

مسائل القيم الذاتية

يحتوي هذا الفصل على:

1.7  القيم الذاتية لمصفوفة حقيقة متناسقة.

2.7  طريقة جاكوبي Jacobi Method .

3.7  المتجهات الذاتية.

4.7  مسائل قيم ذاتية عامة.

1.7 القيم الذاتية لمصفوفة حقيقية متناسقة

(Eigenvalues of a real symmetric matrix).

في كثير من المسائل الفيزيائية نجد أنفسنا مضطرين لحل المعادلات التالية:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underset{\sim}{0}$$

أو

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

أو بشكل آخر:

$$A \underset{\sim}{x} = \lambda I \underset{\sim}{x} \quad \dots\dots (1.7)$$

حيث:

A مصفوفة متناسقة.

$\underset{\sim}{x}$ متجه لمتغيرات مستقلة.

λ قيم ذاتية تمثل قيم فيزيائية مثل الترددات الطبيعية لأنظمة متذبذبة كالوتر المهتز. ومسألة القيم الذاتية تتلخص في إيجاد قيم λ وهي القيم الذاتية و $\underset{\sim}{x}$ والتي تسمى بالمتجهات الذاتية. والطريقة الشائعة والمعتادة لإيجاد حلول هذه المسائل هي طريقة جاكوبي.

2.7 طريقة جاكوبي (Jacobi's Method)

تتلخص طريقة جاكوبي في الوصول بالمعادلة (1.7) إلى الشكل

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{pmatrix}$$

أو أن:

$$B \bar{x} = \lambda \bar{x} \quad \dots\dots (2.7)$$

حيث B و λ مصفوفتان قطريتان . لو تمكنا من ذلك عندئذ نرى أن الحلول هي λ و \bar{x} ؛ وحيث تكون λ هنا هي B .

ولكي نستخدم طريقة جاكوبي دعنا نستذكر بعضاً من معلوماتنا حول تحويل الإحداثيات في المستوى . ففي المستوى وللتحويل . من الإحداثيات \bar{x} إلى x بدوران θ للمحاور نقوم بالعملية:

$$x = T \bar{x} \quad \dots\dots (3.7)$$

حيث:

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة الدوران . ولكن:

$$Ax = \lambda x \quad \dots\dots (4.7)$$

نعوض بالمعادلة (3.7) في المعادلة (4.7) لنحصل على:

$$AT\bar{x} = \lambda T\bar{x} \quad \dots\dots (5.7)$$

بضرب (5.7) في T^T من اليسار واستعمال الخاصية أن $T^T T = 1$ نرى أن:

$$T^T AT\bar{x} = \lambda T^T T\bar{x} = \lambda \bar{x} \quad \dots\dots (6.7)$$

الآن لكي نطبق طريقة جاكوبي ونصل إلى الهدف المطلوب وهو جعل المصفوفة

على يسار المعادلة (6.7) قطرية، نختار θ بحيث تكون $B = T^T AT$ قطرية؛. ولكن:

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ولكي تكون B قطرية يجب أن يكون الحد غير القطري مساوياً للصفر وهذا يعني

أن:

$$a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \cos\theta \sin\theta(a_{22} - a_{11}) = 0 \quad \dots\dots (7.7)$$

و.هذه تعطي العلاقة:

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \quad \dots\dots (8.7)$$

بينما تصبح B على الشكل:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\sin^2\theta & 0 \\ 0 & a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\cos\theta\sin\theta + a_{22}\cos^2\theta \end{pmatrix} \quad \dots\dots (9.7)$$

مثال (1.7)

استخدم طريقة جاكوبي لجعل المصفوفة $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ قطرية . وعين القيم الذاتية للمصفوفة .

الحل:

بالرجوع للمعادلة (8.7) نرى أن θ التي تجعل A قطرية هي تلك التي تحقق المعادلة:

$$\tan 2\theta = \frac{2(1)}{4-2} = 1$$

أي أن $\theta = \pi/8$ ومنها ومن المعادلة (9.7) نحصل على:

$$B = \lambda = \begin{pmatrix} 4.414 & 0 \\ 0 & 1.586 \end{pmatrix}$$

أي أن القيم الذاتية للمصفوفة هي $\lambda_1 = 4.414$ و $\lambda_2 = 1.586$.

هذه هي طريقة جاكوبي في أبسط صورها حيث تم استخدامها في المستوى .

الآن لو أردنا العمل بمصفوفات من النوع (3×3) وهي المصفوفات التي عادة ما تواجهنا بالحياة العملية؛ فإننا نقوم بتحويلات متتابعة في المستوى لتتخلص من العناصر غير القطرية كلها . فمثلا تكون هذه التحويلات النوع:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وهو يمثل دوراناً في المستوى $x-y$. و

$$T_2 = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ويمثل دوراناً في المستوى $x-z$. و

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

ويمثل دوراناً في المستوى $y-z$.

ولتوضيح الخطوات المتبعة لجعل المصفوفة قطرية دعنا نقوم بحل المثال التالي:

مثال (2.7)

باستخدام طريقة جاكوبي أوجد القيم الذاتية للمصفوفة المتناسقة.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:

1. لتأخذ أكبر عنصر غير قطري وهو هنا a_{12} أو a_{23} وكلاهما يساوي -1 عليه نأخذ a_{12}

على أنه أكبر عنصر. (في القيمة)

2. نستخدم $T_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ومنها نرى أن:

$$\tan 2\theta = \frac{-2}{2-2} = -\frac{2}{0} \rightarrow -\infty$$

$$\theta = -\pi/4 \text{ أي أن:}$$

وهكذا حصلنا على زاوية الدوران التي تجعل من العنصرين a_{12} و a_{21} يتلاشيان.

بينما تكون مصفوفة الدوران:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/2} & +\sqrt{2/2} & 0 \\ -\sqrt{2/2} & \sqrt{2/2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. نعين المصفوفة:

$$A_1 = T_1^T A T_1$$

وتصبح A الجديدة هي A_1 .

4. نعيد الخطوات 1-3 على المصفوفة A_1 ونتخلص من أكبر عنصر غير قطري؛ وهكذا حتى نحصل على A_m (m هو عدد مرات الدوران) تكون قطرية. وهكذا نحصل على القيم الذاتية.

لو قمنا بكل الخطوات السابقة الذكر فإنه بعد خمس دورانات يمكننا الحصول على

القيم الذاتية التالية:

$$\lambda_1 = 3.4142$$

$$\lambda_2 = 1.9998$$

$$\lambda_3 = 0.5859$$

ملاحظات

(1) بالمثال السابق لاحظ أن $a_{31} = a_{13} = 0$ وأنها متناسقة وعليه يجب التخلص من عنصرين فقط وهما a_{12} و a_{23} .

(2) يعتقد أحدنا، من الملاحظة (1)، أنه يلزمنا دورانان لإنهاء العملية ولكن في الحقيقة وكما لاحظنا ليس هذا صحيحاً، فلقد احتجنا إلى خمس دورانات هنا. ويرجع السبب في ذلك إلى أنه بعد ضرب المصفوفات تتكون لدينا أرقام جديدة بمواضع أخرى بالرغم من اختفاء أحد العناصر غير القطرية.

ولكن لحسن الحظ أن كل دوران يجعل أكبر قيمة للعناصر غير القطرية تتضاءل وهكذا تدريجياً يتقارب A إلى الصيغة القطرية.

نعود الآن إلى الصيغة:

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \quad \dots\dots (10.7)$$

حيث a_{ij} هو أكبر عنصر غير قطري موجود بالصف i والعمود j ؛ وحيث أن:

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \quad \dots\dots (11.7)$$

فإنه من المعادلتين (10.7) و (11.7) نرى أن:

$$2a_{ij} \tan^2 \theta + 2(a_{ii} - a_{jj}) \tan \theta - 2a_{ij} = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية في $\tan \theta$ وحلها:

$$\tan \theta = \frac{-(a_{ii} - a_{jj}) \pm \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}}{2a_{ij}}$$

بالضرب في المرافق نحصل على:

$$\tan \theta = \frac{\pm 2a_{ij}}{|a_{ii} - a_{jj}| + \sqrt{(a_{ii} - a_{jj})^2 + 4a_{ij}^2}} \quad \dots (12.7)$$

وتعتمد الإشارة (\pm) على ما إذا كان a_{ii} أكبر من أو أصغر من a_{jj} . لاحظ أيضاً أن $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

الآن بحساب $\tan \theta$ من (12.7) نستطيع حساب $\cos \theta$ و $\sin \theta$ من العلاقتين:

$$\cos \theta = (1 + \tan^2 \theta)^{-1/2} \quad \dots (13.7)$$

$$\sin \theta = \cos \theta \cdot \tan \theta \quad \dots (14.7)$$

والمعادلات (12.7)، (13.7) و (14.7) هي المستعملة عادة في الحسابات. خصوصاً عند الاستنتاج بالحواسيب بدلا من المعادلة (10.7).

3.7 المتجهات الذاتية (Eigenvectors).

بالنسبة لحساب المتجهات الذاتية \tilde{x} ؛ نلاحظ أنه توجد n من القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ وذلك طبقاً لبعدها المصفوفة $(n \times n)$. وإذا كان V هو مجموعة هذه المتجهات $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ في مصفوفة مربعة والمناظرة لمصفوفات التحويل T_1, T_2, \dots, T_m وبحيث تقابل \tilde{x}_1 القيمة الذاتية λ_1 و \tilde{x}_2 القيمة الذاتية λ_2 ، و..... وهكذا.

فإن:

$$AV = \lambda \tilde{V}$$

وهذا يعنى أن:

$$V^{-1}AV = \lambda \tilde{V} \quad \dots\dots (15.7)$$

وبمقارنة المعادلة (15.7) بالمعادلة (لاحظ أن $T_1^{-1} = T_1^T$ و $V^{-1} = V^T$):

$$B = T_m^{-1} T_{m-1}^{-1} \dots T_1^{-1} AT_1 \dots T_m \quad \dots\dots (16.7)$$

نرى أن:

$$V = T_1 T_2 \dots T_m \quad \dots\dots (17.7)$$

فعلى سبيل المثال لو رجعنا للمثال (1.7) فإن:

$$V = T_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ و } A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

أو أن:

$$V = T_1 = \begin{pmatrix} 0.924 & -0.383 \\ 0.383 & 0.924 \end{pmatrix}$$

وأن:

$$\tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.924 \\ 0.383 \end{pmatrix} \text{ و } \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} -0.383 \\ 0.924 \end{pmatrix}$$

بينما نجد بالنسبة للمثال (2.7) أن:

$$V = T_1 \dots T_5 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.707 & 0.5 \\ -0.707 & 0 & 0.707 \\ 0.5 & -0.707 & 0.5 \end{pmatrix}$$

وهكذا يكون:

العمود الأول هو أول متجه ذاتي يماثل القيمة الذاتية 3.4142

العمود الثاني هو ثاني متجه ذاتي يماثل القيمة الذاتية 1.9998

العمود الثالث هو ثالث متجه ذاتي يماثل القيمة الذاتية 0.5859

مثال (3.7)

أستخدم طريقة جاكوبي لحساب القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة أسفله مستخدماً الحاسوب.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:

حيث إن المصفوفة متناسقة ، ولاستخدم طريقة جاكوبي نكتب البرنامج الفرعي JACOBI وبحيث نضع شرطاً على الحدود غير القطرية لتتضاءل إلى الصفر بأن نطلب أن تكون قيمتها أقل من عدد صغير مثل $\epsilon = 10^{-8}$ والبرنامج الفرعي هو:

SUBROUTINE JACOBI (N,Q,JVEC,M,V)

حيث N هو رتبة المصفوفة المتناسقة Q وهي أكبر من أو تساوي 2.

و V هي مصفوفة المتجهات الذاتية الناتجة.

و M هو عدد الدورانات المعمولة للحصول على المصفوفة القطرية، بينما $JVEC$ هو

بارامتر يأخذ القيمة صفراً إذا أردنا طباعة القيم الذاتية بينما يأخذ القيم

$\pm 1, \pm 2, \dots$ إذا أردنا الحصول على القيم الذاتية والمتجهات الذاتية معاً.

في هذا المثال إذا كتبنا البرنامج الموضح بالشكل (1.7) والذي يشتمل على

البرنامج الفرعي **JACOBI** فإنه يمكننا الحصول على النتائج الموضحة بالجدول

(1.7) والذي من خلاله نرى أن القيم الذاتية الثلاث هي:

$$\lambda_1 = 3.41423$$

$$\lambda_2 = 2.000$$

$$\lambda_3 = 0.58579$$

وهي تقريباً نفس النتائج التي سبق وأن حصلنا عليها يدوياً بالمثال السابق (2.7)، غير

أنه لزم الأمر هنا تسعة دورانات للحصول على هذه القيم نظراً للدقة التي تم فرضها

بالبرنامج.

```

C
C   THIS IS MAIN PROGRAM FOR EIGEN
C   VALUE PROBLEM IN THE FORM AX = LX
C
C   DATA IREAD , IWRITE /5,2 /
C   DIMENSION Q (12,12) , V(12,12)
C
C   READ IN THE ORDER OF MATRIX Q
C
C   READ (IREAD,*) N
C   DO 11 I= 1,N
11  READ (*,*) (Q(I,J),J=1,N)
      WRITE(IWRITE,30)
30  FORMAT('JVEC', 'MATRIX A' /)

```

■ ■ الفصل السابع ■ ■

```

DO 32 I=1,N
DO 31 J=1,N
31 Q(I,J,1)=Q(I,J)
32 WRITE (IWRITE,40) (Q(I,J),J=1,N)
40 FORMAT(5F15.5)

CALL JACOBI(N,Q,JVEC,M,V)

C      M NUMBER OF ROTATION

WRITE(IWRITE,60)M
30 FORMAT(//, 'THE NUMBER OF ROTATION=',I3//)

C
C      WRITE OUT THE EIGEN VALUES AND THE CORRESPONDING
C      EIGEN VECTORS
C
DO 46 J=1,N
WRITE(IWRITE,50)J,Q(I,J)
50 FORMAT(/ 'EIGENVALUE (' ,I2, ')=' ,F15.5)
WRITE(IWRITE,60)
60 FORMAT(/ 'EIGENVECTORS'//)
DO 46 I=1,N
46 WRITE(IWRITE,7) V(I,J)
7 FORMAT(2X,F15.5)
STOP
END

C      SUBPROGRAM FOR DIAGONALIZATION OF MATRIX Q
C      BY SUCCESSIVE ROTATIONS
C
SUBROUTINE JACOBI(N,Q,JVEC,M,V)
DIMENSION Q(12,12),V(12,12),X(12),IH(12)
JVEC=11

C
C      NEXT6 STATEMENTS FOR SETTING INITIAL VALUES OF MATRIX V
C
IF(JVEC.EQ.0)GOTO 15
DO 14 I=1,N
DO 14 J=1,N
14 V(I,J)=(I/C)*I/J/I
15 M=3

C
C      NEXT 6 STATEMENTS SCAN FOR LARGEST OFF DIAG.
C      ELEMENT IN EACH ROW
C      X(I) CONTAINS LARGEST ELEMENT IN THE ROW
C      IH(I) HOLDS SECOND SUBSCRIPT DEFINING POSITION
C      OF ELEMENT
C
MI=N-1

DO 30 I=1,MI
X(I)=0
KJ=I-1
DO 30 J=KJ,N
IF(X(I).GT.ABS(Q(I,J)))GOTO 30
X(I)=ABS(Q(I,J))
IH(I)=J
30 CONTINUE

:
:      NEXT 7 STATEMENT FIND FOR MAXIMUM OF X(I)
:      FOR PIVOT ELEMENT
:

```

■ ■ مسائل القيم الذاتية ■ ■

```

40 DO 70 I=1,M
   IF (I.LE.1) GOTO 60
   IF (XMAX.GT.X(I)) GOTO 70
60 XMAX=X(I)
   IP=I
   JP=IH(I)
70 CONTINUE
?
?   NEXT TWO STATEMENT TEST FOR XMAX , IF LESS
?   THAN 10**8, GO TO 1000
?
   EPSI=1.E-8
   IF (XMAX.LE.EPSI) GOTO 1000
   M=M+1
?
? NEXT 11 STATEMENT FOR COMPUTING, SIN, COS, Q(I, J), Q(I, J)
?
   IF (Q(IP, IP).GE.Q(JP, JP)) GOTO 151
   TANG=-2.*Q(IP, JP)/(ABS(Q(IP, IP)-Q(JP, JP))+SQRT((
1Q(IP, IP)-Q(JP, JP))**2+4.*Q(IP, JP)**2))
   GOTO 160
151 TANG=2.*Q(IP, JP)/(ABS(Q(IP, IP)-Q(JP, JP))+SQRT((
1Q(IP, IP)-Q(JP, JP))**2+4.*Q(IP, JP)**2))
160 COSN=1./SQRT(1.+TANG**2)
   SINE1= COSN*TANG
   Q11=Q(IP, IP)
   Q(IP, IP)=COSN**2*(Q11+TANG*(2.*Q(IP, JP)+TANG*Q(JP, JP)))
   Q(JP, JP)=COSN**2*(Q(JP, JP)-TANG*(2.*Q(IP, JP)-TANG*Q11))
   Q(IP, JP)=0
?
?   NEXT 4 STATEMENT FOR PSEUDO RANK EIGENVALUES
?
   IF (Q(IP, IP).GE.Q(JP, JP)) GOTO 133
   TEMP=Q(IP, IP)
   Q(IP, IP)=Q(JP, JP)
   Q(JP, JP)=TEMP
?
?   NEXT 6 STATEMENT ADJUST SIN, COS, FOR COMPUTATION
?   OF Q(I, K), V(I)
?
   IF (SINE1.GE.0.) GOTO 165
   TEMP=-COSN
   GOTO 170
165 TEMP=-COSN
170 COSN=ABS(SINE1)
   SINE1=TEMP
183 DO 250 I=1,MI
   IF (((I.EQ.IP).OR.(I.EQ.JP)).OR.((IH(I).NE.IP).
1AND.(IH(I).NE.JP))) GOTO 350
   K=IH(I)
   TEMP=Q(I, K)
?
?   Q(I, K)=0
?   KJ=I+1
?   X(I)=0.
?
C
C   NEXT 5 STATEMENT SEARCH IN DEPLETED ROW FOR
C   ROW MAXIMUM
C
   DO 320 J=MI, N
   IF (X(I).GT.ABS(Q(I, J))) GOTO 320
   X(I)=ABS(Q(I, J))

```

■ ■ الفصل السابع ■ ■

```

      ID(I)=J
320 CONTINUE
      Q(I,K)=TEMP
350 CONTINUE
      X(IP)=0.
      X(JP)=0.
C
C      NEXT IC STATEMENT FOR CHANGING THE OTHER
C      ELEMENT OF Q
C
      DO 530 I=1,N
      IF(1.E0.IP)GOTO 530
      IF(I.GT.IP)GOTO 420
      TEMP=Q(I,IP)
      Q(I,IP)=COSN*TEMP+SINEL*Q(I,JP)
      IF(X(IP).GE.ABS(Q(I,IP)))GOTO 390
      X(I)=ABS(Q(I,IP))
      IH(I)=IP
390 Q(I,JP)=-SINEL*TEMP+COSN*Q(I,JP)
      IF(X(IP).GE.ABS(Q(I,JP)))GOTO 530
      X(I)=ABS(Q(I,JP))
      IH(I)=JP
      GOTO 530
420 IF(I-JP)430,530,480
450 TEMP=Q(IP,I)
      Q(IP,I)=COSN*TEMP+SINEL*Q(IP,JP)
      IF(X(IP).GE.ABS(Q(IP,I)))GOTO 450
      X(IP)=ABS(Q(IP,I))
      IH(IP)=I
450 Q(I,JP)=-SINEL*TEMP+COSN*Q(I,JP)
      IF(X(IP).GE.ABS(Q(I,JP)))GOTO 530
480 TEMP=Q(IP,I)
      Q(IP,I)=COSN*TEMP+SINEL*Q(IP,JP)
      IF(X(IP).GE.ABS(Q(IP,I)))GOTO 500
      X(IP)=ABS(Q(IP,I))
      IH(IP)=I
500 Q(JP,I)=-SINEL*TEMP+COSN*Q(JP,I)
      IF(X(JP).GE.ABS(Q(JP,I)))GOTO 530
      X(JP)=ABS(Q(JP,I))
      IH(JP)=I
530 CONTINUE
C
C      NEXT IC STATEMENT TEST FOR COMPUTATION OF EIGENVECTORS
C
      IP(JVEC,EO,0)GOTO 40
      DO 550 I=1,N
      TEMP=V(I,IP)
      V(I,JP)=COSN*TEMP+SINEL*V(I,JP)
550 V(I,IP)=-SINEL*TEMP+COSN*V(I,JP)
      GOTO 40
1000 RETURN
      END

```

الشكل (1.7) برنامج يحسب القيم والمتجهات الذاتي للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ باستخدام طريقة جاكوبي.}$$

■ ■ مسائل القيم الذاتية ■ ■

```

JVECMATRIX A
      2.00000      -1.00000      0.00000
     -1.00000      2.00000     -1.00000
      0.00000     -1.00000      2.00000

THE NUMBER OF ROTATION = 9

EIGENVALUE(1)= 3.41421
EIGENVECTRS
      0.50000
     -0.70711
      0.50000

EIGENVALUE(2)= 2.00000
EIGENVECTRS
      0.70711
     -0.00000
     -0.70711

EIGENVALUE(3)= 0.58579
EIGENVECTRS
      0.50000
     -0.70711
      0.50000

```

الجدول (1.7) نتائج البرنامج الموضح بالشكل (1.7)

نعطي كذلك نفس المسألة ولكن بلغة C وباستخدام بيئة التطوير البرمجية دلفي. وذلك بالأشكال (4.7) – (7.7).

```

#include<conio.h>
#include<iostream.h>
#include<math.h>

angle_fun();
trans_funz();
trans_funy();
trans_funx();
int j,h,i,l,k,p,q,R,g;
float A[10][10],B[10][10],v[10][10],v[10][10];
float angle,c=0.0,vz[10][10],vy[10][10],vx[10][10];

main()
{
  clrscr();
  cout<<"\nEnter number of Rotations R =";
  cin>>R;

```

```

for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{ for( i=0 ; i < 3 ; i++)
  { cout<<"\nEnter A["<<j<<"]["<<i<<"]=" ";
    cin>>A[j][i];
  } }
cout<<"\nthe Array A[j][i]\n\n";
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{ cout<<endl;
for( i=0 ; i < 3 ; i++)
  { cout<<A[j][i]<<"\t\t";
  } }
for (h=1 ; h<= R ; h++)
{
angle_fun();

if (l+k == 1 )
trans_funz();
else
{
if( l+k == 2 )
trans_funy();
else
trans_funx();
}
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{
for( i=0 ; i < 3 ; i++)
A[j][i]=b[j][i];
}

for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{ cout<<"\nIenvalue["<<j<<"]="<<b[j][j]<<endl;
cout<<"Igemvectors:\n";
for( i=0 ; i < 3 ; i++)
{ cout<< v[i][j]<<endl;}}

getche();
return(0);
}
}
/*****
angle_fun()
float m=0,w,s;
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{ for( i=0 ; i < 3 ; i++)
  { if ( i!=j)
    { if( A[j][i] < 0)
      w = A[j][i] *(-1);
    else w = A[j][i];
    if ( m < w )
    { m = w ; l=j; k=i;
    }}}

s = 2 * A[l][k]; w = A[l][l] - A[k][k];
if( w == 0 && s < 0 )
angle = - 3.14159265/4;
else { if ( w == 0 && s > 0 )
{ angle = 3.14159265/4;
} else
{ angle = (atan(s/w))/2;}}
return(0);
}
}
/*****
trans_funz()
float Tz[3][3]={cos(angle),-sin(angle),0,sin(angle),cos(angle),0,0,0,1};
float Tt[3][3]={cos(angle),sin(angle),0,-sin(angle),cos(angle),0,0,0,1};

for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{p=0;
for (g=0; g< 3;g++)

```



```

        if(h != 1 )
        {
            for( j=0 ; j < 3 ; j++)
            {p=0;
            for (g=0; g< 3;g++)
            {q=0;
            for( i=0 ; i< 3 ; i++)
            {c= c+v[j][i]*vy[q][p];
            q=q+1;
            }
            v[j][g]=c ; c=0.0 ; p=p+1 ;
            }}
            for (j=0;j<=3;j++)
            { for(i=0;i<=3;i++)
            v[j][i]=v[j][i]; }}
return(0);
}
/*****
trans_funx()
float Tx[3][3]={1,0,0,0,cos(angle),-sin(angle),0,sin(angle),cos(angle)};
float Tt[3][3]={1,0,0,0,cos(angle),sin(angle),0,-sin(angle),cos(angle)};
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{p=0;
for (g=0; g< 3;g++)
{q=0;
for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{C= C+Tt[j][i]*A[q][p];
q=q+1;
}
B[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
}}
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{p=0;
for (g=0; g< 3;g++)
{q=0;
for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{C= C+B[j][i]*Tx[q][p];
q=q+1;
}
h[j][g]=C ; C=0.0 ; p=p+1 ;
}}
for( j=0 ; j < 3 ; j++)
{ for( i=0 ; i< 3 ; i++)
{ if ( h == 1)
v[j][i]=Tx[j][i];
else

vx[j][i]=Tx[j][i]; }}
        if(h != 1 )
        {
            for( j=0 ; j < 3 ; j++)
            {p=0;
            for (g=0; g< 3;g++)
            {q=0;
            for( i=0 ; i< 3 ; i++)
            {c= c+v[j][i]*vx[q][p];
            q=q+1;
            }
            v[j][g]=c ; c=0.0 ; p=p+1 ;
            }}
            for (j=0;j<=3;j++)
            { for(i=0;i<=3;i++)
            v[j][i]=v[j][i]; }}
return(0);
}
/*****/

```

الشكل (4.7) – المثال (3.7) بلغة C.

The Array A[j][i]

```

2          -1          0
-1         2          -1
0          -1          2
Ienvalue[0]=3.414213
Igemvectrs:
0.5
-0.707107
0.5

Ienvalue[1]=0.585786
Igemvectrs:
0.5
0.707107
0.5

Ienvalue[2]=2
Igemvectrs:
-0.707107
7.640574e-08
0.707107

```

الشكل (5.7) نتائج المثال (3.7) بلغة C.

```

procedure Jacobi(N: integer; var Q : TNByN; var JVec :
real; var M : integer; var V : TNByN);
var
  X: array[1..12] of real;
  IH : array[1..12] of integer;
  i, j : integer;
  MI, MJ, IP, JP, k : integer;
  XMax, EPSI, Tang, Cosn, Sine, CII, Temp : real;

label L40;
begin
  //-----Initialization-----
  for i := 1 to 12 do
    begin
      x[i] := 0; IH[i] := 0;
      for j := 1 to 12 do V[i,j] := 3;
    end;
  //-----
  JVec := 3;

  if JVec < 0 then
    begin
      for i := 1 to n do
        for j := 1 to n do
          V[i,j] := (i/j)*(j/i);
        end;
      //-----
      M := 0;
      MI := n-1;
      //-----
      for i := 1 to MI do
        begin
          X[i] := 0;

```

■ ■ الفصل السابع ■ ■

```

MJ := i - 1;
for j := MJ to n do
begin
  if X[i] > Abs(Q[i,j]) then continue;
  X[i] := Abs(Q[i,j]);
  IH[i] := j //
end;

end;
//-----
L40:
for i := 1 to MI do
begin
  if i > 1 then if XMax > X[i] then continue;
  XMax := X[i];
  IP := i;
  JP := IH[i];
end;
//-----

EPSI := Power(10, -8);
if XMax < EPSI then exit;

M := M + 1;
//-----
if Q[IP,IP] > Q[JP,JP] then
  Tang := 2.0 * Q[IP,JP]/(Abs(Q[IP,IP] - Q[JP,JP]) +
Sqrt(Power(Q[IP,IP] - Q[JP,JP], 2) + 4.0*Power(Q[IP,JP], 2)));
else
  Tang := -2.0 * Q[IP,JP]/(Abs(Q[IP,IP] - Q[JP,JP]) -
Sqrt(Power(Q[IP,IP] - Q[JP,JP], 2) + 4.0*Power(Q[IP,JP], 2)));
//-----

Cosn := 1.0/Sqrt(1.0 + Power(Tang, 2));
Sine := Tang * Cosn;

QII := Q[IP,IP];

Q[IP,IP] := Power(Cosn, 2) * (QII + Tang * (2.0*Q[IP,JP]
+ Tang * Q[JP,JP]));
Q[JP,JP] := Power(Cosn, 2) * (Q[JP,JP] - Tang *
(2.0*Q[IP,JP] - Tang * QII));

Q[IP,JP] := 0;
//-----
if Q[IP,IP] < Q[JP,JP] then
begin
  Temp := Q[IP,IP];
  Q[IP,IP] := Q[JP,JP];
  Q[JP,JP] := Temp;
  if Sine >= 0 then Temp := -Cosn else Temp := Cosn;

Cosn := Abs(sine);
Sine := Temp;

```

```

end;
//-----
for i := 1 to MI do
begin
  if (i = IP) or (i = JP) or (IH[i] <> IP) or (IH[i] <>
JP) then continue;
  k := IH[i];
  Temp := Q[i,k];
  Q[i,k] := 0;
  MJ := i + 1;
  X[i] := 0;

  for j := MJ to n do
  begin
    if X[i] > Abs(Q[i,j]) then continue;
    X[i] := Abs(Q[i,j]);
    IH[i] := j;
  end; //for j
  Q[i,k] := Temp;
end; //for i
//-----

X[IP] := 0; X[JP] := 0;
//-----

for i := 1 to n do
begin
  if i = IP then continue;
  if i <= IP then
  begin
    Temp := Q[i,IP];
    Q[i,IP] := Cosn * Temp + Sine * Q[i,JP];
    if X[i] < Abs(Q[i,IP]) then
    begin
      X[i] := Abs(Q[i,IP]);
      IH[i] := IP;
    end;
    Q[i,JP] := -Sine * Temp + Cosn * Q[i,JP];
    if X[i] >= Abs(Q[i,JP]) then continue;
    X[i] := Abs(Q[i,JP]);
    IH[i] := JP;
    continue;
  end;

  if (i - JP) < 0 then
  begin
    Temp := Q[IP,i];
    Q[IP,i] := Cosn * Temp + Sine * Q[i,JP];
    if X[IP] < Abs(Q[IP,i]) then

```

■ ■ الفصل السابع ■ ■

```

begin
  X[IP] := Abs(Q[IP,i]);
  IH[IP] := i;
end;
Q[i,JP] := -Sine * Temp + Cosn * Q[i,JP];
if X[JP] >= Abs(Q[i,JP]) then continue;
end else if (i - JP) = 0 then continue;

// else if (i - JP) > 0 then
// begin
// end;
Temp := Q[IP,i];
Q[IP,i] := Cosn * Temp + Sine * Q[JP,i];
if X[IP] < Abs(Q[IP,i]) then
begin
  X[IP] := Abs(Q[IP,i]);
  IH[IP] := i
end;
Q[JP,i] := -sine * Temp + Cosn * Q[JP,i];
if X[JP] >= Abs(Q[JP,i]) then continue;
X[JP] := Abs(Q[JP,i]);
IH[JP] := i
end; //for i
//-----
if JVec > 0 then goto L40;

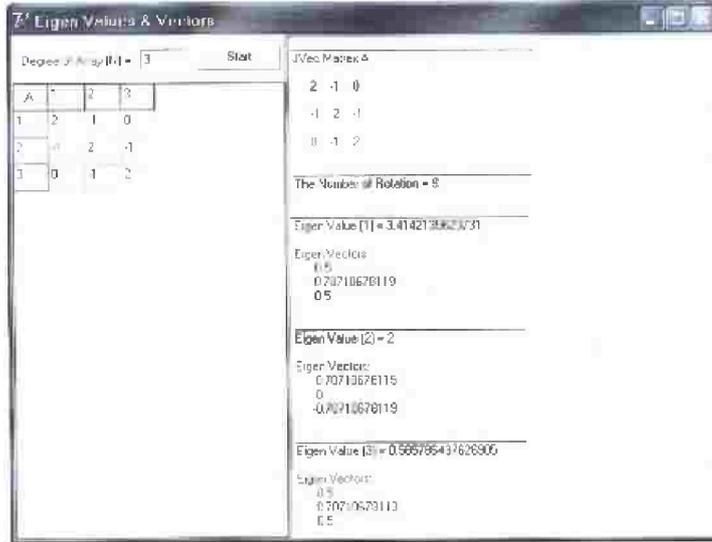
for i := 1 to n do
begin
  Temp := V[i,IP];
  V[i,JP] := Cosn * Temp + Sine * V[i,JP];
  V[i,IP] := sine * Temp + Cosn * V[i,JP];
  // showmessage(inttostr(i));
end;

goto L40
end;

```

الشكل (6.7) – المثال (3.7) بلغة دلفي.

■ ■ مسائل القيم الذاتية ■ ■



الشكل (7.7) – نتائج المثال (3.7) بلغة دلفي.

مثال (4.7)

أكتب برنامجاً حاسوبياً يحسب القيم والمتجهات الذاتية للمصفوفة $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ باستخدام طريقة جاكوبي.

الحل:

نستخدم طريقة جاكوبي كما سبق شرحه ثم نكتب الخوارزمية فالبرنامج. في الأشكال (8.7) – (11.7) نعطي هذه الحسابات بلغتي فورتران وبيسك المرئية.

■ ■ الفصل السابع ■ ■

```

Microsoft Developer Studio - TextE - [F:\TextE 190 *]
File Edit View Insert Build Tools Window Help
TextE - Win32 Debug

*****
!PROGRAM      OF Eigenvalues
*****
DIMENSION V(9)
REAL T,A,B,LAMDA1,LAMDA2,A1,A2,A3,A4
print*, "ENTER N"
READ*, N
PRINT*, "*****"
DO I=1,N
  READ*, V(I)
ENDDO
IF(V(1).EQ.V(4)) GOTO 10
R=(2*V(2))/(V(1)-V(4))
T=ATAN2(R)/2
GOTO 20
10 T=45
IF(V(2).LT.0.0) THEN
  T=-45
ENDIF
20 PRINT*, "*****"
PRINT*, "THEATA=. ",T
A=SIND(T)
B=COSD(T)
LAMDA1=V(1)*B**2+2*V(2)*A*B+V(4)*A**2
LAMDA2=V(1)*A**2-2*V(2)*A*B+V(4)*B**2
PRINT*, "*****"
PRINT*, "EIGENVALUES"
PRINT 30,LAMDA1,LAMDA2
30 FORMAT(/SX,F8.5,/SX,F8.5)
A1=B
A2=A
A3=-A
A4=B

```

■ ■ مسائل القيم الذاتية ■ ■

```

Microsoft Developer Studio - TextE - [TextE.F90]
File Edit View Insert Build Tools Window Help
TextE - Win32 Debug
A=SIND(T)
B=COSD(T)
LAMDA1=V(1)*B**2+2*V(2)*A*B+V(4)*A**2
LAMDA2=V(1)*A**2-2*V(2)*A*B+V(4)*B**2
PRINT*, "=====
PRINT*, "EIGENVALUES"
PRINT 30, LAMDA1, LAMDA2
30 FORMAT(/5X, F8.5, /5X, F8.5)
A1=B
A2=A
A3=-A
A4=B
PRINT*, "=====
PRINT 40, A1, A2
40 FORMAT(/3X, "X1", /4X, F8.6, /4X, F8.6)
PRINT*, "=====
PRINT 50, A3, A4
50 FORMAT(/3X, "X2", /4X, F8.6, /4X, F8.6)
PRINT*, "=====
STOP
END
-----Configuration: TextE - Win32 Debug-----
Linking...
TextE.exe - 0 error(s), 0 warning(s)
Build Debug Find in Files Profile
Ln:Col: RECOVER READ
Ready

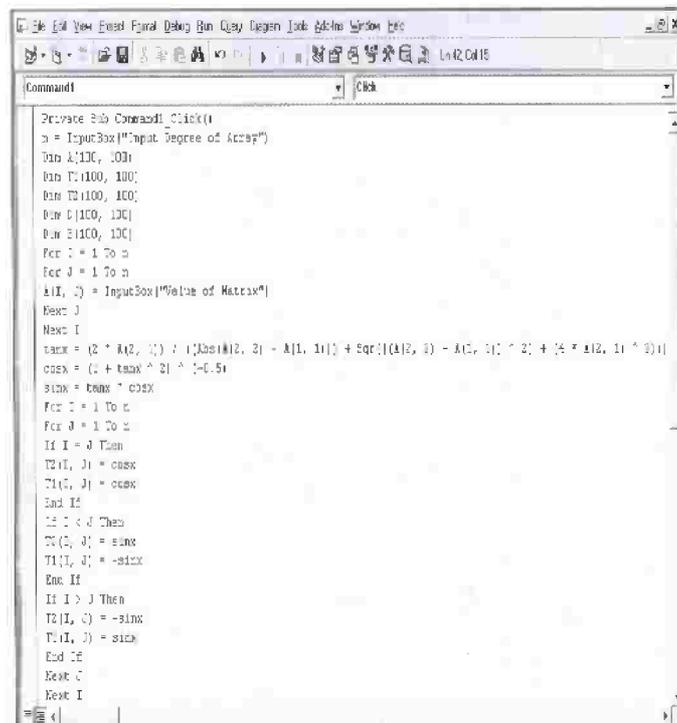
```

الشكل (8.7) – المثال (4.7) بلغة فورتران.

■ ■ الفصل السابع ■ ■



الشكل (9.7) – نتائج المثال (4.7) بلغة فورتران.



4.7 مسائل قيم ذاتية عامة

حتى الآن ركزنا كل دراستنا على حل مسائل القيم الذاتية من النوع:

$$A\tilde{x} = \lambda B\tilde{x} \quad \dots\dots (18.7)$$

حيث B هي مصفوفة الوحدة . في هذا البند نتطرق إلى الحالة الأعم وندرس المسألة عندما تكون B قطرية و عندما تكون B متناسقة.

الحالة الأولى : B قطرية (**B is diagonal**)

في هذه الحالة يمكن أن نكتب B على النحو:

$$B = G^T G = GG \quad \dots\dots (19.7)$$

حيث G قطرية، وعليه فإن:

$$g_{ii} = \sqrt{b_{ii}}$$

وبالتعويض من (19.7) في (18.7) نرى أن:

$$A\tilde{x} = \lambda GG\tilde{x} \quad \dots\dots (20.7)$$

بضرب (20.7) في G^{-1} نجد أن:

$$G^{-1}AG^{-1}G\tilde{x} = \lambda G\tilde{x}$$

فإذا فرضنا أن $y = G\tilde{x}$ و $Q = G^{-1}AG^{-1}$ لوجدنا أن:

$$Q\tilde{y} = \lambda \tilde{y} \quad \dots\dots (21.7)$$

والمعادلة (21.7) هي نفس المعادلة التي تعرضنا لها بالبنود السابقة لإيجاد القيم والمتجهات الذاتية. إضافة إلى ذلك نرى أن القيم الذاتية المطلوبة هي تلك التي تجعل من Q قطرية.

أما المتجهات الذاتية فنحصل عليها من y بالضرب في G^{-1} أي أن:

$$\underline{x} = G^{-1} \underline{y} \quad \dots\dots (22.7)$$

وهكذا نرى في هذه الحالة أن حل المعادلة (18.7) يكمن في حل المعادلة (21.7) وحساب (22.7).

مثال (5.7)

إذا كانت مسألة القيم الذاتية الناتجة عن دراسة الذبذبات الحرة لنظام يتكون من ثلاث كتل $m, 2m, 3m$ تتلخص في إيجاد حل المعادلة:

$$\begin{pmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\omega^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2m\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \dots\dots (23.7)$$

حيث ω هو التردد و \underline{x} متجه الإزاحة و $k = s/\ell$ حيث s هو الشد في الخيط و 4ℓ طول الخيط. احسب القيم والمتجهات الذاتية لهذه المسألة.

الحل:

نضع $\lambda = \frac{m\omega^2}{k}$ لتصبح المعادلة على النحو:

$$A\tilde{x} = \lambda B\tilde{x}$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

و

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

وبهذا تصبح المعادلة من النوع (14.7) [الحالة الأولى]. نكتب برنامجاً يحسب G ومن ثم Q (وهنا نستخدم برنامجاً لضرب المصفوفات) ثم نلجأ إلى JACOBI والذي من خلاله نحسب القيم الذاتية لـ Q وبالتالي القيم الذاتية لـ A كما نحسب $\tilde{x} = G^{-1}y$. إذا قمنا بذلك نحصل على النتائج التالية:

$$\lambda_1 = 2.38742, \quad \tilde{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.87134 \\ -0.33758 \\ 0.06539 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1.0, \quad \tilde{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.40824 \\ 0.40824 \\ -0.40824 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 0.27924, \quad \tilde{x}_3 = \begin{pmatrix} 0.27218 \\ 0.46837 \\ 0.40297 \end{pmatrix}$$

(انظر التمرين 11 بآخر هذا الفصل)

الحالة الثانية: B متناسقة (**B is symmetric**)

نحسب B كما يلي:

$$B = VDV^T \quad \dots\dots (24.7)$$

حيث D قطرية و V هو مصفوفة المتجهات الذاتية التي تجعل من B قطرية.

نقوم بالتعويض بالمعادلة (24.7) في المعادلة (18.7) لنحصل على:

$$A\tilde{x} = \lambda VDV^T \tilde{x} \quad \dots\dots (25.7)$$

بضرب (25.7) في V^T نرى أن:

$$V^T AVV^T \tilde{x} = \lambda DV^T \tilde{x}$$

ولو أخذنا $H = V^T AV$ و $y = V^T \tilde{x}$ فإننا نحصل على:

$$H \tilde{y} = \lambda D \tilde{y} \quad \dots\dots (26.7)$$

والمعادلة (26.7) هي إحدى مثيلات المعادلة (18.7) للحالة الأولى.

وهكذا نعيد نفس الخطوات لتلك الحالة، وهي الحالة التي تكون فيها B قطرية،

حيث نضع $D = GG$ ثم $Q = G^{-1}HG^{-1}$ و $z = G^{-1}y$ وبذلك نجد أن:

$$\tilde{x} = VG^{-1} z$$

ملاحظة: في الحالتين الأولى والثانية افترضنا أن B مصفوفة حقيقية و متناسقة وموجبة تحديدا (positive definite). هذا بالطبع يمكننا من افتراض صحة المعادلة (19.7) ومثيلتها في الحالة الثانية.

تمارين (7)

1. هل يمكننا استخدام طريقة جاكوبي دائماً لحل مسائل القيم الذاتية؟ اشرح.
2. ماذا تعني العبارة "أن B يجب أن تكون موجبة تحديداً"؟ اضرب بعض الأمثلة على ذلك.

3. لماذا نهتم بدراسة مسائل القيم الذاتية التي تكون فيها المصفوفة A متناسقة؟

4. أوجد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية لنظام المعادلات

$$x_1 + x_2 + x_3 = \lambda x_1$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = \lambda x_2$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \lambda x_3$$

5. أوضح أنه يمكن استخدام دورانين فقط لجعل المصفوفة A أسفله قطرية. اكتب القيم الذاتية في صورة كسرية.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. أوجد عزوم القصور الذاتية الأساسية لجسم جاسئ مصفوفته المعطاة أسفله؛ هل يمكنك أيضاً تعيين المحاور الأساسية؟

$$I = mr^2 \begin{pmatrix} 10 & 0.134 & -0.866 \\ 0.134 & 6.5 & -1.0 \\ -0.866 & -1.0 & 7.5 \end{pmatrix}$$

7. في مسألة إجهاد ثلاثية الأبعاد نحصل على المصفوفة:

■ ■ الفصل السابع ■ ■

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \delta_{xy} & \delta_{xz} \\ \delta_{yx} & \sigma_y & \delta_{yz} \\ \delta_{zx} & \delta_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

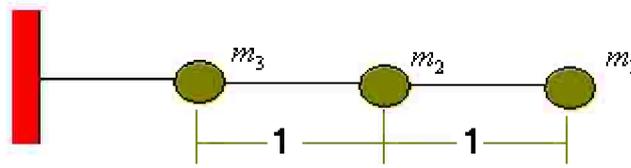
أوجد القيمة الأساسية للإجهاد إذا علمت أن:

$$\delta_{zx} = 180, \delta_{xy} = 65, \delta_{yz} = 75, \sigma_z = 150, \sigma_y = 200, \sigma_x = 120$$

8. عين تردد النظام الموضح بالشكل أسفله علماً بأن معادلة الحركة هي :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{\omega^2 c}{27} \begin{pmatrix} 27 & 14 & 4 \\ 14 & 8 & 2.5 \\ 4 & 2.5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

حيث $c = 3, m_1 = m_2 = 2$ و m_3 ثابت.



9.

أ- أكتب مصفوفة التحويل للمسألة $A\tilde{x} = \lambda \tilde{x}$ حيث: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

ب- ما هي القيم الذاتية للمسألة بالفقرة (أ).

ج- أكتب المتجهات الذاتية للمسألة بالفقرة (أ).

د- أوجد القيم الذاتية للمسألة $C\tilde{x} = \lambda A\tilde{x}$ حيث A كما جاء بالفقرة (أ). و

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10. هل يمكنك اقتراح طريقة لإيجاد القيم الذاتية لأي مصفوفة $A = (a_{ij})$ في الحالة العامة التي تكون فيها A غير متناسقة وذلك من خلال دراستك لهذا الفصل؟
وضح!
11. قم بالتأكد من صحة نتائج المثال (5.7) وذلك بإجراء الحسابات بإحدى لغات البرمجة.