نظرية الأرقام وإسهامات الرياضيات العربية(*)

(*) نشر بمجلة العلوم الاجتماعية والإنسانية ــ الهيئة القومية للبحث العلمي ، العدد 12 ، سنة 2004 ف

يثير مجال " فلسفة الرياضة " العديد من التساؤلات عند أغلب الناس ، ومنهم إختصاصيون ، على درجة عالية من الإتقان الرياضي ، إلى الحد الذي يخلطون فيه ، ما بين الرياضيات وفلسفة الرياضة . وربما يعود ذلك إلى أننا في دراسة موضوعات الرياضة ، نجد أنفسنا إزاء موقفين أو اتجاهين . اتجاه تركيبي متصاعد ، يسعى إلى المزيد من الإضافات والتراكيب وهذه هي الرياضيات العادية . أما الاتجاه الأخر ، فهو تحليلي ، يتجه نحو الأسس ، ويبحث عن أكثر الأفكار الرياضية تجريداً وبساطة ومنطقية ، وهو فلسفة الرياضة . حيث البحث عن أبسط وأعم الأفكار ، والتي تساعدنا على فهم واستيعاب ، إنجازات الرياضة العادية وتوسيع معلوماتنا ومداركنا حولها ، كما تمكننا في بعض الحالات ، من بناء أنساق رياضة جديدة . كما يعود الخلط إلى عدم التحديد القاطع ، ما بين المجالين . فقد يحدث أن تكون موضوعات الرياضة العادية ، من ضمن مجال فلسفة الرياضة . وكذلك يمكن أن تكون موضوعات فلسفة الرياضة ، من ضمن الرياضيات العادية . إذن كيف يمكن أن نحدد بدقة ، موضوعات كل من الرياضة العادية وموضوعات فلسفة الرياضة ؟! .

وللإجابة عن هذا السؤال وتحديد موضوع ومجال كل منهما ، علينا في البداية أن نقرر أن الخلاف لم يكن أبداً موضوعياً ،

إنما هو خلاف منهجي في الأساس . فهو كما يقول رسل يكمن في الحالة الذهنية التي يكون عليها الباحث . فاليونان ــ مثلاً ــ عندما تجاوزوا القواعد التجريبية ، التي وضعها المصريون القدماء لقياس الأرض ، إلى النظريات العامة التي أمكن بها تبرير تلك القواعد . إنما كانوا يشتغلون بالفلسفة الرياضية . وعندما وصلوا إلى وضع بديهيات ومصادرات ، أصبح استخدمها في الاستنباط ، كما نجد ذلك عن (اقليدس) مما يدخل في الرياضة بمعناها العادي[1] .

فإذا ما تقدمنا خطوة أخرى ، فإننا لا ندرس اتجاه الحالة الذهنية ، بل ستخضع هذه الحالة نفسها للدراسة . أي بمعني أخر ، ما الذي يجعل هذا الإنجاز الرياضي أمراً ممكناً ؟! .. ما هي أسسه وما هي أدواته ؟! وهل الإنجاز مبرر ؟! أي يمتلك الصياغة النظرية والاستخدام ؟! .

فأساس الحالة الذهنية ، هي الذهنية ذاتها . وهذه تتحدد من مجمل الأفكار الثقافية والاجتماعية والنفسية وربما الاقتصادية . فاقليدس حينما كان يسعى ، بصورة ذكية مثيرة ، إلى بناء هندسي متكامل . ركز أساساً على تحديد المفاهيم كتعريفات . تم وضع بديهيات

---

[1] برترا ند رسل " مقدمة للفلسفة الرياضة " ترجمة محمد مرسي محمد وأحمد فواد الاهواني مؤسسة سجل العرب القاهرة 1980 ص5 .

ومصادرات فإذا قمنا بتحليل هذه البديهيات والمصادرات ، فلن يكون غريباً إذا اكتشفنا أن اقليدس مثله مثل غيره ، من الناس والعلمـــاء ، يخضع للأفكار والمبادئ السائدة في ثقافة مجتمعه . حتى وإن لم يكن على وعي أو دراية بها . ولو وجد اقليدس في بيئة مختلفة عن بيئتـــه لاختلفت أفكاره ومواقفه ومنهجه وهندسته كلها .

للبرهنة على هذا الذي قلناه فإن بناء اقليـــدس الهندســـي نفـــسه ، خير مثال على ذلك ، فقد وضـــع اقليـــدس ، تعريفـــات وبـــديهيات ومصادرات ، واستخدمها في البرهنة على نظرياته في الجـــزء الأول من كتابه " الأصول " إلا أن اللافت للنظر ، أنه لم يستخدم المصادرة الخامسة من مصادراته وهي مصادرة المتوازنات وقد حاول ــ على استحياء ــ استخدمها لأول مرة ، وأخر مرة في البرهنة على النظرية **(19)** من كتاب الأصول ، إلا أنه ثبت بعد ذلك أن استخدمه هذا لـــم يكن ضروريا ، أي كان يمكن البرهنة علـــى هـــذه النظريـــة ، دون استخدام المصادرة الخامسة كما فعل في باقي مصادراته[1] .

هذا يعني ، إن اقليدس نفسه ، كان على وعـــى ، بمـــشكلة هـــذه المصادرة ولكن ابتداء من الرياضيات العربية ، قامت عدة محاولات لحل تناقضها مع بقية المصادرات . إلا خطأ هؤلاء كان في اعتقادهم بصحة بنيان اقليدس . وصحة مصادرته لذلك حـــاولوا إصـــلاحها ،

---

[1] انظر هاشم الطيار ويحيى سعيد " موجز تاريخ الرياضيات " جامعة الموصل ، 1977 ، ص 103 .

عن طريق مبرهنات عرفت " بالمتكافئات " مع استخدام برهان الخلف ، وهذا استخدام ذكى وأصيل . إلا أنه لم يقد إلى نتيجة حاسمة في هذا الصدد ؛ لأن محاولتهم كانت محصورة داخل نظام الهندسة الاقليدية ، ولم يتم الحل إلا في وقت قريب نسبياً ، بعد تقدم العلم والمنطق ، حيث اكتشاف أنظمة هندسية جديدة مختلفة ، أطلق عليها الهندسات اللاقليدية .

ولم تكن مشكلة المصادرة نتيجة لخطأ رياضي صرف . إنما كان أساساً خطأ فلسفيا ، أي في الأساس الذي قامت عليه الهندسة الأقليدية . فقد تبين أن كل البديهيات تتحدث عن كون محدود ونهائي الامتداد ، وهذا رأي اقليدس واليونان عموماً اما المصادرة الخامسة فهي تتحدث عن كون لا متناه في امتداده ، لهذا كان تناقضها مع بقية البديهيات والمصادرات ، بل ومع الأسس الفلسفية للفكر اليوناني ، الذي يمثله اقليدس كأفضل ما يكون .

في ضوء ذلك ، نستطيع أن نقول أن الفكر الرياضي ، هو جزء من ثقافة وبيئة الإنسان ــ متأثرا ومؤثراً ــ فكما يدخل هذا الفكر في الصيد والزراعة والبناء والحرب والتسلية ، فإن هذه الأشياء تؤثر أيضاً في الفكر الرياضي . يقول " فنجشتاين " إن الرياضيات لم تكن من خلق العقل فحسب بل أنها متأثرة بثقافة العصر الذي تطورت

فيه . وحقيقتها تعتمد على الجنس البشري كإدراك اللـــون واللغـــة[1] وهو المعني الذي قرره " الكندي " حيث قال : إن الناس وصلوا إليها بجهدهم وحيلتهم[2] .

ففي علم كلي التجريد ، فإن ذهنية الباحث تقـــوم بـــدور أساســـي وحاسم ، وهذه الذهنية تتشكل وفقاً لمعطيات البيئة الثقافيـــة والدينيـــة والنفسية لمجتمع ما . وهذا ليس عيباً لا للرياضيات ولا للرياضـــي ، إنما على العكس من ذلك تماماً ، فهي تعطي للعلـــم وللباحـــث قيمـــة قصوى ، في ظل أسس وأنساق مجتمعه وحضارته وليس المقـــصود هنا الرياضيات العادية ، إنمـــا الإشـــارة إلـــى الأســـاس الفلـــسفي للرياضيات ، وهذا شيء يختلف عن كونـــه مجـــرد دراســـة أعـــداد ورموز ، فهي نشاط عقلي وفاعلية ذهنية ومناهج في التفكير ، قادرة على الاستخلاص والتعميم ، ووضعها في صور رياضـــية تحكمهـــا علاقات منطقية .

ولان الرياضيات نشاط إنساني ، فقد خضعت مثلها مثل غيرهـــا من الأنشطة ، لتطورات كبيرة . ومقارنة ســـريعة بـــين معلومـــات القدماء الرياضية ، وبين معلومات أي طفل في مدرسة ابتدائية اليوم ، يبين لنا إلى أي مدى تطـــورت الرياضـــيات ، فمـــا بالـــك بعلمـــاء

---

[1] موريس كلاين الرياضيات والبحث عن المعرفة ترجمة سمير ياسين يوسف الثقافة بغداد 1987 ص 215 .

[2] الكندى " كتاب الكندى إلى المعتصم بالله ــ في الفلسفة الولى " تحقيق أحمد فواد الأهواي ــ دار الكتب العربية القاهرة 1948 ص 90

الرياضيات اليوم ، أي أن الرياضيات لا تختلف ، من حيث الأساس الفلسفي ، عن بقية أفكار الإنسان ، كفكرة الزواج والحرب والزراعة . فكلما تقدم التاريخ بالإنسان ازداد علماً وقدرة ، مما يعني مزيداً من التطور والتقدم من تلك الأفكار الفجائية البدائية ، إلى أن أصبحت على ما هي عليه الآن . ولم تكن الرياضيات استثناء من أي نوع .

وكدليل واضح على ما سبق ذكره ، فإننا سنقوم بدراسة نظرية الأرقام ، وإلى أي مدى كان تأثير الأفكار الفلسفية والثقافية والدينية ، وتحديد مجالها وأسلوب برهنتها سواء عند اليونان أو عند المسلمين أو في الرياضيات المعاصرة .

نظرية الأرقام :ـ

تعرف هذه النظرية في الكتابات العربية بنظرية العدد . وهذا خطأ . لان العدد هو حساب أي يعد الأشياء . أما الرقم ، فهو رمز يشير إلى مجموع معين ، فالرموز من (0) إلى (9) هي أرقام . أما ما عداها فهو عدد ، لأنه يحمل إضافة رمزين رقمين أو أكثر (11) عدد لأن صورته ، مكونة من تكرار رقم (1) صحيح أن العدد (11) يشير إلى مجموعة محددة من العدد . وليست مجرد تكرار رقم فقط إلا أنه وبغض النظر عن المعدود ، هو إضافة

لشكل الرمز ، أي هي عملية عد . فالأرقام ، هي الرموز التي نقوم عن طريقها بالعد ، وهي عشرة رموز .

كذلك يختلف الرقم عن الإحصاء . فالفعل " أحصي " ، أي عد بواسطة الحصى أو الحجر الإحصاء لصيق بالأعداد والعد ، ولا تقتصر هذه الصلة على اللغة العربية وحدها ، إنما نجدها كذلك في لغات أخرى **فالفعل CALCUER** باللغة الفرنسية **CALCULATE** بالإنجليزية يعنى العد بواسطة الأحجار الصغيرة **CALAULRE** وهي كلمة لاتينية معناها الأحجار الصغيرة[1] .

فالمقصود هنا إذن هو دراسة الأرقام ، وهي في رأينا التسمية الصحيحة لهذه النظرية . وخلافاً لما نقوم به نحن الآن في عملياتنا الحسابية ، من حيث استخدام الرموز الرقمية للقيام بعملية العد ، فإن ظهور عمليات العد سابقة عن اكتشاف الرموز ، حيث استقرت كتابة الأعداد وبصفة نهائية ابتداء من الرياضيات العربية ، خصوصاً بعد اكتشاف واستخدام الرمز العاشر وهو الصفر ، الذي كان أجمل وأنبل هدية قدمتها الحضارة العربية في هذا المجال .

فما هي نظرية الأرقام إذن :ـ

---

[1] انظر هاشم الطيار موجز تاريخ الرياضيات ص 31 .

أن أكثر الأشياء ألفة سواء عند الرياضي أو الإنسان العادي ، هي سلسلة الأرقام الطبيعية (1 ، 2 ، 3 ، .....9) بالإضافة إلى الصفر . إلا أن ما هو مألوف ، فهو غير مفهوم . فما هو الصفر ؟ ... وما هو الواحد ؟ .... هذه الأسئلة البسيطة والمألوفة ، ما كانت لتخطر على بال وتفكير القدماء ، ليس لصعوبتها بل لأنه ليس هناك مبرر لطرح هذه الأسئلة . فالإنسان لم يصل إلى وضع سلسلة الأرقام الطبيعية ، إلا بعد مراحل طويلة جداً ، من تقدم حضاراته وعلومه . ففي المراحل الأولى من تاريخه ، كان لا يستطيع أن يكتشف أن ثمة علاقة ما بين زوج من الطيور . وزوج الأيام وبين رقم (2) والأخير هو رمز لفئة أو لمجموعة الحالات الزوجية للطيور والأيام ، لأن ذلك يتطلب درجة عالية من التجريد ، لم يكن الإنسان قبل الآن مؤهلا[1] لها . وربما تقدم العلم والتقنيات والمفاهيم سيجعلنا ، في مستقبل الأيام ، أكثر قدرة للوصول إلى أفكار أكثر أولية وألفة ، من سلسلة الأرقام الطبيعية .

إلى أن يأتي ذلك الوقت ، علينا الآن دراسة وتحليل نظرية الأرقام ، عبر مراحلها المختلفة في الحضارات التي استطاعت تشييد بناءات رياضة ذات قيمة ، خصوصاً اليونان والعرب ثم في الرياضيات المعاصرة .

---

[1] رسل المقدمة للفلسفة الرياضة ص 7 .

أولاً اليونان :ــ نجح علماء اليونان ، من تحويل القواعد التجريبية في الحضارات الشرقية ، إلى نظريات عامة . وبناء أنساق منطقية عالية المستوي ، مقارنة بما كان قبلهم ــ هذه البناءات والأنساق تعتمد على تناسقها الخارجي ، وتماسكها الداخلي . فقد تميزت الرياضيات اليونانية ، وكذلك المنطق ، بالبناء المحكم المترابط المتسلسل في خطوات محددة . مما يعني امتلاكهم قدرة تأملية ، وإحكام منطقي . وقد أدي بهم ذلك ، إلى أن يسبغوا على الأشكال ، جمالاً عقلياً . لقد كان العقل الإغريقي يجد تفسيراً مقنعاً في افتراض أن النجوم والكواكب تتحرك في أشكال هندسية كاملة . فقد كان هذا العقل يري أن للعالم كمالاً ينتظر من يشرحه . لهذا اعتبروا ، لكي يكون الشرح مقنعاً ، أن موضوعات الرياضية كائنات عقلية لها وجودها الموضوعي المستقل .

الموضوعات الرياضية قائمة بذاتها ، وهي موضوعات جميلة ، ومتناسقة وجمال وتناسق الشكل أو الموضع الرياضي ، يكون في ذاته ، لا كما هو مرسوم على الورق ، أو ما هو موجود في ذهن الرياضي . وكل ما يمكن أن نفعله حيال هذه الموضوعات ، هو تأملها فقط ، حتى يمكن الإحساس بجمالها وتناسقها . ومهما كانت مقدرة وإتقان الرياضي في رسم الأشكال ، إلا أنها ليست هي الأشكال بذاتها ، وأن كانت تساعدنا في تكوين فكرة أو تصور عن هذه

الأشكال ، التي هي خالدة وكلية التجريد . فهي الحقيقة بذاتها . ومعرفتها تكون عن طريق التأمل فقط .

وبالتأمل ترتفع النفس وتسمو عن حقيقتها الظلية ، إلى رؤية الأشياء بذاتها . فتكتسب هذه النفس بعض صفاتها ، بقدر صفاء وقوة رؤيتها الحدسية عندها . ترتفع عن الواقع المتغير وتسمو عن المخلوقات الفانية ، إلى الحقيقة الخالدة الثابتة ، أي الحقيقة بذاتها .

هذه هي الصورة العامة ، لخصائص الفكر اليوناني ، التي يتفق فيها الرياضيون اليونان مع بعض الاختلافات في التفاصيل عند كل واحد منهم . وهذا يؤكد إلى أي حد كيف كان تأثير الأفكار السائدة في المجتمع اليوناني عليهم ، وعلى تراكيبهم وبراهينهم . فما يحمله تفكيرهم ومناهجهم من خصائص ، كان متوافقاً ومنسجماً ، مع مجمل الأفكار التي كانت سائدة في حضارتهم

1 ــ فيثاغورث :ــــ يشار إلى فيثاعورث أو مدرسته ، على أنه أول من بحث من اليونان في الرياضيات ، بطريقة جدية . فقد استطاع إفرادها " علما نافعا في العلوم منقحاً للخاطر منتجاً للفكر "[1] إلا أن الرياضيات عنده لم تنفصل عن الميتافيزيقا ، فقد استخدامها كأداة للتعبير عن أفكاره ورؤاه الفلسفية . فهي عنده وسيلة

---

[1] الشهرزوي (شمس الدين) نزهة الأرواح في روضة الأفراح ــ تاريخ الحكماء تحقيق محمد على أبو ريان دار المعرفة الجامعية . الإسكندرية 1993 ص 441 .

لتنقية الروح ، وتفسير ماهية العالم . هذا يعني أن الرياضيات هي العالم الحقيقي والوجود الحقيقي . وبذلك اتخذت الرياضيات بعدا وجوديا ، وأصبح البحث فيها يخص الانطولوجيا .

رغم أن هذا يمثل عيباً أو انتكاسه ابستمولوجية ، إلا أنها وعلى صعيد أخر ، تمثل فكرة ذات قيمة ، وهي اختزال كثرة وتعددية الموجودات الطبيعية ، وتفسيرها تفسيراً رياضياً . أي صياغة العالم بما فيه ، صياغة نظرية ، وبذلك يمكن البحث عن حقائق الأشياء من خلال الأعداد ، ولكن لما كانت فكرته غير ناضجة أو واضحة تماماً عن ماهية الأعداد ، نجده يلجئ إلى ربطها بالأساطير والخرافات والسحر .

هذا الالتجاء أو الحيلة ، لم تكن مبررة . ورغم ما يقال عن تطور فكر فيثاغورت الرياضي ، أو مدرسته ، إلا أن القضية لم تتغير إلا شكلياً . فقد بدأ بالأعداد تم تركها إلى الأشكال الهندسية ، فإن هذه الإشكال ، لم تكن تدرس لذاتها ، رغم أنها معبأة بالأفكار الميتافيزيقية والسحرية ، إلا أنها تعبر عن أرقام ، حيث يتخذ كل شكل أرقاماً محددة . فالأرقام أولاً وأخيراً ، هي التي تكمن فيها حقيقة الشيء .

THE REALTY OF THING CONSISTS IN NUMBER

وربما هذا ما دعي أفلاطون ــ رغم تأثره بالرياضيات الفيثاغورية ، إلى اتهام الفيثاغورين ، بأنهم حاولوا اكتشاف أرقام التناسقات ، لكنهم

لم يتوصلوا إلى معرفة الطبيعة التناسقية للأرقام . **(1)** وهـذا يبـدو في غاية الوضوح ، لأن غرض فيثاغورت أو مدرسته ، لـم يكـن رياضياً في الأساس الأول ، فالرياضيات عنده ، كانت وسيلة أو منهج للوصول إلى حقائق الأشياء ، رغم إنها عنده ليـست هـي حقـائق الأشياء .

لهذا فإن الانتقال من الأعداد إلى الأشكال ، لم تكن بدوافع تطـور فكر فيثاغورت الرياضي أو بدافع منهجـي ، إنمـا كـان التحـول إلى الأشكال ، بعـد مـا صـادفتهم مـشكلة الأعـداد الـصماء ، التي لم يستطيعوا فهمها أو تفسيرها ، إلـى درجـة وصـفوها بأنـه " كارثة " او " فضيحة " لا يجوز البوح بها . فأصبحت سراً غامضاً . مثل بعض أفكار الأخرى لهذه المدرسة . فإذا ما فكر أي فرد من هذه المدرسة كشف هذا السر ، وجب عليه الانتحار .

ومن الأفكار الخرافية والأسـطورية والـسحرية للرياضـيات . هو أن الواحد عندهم تحول إلى نقطة ، والاثنين إلى خط ، والثلاثـة إلى مثلث ، والأربعة إلى مجسم . ومجموع هذه الأشـكال عـشرة ، التي كما يقول اشبنجلر ــ تجمل أفكاراً عديدة . مثل العقم والانسجام والانفراد والتولد[1] والواحد يشير إلى الذكر ، والاثنين إلى الانثـي ،

---

[1] مورس كلاين الرياضيات والبحث عن المعرفة ص 69 .

والثلاثة إلى التكاثر . كما أن العلاقات (+ −) تشير إلى الاستهواء الجنسي .

رغم ذلك ، فإن فيثاغورت أو مدرسته ، فتح باب الرياضيات على مصراعيه ، وكان الخطوة الأولى في البحث الرياضي وتعميقه ، بصورة أكثر جدية ممن سبقه ، وهو في ذلك كان مسايراً لتطور المفاهيم العلمية ، التي بدأ اليونان يسعون نحوها سعياً حثيثا . أي كان متوافقاً مع حركة مجتمعه الثقافية والعلمية .

أما نظرياته ، فإن أهميتها لا تكمن في عمقها أو دقة تحليلاتها ، بل في الارتباط الوثيق الذي ربطه بين مفاهيم العدد والاتساع . ففي هذه المرحلة ، لا يزال العدد مرتبطاً بالمكان ، ويشير إلى معدوداته ، على نحو مباشر ، ولا يختلف عن النقطة في الشكل الهندسي .

2 ــ **أفلاطون** :ــ الرياضيات عند أفلاطون ، حقائق أولية سابقة كل تفكير وصيغ غير مستنبطة من التجربةَ ، وهى من صنع الذهن لا من حيث سبب وجودها ، إنما من حيث الوعي بها، الذي لا يكون عن طريق البرهان أو التجربة ، لكن عن طريق الحدس وهو أساسا حدسا بالتعريفات.

إن الوعي بالرياضيات أو اكتشافها ومعرفتها، جعلت أفلاطون يِستخدمها منهجيا ، في بيان وتفسير وعرض فلسفته بشكل أكثر

مرونة وإحكاما. فقد رأي ما تمثله من قيمة منهجية قصوى خصوصا في عبور الهوة أو الفجوة ، التي وضحت في فلسفته، من قسمَ العالم إلى قسمين. عالم الثبوت والخلود ، وهو عالم المثل حيث الحقيقة بالذات والخلود بالذات والجمال بالذات . والعالم الأخر، هو عالم الأشياء الواقعية، وهو عالم ناقص وزائف ومتغير، لذلك فهو عالم غير حقيقي .

فالنفس كانت تعيش في عالم المثل ، تم ارتبطت بالبدن في العالم الحسي ، ولأن المعرفة لا تنفصل عن موضوعها ، فإن النفس تدرك الكثرة والتغير في العالم الحسي . ولما كان ذلك لا يكفي لتكون المعرفة الحقيقية ، لذلك تتوارد على النفس الذكريات ، فتكون حافزا لها لطلب المزيد من المعرفة ، إلى أن تصل إلى عالم الحقائق . وهو عالم ، كما قلنا ، كانت تعيش فيه قبل ارتباطها بالبدن . هذا الطريق ، الذي تقطعه النفس إلى عالم الحقائق . ثم رجوعها منه ، هو ما يسميِه أفلاطون بالجدل .

والجدل هو أحد جوانب المنهج الرياضي الذي استخدمه أفلاطون ببراعة. وقد اعتقد البعض أن أفلاطون استخدام الحقائق الرياضية . في الوصول إلى عالمه الحقيقي ، إلا أن ذلك غير صحيح لأن الحقائق الرياضية غير المنهج الرياضي. وهذه تفرقة حاسمَ بين المنهج والموضوع فالحقائق الرياضِية، كموضوع

لا تأتي عن طريق الاستدلال العقلي ، ولا عن طريق التجربة ، لأنها ببساطة، سابقة عن كل استدلال . وعن كل تجربة . وأما المنهج فهو الوعي أو الاكتشاف الذي يتم عن طريق المعرفة العقلية المباشرة (الحدس) . الذي يعني اكتشاف ما في العقل من حقائق . وليس على المرء الا الالتفات . إلى ما في عقله ، ليكشف هذه الحقائق .

إذن فالرياضيات ، كمنهج هي دليله ربما الوحيد، في عبور الهوة ما بين عالم المثل والعالم الحسي . صعودا وهبوطا . فهي أداة أو وسيلة الانتقال ما بين العالمين ، وهي في الوقت ذاته لا تقرر وجود الأشياء ، إلا ما يلزم من المبادئ الرياضية الأولية وعن طريق إقرار هذه المبادئ ، يتم اكتشاف أو تذكر الحقائق بالذات ، فهي ليست مطلبا في ذاتها، فالانتقال من المثلث الواقعي المرسوم على الورق مهما كانت دقته إلى المثلث الحقيقي يفترض ، منهجا غير مرتبط بالتجربة. أي لابد أن يكون سابقا عن كل تجربة . كما أنه ليس حقيقة مطلوبة في ذاتها ، لأنها بذلك تحتاج إلى منهج للوصول إليها .

فالرياضي ، حينما يرسم مثلثا ، يدرك إن الذي يرسمه ما هو إلا صورة عن الشكل الكامل للمثلث لذلك فإن رسمه، مهما كانت دقته ، سيكون ناقصا. أما عند البرهنة على هذا المثلث فإن

ذهنه يكون منصرفا إلى المثلث بالذات ، ويحاول بقدر الامكان الاقتراب منه . وبتكرار المحاولات فإن الرياضي يمارس تدريباً عقلياً ، للوصول إلى الحقائق الثابتة الخالدة .

إن الحل الذي قدمه أفلاطون ، لعبور الفجوة أو الهوة ، ما بين عالم المثل والعالم الحسي عن طريق تقديمه للرياضيات كمنهج مستقل عن كل معرفة برهانيه أو تجريبية ، تعتبر حلا على درجة عالية من الجدارة . فهو بهذا الحل ، كان قد وضع الأساس الذهني للرياضيات اليونانية . أعني تحديد دور الرياضيات ، وما تحمله من امكانات هائلة للوصول إلى الحقائق ، عن طريق التحديد والتعريف لخطوات العمل الرياضي . وقد اكتسبت هذه الخطوة أهميتها القصوى ، حينما ظهرت بشكل واضح في أعمال الرياضيين اللاحقين ، أمثال ارشميدس واقليدس وغيرهما.

كانت فكرة التحديد والتعريف ، التي قدمها أفلاطون ، تعتبر أساسية وجوهرية في الرياضيات. فتعريف الأرقام أو الأشكال الهندسية ، يعني أن هذه الأرقام والأشكال ، تحوز على خصائص وشروط لأبد من توافرها ، لكي يكون الرقم رقما محددا . والشكل شكلا محددا ، بل يمكن القول بأن فلسفة أفلاطون الرياضية ، هي فلسفة تعريفات ، خصوصا وأن الحقائق الرياضية هي في الأساس تعريفات ، وعن طريقها يتم البناء الرياضي ،

أما منهجيا فيمكن استخدام الجدل كصورة من صور البرهان الرياضي ، لأدراك الحقائق يكون من حيث العلاقات ، لا من حيث وجودها أو عدم وجودها .

هنا عند أفلاطون ــ كما عند غيره ، نجد تأثير البيئة الثقافية عليه. فالرياضيات تمارس لذاتها . وهي غير مكتسبة من التجربة ، ولا عن طريق البرهان . إنما هي حقائق أولية يمكن الحدس بمعرفتها وتأملها . فالرياضيات الحقة ليست تلك التي توضع لخدمةَ التجار في الأسواق كما أن الأشكال الهندسية الواقعية، ليست هي الأشكال الحقة ، فالشكل الهندسي الحق هو الذي يكون في عالم المثل ، أما ما يوجد من أشكال ، فهي زائفة تقلد مثالها ويكون الشكل أكثر صحة بقدر قربه من مثالة . ويكون أكثر زيفا بقدر بعده عن مثاله .

أفلاطون ــ وفيثاغورث قبله – يمثلان مرحلة التحول الرياضي ، من الأرقام إلى الأشكال . التي سوف تستقر بصورة نهائية ، عند اقليدس ، وكانت بداية هذا التحول ، حينما أضفوا على الأرقام طابعا سحريا أسطوريا . ولأن معلوماتهم الرياضية ، لم تكن كافية لمعالجة مشاكل ومفاهيم ، على درجة عالية من التعقيد ، فمثلا حينما صادفوا مشكلة " الاعداد الصماء " صعقوا . ولم يكن في إمكانهم إلا وصف هذه المشكلة ، بأنها " كارثة " أو " فضحية "

لذلك اضطروا إلى الالتجاء إلى الفضاء ، ليستمدوا منه العون في دراسة العدد ، لأنهم اعتقدوا ، بأن كل فكرة واضحة عن العدد ، تقضي رؤية في الفضاء .

انتقد البعض هذا الموقف . ورأي في ذلك تناقضا واضحا في العقلية اليونانية ، إلا أن هذا النقد غير صحيح ، لأن العقلية اليونانية ، عقلية ثنائية في الأساس ، فمثلا الأعداد موجودة قريبة منهم ، الا أنهم أحالوها إلى كائنات ميتافيزيقية وأعطوها أبعاداً سحرية وأسطورية ، يمكن أن تعقل . وحينما ظهرت مشكلة " الأعداد الصماء " اكتشفوا بعض الحقائق ، التي لم تكن لتخطر على بالهم ، ولم يستطيعوا فهمها أو تعقلها. فهي غير قابلة للفهم ، وفوق ذلك ، فهي غير منطقية. فأطلقوا عليها اسم الأعداد اللا عقلية **Irrational Numbers** وتحولوا من الرقم إلى الشكل الهندسي ، لأن العقلية اليونانية ، ترى أن تناسق الصورة وجمالها، مطلبا ملحا وضروريا. أي لابد أن تتوفر في الرياضيات ، القدرة على إقناع العين والعقل أو كما يقول "بوترو " الرغبة في جمال الموضوع مع الرغبة في جمال الوسيلة . ويتحقق هذا المطلب في الهندسة ، لذلك ليس هناك تناقض في هذا التحول ، لأن العقلية اليونانية هي أساسا عقليةَ ثنائية .

أقليدس :ـ

رغم الشكوك الكثيرة ، التي أثيرت حول مؤلف أهم كتاب هندسي عرفته البشرية ، واستمر تأثيره لأكثر من ألفى عام . وهو كتاب " الأصول " أو " الأركان " أو " العناصر " إلا أنه من المعتاد نسبة هذا الكتاب لاقليدس . وفي هذا يقول جون كيمنى إن الهندسة مرتبطة في أذهاننا أكثر بالعالم الإغريقي القديم أقليدس **EUCLID** الذي يعد أول من قام بدرسه نسقية لهذا الموضوع[1] فقد جمع المعارف الرياضية المعروفة إلى وقته ، ونسقها في مجموعات ونظريات ، تنبثق من مجموعة محددة من البديهيات والمصادرات ، عن طريق التسلسل والترتيب المنطقي .

في الأصول ، نستطيع أن نري بوضوح، تأثيرات كل من أفلاطون أرسطو فقد بني اقليدس عمله الرائع ، على أساس من تحليلات أرسطو المنطقية وتعريفات وتحديدات أفلاطون ، خصوصا في المبادئ اليقينية . كالتعريفات والبديهيات والمصادرات وهي مبادئ واضحة بذاتها ولا تحتاج إلى برهان ، إنما يجب التسليم بصدقها، لكي يتم بناء العلم . أطلق عليها "اللا مبرهنات " وهي خطوة أولي ضرورية .

وقد اختلف مع أرسطو ، حول إمكانية البرهنة عن هذه المبادئ ، فأرسطو كان يري أَنه بالأمكان البرهنة عنها في علم أعلى

---

[1] جون كيمي الفيلسوف والعلم ، ترجمة الشريف ، المؤسسة الوطنية للنشر بيروت 1965 ، ص 45 .

من الرياضيات ، وهي الميتافيزيقا . أما اقليدس فلاشيء من ذلك ، فالتعريفات والبديهيات المصادرات ، لا تحتاج إلى برهان في أي علم ، حتى أن كان هذا العلم ، هو الميتافيزيقا نفسها، فهذه المبادئ واضحة وهي غير معرفة. وفي هذا اقتراب من أفلاطون . وبالفعل فقد أشار البعض إلى نزعة اقليدس الأفلاطونية . والبعض الأخر أطلق عليه " اقليدس الفيثاغوري " وربما يرجع سبب ذلك . إلى اعتماد اقليدس للحدس كمنهج ، مثل أفلاطون .

إلا أنه في الحقيقة ، هناك اختلاف بينهما ، وهو يكمن أساسا في أولوية ودرجة هذا الحدس . فإذا كان عند أفلاطون ضروريا لرؤية الأشكال بالذات ، فهو عند أقليدس يأتي بعد البرهان المنطقي (الرياضي) .

المطلوب في البناء الهندسي ــ الرياضي عموما ، ليس البرهنة عن هذه المبادئ ، إنما أن تكون الاستنتاجات المبنية عليها صحيحة وسليمة فالعلم ، لكي يقوم فإنه يحتاج لقيامه إلى نقطةَ بدء ، أي أسس ومبادئ يبدأ منها برهان قضاياه ونظرياته[1] فالنظرية تكون صحيحة إذا كان البرهان يسير في تسلسل منطقي سليم غير متناقض تحكمه تعريفاته ومصادراته . ما يهمنا هنا ،

---

[1] محمد ثابت الفندى " فلسفة الرياضة " دار النهضة العربية ، بيروت 1969 ص 46 .

هو الإشارة إلى أن اقليدس كان مثالا واضحا ، لخصائص الـروح والعقليـة اليونانية ، التي لا تهتم إلا بجمال الموضـوع الرياضـي وتناسقه من حيث هو شكل كـامل وتام والابتعاد عن مسائل الواقع ، وما تثيره من صـعوبات ، فالعقـل اليونـاني ، يتنـاول البـسـيط المعقـول المترابط بشكل متناغم ، حيث يظهر جمالـه وانـسجامه ، بعيدا عن الواقع الخشـن ، فكـانت أرقام فيثاغورت وأشكالها ومثل أفلاطون ، ومنطق أرسـطو وهندسـة اقليـدس ، أمثلـة سـاطعة لهذه العقليةِ .

فهؤلاء جميعا ، متناسقون مع نظرة اليونان حيث يظهـر التعلـق الشديد بـالعقل وأسـاليبه ، ونبذ الواقع ، بل احتقاره . فالرياضـيات الحقة ، ليست تلك التي توضع في خدمه التجار في البيـع والشراء . لأن هذا شغل الباعة في الأسواق، وليست جديرة بالبحث والدراسة ، لهذا نفـهم لمـاذا التفت اقليدس إلى خادمه ، حينمـا سـأله تلميـذه عن جدوى دراسة الأشكال الهندسية ، فطلـب مـن الخادم أن يعطي هذا التلميذ نقودا ، لطالما يريدِ التكسب بالعلم ، لأن نظـرة اقليـدس واليونان عامـة هي أن العلم الحـق لا يخـضع لمتطلبـات الحيـاة اليومية . فالعلم متعة في ذاته. ويمارس لذاته . فـإذا كانـت هنـاك بعض الشروط ، فهذه الشروط لا تحددها المنافع المادية أولا تنبثـق عـن الرغبـات الحسية ، إنما تحددها اشتراطات العلم ذاته .

هذه هي الأطر العامة للرياضيات اليونانية ، بينا فيها تأثير الآراء والأفكار في بعض الفلاسفة والعلماء ، فمعرفة الصلة أو الأساس الذي تبني عليه الرياضيات ، أي أسس وفلسفة الرياضات، يمنحنا الفرصة في إرجاع الأفكار والمبادئ ، التي تقوم عليها النظريات الرياضيةِ ، إلى أصولها الأولي . ومحاولة ربطها مع مجمل الخصائص الثقافية لليونان ، حتى يمكن تحديد ومعرفة الكيفية ، الذي تمت بها الاستنتاجات في أنساق واضحة ، حتى خرجت على النحو الذي عرفناه عنها .

لكن الرياضيات اليونانية ، لم تكن هي الرياضيات الوحيدة التي عرفتها البشريةَ فهناك رياضات مختلفة عنهم في المنهج وفي الموضوع ، الا أن الإنسان العادي ، وأحيانا الرياضي المدرب، يشك في أن تكون للرياضيات ألوانا مختلفة . فالموضوع الرياضي ، من النظرة العادية هو واحد ، ولا يختلف بحسب الجنس أو الموقع أو البيئة وهذا صحيح ولا يستطيع أي شخص إنكاره ، وذلك في حاله نظرتنا إلى الرياضيات باعتبارها أعدادا وعمليات حسابية إجرائية فرقم **(1)** هو سواء على الأرض أو على المريخ . كما أن العلميات (+−) تستخدم في أفريقيا كما تستخدم في القطب الشمالي . كل هذا صحيح ، طالما نتكلم عن الرياضيات العادية ، ولكن حينما نتكلم عن الأسس فهنا يمكن أن يكون الاختلاف .

فـــالمقصود بالعبارة رياضيـــات يونانيـــــة ورياضـــات عربيـــة ، هو في حقيقته البحث عن المبادئ العامة، التي تجـــعل قيام العمليات الإجرائيـــة ممكنة ، أي الأسس العقلية التي قامت عليهـــا العلامـــات (+−) أيِ الحديث عن الأفكـــار والمبادئ العامة . التي تجـــعل فكرة أو إنجازا ما يبدو ، على هذا النحو وليس على نحو غيره .

وبتحليل هذه الفكرة . من زاوية أخرى ، عـــن طريـــق الـــسؤال التالي : هـــل العلم الريـــاضي و احد ..؟ هذا سؤال " غامض فهـــو يفترض " وحدة العلم الرياضي ولا يفرق بين الموضـــوع الرياِضـــي والمنهج الرياضي ــ أما السؤال هل تطورت الرياضيات ؟ وكيـــف تم ذلك ؟ هو ســـؤال يمكن الإجابة عنه عن طريـــق إيـــراد الأمثلـــة والشواهد والبراهين ، كما لا يفترض التطـــــور فـــــي حـــضارات مختلفة فقط بل يمكن إيجاد هذا التطور داخل الحـــضـــارة الواحـــدة. فالجبر ، مثلاً الذي ابتكره الخوارزمي تطـــور عنـــد البوزجـــاني واكتسب صورته النهائية عند الخيام . هنا نحـــن أمـــام أدلـــة مؤيِدة بالبراهين وهو عكس السؤال الأول ، الـــذي يتحـــدد وفقـــا لموقـــف الشخص وعقائده ، ولا يملـــك دليلا حاسما عليه سوىِ موقفه فقط .

فإذا ما بحثنا عن تطور الفكر الرياضي في حضارات مختلفـــة ، أي البحث عن الأســـس والمبادئ والأفكار، التي جـــاءت بها فمـــن المعروف أن لكل حضـــارة خصوصيتـــها ومنهجها الخاص بهـــا .

وعن طريق المنهج يمكن توليد واستنتاج المئات آلاف من الأفكار الرياضية ، وبناء العديد من الأنساق التي تتلاءم معها وفي ذات الوقت ، لا يلغى ما سبقه من إنجازات رياضية بل يدرسها ويفهمها ويستوعبها ، عن طريق عقد الصلات والمقارنات ، يمكن إدخالها ضمن أنساق المنهج الجديد ومن تم تصبح تنتمي إليه ، مع عدم إغفال أصوله الأولى التي لا يمكن أن تنكر . إلا أنه ، بحكم التطور تتناسى هذه الأصول الأولي ولا تذكر في الغالب ، فإذا عثر عليها ، انهالت الاتهامات والانتقادات على هذا الفكر ، والرياضيات العربية مثالاً على ذلك .

الرياضيات العربية :ـ

رأينا فيما سبق ، إلى أي حد كانت الأفكار والمبادئ العامة ، التي تحملها الحضارة اليونانية ، يمتد نفوذها على عقول أكبر فلاسفتها ، وهذا ليس عيبا في حد ذاته بل ، على العكس تماما ، فهي صورة حيوية تدل على قدرة غير عادية ، بل إلهامية ، لأن الذي يجعل الفيلسوف أو العالم عظيما هو أن يكون أميناً في نقل ملامح وخصائص وعبقرية حضارته ، هكذا كان فيثاغورت وأفلاطون وأرسطو وأقليدس . تماماً ، مثل الخوارزمي والبوزجاني والطوسى والبتاني والكاشي وغيرهم في الحضارة الإسلامية .

حينما جاء الإسلام بمبادئه الراسخة والعميقة ، أحداث تغييرات جذرية ، في بنية الإنسان الدينية والاجتماعية والعلمية . وحدد طريقة التعامل مع كافة البيئات المحيطة بالإنسان ، مما أنعكس بصورة واضحة على العلماء وإنجازاتهم ، كذلك لم يلغ إسهامات الشعوب السابقة ، سواء كانت شرقية أو يونانية ، فقد حث العلماء على البحث وتحصيل المعرفة في أي مكان ، دون خوف أو حساسية . وبالفعل كان الإطلاع على التراث السابق واسعاً وعظيماً ، وقد تمكن العلماء من فهم هذا التراث واستيعابه ، مما ساعدهم من إصلاح وتعديل وتجاوز ، ما تم إنجازه في الحضارات السابقة .

ففي المجال الرياضي ــ مثلاً ــ نحن نعلم أن اليونان اتجهوا نحو التأمل النظري المجرد ، وكان هذا من وجهة نظرهم ــ هو مفهوم العلم الحقيقي وعن طريق هذا التأمل يتم الوصول إلى القوانين الكلية ، وتصبح معرفة هذه القوانين غاية في ذاتها . أما العيان التجريبي فهو وإن كان موضوع معرفة ، إلا أنها معرفة وهمية لا يعتد بها ، كما أنها لا توصلنا إلى قوانين عامة . لأنها مجزاة متغيرة ، وحتى اللحظات الخاطفة ، التي ظهر فيها بعض الاهتمام بالعيان التجريبي ، كانت لحظات ضئيلة الأهمية وغير كافية ، خصوصاً ، وأنها أظهرت الواقع في صورة متبذلة علمياً ، كما هو الشأن مع السوفسطائيين .

لا شيء من ذلك في الرياضيات العربية ، فقد تغيرت الصورة على نحو حاسم ، فالقوانين لم تعد غاية في ذاتها ، وأن كانت هدف العلم . فالغاية هي ما يتحقق عن طريق التطبيق الواضح ، والملاءمة مع الواقع فالسعي للوصول إلى القوانين ، تقوده منهجياً ، الرغبة في تطبيقها . كما أن التطبيق يتطلب قوانين عامة تفسره وتبرره عن طريق الاستقصاء والتعداد والتجريب ، لما هو موجود بالفعل . وبمعني أخر ، كان هدف علماء الرياضيات العرب ، استيعاب ما هو قائم وتحليله وتصنيفه ، ووضعه في صورة قوانين ، لأن هدف العلم ، هنا ، هو تفسير الموجودات المتعددة ، وإدراكها عيانيا ، تم تفسير العلاقات التي تربطها ، في صورة صيغ ومعادلات وعلاقات رياضية .

كان أساس النظرة الإسلامية للعلم الرياضي وقوانينه ، هو الإدراك بأن الرياضيات علم إنساني ، وليست أفكاراً مفارقة تعيش في عالم المثل ، بل هي كما يقول الكندي : علم إنساني وصل إليه الناس بجهدهم وحيلتهم[1] فهي ليست بعيدة ولا منفصلة عن حياة الإنسان ، بل أن الإنسان هو الذي وصل إلى القوانين الرياضية ، والرياضيات عموماً . عن طريق مراقبة الواقع وفهمه ووضع التفسير المناسب ، في صيغ رياضية . لهذا فإن الرياضيات تتطور بتطور

---

[1] الكندي كتاب إلى المعتصم بالله ص 90 .

الإنسان وعلومه ، من ناحية أولى . أما من ناحية أخرى فإن الرياضيات هي وليدة بيئة الإنسان وثقافته وتتشكل معه سلباً وإيجاباً .

من هنا كانت مهمة الرياضيات العرب ، هي دراسة العلوم الرياضية السابقة . ومراجعتها في ضوء ما تم الوصول إليه ، ثم تقديمها في صورة جديدة ، بمناهج جديدة . بحيث تكون قادرة على حل كافة المسائل المطروحة ، القديمة والجديدة . فقد جاءت مسائل ومستصعبات على درجة كبيرة من التعقيد الرياضي ، بحيث ظهرت الرياضيات والمعلومات الرياضية السابقة غير كافية لحل مثل هذه المسائل المستصعبات ، فقد أضطر علماء الرياضيات العرب ، إلى إعادة قراءة التراث السابق ، تحت وطأة البحث عن حلول لهذه المسائل . فكانت نتيجة ذلك أن خرجوا في حالات كثيرة ، بوضع بدائل أكثر سلامة وصحة . بل الوصول إلى حقائق أولية غيرّت المفهوم الرياضي لديهم . مثل مفهوم الوحدة الرياضية ، والرقم ، والكسور الاعشارية ، وغيرها . أي تأسس جديد للرياضيات تحمل خصائص محددة في الموضوع وفي المناهج .

الموضوع الرياضي (الوحدة الرياضية) :ـ

من الأمور التي أصبحت معروفة الآن ، إن الرياضيات اليونانية لم تكن هي النموذج المعياري ، الذي تسعي إليه الرياضيات العربية . فلكل فكر رياضي خصائصه المميزة له ، فكما تمايزت الرياضيات

اليونانية عن الرياضيات الشرقية ، كذلك تميزت الرياضيات العربية عن اليونانية . وهذا يرجع أساساً إلى أن كل حضارة دفعت بتصوراتها وأفكارها في أسس الرياضيات . ورغم أن هذا الأمر في غاية الوضوح ، إلا أن الغالبية الساحقة من مؤرخي العلم ، لم يفطنوا ، أو لم يتهموا بذلك إزاء الرياضيات العربية . فهم مثلاً حينما يتحدثون عن تاريخ الرياضيات ، يقولون رياضيات مصرية ، ورياضيات بابلية ، ورياضيات يونانية ، وحينما يتناولون الرياضيات العربية يقولون بأن الرياضيات العربية يونانية ؟ .

وبعيداً عن الرد على مثل هذه الأقوال ، فإن الحقيقة الساطعة إن الرياضيات العربية اختطت لنفسها نهجاً مخالفاً للمنهج اليوناني ، وذلك بتأثير من الثقافة الإسلامية التي لا تميز بين النظر والعمل ، والعقل واليد . أما اليونان فقد كانوا أهل ثقافة نظرية تأملية ، واجتنبوا الجانب العملي إلى حد الاحتقار ، لأنهم كانوا يسعون بكل جد ، إلى بناء النظريات العامة بعيداً عن الواقع وأحداثه وأشخاصه . أما الرياضيات العربية ، حتى وأن تأثرت باليونان في قسمة الرياضيات إلى جانبين ؛ عملي ونظري . إلا أن هذا التقسيم كان منهجياً ، ولا يؤدي إلى اعتبار أننا بصدد علمين منفصلين ، فهما في التحليل النهائي علم واحد ، بل أن العلم الرياضي لا يكون علماً ،

إلا بالجانبين معا . وبذلك ارتقوا بالواقع وما تجرى فيه من أحداث ، واعتباره علماً بالقدر نفسه الذي يمثله الجانب النظري .

أما بالنسبة للموضوع الرياضي أو الوحدة الرياضية ، فقد خالف التصور الإسلامي تصور اليونان لهذه الوحدة . فاليونان يعتبرون أن الوحدة الرياضية ، هي ماهيات مستقلة وكاملة . على غرار المثل الافلاطونية . أما التصور الإسلامي ، فيري أن وحدة الموضوع الرياضي تكمن في عمومية العمليات العقلية ، وليست في عمومية الوحدات الرياضية . سواء كانت خطوطاً هندسية او أرقاماً عددية[1].

هذا التصور ، لم تتم صياغته النهائية دفعة واحدة منذ البداية ، فالوصول إلى الصياغة المتكاملة احتاجت إلى وقت طويل . وتطلبت جهود علماء على درجة عالية من التفوق الرياضي ، وإلى ابتكار العديد من النظريات ، التي ساعدت في تحديد مفهوم الموضوع الرياضي وصياغته . وفي فلسفة الرياضة لا يمكن قبول أي فكرة ، مهما كانت واضحة إلى درجة البداهة أو قريبة من أذهاننا إلى درجة الألفة ، لا تثير لدينا أية تساؤلات ، ولأن ما هو قريب وبسيط ، بالمعني الرياضي ، هو قي حقيقته ، معبأ بالأفكار التي ما كانت تخطر على بالنا . وفي هذا المجال فإن التصور الإسلامي عن الموضوع الرياضي ، اسقط الإطار الانطولوجي لوحدته ، وإحلال

---

[1] أحمد فؤاد التراث العلمي للحضارة الإسلامية دار المعارف مصر 1983 ص 64 .

الإطار الأبستمولوجي ؛ عن طريق التقرير بأن الموضوع الرياضي ، هو عمومية العمليات الرياضية وليست الكائنات الرياضية .

إن الوصول إلى هذا التصور ، كان لابد أن يسبقه ابتكار العديد من النظريات ، التي تستند على أسس ومبادئ ، ستكون هي ذاتها ، أسس ومبادئ هذا التصور . فكانت فكرة المرتبة العددية ونظرية التقريب ونظرية التناسب . أما العامل الحاسم في بناء التصور الإسلامي ، عن الموضوع الرياضي فيرجع إلى ابتكارين على درجة عالية من الأهمية وهما .

ابتكار الجبر :ـ

إن ابتكار الجبر . لا يعني فقط إيجاد علم جديد له موضوعه ومجاله وطرقه : بل هو إعلان واضح عن مميزات وخصائص العقلية الرياضية العربية . فهو يعني مجيء التحليل العقلي التجريدي . الذي يجبرن بواسطة الإيجدبات العددية ، كل حرف يمكن أن يحرك الموضوع المرقم بالعدد الصحيح . الذي يرمز إليه . وذلك بواسطة جمع العناصر الكسرية التي يؤدي جمعها إلى أعطاء هذا العدد الصحيح[1] والعدد الصحيح هو وحدة بنحو من الانحاء . إلا أنها في حقيقتها وحدة من نوع جديد . فلم تعد وحدة ميتافيزيقية .

---

[1] تاتون تاريخ العلوم العام 454 .

ذات إطار انطولوجي تكون العمومية فيها هي عمومية الكائنات الرياضية . بل هي وحدة ذات إطار ابستمولوجي . تسمد العمومية من عمومية العمليات الرياضية . القائمة أساساً لحل مشاكل واقعية بالغة الصعوبة . كما هو الحال في المواريث ، الذي كان الدافع المباشر وراء ابتكار الجبر .

الكسور العشرية :ـ

أما عن ابتكار الكسور العشرية (الاعشارية) فإنه ابتداء من الخوارزمى كان علماء الرياضيات العرب ، على دراية كاملة بقصور الكسور الاعتيادية عن التعبير الدقيق في العمليات الرياضية . لهذا حاولوا إيجاد بدائل من أنظمة كسرية أخرى ، تكون أكثر دقة في التعبير . فكان الالتجاء إلى الحساب الستيني " طريق المنجمين " الذي تحتوي الوحدة فيه على ستين درجة لكن هذا الاستخدام لم يكن كافياً ودقيقاً . لذلك فأن أهمية اكتشاف الكسور العشرية ، هنا إنما تكمن في ان الكسر لم يعد ينظر إليه على أنه جزء من الوحدة ، مهما كانت صغيرة ، وإنما أصبح ينظر إليه ، على أساس أنه علاقة بين أعداد ، وهي علاقة تمتد إلى ما لا نهاية وعن طريق التناسب والتقريب والمرتبة العددية ، خصوصاً بعد اكتشاف (الصفر) تمت صياغة نظام كسري جديد ، يستند على مفهوم العلاقة المتواصلة بين الاعداد ، سلباً وإيجاباً وقد انعكس كل ذلك على مفهوم الوحدة

الرياضية ، فأصبحت في الرياضيات العربية ، علاقة تستمد وحـــدتها وعموميتها من عمومية العلاقة ذاتها .

من الارثماطيقا إلى اللوجسطيقا :ــ

في بداية النهضة العلمية ، في الحضارة الإسلامية أخـــذ العـــرب يبحثون في الارثماطيقا وهو مصطلح يوناني يطلق على علم أو فلسفة الأرقام ، المعروفة بنظرية " العدد " وهي تدرس الأرقـــام المفـــردة والزوجية والتامة والزائدة والناقصة . فهذه الموضـــوعات وغيرهـــا تدخل في صميم مبحث الارثماطيقا ، كما عرفها اليونـــان . تـــدرس الموضوعات النظرية من الأعداد . أما ما يجرى من معاملات البيـــع والشراء فهي غير جديرة بالدراسة ، لأنها شغل الباعة في الأســـواق وهذا النوع الاخير هـــو المعـــروف باللوجـــسطيقا **LOGISTIC** . وهو مصطلح معروف عند القدماء ، ويعني الحساب ، وعلـــى نحـــو أدق الجداول ذات النفع العملي ، التي يتداولها المساحون والحاســـبون قديماً ، ليجدوا فيها نتائج العمليات الحسابية المختلفة جـــاهزة ومعـــدة دون تكبد المشقة في إجرائها وهذا النوع لا يعتبر علماً عند اليونان . لذلك انصرفوا عنه إلى الارثماطيقا . أما العلماء العرب لـــم يهملـــوا الواقع أو يختصروا المعاملات اليومية " اللوجسطيقا عند اليونـــان " ، بل إن هذا النوع أصبح يمثل فرعاً من فرعين رئيسين فـــي العلـــوم العددية ، دون أن يطغي فرع على الأخر ، ورغم أنهم في علم العدد

النظري ، احتفظوا بالمصطلح اليوناني ولم يغيّروه وهو " الارثماطيقا " إلا أنهم عدلّوا مضمون العلم . وقسموا الاعداد إلى أقسام كالموجب والسالب والفرد والزوج . كما كتبوا عن الأعداد التامة والزائدة والناقصة . كذلك الأعداد المتماثلة والمتداخلة والمتوافقة والمتباينة[1] وتعمقوا في دراسة الأعداد المتحابة . وابتكروا قواعد جديدة لها وأوردوا نماذج كثيرة ، لما يعرف اليوم بالتباديل التوافيق ، وفكرة إخراج المضمرات ، وحساب المتواليات على اختلالها . مما فتح المجال واسعاً أمام الهندسة التحليلية ، وحساب التفاضل والتكامل . واللوغاريتمات . وهو ما أنتجته الرياضيات الحديثة وتوسعّت فيه بشكل جدي ومتقن .

إن كل ما تم إنجازه في الرياضيات العربية في هذا المجال . ما كان ليحدث لو لم يتناول العلماء العرب بالدراسة . لما يعرف باللوجسطيقا . الذي أهمله اليونان وحققوا بذلك هدفين أساسين :ـ

1 . الارتقاء باللوجسطيقا إلى مرتبة العلم ومكمل للارثماطيقا .

2 . الدراسة العميقة لهذا النوع ، منحهم الإمكانية والقدرة على تجديد وتوسيع مضمون الارثماطيقا ، على نحو لم يعرفه

---

[1] انظر على الدفاع " العلوم الرياضية في الحضارة الإسلامية " دار جون وايلى ، نيويورك 1985 . ص 124

اليونان . بل أن هذا الفهم الجديد ، يمكن مقارنته بما تم إنجازه في عصور حديثة .

مفهوم الواحد :ـ

إن مفهوم الواحد ، من المفاهيم الأساسية ، ليس في الرياضيات ، بل هو كذلك من الناحية الفكرية والفلسفية . يدلنا على ذلك أنه كان موضع اهتمام ودراسة فلاسفة ومفكرين وعلماء كلام وعلماء لغة ومتصوفة ورياضيين ورغم أن كل فريق أهتم بهذا المفهوم وفقاً لمجاله ، إلا أن الطابع الغالب في هذه الدراسات ، هو الطابع الفلسفي الرياضي .

لذلك حينما تناول علماء الرياضيات العرب ، مفهوم الواحد بالدراسة والبحث . فهم في الحقيقة كانوا يمارسون فلسفة الرياضة . فالرياضي " العاملي " مثلاً يعرّفه بقوله والعدد قيل كمية تطلق على الواحد وما تألف منه يدخل فيه الواحد وقيل نصف مجموع حاشيتيه فيخرج . وقد يتعلق لإدراجه بشمول حاشية الكسر والحق أنه ليس بعدد وإن تألفت منه الأعداد[1] فيكف يؤلف الواحد الأعداد وهو في ذاته ليس بعدد ؟ .

---

[1] العاملي " خلاصة الحساب " تحقيق جلال شوقي " دار الشروق بيروت 1981 .

لتوضيح هذه الفكرة في الرياضيات العربية . نقول : بأن الواحد عندهم حالة من حالات العدد . وأن ما يطلق عليه الواحد . إنما يكون باشتباه الاسم . ويفرقون بين الواحد الرياضي والواحد الحسابي . ويقصدون بالواحد الرياضي . كما يقول الكندي ، بأنه خال من كل مادة وهيولي ، أي لا يقبل التساوي أو الانقسام . وليس هو فرد ولا زوج لإنه إن كان فرداً يقبل الانقسام إلى قسمين غير متماثلي الوحدانيات ، وأن كان زوجاً فهو ينقسم إلى قسمين متماثلى الوحدانيات فيكون كل قسم واحد[1] لهذا فالواحد الرياضي ، غير قابل للقسمة أو المساواة أو الزيادة والنقصان وذلك بخلاف الواحد الحسابي . الذي يدخل في العمليات الحسابية .

كان لابد لعلماء الرياضات العرب ، من التفريق بين الواحد الرياضي والواحد الحسابي لارتباط مفهوم الواحد بعدة أفكار أساسية ، خصوصاً الألوهية . . فالله هو الواحد الحق المبدع كل ما أمسك . أما ما يطلق عليه الواحد . فيما عدا الله ، فهو باشتباه الاسم وليس بالطبع[2] .

هنا نلاحظ التأثير الديني في فكره رياضية مجردة . فالله هو الواحد الحق . أما ما عداه فيطلق عليه الواحد باشتباه الاسم وليس

---

[1] أحمد فواد الاهوانى الكندي فيلسوف العرب ص 125 .

[2] أنظر الكندي كتاب الكندي إلى المعتصم بالله دار المعارف مصر 1978 ص 117 .

بالطبع . لذلك لا يجوز أن تجرى على الواحد الحقيقي أو الواحد بالطبع ، عمليات المساواة وعدم المساواة . الزيادة والنقصان . أما الواحد الأخر فهو يأخذ الاسم فقط أو هو حالة من حالات العدد .

ماذا يعنى ذلك ؟ ثم كيف نفرّق بين الواحد الرياضي والواحد الحسابي ؟ هل هما حالة واحد أو لكل منها حالة ؟ وما هو المقصود بكلمة ومصطلح حالة .

المقصود بمصطلح الحال في الفكر الإسلامي . هي صفة للموجود لا معدومة ولا موجودة فهي مجرد اعتبارات ذهنية ، أي معان معقولة وراء العبارات[1] فالحال ليس له تحقق خارجي وإن كان في الوقت ذاته غير معدوم . فهو ثابت بحيث يكون لا هو ولا غيره ، ولا يمكن معرفته بانفراده . إنما يعُرف مع الذات . والعلم مع الذات ، لا يعني أنه هو الذات . كما يعني أنه منعزل عنها .

فالحال أو الصفة ، لا تقرر بأن الواحد موجود أو متحقق ، كما أنها لا تعني بأنه معدوم . فالصفة " الواحد " لا موجودة . لأنه ليس هناك تحقق لها ، ولان الله هو الواحد الحقيقي . ولا هي معدومة باعتبار أن هذه الصفة الواحد تدخل في سلسلة الأرقام والأعداد ، وهي بهذا الاعتبار ركنا للعدد والقول بأن الواحد هو ركن العدد ،

---

[1] على سامي النشار مناهج البحث عند مفكري الإسلام دار المعارف مصر 1978 ص 117 .

يعني أننا نستطيع تعريف الأعداد عن طريقه . فمثلاً عدد (2) لإنه مركب (1+ 1) وكذلك (3) فهو مركب من (1+1+1) أو (1+2) . فعن طريق الواحد نستطيع تعريف باقي الأعداد ، إلا أنه في ذاته غير معرّف ، أو من اللا معرفات ، أي المطلوب التسليم بصدقها دون برهان ، وهو إجراء مألوف في العلم وفي الرياضيات .

هذه المبادئ من اللا معرفات ، لا تتنافي مع العلم ، بل هي من صميم العلم . وهذا ما يمكن ملاحظته سواء من خلال أعمال اقليدس ، أو من خلال أعمال رياضي من القرن العشرين هو عالم الرياضيات الإيطالي " بيانو " الذي قدّمه برتراند رسل ، واستفاد من تحديداته وبديهياته ، سواء في المنطق أو في الرياضيات ، خصوصاً في بناء نظرية فلسفيه رياضية اعتبرت نموذجاً للفلسفة وأقصد بها " نظرية الأوصاف " . حيث كانت النتائج التي ترتبت عليها مثيرة للغاية . فقد انهارات الأسس القديمة للرياضيات وتم إرجاع الرياضيات إلى المنطق .

كان هدف بيانو . تقديم تفسيرات صحيحة ومقنعة للأعداد الطبيعية . وبالفعل استطاع ردها إلى أقل وأبسط الأفكار والبديهيات . فكانت الأفكار الأساسية في هذه النظرية هي : الصفر والعدد والتابع . أما البديهيات فهي[1] .

---

[1] أنظر ، يايسي خليل " مقدمة في الفلسفة المعاصرة " منشورات الجامعة الليبية بنغازي 1971 ص 88 .

ـ الصفر عدد .

ـ الصفر ليس تابعاً لأي عدد .

ـ التابع لأي عدد هو عدد .

ـ إذا كان لدينا عددان . وكان العدد الذي يلي (يتبع) العدد الأول مساوياً للعدد الذي يلي (يتبع) الثاني ، فإن العددين متساويان.

ـ تكون الصفة منتمية إلى جميع الأعضاء . إذا كانت منتمية للعدد صفر . والتابع لكل عدد له هذه الصفة .

هذه الأفكار والبديهيات ، التي قدمها بيانو غير معرَّفة . وهو أمر مقصود ، وذلك لان النظام المفروض ، يظل صحيحاً مع اختلاف أي قيمة عددية يمكن أن تفرض من خلاله . وإنه بالامكان إحلال الأشياء المادية ، أو الحوادث . التي وقعت في خبرتنا ، محل الأعداد ، أو يمكن وضع أشكالاً هندسية أو أي شيء أخر مكانها . وهذا أمر له أهمية قصوى ، إذ أمكن تحديد هذه الأفكار بالاستعانة بالأفكار المنطقية . أي أن ما قدمه بيانو ، لم يكن علماً رياضياً بحثاً ، إنما كان من صميم موضوعات المنطق .

وبتحليل هذه الأفكار الرياضية والمنطقية ، سنجد مثلاً . أن فكرة العدد لا نصل إليها عن طريق العد . ذلك لان العدد ليس هو الكثرة ، أي متكونا من كثرة من الأشياء ، أنما هو تجريد ذهني خالص ، لا علاقة له بالمادة . يقول " رسل " : كثير من الفلاسفة في

محاولاتهم تعريف الرقم إنما هم في الواقع يشتغلون بتعريف الكثرة PLURALIT وهو أمر مختلف . فالرقم هو الخاصية التي تميز الأعداد تماماً ، مثل الإنسان ، فهي الخاصية التي تميز الناس . فالكثرة ليست حالة من الرقم إنما هي حالة لرقم . خاص فثلاثي رجال مثلاً ، حالة للعدد 3 والعدد 3 حالة من الرقم . ولكن الثلاثي ليس حالة للرقم . وهذه المسألة قد تبدو اولية لا يجدر أن تذكر ، ولكنها غابت عن أذهان الفلاسفة ، فيما عدا القليل منهم[1] .

الحقيقة أن ما قدمه رسل هنا ، لم يكن تعريفاً للرقم . فقد ظل تعريف الرقم مجهولاً ، إنما كل ما فعله هو أن قدم وصفاً له . وهذا في حد ذاته عملاً غير يسير . وربما الدافع وراء ذلك هو ما كان قد وصل إليه في كتابه " أصول الرياضيات " من مواقف متناقضة بخصوص تعريفاته للصنف . فمرة يعرّفه عن طريق الماصدق ، أي تعريفه عن طريق أفراده . ومرة أخرى يعرفه عن طريق مفهومه ، أي كتصور . فإذا ما عرفنا الصنف بأفراده ، فإن مصطلح " صنف " نفسه لازال يدل على تصور ؛ الذي يعني وجود عالم موضوعي مستقل لا نخلقه إنما نكتشفه[2] . ويعتمد تعريف الصنف بأفراده . أو التعريف بالماصدق ، على أن كل الأشياء

---

[1] رسل " مقدمة للفلسفة الرياضية " ص 16 .

[2] انظر ، محمود زيدان المنطق الرمزي نشأته وتطوره دار النهضة العربية بيروت 1979 ص 249 .

التي تجعل قضية ما صادقة . ومن تم تحدد كل دالة قضية صنفاً ، بالرغم من أنه إذا كانت دالة القضية كاذبة دائماً يصبح الصنف فارغاً . بمعني أن لا يكون له أعضاء . وهو هنا الصفر . فصنف الصفر لا وجود لإفراد فيه أو أعضاء . الا أن الصنف في ذاته موجود وليس فارغاً .

أيا كان الموقف ، فأن هذين التعريفين . يعطيان لأفراد الصنف الواقعية بينما يظل الصنف نفسه مجرد تصور . فأن كانت له واقعية فأن واقعيته اسكولائية . عند هذا الحد أدرك رسل مأزق هذين التعريفين . فنجده بعد ذلك . قد تحول عن واقعية الصنف . وقرر أن الصنف ليس له وجود في عالم أخر . وبذلك أصبحت كلمة صنف تفهم من خلال السياق .

هذا التحليل الدقيق ، لقضايا الرياضيات وموضوعاتها ،خصوصاً نظرية الأرقام . والذي قدمه فلاسفة معاصرون ، ما كان ليكون على هذا النحو من الدقة المنطقية ، لو لم يكتمل بناء الأداة المستخدمة ، وهي المنطق . وليس المقصود المنطق الأرسطى القديم ، إنما المنطق الرمزي الرياضي . فقد أتاحت التطورات العلمية المذهلة والمثيرة للفلاسفة والرياضيين على حد سواء ، الوصول إلى أفكار أكثر عمقاً ودقة ، وعن أخص خصوصيات الرياضيات . بل أن الرياضيات برمتها أرجعت للمنطق ، إذن فحالة العلم الراهنة .

هي التي سمحت بهذا التطور الأمر الذي لم يكن متوفرا في العصور السابقة .

ففي كل عصر ، أو مرحلة تاريخيـــة ، ســـادت نوعيـــة معينـــة من الثقافة ، التي ترتبط بأسس ومبادئ تختلف عن غيرها ، وتعطيها خصوصيتها واختلافها عن غيرها . فقد لاحظنا كيف كانـــت ثقافـــة اليونان ، والأسس التي تحكم نظرتهم إلى الأشياء والعالم ، فـــانعكس ذلك بدوره على الفكر الرياضـــي . أو بـــصيغة أخـــرى إن الفكـــر الرياضي اليوناني كلن يمثل هذه النظرة ويعبر عنها .

كما أن التحليل الجبري المرن ، الذي تناول به علماء الرياضيات العرب ، القضايا والموضوعات الرياضية ، كان مرتبطاً في الأساس بقضايا المجتمع المقامة على النظرة الإسلامية إلى الكون ــ فكانـــت الرياضيات العربية جزء من هـــذا النـــسيج المتناســـق والمتـــرابط ، ومن تم جاءت إبداعات وابتكارات العلماء ، وفـــي أعمـــاقهم بداهـــة الثقافة التي يعيشون في ظلها ، على نحو أو أخر فتناسق الابـــداعات في شتى المجالات ، وارتباط انساقها العلمية المنطقي بحيث لا تختلف إلا باختلاف موضوعات العلوم ، وتمايز ميادينها فالتحليل التـــوافقي والتباديلي ، يرتبط في تقنياته وآليات البرهنة ، مع اكتشاف الكـــسور العشرية ومع الجبر والرمزية الجبرية ، والتفاضل والتكامل والهندسة

التحليلية واللوغاريثمات . فهذه كلها مشدودة بنسق منطقي متشابه . وحتى اكتشاف الصفر لا يختلف عن هذا النسق .

العلم الرياضي واحد عند كافة النوع البشري ، ولكن الموضوع الرياضي يختلف من بيئة ثقافية لأخرى . كما أن المنهج هو أيضاً وليد هذه الثقافة أو تلك . أقصد إن النتائج التي يصل إليها علم من العلوم في حضارة ، ليست بالضرورة أن تكون صحيحة صحة مطلقة ولا كاذبة كذباً مطلقاً إنما هي صحيحة أو كاذبة ، وفقاً لأسس هذه الحضارة ومناهجها . أقصد أن الصحة أو الكذب ، يرتبطان بهذه البيئة وطريقة تفكيرها ، وما قدمته من أساليب وآليات وتقنيات فالصحيح يستمر وتستفيد منه حضارة لاحقه . والخاطئ أو الكاذب ، يصبح مجرد موضوع تاريخي محدد بفترة من فترات الزمن ، لا يختلف عن أي حدث تاريخي أخر .

فالحضارة الناشئة ، تأخذ من الحضارات السابقة كل ما هو مفيد بالنسبة إليها . فتستوعب كل الانجازات ، وتضعها قي صورة جديدة . تتلاءم مع أسسها ومبادئها . فهذا ما حدث بالنسبة للحضارة اليونانية إزاء حضارات الشرق القديم . كذلك حدث أيضاً مع الحضارة الإسلامية ، وما استعانت به من الحضارات السابقة ، شرقية أو يونانية وهذا أيضاً حدث في الحضارة الأوروبية في بداية نهضتها .

هكذا تقدم العلم وتطور ، فكل حضارة ساهمت بقدر ما ، في تكوين صورة العلم . إلى أن وصل إلى مرحلته الحالية . وصحيح أن العلم له منطقه ومنهجه ، الذي حقق به انجازات مثيرة ومدهشة ، ما كانت لتخطر على بال . إلا أن هذه الدراسة ليست على هذا النحو . كما رأينا فهي تنصب في المقام الأول . على البحث عن المبادئ والأسس العامة . التي تجعل من العلم أمر ممكنا ، وهذه الأسس والمبادئ . قد يشارك الإنسان في وضعها . عن طريق الاستمرار والتفاعل بين الأفكار فتتكون هذه المبادئ العامة الأولية ، وهي التي تقف وراء نظريات العلم ، كما تعطي للعلم مفهومه ومجاله ، وتحدد المنهج الملائم وطرائقه .

وكان هذا بالضبط هدف البحث . وقد استعرضنا علم كلي لتجريد ، وهو الرياضيات ، وفي موضوع من صميم موضوعات الرياضيات وفلسفة الرياضيات ، إلا وهي نظرية الأرقام ، وقد تبين لنا أن الرياضيات . علم إنساني في المقام الأول . ولا تبتعد في الأساس عن كون الإنسان وبيئته فالعقل الإنساني ، ابتكر الرياضيات وطورها . في كل عصر من عصور التاريخ ، فكان كل تطوير ، هو في حقيقة ولادة جديدة لهذا العلم .

المراجع :ـ

1 . برتـــــر اندرســـــل " مقدمـــــة للفلـــــسفة الرياضـــــية " ترجمة محمد مرسي محمد وأحمد فؤاد الاهـــواني . مؤســـسة سجل العرب القاهرة 1980 .

2 . هاشم الطيار ويحيي " موجز تاريخ الرياضيات " دار الكتـــب جامعة الموصل 1977.

3 . موريس كلاين " الرياضيات والبحث عن المعرفة " ترجمـــة سمير ياسين يوسف " الشؤون الثقافية بغداد 1987 .

4 . الكندى " كتاب الكندي إلى المعتصم بالله " في الفلسفة الأولى " تحقيق أحمد فؤاد الاهواني . دار إحياء الكتب العربية القاهرة 1948 .

5 . الشهر زوري (شمس الدين) نزهة الأرواح فـــي روضـــة الأفراح ــ تاريخ الحكماء " تحقيق محمد على أبـــو ريـــان . دار المعرفة الاسكندرية 1993 .

6 . اشبنجلر (اسوالد) تدهور الحضارة الغربية جـــ 1 ترجمـــة أحمد الشيباني . مكتبة الحياة بيروت 1964 .

7 . رينية تاتون " تاريخ العلوم العام ــ القديم والوسيط " ترجمـــة على مقلد المؤسسة الجامعية ــ بيروت 1988 .

8 . الفارابي " إحصاء العلوم " ط 2 تحقيق عثمان أمين دار الفكر المصري القاهرة 1949 .

9 . محمد ثابت الفندي " فلسفة الرياضة " دار النهضة العربيـــة . بيروت 1969 .
10 . أحمد فؤاد باشا " التراب العلمـــي للحـــضارة الإســـلامية " دار المعارف مصر 1983 .
11 . محمد ثابت الفندي " أصول المنطق الرياضي " دار المعرفة الجامعية الاسكندرية 1987 .
12 . على الدفاع " العلوم الرياضية في الحـــضارة الإســـلامية " دار جون وايلي نيويورك 1985 .
13 . العاملي " خلاصـــة الحـــساب " تحقيـــق جـــلال شـــوقي . دار الشروق . بيروت 1981 .
14 . على سامي النشار " مناهج البحث عند مفكـــري الإســـلام " دار المعارف . مصر 1978 .
15 . أحمد فؤاد الاهوانى " الكندي فيلسوف العرب " إعلام العرب (26) المؤسسة المصرية العامة القاهرة .
16 . ياسين خليل " مقدمة في الفلسفة المعاصـــرة " منـــشورات الجامعة الليبية بنغازي 1971 .
17 . محمود زيـــدان " المنطـــق الرمـــزي نـــشأته وتطـــوره " دار النهضة العربية بيروت 1979 .