Experimental Error).

في كثير من التجارب المعملية تكون الأخطاء عادة صادرة عن الجهاز الذي نقيس به، أي أن السؤال يتعلق بمدى الدقة في الجهاز وليست في الكمية المقاسة. وهذا يعني كون القياسات غير مؤكدة في فترة ما والتي عادة ما نرمز لها بالرمز σ_i حيث i تدل على رقم القيمة المقاسة. وتكون هذه القيم أحيانا متساوية وأحيانا مختلفة وذلك بالاعتماد على التجربة المقامة.

إلى جانب الأخطاء التجريبية، أو المعملية، توجد الأخطاء الإحصائية والتي تنتج عن طبيعة إحصائية من ملاحظات واستدلالات وغيرها. وهذه عادة تؤخذ على أنها:

$$\sigma_i = \sqrt{y_i}$$

وفي حالة وجود أخطاء تجريبية أو إحصائية ومعرفتها يجب تحوير التقريب باستخدام المربعات الصغرى كما يلي:

$$s = \sum \frac{\left(y_i - y_i^{th}\right)^2}{\sigma_i^{\,2}} \qquad \ldots\ldots (16.6)$$

حيث ترمز y_i للقيمة التجريبية و y_i^{th} للقيمة النظرية (أي بدلالة المنحنى المستخدم للملائمة). فمثلا لو كنا نتعامل بالانكفاء الخطي فإن :

$$y_i^{th} = a + bx_i$$

وتصبح المعادلة (16.6) على النحو:

$$s = \sum \left(\frac{y_i - a - bx_i}{\sigma_i} \right)^2$$

كما تكون المعادلات العمودية:

$$a\sum \frac{1}{\sigma_i^2} + b\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} = \sum \frac{y_i}{\sigma_i^2}$$
$$a\sum \frac{x_i}{\sigma_i^2} + b\sum \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} = \sum \frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}$$

ومنها نرى أن:

$$a = \frac{1}{\Delta}\left(\sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\sum\frac{y_i}{\sigma_i^2} - \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2}\sum\frac{x_i y_i}{\sigma_i^2}\right)$$

$$b = \frac{1}{\Delta}\left(\sum\frac{1}{\sigma_i^2}\sum\frac{x_i y_i}{\sigma_i^2} - \sum\frac{x_i}{\sigma_i^2}\sum\frac{y_i}{\sigma_i^2}\right)$$

وحيث:

$$\Delta = \sum\frac{1}{\sigma_i^2}\sum\frac{x_i^2}{\sigma_i^2} - \left(\sum\frac{x_i}{\sigma_i^2}\right)^2$$

وبذلك نحصل على المنحنى المقرب $y = a + bx$.

من التطبيقات في هذا المجال استخدام دوال مهمة، كثيرا ما تعترضنا بمجال الفيزياء النووية، وهي حدوديات لجاندر $P_\ell(x)$.

[بعض منها $P_o(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ حيث $x = \cos\theta$]

في هذه الحالة نستخدم:

$$y = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell P_\ell(x) \qquad \ldots\ldots (17.6)$$

والحالة التي عادة ما نستخدم بها طريقة المربعات الصغرى وحدوديات لجاندر هي التوزيعة الزاوية لأشعة (γ)الصادرة عن نواة محفزة أو مثارة؛ حيث تصبح المعادلة (17.6) بسيطة ولا تحتوي على غير ثلاثة حدود؛ أي أن:

$$y = a_o P_o + a_2 P_2 + a_4 P_4 \qquad \ldots\ldots (18.6)$$

وذلك لاعتبارات قواعد الاختيار بالتفاعلات النووية.

وقياس التوزيعة الزاوية لأشعة (γ) من خلال بعض التفاعلات النووية يساعد كثيرا في تصنيف مستويات الطاقة في النواة ؛ ولهذا نرى أهمية ملائمة البيانات التجريبية للمنحنى (18.6) وحساب المعاملات الثلاثة.

في المعتاد، وبدلا من المعادلة (18.6)، يتم العمل بالمعادلة:

$$y = A_o\left(1 + A_2 P_2 + A_4 P_4\right) \qquad \ldots\ldots (19.6)$$

حيث A_2 و A_4 تسمى بالمعاملات المقومة (normalized coefficients) و $A_2 = {a_2}/{a_o}$ و $A_4 = {a_4}/{a_o}$.

الآن نباشر عملية استخراج المعادلات العمودية ونحسب الجمع:

$$s = \sum\left(\frac{y_i - a_0 - a_2 P_2(x_i) - a_4 P_4(x_i)}{\sigma_i}\right)^2 \qquad \ldots\ldots (20.6)$$

نفاضل (20.6) بالنسبة لـ a_o , a_2 و a_4 ثم نضع ناتج التفاضل مساوياً للصفر لنحصل على:

$$a_o\sum\frac{1}{\sigma_i^2} + a_2\sum\frac{P_2(x_i)}{\sigma_i^2} + a_4\sum\frac{P_4(x_i)}{\sigma_i^2} = \sum\frac{y_i}{\sigma_i^2}$$

$$a_o\sum\frac{P_2(x_i)}{\sigma_i^2} + a_2\sum\frac{P_2^2(x_i)}{\sigma_i^2} + a_4\sum\frac{P_2(x_i)P_4(x_i)}{\sigma_i^2} = \sum\frac{y_i P_2(x_i)}{\sigma_i^2}$$

$$a_o\sum\frac{P_4(x_i)}{\sigma_i^2} + a_2\sum\frac{P_2(x_i)P_4(x_i)}{\sigma_i^2} + a_4\sum\frac{P_4^2(x_i)}{\sigma_i^2} = \sum\frac{y_i P_4(x_i)}{\sigma_i^2}$$

الآن بإيجاد حلول هذه المعادلات نصل إلى قيم a_o و a_2 و a_4 وبالتالي لقيم A_o و A_2 و A_4 .

نلاحظ أنه نظرا لوجود الأخطاء التجريبية بقيم y_i فإنه لا بد من تواجد أخطاء أيضا بالمعاملات A وهذه تحسب من العلاقة:

$$\Delta A \equiv \sigma_A = \sqrt{\sum \sigma_i^2 \left(\partial A / \partial y_i \right)^2}$$

مثال (11.6)

إذا كانت التوزيعة الزاوية لأشعة γ الناتجة عن التفاعل $^{140}Ce\left(n, n'\gamma\right)$، استخدم فيه شعاع من النيوترونات السريعة من مفاعل تاجوراء، والتي تقابل طاقة $E_\gamma = 578.08\,keV$ $\left(4^+ \to 2^+\right)$ هي كما بالجدول المصاحب أسفله . فاكتب برنامجا يحسب المعاملات المختلفة .

θ	90^o	105^o	115^o	125^o	135^o	150^o
$y(\theta)$	1.000	1.007	1.073	1.178	1.266	1.372
	± 0.011	± 0.011	± 0.012	± 0.013	± 0.014	± 0.015

الحل:

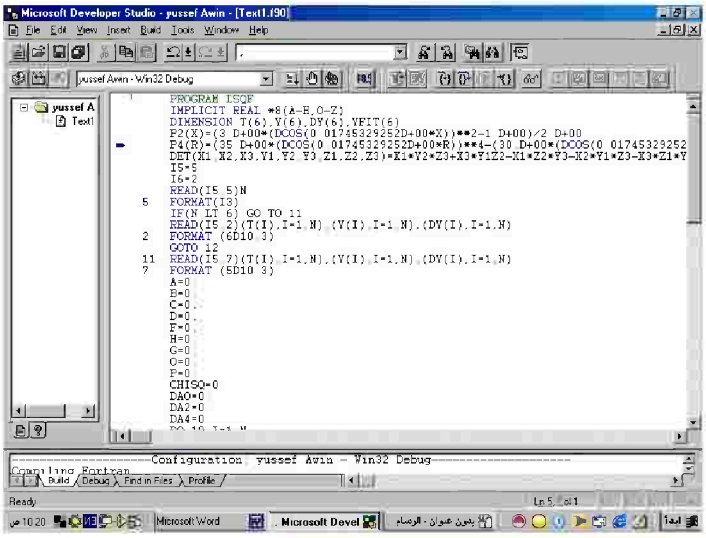
نكتب البرنامج الموضح بالشكل (18.6) وباستخدام البيانات المعطاة نحسب المعاملات المختلفة لنجد أن:

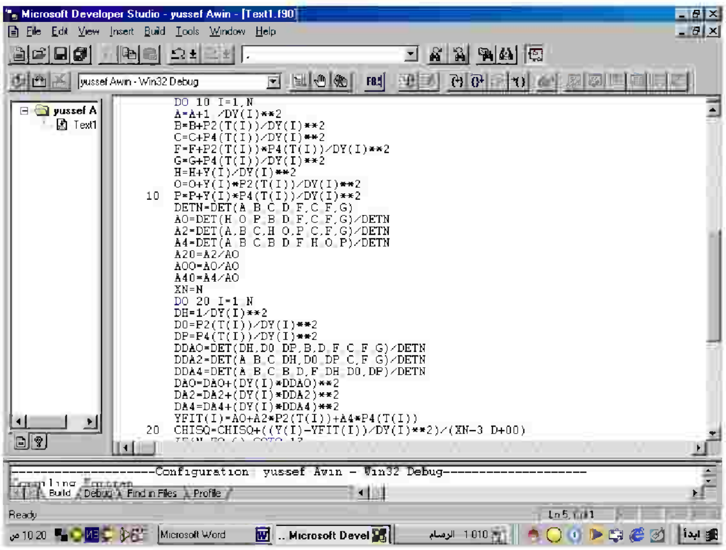
$$A_0 \pm \Delta A_0 = 1.163 \pm 0.006$$
$$A_2 \pm \Delta A_2 = 0.297 \pm 0.015$$
$$A_4 \pm \Delta A_4 = -0.015 \pm 0.019$$
$$s\left(\equiv X^2\right) = 2.19$$

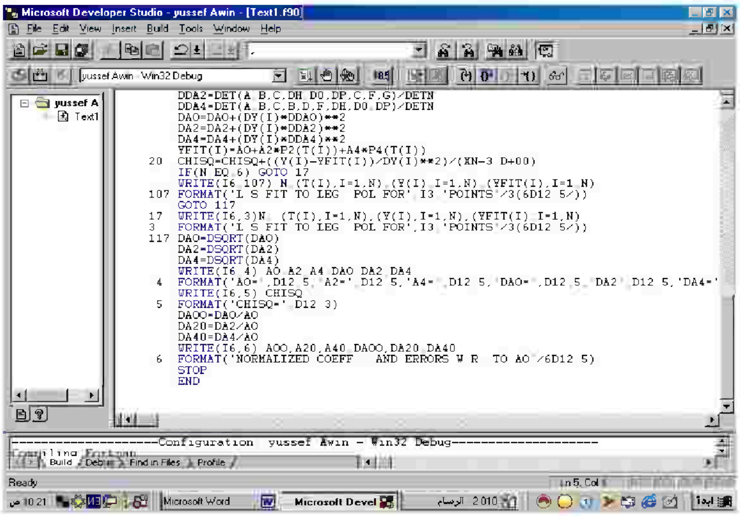
كما أن قيم y_i^{th} هي (على التوالي):

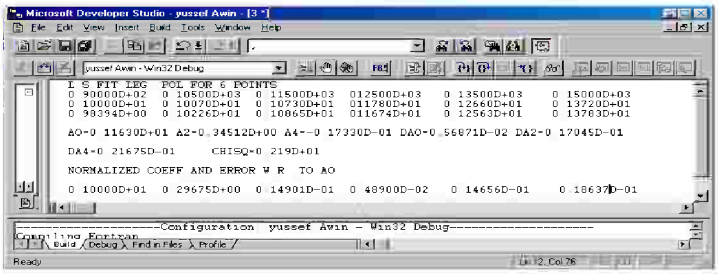
$$0.984\ ,1.023\ ,1.086\ ,1.256\ ,1.378$$

نلاحظ أننا قسمنا s على $n-3$ وذلك لاعتبارات درجات الحرية. نلاحظ أيضا أننا حصلنا عل قيم نظرية تقريبية جيدة وذلك مقارنة بالقيم التجريبية.









الشكل (19.6)- المثال (11.6) بالنتائج بلغة فورتران 90

تمارين (6)

1. ماذا نعني بالعبارات التالية : الانكفاء الخطي، الملائم الأجود، المربعات الصغرى؟

2. كيف يمكننا إيجاد أو استنتاج المنحنى التقريبي لأي فئة من البيانات ؟

3. إذا كانت القيم التالية معطاة:

- $x_2 \quad x_1 \quad x_o$
- $f(x_2) \quad f(x_1) \quad f(x_o)$

فأوجد معاملات الحدودية $p_2(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2$ التي تمثل البيانات وبدلالتها.

4. باستعمال الجدول المرافق، أوجد التقريب باستخدام المربعات الصغرى للصيغة $v = \sqrt{t} + b$. قارن بين البيانات الجدولية وقيم الدالة الناتجة.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v	8	20	27	32	40	40	45	50	50	56

5. أوضح أن طريقة المربعات الصغرى عندما تطبق على العلاقة $y = a$ تعطى صيغة للمتوسط الحسابي لقيم y .

6. بافتراض أن الحرارة النوعية للماء هي دالة خطية في درجة الحرارة؛ استخدم الجدول السابق بالمثال (3.6) لحساب هذا التقريب وباستخدام طريقة المربعات الصغرى. قارن بين النتيجتين.

7. لائم البيانات التالية بدالة قطع زائد ودالة أسية وقارن.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4
y	30	10	9	6	5	2	4

8. قم باشتقاق المعادلات العمودية الثلاث للمنحنى: $y = a + b\cos x + c\sin x$

أوجد a , b و c التي تلائم البيانات:

x	0	0.4	0.8	1.2	1.60	2.0	2.4	2.8	3.2	3.6	4.0
y	3	2.1	1.3	0.5	0	0.2	0.0	0.3	1.1	2.0	2.9

9. قم بحل المثال (7.6) من جديد ولكن باستخدام البيانات التالية*:

$E_\gamma = 919.48\ keV$

$y(\theta)$: 1.000 1.074 1.221 1.369 1.410 1.533

$E_\gamma = 1011.47\ keV$

$y(\theta)$: 1.000 0.953 0.896 0.917 0.838 0.775

10. عند تصادم نواة ^{13}C ببروتونات طاقتها $4.5MeV$ بعض من هذه البروتونات تؤسر بواسطة النواة وهذا يسبب في تحللها عن طريق أشعة γ معطية هذه الأشعة بطاقة $11MeV$؛ فإذا كانت التوزيعة الزاوية معطاة بالجدول أسفله. فاستخدم طريقة المربعات الصغرى لحساب المعاملات

* استخدم نفس الأخطاء التجريبية للمثال (7.6).

المختلفة A_0 , A_2 , A_4 واكتب أيضا القيم التقريبية المحسوبة.

θ	0	45	60	90	105	135
عدد γ	1352	927	804	889	855	881

11. بمسائل التوزيعة الزاوية إذا كانت $y(\theta) = a_o + a_2 p_2(\theta)$ قم بالتفصيل بكتابة الخطوات التي توجد بها a_o و a_2 وذلك باستخدام جدول بيانات وطريقة المربعات الصغرى.

12. للانكفاء الخطي، ماذا عن الحالة التي تكون فيها الأخطاء التجريبية متساوية؟ اشرح.

13. قم باشتقاق صيغة للانكفاء الخطي للبيانات الممثلة بـ $y = b^x$.

14. إذا كان المنحنى الممثل للبيانات المعطاة هو عبارة عن قطع مكافئ فهل يمكن القيام بتحويله تمكننا من الاستفادة من الانكفاء الخطي. اشتق المعادلات العمودية.

15. إذا كان المنحنى الملائم يمثل بالمعادلة $y = \sqrt{a + bx}$.

أ- أوضح أن هذا التقريب يمكن جعله خطياً.

ب- أكتب المعادلات العمودية لهذا التقريب.

16. اكتب المعادلات العمودية للانكفاء المتعدد: $f(y, z) = ay + bz + c$.

17. إذا عرفنا: $\Omega = \sum \frac{1}{(n-m)} (y_i - \bar{y}_i)^2$

حيث y_i هي القيمة التجريبية و $\bar{y}_i$ هي القيمة المحسوبة و n عدد النقاط و m عدد البارامترات بالمنحنى التقريبي؛ فإن مبدأ جاوس لجودة الملائمة يقول بأن أجود ملائمة، أو تقريب، هي تلك التي تجعل من Ω قيمة صغرى للبيانات المعطاة. وإذا أعطيت البيانات التالية:

x	0	1	2	3	4
y	0	20	40	50	70

فاستخدم مبدأ جاوس لإثبات ما إذا كانت العلاقة الخطية أو التربيعية أجود.

18. الجدول أسفله يعطي بيانات عن مدى استهلاك الماء بإحدى البلدان وذلك ببلايين الجالونات في اليوم.

أ- استعمل الانكفاء الأسي لملائمة استهلاك الماء بدلالة الزمن.

ب- استعمل (أ) لحساب استهلاك الماء في السنة 1975 وقارن بما كان متوقعاً وهو 449.7.

السنة	1930	1940	1950	1960	1970
الاستهلاك	110.5	136.43	202.7	322.9	411.2