الفصل الخامس

أرشميدس وأبولونيوس

إن مصر البطلمية كانت المركز الرئيسى للعلم اليونانى ، ولكنها لم تكن الوحيدة فى ذلك بأى حال من الأحوال . فحيثما تنشأ مستعمرات يونانية فى آسيا أو فى الجزائر أو فى اليونان الكبرى[1] يكون احتمال التقدم العلمى كبيراً . وسوف تصادفنا أمثلة متعددة عن ذلك . وأبرزها أرشميدس السيراكوزى فى القرن الثالث. ومن المستبعد أن نتناول فى هذا الكتاب التغيرات السياسية والحروب ، ولكن يجب على مؤرخ العلوم أن يفسر كيف حدث أن قام كبار رجال العلم بأعمالهم فى مكان ما دون آخر . ولماذا نما العلم فى هذه البيئة أو تلك . فالعلم لاينمو أبداً فى فراغ .

ولكى نعلل سبب وجود أرشميدس فى صقلية ، يجب أن نلخص الأحداث الماضية . لقد سبق أن ذكرنا فى المجلد الأول[2] أن التوتر فى البحر المتوسط من القرن الثانى عشر وما بعده ، كان سببه المنازعات المستمرة بين المستعمرات اليونانية من جهة والفينيقيين من جهة أخرى . ومنذ القرن السادس وما بعده زادت حدة التوتر فى الأجزاء الغربية من البحر المتوسط بسبب غيرة الإتروسكانيين وتدخلهم ، وكانت مدينتا قرطاجة فى الإمبراطورية السامية ، وسيراكوز فى بلاد اليونان ، هما اللتين احتلتا مركز الطليعة . ولنركز اهتمامنا عليهما .

لقد كانت قرطاجة هى الأقدم ، وقد أنشأها ملوك صور سنة ٨١٤ ، وكلنا يعرف الملكة الأولى ديدو ، وقد خلدت فى الأنيادة ، ولم تلبث قرطاجة أن صارت المستعمرة الرئيسية من نوعها لدرجة أن الناس تحولوا من الكلام عن الفينيقيين إلى الكلام عن القرطاجيين ، وقد أسسوا لأنفسهم مستعمرات جديدة فى أفريقية وصقلية وسردينيا . ولقد حاربهم اليونانيون ثلاثة قرون متتالية لامتلاك صقلية ، حتى انتقل النزاع إلى الرومان . وفى نهاية الحرب البونية الأولى (٢٦٤ —

٢٤١) غزا القرطاجيون أسبانيا ، ولكنهم فقدوا صقلية التى أخذها الرومان[٣]. وفى أثناء الحرب البونية الثانية (٢١٨ – ٢٠١) قامت المعارك فى أسبانيا وإيطاليا وصقلية . وكان من أحداثها استقطاع الرومان سنة ٢١٢ لسيراكوز[٤].

وقد أسست سيراكوز سنة ٧٣٤ على الساحل الجنوبى الشرقى لصقلية ، وبعد قرطاجة بثمانين سنة . وقد كان لموقعها وعبقرية مؤسسيها الكورنثيين ، الفضل فى أن أصبحت أهم مدينة ليس فى صقلية فقط ، وإنما فى اليونان الكبرى . ولهذا كان من المتوقع أن تعاديها قرطاجة ، وقد كان خطر الحرب سبباً فى قيام الدكتاتورية من سنة ٤٨٥ فصاعداً . وفى سنة ٤٨٠ (سنة سلاميس) هزم الطاغية جيلون عند هميرا ، القرطاجيين الذين غزوا صقلية ، وقد زاد أخوه وخلفه هيرون الإمبراطورية السيراكوزية ، وجعل من هذه العاصمة أحد مراكز القيادة اليونانية . وقد كان محباً للأدب . وشمل برعايته بنداروس وايسخيلوس ، وقد انتهى بموته العصر الذهبى سنة ٤٦٧ ، على أن هزيمة الأثينيين هزيمة منكرة فى حملتهم سنة ٤١٣ كانت من أعظم الأحداث التى مرت بالمدينة (وقد وصف ثيوثيديديس هذه المعركة وصفاً جيداً) . وقد استمر النزاع بين سيراكوز وقرطاجة حتى استغل الرومان وجود الحزب الموالى لهم وحاصروا المدينة وأخذوها سنة ٢١٢[٥].

وتنتهى الفقرتان السابقتان عند سنة ٢١٢ التى هى العقدة التى تنتهى عندها قصتنا.

أما فيما يتعلق بالمجد الروحى فقد كانت قرطاجة فى بداية القرن الخامس نقطة بداية حركة الملاحة الجريئة التى قام بها هانون، وهيملكون ، وهيريلوس القرطاجى ، وتلميذ زينون الكيتيونى (النصف الثانى من القرن الرابع قبل الميلاد) وقد كان مؤسساً للمذهب الرواقى . وقد كانت سيراكوز موطن رجلين من رجال الفلك المشهورين : هكتاس (القرن الخامس قبل الميلاد) واكفانتوس (النصف الأول من القرن الرابع قبل الميلاد)وكذلك كانت موطن الشاعر العظيم ثيوكريتوس (حوالى ٣١٠ – ٢٥٠) ومعاصره الأصغر أرشميدس (النصف الثانى من القرن الثالث قبل الميلاد) .

أرشميدس السيراكوزى :

حينما حاصر القائد الرومانى ماركللوس ، سيراكوز ، زاد مايلاقيه من صعوبات بسبب ذكاء مهندس من سيراكوز يدعى أرشميدس الذى قتل حينما نهبت المدينة سنة ٢١٢ . وكما تقول الأسطورة ، اخترع أرشميدس آلات مختلفة لأغراض الدفاع ، مثل آلات الرماية ، والخطاطيف التى تدل على عبقرية مخترعها ، وكذلك المرايا المقعرة التى عن طريقها حوّل أشعة الشمس وأحرق بها سفن الرومان . وتقول القصة إن جندياً رومانياً فاجأه، وهويتأمل أحد الأشكال الهندسية المرسومة على الأرض ، فصاح فيه أرشميدس « ابتعد » . فقتله الجندى الرومانى . وقد ألهب ما يقال عن اختراعاته لإنقاذ مدينته ، خيال الناس ، ليس فقط فى أثناء العصور القديمة والمتوسطة ، بل استمر ذلك حتى القرن الثامن عشر ، وكان ينظر إليه بصفة عامة كساحر ميكانيكى . ونضرب مثالا لذلك أن جيانللوديلا تورى صانع ساعات شارلزكوينت سمى « أرشميدس الثانى » . وحتى القرن الثامن عشر سمى المخترع كرستوفر بولهم « أرشميدس السويدى »(٦) . وفى هذا من السخف كما لوقلنا عن إديسون أرشميدس « الأمريكى » . ولقد تبدو غرابة هذه التسمية حين ندرك أن أرشميدس ولو أنه اخترع آلات متعددة ، إلا أنه كان رياضياً أولا وقبل كل شىء ، وكان أعظم رجالات الماضى ، إن لم يكن أعظم رياضى على مر الزمن .

ولقد ذكر بلوتارك أن أرشميدس نفسه لم يقدر مخترعاته العملية كثيراً ، وذلك على الرغم من أن هذه « المخترعات العملية » قد جلبت إليه شهرة رفعته فوق العقل البشرى . إلا أنه لم يتنازل ويترك عنها أعمالا مكتوبة . وكان يرى أن الأعمال الميكانيكية أو أى نوع من الفن النفعى ، أعمال حقيرة وغير شريفة ، ووضع كل مالديه من طموح تلك التأملات التى لم يصبغ جمالها وكياستها بذلك الخليط الخاص بحاجات الحياة العامة(٧) .

وإن ما يوحى به إلينا بلوتارك مقبول ، وهذا نموذج للتفكير اليونانى . ومع

ذلك فإن شهرة أرشميدس قد تأسست لقرون عديدة ليس على إنتاجه الخالد الذى عبّر عنه بكتاباته ، وإنما على ما تجمع حول اسمه من أقاصيص خرافية ، وإن محور هذه الأقاصيص صحيح حقاً ، فقد اخترع أرشميدس آلات مثل البكرات المركبة ، والحلزون غير المنتهى ، والطنبور ، والساعة الشمسية ، والمرايا الحارقة ، ولكن كان كل هذا النشاط عملا جانبياً وثانوياً . ولقد رأى شيشرون الساعة الشمسية ، وذكر أنها كانت تمثل حركات القمر والشمس لدرجة أنها كانت تبين الخسوف .

والحقيقة الوحيدة التى يمكن أن نضع لها تاريخاً مؤكداً هى موته عند سلب مدينة سيراكوز سنة ٢١٢ق.م . ويقال إنه مات عن ٧٥ عاما ، ومعنى ذلك أنه ولد حوالى سنة ٢٨٧ ق . م . وكان ابن فيدياس عالم الفلك . ولهذا كان من الطبيعى أن يهتم فى وقت مبكر بالفلك والرياضيات . وكان قريباً وصديقاً لهيرون الثانى ملك سيراكوز ، كما كان صديقاً لابنه وخليفته جيلون الثانى[٨] . ويقول ديودوروس الصقلى (النصف الثانى من القرن الأول قبل الميلاد) إنه قد مضى بعض الوقت فى مصر ، وهو قول مقبول لدرجة كبيرة . فقد كانت الإسكندرية إذ ذاك مركز العالم العلمى ، وكان أرشميدس فريد عصره فى سيراكوز ، وكان من الطبيعى أن يرغب فى زيارة معهد العلوم ، وأن يتبادل الرأى مع رجال الرياضيات الكبار الذين ظهروا حولها أو بجوارها . ومن المحتمل جداً أن يكون قد تعرف فى الإسكندرية على كونون الساموسى (النصف الثانى من القرن الثالث قبل الميلاد) ، وعلى هذا الأخير تتلمذ كل من دوسيثيوس البلزيونى وأراتوسثنيز[٩] . وقد اخترع أرشميدس الطنبور فى أثناء إقامته بالإسكندرية وقد أطلق عليه « حلزون أرشميدس »[١٠] . وبالرغم من أننا نفترض أنه عاش معظم الوقت فى سيراكوز إلا أنه أسهم فى رفع مستوى معهد العلوم .

وإليك قصة أخرى : لقد رجا أرشميدس أصدقاءه أن يرسموا على قبره شكلا هندسياً . وكان هذا الشكل (أو ربما كان نموذجاً ثلاثى الأبعاد ؟) يمثل أسطوانة تحيط بكرة[١١] . وإننا نعلم ذلك عن طريق شيشرون الذى كشف مقبرة

أرشميدس حينما كان الحاكم المالى لصقلية سنة ٧٥ ق. م . وكانت فى حالة سيئة فأصلحها ووصفها[١٢]. وقد اختفى القبر الآن ولايعرف مكانه على وجه التحديد .

أما وقد عرفنا أرشميدس الرجل بقدر الإمكان ، فلنتناول أعماله التى خلدته .

لم يكن لأرشميدس ميول نحو جميع ألوان المعرفة ، كما كان إقليدس الذى حاول أن يغطى كل ميدان الهندسة ، بل كان على العكس كاتباً لبحوث ذات نطاق محدود . وكانت معالجته لأى موضوع رائعة فى تنظيمها ووضوحها . وقد ذكر بلوتارك فى كتابه حياة ماركللوس « إنه لمن المستحيل أن نجد فى الهندسة براهين أو مسائل أكثر صعوبة قد صيغت فى نظريات أسهل وأوضح » . ولقد أحسن بلوتارك الرصف . وحتى ١٩٠٧ قد يضيف المرء إلى ما سبق ، أن أرشميدس لم يكن يعرف كيف تم له عمل كشوفه ، ولكنه فسرها فقط بطريقة جامدة ، وأنه لم يكن يهتم إلا بتنظيمها ، وقوتها وبساطتها ، على أننا لانستطيع أن نقول ذلك الآن ، لأنه فى تلك السنة (١٩٠٧) نشر هايبرج كتابه « الطريقة » الضائع . وفيها يقول لنا أرشميدس أسراره ، وسنعود إلى ذلك فيما بعد .

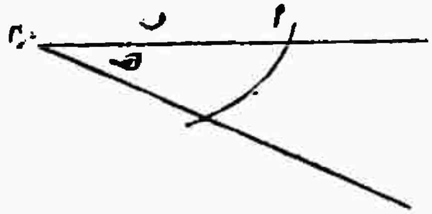
ولقد وصل إلينا اثنا عشر مصنفا من مصنفاته ، وسنفحصها باختصار مع إضافة ملاحظات قليلة إلى كل منها تهم القارئ المتعلم ، ولكننا بالضرورة لن نتعرض للتفاصيل الفنية التى لاتروق القارئ غير الرياضى حتى بعد الشرح المضنى . ولما كان أرشميدس عالم هندسة ، فلهذا سنبدأ بأعماله فى الهندسة ، ثم بأعماله الأخرى فى الحساب والميكانيكا والفلك والبصريات .

الهندسة : إن أطول كتابات أرشميدس هى كتابه عن « الكرة والأسطوانة » . وهو فى مجلدين ، ولايتجاوز الأصل اليونانى (كما جاء فى نسخة هايبرج) ١١٤ صفحة ، وبرهن فى هذا الكتاب على عدد من النظريات ، منها تلك النظرية التى جعل لها قيمة كبيرة وأمر أن يرسم الشكل الخاص بها ويحفر على قبره ، ومنها أيضاً تلك النظرية التى يعرفها كل صبى فى المدرسة وهى أن مساحة سطح

الكرة يعادل أربعة أمثال مساحة إحدى دوائرها العظيمة (٤ ط نق^٢)، وكذلك نفهم من كتابه « الطريقة » أنه حسب حجم الكرة ($\frac{٤}{٣}$ ط نق^٣) قبل أن يحسب مساحتها، ثم استنتج الأخيرة من الأولى ، ولكنه عكس الترتيب فى كتاباته . وبدأ كتابه على طريقة إقليدس بالتعاريف والفروض ، واستخدم طريقة الاستنفاد بحسم ومهارة فائقة فى تحديد السطوح والأحجام . وقد حل المسألة الآتية وأمثالها[١٣]. لتقسيم كرة بمستواى إلى قطعتين النسبة بينهما معلومة .

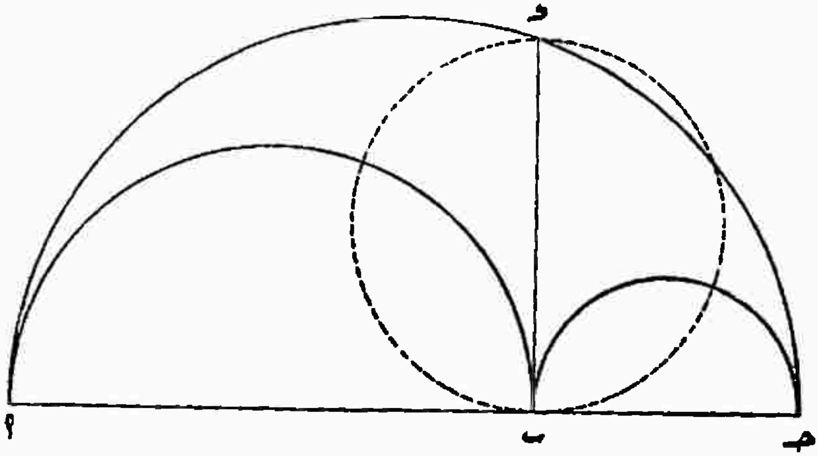
وكان كتابه الثانى من حيث الإفاضة (١٠٠ صفحة باليونانية) هو ذلك المتعلق بشبه المخروط وشبه الكرة ، ويعالج كلا من السطوح المتكافئة والسطوح الزائدة الدورانية ، والأجسام الناتجة من دوران القطوع الناقصة حول محاورها الكبرى أو الصغرى . والكتاب الثالث (٦٠ صفحة) قد خصص للحلزونات ، وقد لخص فى هذا الكتاب النتائج الرئيسية التى توصل إليها فى الكتابين السابقين ، وعلى ذلك يكون هذا الكتاب هو الثالث فى الترتيب الزمنى . وكان الحلزون الذى عالجه هو ما يسمى إلى وقتنا هذا « حلزون أرشميدس » . وقد عرفه كما يلى : « إذا ثبت أحد طرفى خط مستقيم ، ثم أدير فى مستوى بمعدل ثابت حتى يعود إلى الوضع الذى بدأ منه ، وإذا حدث فى نفس الوقت الذى يدور فيه الخط المستقيم أن تحركت نقطة بمعدل ثـــابت على هذا الخط مبتدئة من الطرف المثبت ، فإن هذه النقطة ترسم حلزونا فى المستوى »[١٤] ويستخدم اليوم هذا التعريف الواضح ويؤدى إلى المعادلة : ر = أهـ ، حيث أ مقدار ثابت (ليس هناك بالطبع أية معادلة فى كتاب أرشميدس ولا أى عالم قديم آخر ، إذ يرجع تاريخ معادلاتنا إلى النصف الثانى من القرن السادس عشر) ، وقد وجد مساحات متعددة محدودة بها ، كما وجد ما يمكننا أن نسميه بثبات تحت العمودى (= أ) . وحقاً إن قدرته على الحصول على هذه النتائج ، دون الاستعانة بالتحليل كعامل مساعد ، قدرة غير عادية .

والكتاب الرابع لأرشميدس كان « عن تربيع القطع المكافئ » ، وكان أقصر كثيراً مما سبقه من كتب ، إذ لم يزد عن ٢٧ صفحة ، ولكنه كان يعالج مسألة واحدة .



(شكل ٢١) – حلزون أرشميدس

ولقد أهدى هذه الكتب الأربعة لصديقه دوسيثيوس البلوزيونى ، وقد كانت سبباً فى تخليده ، وهى تكوّن الجزء الأكبر من أعمال أرشميدس التى لدينا ، أما كتبه الأخرى فى الهندسة فقد كانت أقصر كثيراً وأقل أهمية . وأول هذه الكتب (كتاب التمهيديات) وقد فقدت النسخة اليونانية الخاصة به ، ولكن عرف من ترجمة لاتينية عن العربية أنها كانت تتعلق بأشكال خاصة مثل (سكين صانع الأحذية) وهى شكل محدود بثلاثة أنصاف دوائر أقطارها أ جـ ، أ ب ، ب جـ على استقامة واحدة (شكل٢٢) ومساحة الدائرة التى قطرها ب د العمودى على الأقطار السابقة تساوى المساحة المحصورة بين هذه الأنصاف الدوائر الثلاثة .



(شكل ٢٢) – شكل سكين صانع الأحذية

قياس الدائرة : (وربما يكون جزءاً من كتاب أكبر) يوصلنا إلى تقريب أحسن للقيمة ط وهى $٣\frac{١}{٧} > \text{ط} > ٣\frac{١٠}{٧١}$ أى $(٣٫١٤٢ > \text{ط} > ٣٫١٤١)$ وقد حصل أرشميدس على هذه النتيجة بمقارنة مساحتى مضلعين منتظمين كل منهما ذو ٩٦ ضلعا مرسومين داخل نفس الدائرة وخارجها . ومن الصعب أن نعرف كيف وصل إلى تقريباته هذه ، مثلا ،

$$\frac{٢٦٥}{١٥٣} < \sqrt{٣} < \frac{١٣٥١}{٧٨٠}$$

ويمكن أن يقال إنها اشتقت من التى تسمى صيغة هيرون :

$$\text{أ} \pm \frac{\text{ب}}{٢\text{أ}} > \sqrt{\text{أ}^{٢} \pm \text{ب}} > \text{أ} \pm \frac{\text{ب}}{٢\text{أ} \pm ١}$$

حيث أ هو أقرب عدد مربع للعدد الذى نريد إيجاد جذره التربيعى وفى هذه الحالة $\sqrt{٣} = \sqrt{(٤ - ١)}$ أى إن أ = ٢ ، ب = ١ .

الستوماخيون (خلية أرشميدس) : وهو جزء آخر صغير من أعمال أرشميدس وهو من نوع الألغاز الهندسية ، يشبه إلى حد ما « اللغز الصينى السباعى » ولكنه أكثر تعقيداً . والمسألة التى يعالجها هى أن يقسم متوازى أضلاع إلى ١٤ جزءاً تبعاً لعلاقات مختلفة بين هذه الأجزاء .

ويقول بابوس [١٥] إن أرشميدس قد وصف ١٣ من كثيرات الوجوه شبه المنتظمة ، أى كثيرات الوجوه التى تتساوى وجوهها فى الأضلاع والزوايا ، ولكنها لا تتشابه ، وقد كان أحدها مثلا عبارة عن ثمانى الوجوه الذى يتكون من أربعة مثلثات وأربعة مسدسات ، أما كثير الوجوه رقم ١٣ فقد كان أكثرها تعقيداً ، وكان يتكون من ٩٢ وجهاً ، منها ٨٠ وجهاً مثلثاً ، ١٢ وجهاً مخمساً . وإنه حقاً « ذو اثنى عشر وجها ممسوخاً » . وتتكون كل زاوية مجسمة منه من ٤ مثلثات محوطة بمخمس .

وقد فقد له كتاب باليونانية عن سباعى الوجوه المنتظم ، وقد ترجمه إلى العربية ثابت بن قرة فى النصف الثانى من القرن التاسع . وقد وجد له كارل شوى مخطوطا عربياً فى القاهرة ونقله إلى الشعوب الغربية فى ترجمة ألمانية سنة ١٩٢٦ [١٦] .

وإن هذا التعداد لأعمال أرشميدس لكاف لإظهار عمق أرشميدس الذى لا يمكن تصديقه بسهولة فى التفكير الهندسى . فهو لم يكتف بأن يسأل أسئلة ذات أصالة وأن يحصل على نتائج لم يفكر فيها أحد فى عصره ، وإنما استخدم طرقاً حاسمة وفريدة.فقد استطاع مثلا إيجاد مساحة الأشكال المحدودة بمنحنيات ، وإيجاد مساحة السطوح المنحنية وأحجامها . كما استطاع أن يستخدم طريقة تكافئ طريقة التكامل[١٧]لإيجاد مساحات القطع المكافئية والحلزونات ،وحجوم الكرات ، والقطع الكروية ، وكذلك مساحات قطع من مجسمات الدرجة الثانية . وهذه لا يمكن شرحها هنا الآن . وأفضل طريقة لتقدير هذه الطرق هى دراسة أعمال أرشميدس : كما جاءت فى طبعة هايبرج أو فى ترجمة هيث . وإنه لمن السخف أن نتحدث عن أرشميدس كسلف لمخترعى الهندسة التحليلية وحساب التكامل ، ولكن مجرد التفكير فى مثل هذا بالنسبة له لذو دلالة كبيرة ، وإذا ما تذكر الإنسان أنه قد كوّن وحلّ عدداً كبيراً من المسائل المعقدة دون أن يملك معدات التحليل التى لدينا الآن ، فإن عبقريته تملؤنا عجباً .

الحساب :

لقد كان عمل أرشميدس فى الحساب والجبر أقل حجماً وأقل أصالة ، فهل كان على علم بطرق البابليين ؟[١٨]لست أدرى ! وربما سمع بها فى أثناء إقامته بالإسكندرية ، ولم يكن من الضرورى أن يسمع بالكثير ، لأن أقل إيحاء كاف لاستثارة عقله . وعلى أى حال فليس من الممكن أن نميز عناصر بابلية فى أعماله .

وقد تأثر أرشميدس بالضعف المتأصل فى النظام العددى اليونانى ، سواء عبر عنه بالرموز أو بالحروف . وهذا الضعف هو أحد متناقضات الحضارة اليونانية ، حيث قنع قادة الرياضيات القدامى بأسوأ نظام عددى يختفى أساسه خلف رموز غير ملائمة[١٩]. وفى هذه الحالة كانت الحاجة ماسة إلى عبقريته ، فبدل أن يخترع نظاماً أفضل (وهو الحل الحقيقى) حاول أن يدافع عن الأرقام

اليونانية بأن يرينا أنها كافية لتمثيل أكبر الأعداد [٢٠] . وليس هناك من شك فى أن أى نظــام عددى يمكن أن يبرر بنفس الطريقة . وقد عبر عن آرائه عرضاً فى كتاب يسمى « القواعد » أو « تسمية الأعــداد » ، وقد أهداه إلى من يسمى زيكسبوس . وقد ضاع هذا الكتاب ، ولكننا عثرنا على غيره وهو « عداد الرمل » [٢١] ، وقد أهداه إلى الملك جيلون ، وفيه قدم لنا أرشميدس عدداً كبيراً جداً بطريقة كان فيها الشيء الكثير من الأصالة . « كم عدد حبات الرمل التى تملأ هذا الكون ؟ » . ومن الواضح أن هذا السؤال مزدوج ؛ إذ لابد أولا من أن يحدد المرء سعة هذا الكون ، ومتى تم له ذلك ، كان من السهل عليه أن يحسب كم عدد حبات الرمل التى يمكن أن تملأ هذا الكون إذا عرف كم حبة رمل تحتويها وحدة حجم معينة . ومعنى ذلك أنه من السهل علينا ذلك إذا كان لدينا أسماء الأعداد اللازمة . فى النظام العشرى لا يمكن أن تقوم لمثل هذه المشكلة قائمة ، وذلك لأنه إذا استطاع المرء أن يفهم معنى $١٠^{صفر}$ ، $١٠^{١}$ ، $١٠^{٢}$ ، فليس هناك صعوبة فى فهم $١٠^{ن}$ بصرف النظر عن مقدار ن ، وقد كان حل أرشميدس أكثر تعقيداً . فقد اعتبر الأعداد من ١ إلى ١٠٠ مليون ($١٠^{٨}$) من الرتبة الأولى ، ومن $١٠^{٨}$ إلى $١٠^{١٦}$ من الرتبة الثانية وهكذا ، كما اعتبر الأعداد من الرتبة المليون تنتهى بالعدد $١٠^{٨×١٠^{٨}}$ ، علماً بأن كل هذه الأعداد هى أعداد الفترة الأولى ، ويمكن تعريف أعداد الفترة الثانية بنفس الطريقة ، وكذلك أعــداد الفترة الثــالثة ، إلخ ، حتى الفترة $١٠^{٨}$ وتنتهى بالعــدد $(١٠^{٨×١٠^{٨}})^{١٠^{٨}}$ ، والتعبير العشرى للعدد الأخير للفترة $١٠^{٨}$ هو واحد صحيح متبوعاً بأصفار عددها ٨٠,٠٠٠ مليون مليون ، ومعنى ذلك أن عدد حبات الرمل التى تملأ الكون أصغر نسبياً من $١٠^{٦٣}$.

وهذا المظهر من مظاهر عبقرية أرشميدس غريب حقاً ، فبدل أن يفكر فى نظام عددى يمكن أن يكون ذا نفع فى الحياة العملية ، انغمس فى فكرة الأعداد الهائلة ، وهى فكرة فلسفية أكثر منها رياضية بحتة . ويذكرنا هذا بعلماء الكون البوذيين الذين عذبوا أنفسهم برؤية مالا نهاية ، والذين عرفوا أعداداً (لم

تصل فى الكبر إلى أعداد أرشميدس) ، وسموا وحدات ذات رتب عشرية متزايدة وصلت إلى ١٠^٥١ ، وكذلك اخترعوا فترة زمنية هائلة ، وهى طويلة تكفى لكى تغطى تلك الدراما الخاصة بالخلق والفناء . وتتولى هذه الفترة الهائلة بحيث تتبع إحداها الأخرى ، بمعنى أنه إذا كان المرء قادراً على إدراك مالا نهاية ، فهو قادر أيضاً على أن يتصور مالا نهاية للما لانهايات ، وهكذا ، ونلاحظ فى هذه المرحلة من مراحل الفكر ، أن هذا النوع من التفكير ليس رياضياً ، وإنما هو تفكير فيما وراء الطبيعة(٢٢).

وهناك كتاب آخر يسمى مسألة الماشية ، وقد أهدى إلى إراتوسثنيز ، وخصص لمسألة فى التحليل غير المعين ، وهى مسألة بالغة التعقيد ، حيث يطلب من المرء أن يجد عدد الثيران والبقر فى كل لون من ألوان أربعة ، ولا تربط هذه المجاهيل الثمانية غير سبع معادلات وشرطين(٢٣).

وقد أدى حل هذه المعادلات السبع إلى ثمانية أعداد ذات سبعة أو ثمانية أرقام ، مضروب كل منها فى نفس المعامل . وقد زاد الشرطان فى المعامل لدرجة كبيرة بحيث أصبحت إحدى الكميات الثمانى غير المعروفة ذات ٢٠٦,٥٠٠ رقم . وهنا أيضاً يبدو غريباً أن نرى أن اهتمام أرشميدس بالتحليل غير المعين يقترن بالاهتمام الهندى بالأعداد الضخمة .

الميكانيكا :

إننا نصادف هنا شيئاً أكثر جذباً للانتباه من بحوث أرشميدس فى الهندسة ، وهى اختراعه لفرعين نظريين من فروع الميكانيكا ، وهما الاستاتيكا والهيدروستاتيكا ، وقد عثرنا على كتابين من كتبه فى الميكانيكا ، وهما : كتاب توازن المستويات وكتاب الأجسام الطافية ، وقد كتب كل منهما على ط يقة إقليدس . وقد قسما إلى كتابين وكانا متساويين فى الطول تقريباً (٥٠ صفحة و ٤٨ صفحة) ، وقد بدئا بتعاريف أو بمسلمات ، وعلى أساسها برهن هندسياً على عدد من النظريات .

أما الكتاب الأول فهو عن توازن المستويات ، ويبدأ هكذا :

أسلم بما يأتى :

١ – الوزنان المتساويان والواقعان على بعدين متساويين ، يكونان متوازنين ، والوزنان المتساويان والواقعان على بعدين غير متساويين لا يكونان متوازنين ، بل يميلان نحو الوزن الذى يقع على مسافة أبعد .

٢ – إذا توازن وزنان على بعدين معينين ، ثم حدث أن أضيف شىء إلى أحدهما ، اختل توازنهما ومالا نحو الوزن الذى حدثت له الإضافة .

وبعد بضع خطوات أخرى ، استطاع أن يبرهن على أن أى مقدارين سواء أمكن عدهما أم لم يمكن يتوازنان على بعدين يتناسبان عكسياً معهما . وهذان البعدان هما بعدا مركزى ثقلهما عن محور الارتكاز . وبناء على ذلك كانت نهاية الكتاب الأول (النظريات من ٩ – ١٥) تشرح كيفية الحصول على مركز ثقل أشكال متعددة ، متوازى الأضلاع والمثلث وشبه المنحرف . أما الكتاب الثانى فقد خصص كله لإيجاد مركز ثقل القطع المكافئية ، وتعين النظرية الأخيرة (١٠ من الكتاب الثانى) مركز ثقل قطعة مكافئية محصورة بين وترين متوازيين . وكل هذه النظريات هى نظريات هندسية طبقت فى أغراض استاتيكية .

وينبنى الكتاب الخاص « بالأجسام الطافية » على مسلمتين ذكرت المسلمة الأولى فى مقدمة الكتاب الأول ، وذكرت المسلمة الثانية بعد النظرية السابعة ، وهما :

المسلمة الأولى : لنفرض أن لدينا مائعا ذا صفات معينة بحيث إذا كانت أجزاؤه متصلة ومتجانسة ، فالجزء الذى يقع عليه أقل دفع يدفع نحو الجزء الذى يقع عليه أكبر دفع ، وكل جزء من هذه الأجزاء يقع تحت دفع المائع الذى يعلوه فى اتجاه عمودى إذا كان المائع فى أى شىء أو انضغط بأى شىء .

المسلمة الثانية : من المسلم به أن الأجسام المدفوعة إلى أعلى فى مائع ما ، تكون مدفوعة إلى أعلى فى اتجاه العمودى (على السطح) الذى يمر بمركز الثقل .

وعلى أساس المسلمة الأولى أثبت (النظرية الثانية) « أن سطح أى مائع

ساكن ما هو إلا كرة مركزها هو نفس مركز الأرض » . ويلاحظ أن النظريات الأساسية فى المجلد الأول وهى النظريات من ٥ — ٧ معادلة لقاعدة أرشميدس المشهورة ، وهى أن الجسم المغمور كليًّا أو جزئيًّا فى مائع ما ، يفقد جزءاً من وزنه يعادل وزن المائع المزاغ ، وكثيراً ما يقال إنه كشف هذا القانون حين شعر بخفة جسمه فى الماء ، فخرج من الماء مسروراً وهو يصيح « لقد وجدتها » . وقد ساعده هذا على تحديد الوزن النوعى للأجسام ، كما ساعده على حل « مسالة التاج » . فقد صُنع تاج ذهبي للملك هيرون وظن أنه عمل من الذهب والفضة معاً . فما مقدار ما به من تزييف ؟ وقد حلت المسألة بوزن التاج فى مقدار من الماء ، ووزن نفس الوزن من كل من الذهب والفضة فى الماء . وبحث أرشميدس فى المجلد الثانى شروط التوازن المستقر لقطعة من مجسم مكافئ دورانى طافية فى مائع . وهنا أيضاً انتصرت الهندسة على الميكانيكا .

ويبدو أن أرشميدس قد كتب على الأقل كتاباً آخر فى الميكانيكا «[٤٢]» ، وبه حل المسألة الآتية : « كيف تحرك ثقلا معيناً بقوة معينة ؟ » ، وكذلك برهن على أن « الدوائر الكبرى تفوق الدوائر الصغرى حينما تدور حول نفس المركز » ويذكرنا هذا بقصة افتخاره للملك هيرون حين قال له : « أعطنى نقطة ارتكاز ، وأنا أحرك العالم » . ولكى يقنع الملك استطاع أن يحرك سفينة كاملة الحمولة بمجهود ضئيل باستعمال بكرة مركبة .

ويعود بنا هذا إلى مخترعات أرشميدس الميكانيكية للحرب والسلم ، والتى أثرت فى خلقه تأثيراً عميقاً لدرجة أنه قد مرّ على إنتاجه النظرى مرّ الكرام ، ومن الممكن أن نقدر بطريقة أخرى عظمة ما قام به من أعمال فى الاستاتيكا والهيدروستاتيكا . ويجدر بنا أن نتذكر أن علم الطبيعة عند أرسطو وستراتون كان يختلف تماماً عن علم الطبيعة كما نفهمه الآن ، وهذا فضلا عن أن العلوم الطبيعية الأولى التى بحثت على أساس رياضى هى بقايا البصريات الهندسية (التى قام بها إقليدس وغيره) ، وفرعا الميكانيكا : الاستاتيكا والهيدروستاتيكا ، وقد بحثا بدرجة أعمق . وقد تمت هذه الدراسة على يد أرشميدس الذى يجب أن

يسمى أول عالم ميكانيكا متعقل ، ولم يوجد أى عالم آخر يمكن أن نقارنه به حتى عصر سيمون ستيفن (١٥٤٨ — ١٦٢٠) وجاليليو (١٥٦٤ — ١٦٤٢) واللذان ولدا بعده بثمانية عشر قرنا !

لقد سبق أن رأينا أن ميكانيكا أرشميدس قد تسمى هندسية ، وهذا ينطبق أيضاً على أى كتاب فى الميكانيكا النظرية ، لأن الميكانيكا ليست إلا تطوراً لمسلمات ميكانيكية معينة (وبنفس الروح تعتبر الهندسة تطوراً رياضيا لمسلمات معينة خاصة بالمكـــان) . ومن الواضح أن عقل أرشميدس لم يفرق كثيراً بين المجالين. ومما يعضد هذا كتاب لأرشميدس ظل مجهولا تماماً حتى سنة ١٩٠٦ حين كشفه العالم الدانمركى اللامع هايبرج فى مخطوط بالقسطنطينية[٢٦] . وهو كتاب « الطريقة » ويعالج المسائل الميكانيكية ، وقد أهدى إلى أراتوسثنيز .

وقليل من علماء الرياضيات من عنى بشرح الطريقة التى توصل بها إلى كشوفه ، ولهذا كانت كتاباتهم محيرة ، ولا يسع المرء أن يسأل : «كيف فكروا فى هذا ؟ » . وقد يكون تحفظهم نوعاً من التعالى ، ولكنه فى معظم الحالات ناتج من أن أفكارهم كانت ثمرة الضرورة . وقد يكون الإلهام الأول غامضاً ، ومن الصعب التعبير عنه علمياً ، وإذا ما تتبعه عالم الا ياضيات ، فقد يتمكن من أن يجد فيه نظرية علمية على أن يكون طريقه إليها صعباً وطويلا . وسنصادف نفس الصعوبة والطول إذا ما حاولنا وصف الكشف بالترتيب التاريخى . وأسهل من ذلك أن نلجأ إلى تفسيره منطقياً ونظرياً بعد أن نستبعد كل ما فيه من تناقض وعدم اتســاق . فالنظرية الجديدة تبدو كالبناء الجديد بعد أن تنزع عنه السقالات والإنشاءات المساعدة ، وهذه هى الأشياء التى لا يمكن بدونها أن يرتفع البناء .

ومن الواضح أن طريقة إقليدس فى العرض ، وهى الطريقة التى اتبعها أرشميدس هى طريقة جدلية أو نظرية ، وأن ترتيب العرض فى كتاباته يختلف بكل تأكيد عن ترتيب الكشف . وبعد أن ناقش الأمر جيداً مع صديقه أراتوسثنيز كتب مؤلفه « الطريقة » . وعلينا أن نشكر العالم هايبرج شكراً جزيلا

إذ به تم كشف أكثر وثائق التاريخ إظهاراً للحقائق ، ليس فقط فيما يتعلق بالعلوم القديمة ، وإنما بالعلوم بصفة عامة فى كل العصور . ولكى أوضح هذا القول الجرىء، أريد أن أقارن « الطريقة » بوثيقة تهم تاريخ علم وظائف الأعضاء الحديث ، أى بمؤلف كلود برنار (باريس سنة ١٨٦٥) « مقدمة فى علم الطب التجريبى » . وقد يبدو من المتناقضات أن أقارن كتاباً فى الرياضيات كتب باللغةاليونانية فىسيراكوز قبل سنة ٢١٢ ق.م.، بكتاب فى علم وظائف الأعضاء كتب بالفرنسية بعد الأول بأكثر من ألفين من السنين !! ومع ذلك ففى كليهما يحاول أستاذ عظيم أن يفسر لنا ليس كشوفه فحسب ، وإنما طريقته فى كشفها، ومثل هذين الكتابين نادر الحدوث فى تاريخ العلم ، ولذلك كانا ثمينين إلى درجة كبيرة .

وحقاً لا يستطيع المرء أن يقرأ تعليقاتأرشميدس المعقدة عن إيجاد المساحات وإيجاد الحجوم ، دون أن يقول لنفسه : « كيف بالله استطاع أن يتخيل هذه الطرق؟ »[٢٦]وأن يصل إلى هذه النتائج ؟ ولا بد أن يكون أراتوسثنيز قد سأل نفس السؤال ليس بالنسبة لنفسه فقط ، ولكن بالنبسة لأرشميدس . ويلاحظ أنهم قد توصلوا إلى هذه النتائج مبدئياً وبطريقة الإلهام قبل أن يبرهنوا على صدقها ، أو قبل أن يكون من الممكن البدء بمثل هذا العرض .

أما وقد اكتسبنا عن الطريقة بعض المعرفة الخاصة بالموضوع ، فإن تقديم البرهان يصبح أسهل مما لو لم يكن لدينا أية معرفة سابقة به . وهذا هو السبب فى أنه فى حالة النظريات التى كان « يودوكسوس » Eudoxos أول من كشف برهانها ، وهى النظريات الخاصة بأن المخروط ثلث الأسطوانة ، وأن الهرم ثلث المنشور ، إذا كانا يشتركان فى القاعدة ويتساويان فى الارتفاع ، يجب علينا ألا نعطى أى فضل لديموكريتوس علماً بأنه كان أول من أكد الشكل السابق ولكنه لم يبرهن عليه[٢٧].

وتثير هذه العبارة اهتمامنا ، ليس لذاتها فقط ، وإنما بالنسبة للإشارة لكل من ديموكريتوس ويودوكسوس . وقد كشف ديموكريتوس (القرن الخامس قبل الميلاد) حجم الأسطوانة والمنشور والهرم . ولكن يودوكسوس (النصف الأول

من القرن الرابع قبل الميلاد) كان أول من برهن على هذه النظريات[٢٨]. وقد أشار أرشميدس إلى أن تفكير ديموكريتوس الملهم قد سهل برهان يودوكسوس ، ولذلك يجب أن نعطى الأول بعض الفضل . ونلاحظ أن أرشميدس نفسه قد أفاد من مثل هذا التفكير الملهم ، وإن كان تفكيره هو الخاص ، وهو تفكير ميكانيكى وصفه لنا (وهو يفكرنا بكافالييرى)[٢٩]. وقد مكنه من إدراك طريقة يمكن اتباعها فى إيجاد مساحات معينة ، ونلاحظ أنه كان يتصور النتيجة قبل أن يستطيع البرهنة عليها ، أو بمعنى أدق قبل أن يحاول ذلك . وللحصول على تفصيلات أكثر ارجع لكتاب « الطريقة » ، ويمكن الحصول عليها ليس فقط باليونانية أو اللاتينية بل بالإنجليزية أيضاً .

وما زلنا نستطيع أن نقول كلمات قليلة أخرى عن أعمال أرشميدس فى ميادين الفلك والبصريات . وقد كتب كتاباً (فقد) عن « عمل الكرة » وصف فيه كيفية إقامة ساعة شمسية لبيان حركة الشمس والقمر والكواكب . وكانت هذه الساعة الشمسية من الدقة بحيث تستطيع التنبؤ بما قد يحدث من كسوف الشمس وخسوف القمر .

وقد وصف فى « عدّاد الرمل » الآلة البسيطة التى استخدمها فى قياس قطر الشمس الظاهرى . وقد وجد أن : ٢٧َ < ق < ٥٦ً ٣٢َ . وقد أشار هيپارخوس لأرشميدس وذكر أنهما قد وقعا فى نفس الخطأ فى تسجيل أرصادهما عن الانقلابين[٣٠]. وقد ذكر ماكروبيس (النصف الأول من القرن الخامس) أن أرشميدس عين أبعاد الكواكب .

وقد ثبت اهتمام أرشميدس بالبصريات من كتاب — فقد أيضاً — وهو « المرايا » ، ومنه اقتبس ثيون السكندرى (النصف الثانى من القرن الرابع) نظرية واحدة وهى : الأشياء المقذوفة فى الماء تبدو أكبر فأكبر كلما ازداد غوصها عمقاً .

وليس بغريب فى ضوء تاريخ علم الفلك والبصريات اليونانى أن ينتبه أرشميدس لمثل هذه الموضوعات ، وقد ناقشها مع تلاميذ إقليدس أريستارخوس

فى إبان إقامته بالإسكندرية ، ومع ذلك فقد كان اهتمامه الرئيسى الخاص رياضيًّا ، وقد وضحه بصورة تدعو إلى الإعجاب فى كتبه التى عثرنا عليها .

التراث الأرشميدى :

إننا نتساءل كيف توصلنا إلى أعمال أرشميدس ؟ وإن تقاليد العلوم القديمة ذات أهمية تعادل تقريباً اختراعها ، إذ بدونها تصبح هذه المخترعات عديمة الأهمية .

والقصة بأكملها على درجة كبيرة من التعقيد بحيث يتعذر علينا أن نقصها هنا ، إذ أن علينا أن نفسر تقاليد اثنتى عشرة مادة وصلتنا بطرق مختلفة ، ولكى أكون مختصراً فى ذكر الخطوط العريضة لهذه البحوث ، أجد من المناسب أن نعدد كتب أرشميدس . وقد سرت على غرار ترتيب هايبرج فى الطبعة اليونانية الثانية ، المجلد الأول الذى يحتوى على المواد الثلاث الأولى ، وقد ظهر سنة ١٩١٠ ، والمجلد الثانى وقد احتوى البنود التسعة الباقية سنة ١٩١٣ .

١ ــ الكرة والأسطوانة .

١ ــ قياس الدائرة .

٣ ــ أشباه المخروط وأشباه الكرات .

٤ ــ الحلزونات .

٥ ــ توازن المستويات .

٦ ــ عدّاد الرمل .

٧ ــ تربيع القطع المكافئ .

٨ ــ الأجسام الطافية .

٩ ــ ستوماخيون (الألغاز الهندسية) .

١٠ ــ الط يقة .

١١ ــ التمهيديات .

١٢ ــ مسألة الماشية .

إن تعاليم أرشميدس القديمة أقل كثيراً من تلك التي تركها إقليدس ، ومن الغريب أن يكون الضوء الوحيد فى الظلام القديم هو ذلك الضوء الذى أعطاه لنا شيشرون (النصف الأول من القرن الأول قبل الميلاد) وإننا نعلم أن بطلميوس (النصف الأول من القرن الثانى) وثيون السكندرى (النصف الثانى من القرن الرابع) قد قرآ له ، ولكنهما لم يذكرا لنا عنه إلا النادر . وهناك مجموعة من الوثائق الإدارية التى عملت حوالى منتصف القرن الخامس للموظفين الرومان ومحفوظة فى Codex Arcerianus ، ومن المحتمل أن تكون قد كتبت فى القرن السادس (وليس أحدث من القرن السابع) ومع أن مستواها العلمى منخفض ، إلا أنها تشمل النظرية الأرشميدية التى تعطينا مجموع الأعداد المربعة الأولى[٣١] .

وإن الأثر البارز من التراث اليونانى هو فى الواقع التعليقات المستفيضة التى كتبها يوتوكيوس (النصف الأول من القرن الخامس) العسقلانى (على الشاطئ الفلسطينى) وهى تعليقات مفصلة حقًّا ، وتغطى المواد ١ ، ٢ ، ٥ ، وهى تملأ المجلد الثالث من النسخة اليونانية لهايبرج سنة ١٩١٥ . وبعد ذلك لم نعد نجد أثرًا للاهتمام إلا فيما يختص بأن مخطوطات أرشميدس قد نقلت فى أثناء النهضة البيزنطية فى القرنين التاسع والعاشر والتى بعثها ليون السالونيكى (النصف الأول من القرن التاسع) ، ومن المحتمل أن تكون أصول المخطوطات القديمة إلى نهاية القرن الخامس عشر وبداية القرن السادس عشر وتشمل المواد القديمة ١ ، ٢ ، ٥ ، مضافاً إليها ٤ ، ٦ ، ٧ .

إن الأصول المبدئية لا يمكن أن تكون أحدث من (النصف الأول من القرن التاسع) ، إذ دخلت نسخة منها « دار الإسلام » ، ولم تلبث أن ترجمها قسطا بن لوقا أو أفراد مدرسته ، ثم عقب عليها بعض علماء العرب من الرياضيين أمثال الماهانى وثابت بن قرة ويوسف الخورى وإسحق بن حنين ، وقد ازدهروا جميعاً فى النصف الثانى من القرن التاسع . وكذلك ترجمت بعض الكتب العربية إلى اللاتينية . فمثلا ترجمت المادة الثانية (قياس الدائرة) مرتين من العربية إلى اللاتينية فى القرن الثانى عشر . وكانت المرة الأولى بواسطة أفلاطون

التيفولى أو غيره (النصف الأول من القرن الثانى عشر) ، وكانت المرة الثانية بواسطة جيرارد الكريمونى (النصف الثانى من القرن الثانى عشر) ، وقد كونت الطبعة الثانية نصوص العالم اللاتينى [٣٢] .

وبعد قرن آخر استطاع قس فلمنكى هو ويليم الموير بيكى (النصف الثانى من القرن الثالث عشر) أن يترجم من اليونانية مباشرة كل كتب أرشميدس تقريباً ، وكان أهم هذه التراجم تلك الترجمة الخاصة بالمادة الثامنة (الأجسام الطافية) ، وذلك لأن هذه المادة قد أهملت فى التقليد اليونانى القديم . وقد أتم هذه الترجمة القس وليام فى البلاط البابوى فى فيتربو Viterbo سنة ١٢٦٩ [٣٣] . وقد فقد النص اليونانى للمادة الثامنة . ولم يظهر حتى سنة ١٩٠٦ حيث عثر عليه هايبرج فى وثيقة القسطنطينية [٣٤] ، وكانت تحتوى على نصوص أخرى لأرشميدس كان أثمنها كتاب « الطريقة » .

ومن الجائز أن يكون ماكسيموس بلانوديس (النصف الثانى من القرن الثالث عشر) قد استخدم النص اليونانى فى بحوثه الخاصة ، فى الوقت الذى كان فيه ويليم الموير بيكى يترجم أرشميدس إلى اللاتينية عن اليونانية مباشرة ، وكان نصير الدين الطوسى الفارسى (النصف الثانى من القرن الثالث عشر) يراجع الكتب العربية . وفى القرن الرابع عشر استطاع عدد قليل من علماء الرياضيات الحصول على مخطوطات أرشميدس ، ونضرب مثلا لذلك العالم المسلم العراقى ، ابن الأكفانى (النصف الأول من القرن الرابع عشر) وكذلك اليهود أمثال قالونيموس بن قالونيموس (النصف الأول من القرن الرابع عشر) الذى ترجم هذه المخطوطات من العربية إلى العبرية ، وربما أيضاً عمانويل بونفيل (النصف الثانى من القرن الرابع عشر) ، ونضيف إلى ما سبق العلماء المسيحيين ، وكان أهمهم يعقوب الكريمونى ، وريجيومنتانوس . وكان ليوناردو دافينشى يعرفه .

وقد ظل كتاب « الطريقة » (المادة العاشرة) غير معروف حتى سنة ١٩٠٦ — ١٩٠٧ ، ثم ظهر ثانية باللغة اليونانية ، وسرعان ما ترجم إلى لغات متعددة . وكذلك كشف كارل شوى فى مخطوط عربى مادة أخرى لم تذكر فى القائمة

السابقة وهو كتاب « المسبع المنتظم » وترجمه إلى الألمانية . وقد ظل مجهولا حتى سنة ١٩٢٦ . وعلى الرغم من أن احتمال العثور على نصوص مجهولة فى مخطوطات يونانية ، احتمال ضئيل ، إلا أنه قد تكشف نصوص أخرى فى المخطوطات العربية حيث ما زال الكثير منها غير مرصود[٣٥] .

وقد تغيرت ظروف هذه النصوص اليونانية لدرجة أن المرء ليعجب كيف حدث أن وصلت إلينا بالفعل معظم هذه النصوص . وقد ضاع كثير من النصوص اليونانية ، كما أن كشف بعضها كان مجرد ضربة حظ سعيدة كما هى الحال فى كتاب « الطريقة » . تصور أن كتاب « الط يقة » حفظ لأن بعض الرهبان مسحوه ، وربما تعرض للضياع إذا لم يكن هؤلاء الرهبان قد حاولوا إتلافه ! وهناك حالة أخرى تحضرنى ، وأنا أكتب هذه السطور وهى حالة الكمان السرديسى ، وهو شاعر عاش فى إسبرطة فى النصف الثانى من القرن السابع ، وقد كشفت إحدى قصائده الشعرية سنة ١٨٥٥ فى أغلفة إحدى الموميات المصرية[٣٦] ! ومع ذلك فإنه من الممكن أن ينتقل الشعر بالتقليد الشفهى ، وكان هذا مستحيلا فى حالة الرياضيات . فقد تحفظ مادة كشوف علماء الرياضيات بواسطة المعلمين المتعاقبين ، على أن نصوص أعمالهم لا يمكن تذكرها لغوياً ، كما لا يمكن قراءتها علانية .

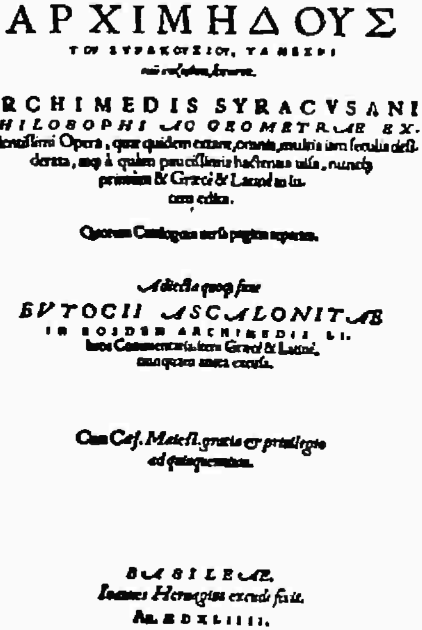
وتبقى التعاليم فى خطر كبير حتى يطبع النص ، ورغم ما قد يكون من اهتمام قلة من العلماء فى القرون الوسطى بأعمال أرشميدس ، فإن هذه الأعمال لم تجد إقبالا كبيراً ، ومما يدل على ذلك اختفاء المؤلفات القديمة المتعلقة بهذه الأعمال . وكان أول ملخص مطبوع عن أرشميدس ضمن مجموعة تسمى Tetragonismus id est circuli quadratura (البندقية سنة ١٥٠٣) وحررها لوقا جاوريكوا (شكل ٢٣) وكانت الطبعة المهمة الأولى من أعماله هى الترجمة اللاتينية التى قام بها نيقولا تارتاجليا (البندقية سنة ١٥٤٣) والتى ظهرت بعد الأولى بأربعين عاماً . وقد اقتصرت هذه الترجمة على المواد ٥ ، ٧ ، ٢ ، ٨ (المجلد الأول فقط) ، ومن ثم كانت مستمدة من تقليد يختلف عن التقليد البيزنطى (١ ، ٢ ، ٥

شكل ٢٣ –

Tetragonismus, id est circuli quadratura per Companum Archimedem Syracusanum atque Boetium methematicae per spicacissimos adinventa

(٣٢ ورقة ، ٢٠ سم ، البندقية ، سيسا ١٥٠٣) هذا أول ماظهر من نصوص أرشميدس فى صورة مطبوعة . ويختص بتربيع القطع المكافىء والدائرة (ورق ١٥ر ، ٣١ر) ، وقد قدم له لوقا جريكو (١٤٧٥–١٥٥٨) الجيفونى (نابلى) ويحتوى الكتاب أيضاً على « تربيعات » إقليدس و بوئيوس (النصف الأول من القرن السادس) .

(محفوظات مكتبة كلية هارفارد)



شكل ٢٤ – قواعد أرشميدس . الطبعة الأولى من النصوص اليونانية لأعمال أرشميدس ، وتحتوى كذلك على ترجمة لاتينية وتعليقات يوتوكيوس (النصف الأول من القرن السادس) باليونانية واللاتينية وقد حررها توماس جيشوف جميعا باسم فيناتوريوس (الورقة ٣١ سم ، بازل ، يؤنس هارفاجيوس (يوحنا هرفاجن ، ١٥٤٤) وهى مقسمة إلى أربعة أقسام ، وكانت تحزم عادة (وليس دائماً) مع بعضها. وقدأهدى الجزءين الأول والثانى إلى سناتور نورنبرج. ويحتوى الجزء الأول (١٤٨ ص) على النص اليونانى لأرشميدس ، بينما يحتوى الجزء الثانى (١٦٩ ص) على الترجمة اللاتينية والجزء الثالث (٦٧ صفحة) يحتوى تعليقات يوتوكيوس باليونانية ، والجزء الرابع (٧٠ ص) على ترجمتها إلى اللاتينية .

(محفوظات مكتبة كلية هارفارد)

مضافاً إليها ٤ و٦ و٧) كما استمدت من التراث الموير بيكى ، ويلاحظ أن طبعة تارتاجليا كانت بعيدة عن الكمال بدرجة كبيرة ، على أنه حدث بعد ذلك أن درس عالم لغوى آخر هو فيناتوريوس مخطوط ملك البابا نيقولا الخامس (١٤٤٧ — ١٤٥٥) . وقد ترجم هذا المخطوط جيمس الكريمونى . كما قام بتصحيحه ريجيو منتانوس . ولكى يستفاد من هذه المخطوطات أصدر فينا توريوس كتاب « القواعد » (بازل سنة ١٥٤٤) الذى يحتوى على الترجمات اللاتينية ، كما يحتوى على تعليقات يوتوكيوس باللغتين اليونانية واللاتينية (شكل ٢٤) . ونلاحظ أن تارتاجليا ومن يفضله فيناتوريوس قد أظهرا هندسة أرشميدس لعلماء الرياضيات فى عصر النهضة ، حتى إنه فى نهاية القرن السادس عشر كان لدينا عدد كاف من هذه ، ليس فقط لتقدير أرشميدس ، بل أيضاً لمناقشة ما صادفه من صعوبات أساسية .

وقد ترجم فدريكو كومنديرنو الأوربينى النص اليونانى سنة ١٥٤٤ إلى اللغة اللاتينية (البندقية سنة ١٥٥٨) (شكل ٢٥) ، وقد ترجم نفس الشخص الهيدروستاتيكا فيما بعد إلى اللغة اللاتينية (بولونيا سنة ١٥٦٥) . وقد نشر جيدو أو بالدو دل مونت الكتابين المتعلقين بالاستاتيكا باللاتينية (بيزارو سنة ١٥٨٨) .

ومن الغريب أن ينشر كتاب الاستاتيكا بالفرنسية قبل اللاتينية ، وأن يقوم بنشره بيير فوركاديل البزييرى (مجلدان . باريس سنة ١٥٦٥) (شكل ٢٦). وقد قرأ ستيفن هذه المؤلفات ، وكانت له بحوث فى الاستاتيكا ظهرت سنة ١٥٨٦ قبل نشر الطبعات اللاتينية لأرشميدس .

وقبل نهاية القرن كانت كل أعمال أرشميدس قد عرفت فى أوربا (فيما عدا الكتابين اللذين لم يكتشفا إلا فى عصرنا هذا) وقد ساعدت على خلق أو على الأقل إلهام التجديدات الرياضية فى القرن السابع عشر .

الطبعات الحديثة :

وقد حرر ج. ل. هايبرج النص اليونانى سنة ١٨٨٠ — ٨١ وراجعه (٣

ARCHIMEDIS
OPERA NON NVLLA
A FEDERICO COMMANDINO
VRBINATE
NVPER IN LATINVM CONVERSA,
ET COMMENTARIIS
ILLVSTRATA.
Quorum nomina in sequenti pagina leguntur.

CVM PRIVILEGIO IN ANNOS X.
VENETIIS,
apud Paulum Manutium, Aldi F.
M D LVIII.

شكل ٢٥ – ترجمة لاتينية لأرشميدس (ستة كتب) قام بها فدريكو كومنديتو الأوربيني (١٥٠٩ – ١٥٧٥) (ورقة ٢٧٫٥ سم البندقية : باولوس مانوتيوس سنة ١٥٥٨) . وهي تنقسم إلى قسمين يحتوى الجزء الأول منها على النص الأرشميدى ، ويحتوى الجزء الثانى على تعليقاته وتعليقات يوتوكيوس . وقد أهدى الجزء الأول إلى الكاردينال رانوكسيو فارنيزى ، والجزء الثانى لفارنيزى آخر . ويلاحظ أن ترجمة كومنديتو هامة إذ كان لها تأثير ملحوظ فى إحياء أعمال أرشميدس

(محفوظات مكتبة كلية هارفارد)

LE
LIVRE D'ARCHIME-
DE DES POIS, QVI AVSSI EST
DICT DES CHOSES TOMBANTES EN L'HV-
MIDE, TRADVICT ET COMMEN-
té par Pierre Forcadel de Beziers
lecteur ordinaire du Roy es
Mathematiques en l'V-
niuersité de
Paris.

Ensemble ce qui se trouue du Liure d'Euclide intitu-
lé du leger & du pesant traduict & com-
menté par le mesme Forcadel.

A PARIS.
Chez Charles Perier, demourant en la rue
S. Iean de Beauuais, au Bellerophon.
1565.
AVEC PRIVILEGE DV ROY.

شكل ٢٦ – الترجمة الفرنسية لكتاب أرشميدس عن الهيدروستاتيكا ، لبيير فوركاديل (١٩٫٥ سم ، ٣٥ صفحة . باريز . تشارلز بريير سنة ١٥٦٥) . والنسخة الصغيرة التى استخدمتها لهذا الكتاب هى نسخة بيبردوهيم . كذلك نشر فوركاديل ترجمة فرنسية للاستاتيكا (نفس الطابع ونفس السنة) ولكنى لم أرها . وكانت هذه هى الترجمة الأولى لاستاتيكا أرشميدس بأية لغة . ولم تظهر الترجمة اللاتينية لهذا الكتاب إلا بعد ذلك بثلاثة وعشرين عاما (بزارو سنة ١٥٨٨) . وقد قام بالترجمة جيدو أوبالدو دل مونت .

(محفوظات مكتبة كلية هارفارد)

مجلدات ، ليبزج ١٩١٠ ، ١٩١٣ ، ١٩١٥) ويحتوى المجلد الثالث على تعليقات وجداول يوتوكيوس . والطبعة الحديثة (٣ مجلدات سنة ١٩٣٠) . وقد ترجمهات. ل. هيث إلى الإنجليزية (٥١٢ ص كامبردج سنة ١٨٩٧) يضاف إليها ملحق يحتوى على كتاب « الطريقة » (٥١ ص سنة ١٩١٢) وظهرت كذلك ترجمة فرنسية لبول فير ايك (بروكسل سنة ١٩١٢) .

وقد طبع ماكسيمليان كورتز كتاباً قصيراً يعزى إلى أرشميدس هو : Liber Archimedis de insidentibus aquae فى المكتبة الرياضية (١٨٩٦) ص ٤٣ — ٤٩ (المقدمة — المجلد ٣ ص ٧٣٥) وهى مستمدة من أرشميدس ، ولكنها ترجع إلى القرون الوسطى (حوالى النصف الأول من القرن الرابع عشر). وقد ظهرت كذلك طبعة جديدة لأرنست أ . مودى، ومارشال كلاجيت، « علم الأوزان فى القرون الوسطى » (ماديسون — مطبعة جامعة وسكنسن سنة ١٩٥٢) ص ٣٥ — ٤٠ (إيزيس ٤٦ ، ٢٩٧ — ٣٠٠ (١٩٥٥) .

كونون الساموسى :

لقد كان كونون (النصف الثانى من القرن الثالث قبل الميلاد) عالما رياضيا وفلكيا ، عاش فى نفس الوقت الذى عاش فيه أرشميدس ومات شابا . ولقد كتب أرشميدس فى مقدمة كتابه عن « الحلزون » مخاطبا دوسيثيوس ما يأتى :

« إن براهين معظم النظريات التى أرسلتها إلى كونون ، والتى سألتنى أن أرسلها لك بين وقت وآخر ، موجودة أمامك فى الكتب التى أحضرها لك هيراكليديس[٣٧] . وكذلك يوجد بعضها الآخر فى الكتب التى أرسلها لك الآن . ولا تدهش من الوقت الطويل الذى أستغرقه قبل نشر هذه البراهين ، فإن هذا يرجع إلى رغبتى فى إرسالها أولا إلى الأشخاص الذين يعملون فى الدراسات الرياضية ويرغبون فى بحثها . والحق كم من النظريات الهندسية قد بدت فى أول الأمر غير عملية ، ولكنها استخدمت بنجاح فى الوقت المناسب . وقد مات كونون قبل أن يكون لديه الوقت الكافى لبحث النظريات السابقة ، وإلا كان قد كشف كل هذه الأشياء

وأنجزها ، ولكان قد أضاف إلى الهندسة كشوفاً أخرى كثيرة . وذلك لأننى أعلم جيداً أنه كان يمتلك قدرة رياضية غير عادية ، كما كان مجداً للدرجة خارقة للعادة. وعلى الرغم من مرور سنوات عديدة منذ موت كونون إلا أننى لا أرى شخصا واحداً قد أثار أية مشكلة من تلك المشكلات »[٣٨] .

لا بد أن كونون كان رياضياً موهوباً ، وإلا لما استحق كل هذا المديح ، ولذلك نحب أن نعرف عنه أكثر من هذا . وقد درس كونون تقاطع القطوع المخروطية . وقد كان الكتاب الرابع من « القطوع المخروطية أبوللونيوس» مؤسسا جزئيا على أعماله . وقد أشار بابوس (النصف الثانى من القرن الثالث) إليه فى هذا الصدد .

وقد ألف سبعة كتب فى علم الفلك ، وكانت مستمدة جزئيا من الأرصاد الكلدانية (أو المصرية) ، ومن الجائز أن يكون هو الرجل الذى نقلها إلى هيبارخوس .

وكذلك جمع تقويما جديدا أو جدولا فلكيا يبين شروق النجوم وغروبها والتنبؤات الجوية . ولقد بنى هذا الجدول على الأرصاد التى عملت فى صقلية وجنوب إيطاليا . ويوحى لنا هذا بأنه من الجائز أن يكون قد اجتمع بأرشميدس فى سيراكوز كما اجتمع به فى الإسكندرية .

وعلى كل حال فلا بد أن يكون قد ازدهر فى الإسكندرية ، إذ أنه قد سمى مجموعة نجمية كومى برينيكا (بلوكاموس) تيمنا باسم برينيكا ملكة بطلميوس الثالث يوئرجيتيس[٣٩] . ويقول الشعراء إنها وهبت شعرها للآلهة لضمان سلامة عودة زوجها الذى كان يحارب فى سوريا . ويالها من قصة جميلة ! !

ويكفى أى رياضى شهرة أن يمتدحه أرشميدس فى مقدمة كتابه «الحلزونات» ويمتدحه كذلك أبوللونيوس فى مقدمة المجلد الرابع « من القطوع المخروطية» ، فضلا عن كثرة الإشارة إليه فى المجسطى ، ومع ذلك فقليل من الناس من يعلم أن شهرة كونون قد أسست على قصائد الشاعر اليونانى كليماخوس (أحد معاصريه) والشاعر اللاتينى كاتولوس (حوالى سنة ٨٤ — ٥٤ ق. م.) [٤٠] . .

أبوللونيوس البرجى :

هناك عالم يونانى واحد من علماء الهندسة يمكن أن نقارنه بأرشميدس ، وهو أبوللونيوس (النصف الثانى من القرن الثالث قبل الميلاد) ، وقد يقول بعض المؤرخين إن أبوللونيوس فى المرتبة الثانية بالنسبة لأرشميدس . ولكن هذا النوع من الترتيب غير مستحب ، فقد كانا عملاقين معا ، ليس فقط بالنسبة للعلماء القدامى، وإنما بالنسبة لرجال كل العصور . فالقول بأن أحدهما أعظم من الآخر لايعنى شيئا ، إذ أننا نعلم أن العبقرية لاتقاس .

وقد كان أبوللونيوس أصغر من أرشميدس بنحو ٢٥ سنة ، ويمكننا أن نفترض أنه كان على علم بكل أعماله رغم أنه لم يكن تلميذاً له ، ومع ذلك فقد اتجهت عبقريته فى اتجاه آخر . فقد كان أرشميدس مهتما بالقياس مثل عمليات التربيع ، واستطاع أن يحقق بمهارة تكاملا فى المستويات أو السطوح ذات الأبعاد الثلاثة المحوطة بمنحنيات ، بالإضافة إلى المجسمات ، ويمكننا أن نسميه مع الحذر اللازم ، أحد أسلاف حساب التفاضل ، أما ميدان أبوللونيوس المؤكد فهو نظرية القطوع المخروطية التى لم يقسها ، بل حاول أن يفهم أشكالها ومواضعها ، فضلا عن إدراك مابينها من علاقات يمكن أن تميزكل نوع منها بعضها عن بعضها الآخر .

كما درس ماقد يحدث إذا ماتقاطع اثنان من هذه القطوع سواءأكانامن نوع واحدأم مختلفان، وبالاختصار يمكننا أن نقول إن هندسة أرشميدس هندسة القياس وهندسة أبوللونيوس هندسة الأشكال والأوضاع . ويجب أن نتذكر دائما أن هذين النوعين من الهندسة ليسا متباعدين ولكنهما متداخلان ، والحق أنه اختلاف فى مواضع التوكيد فقط ، القياس عند أرشميدس والأشكال عند أبوللونيوس .

ومن المحتمل أن يكون أبوللونيوس قد ولد فى پرجه فى پامفليليا[٤١] حوالى سنة ٢٦٢ ، ولانعرف اسم والديه ، ولكن كان له ولد يحمل اسمه (أبوللونيوس

الصغير) . ولما كان شديد الذكاء فقد أرسل فى وقت مبكر للدراسة فى الإسكندرية فترعرع فى هذه المدينة فى أثناء حكم بطلميوس الثالث يوئرجيتيس سنة ٢٤٧ — ٢٢٢ وبطلميوس الرابع فيلوباتر (٢٢٢ — ٢٠٥) . وزار برجامة فى أثناء حكم أتاللوس الأول سوتر (٢٤١ — ١٩٧) . وفى أثناء حكم بطلميوس الرابع تدهورت قوة اليونان فى مصر ، فى حين كانت برجامة فى صعود[٤٢] فى أثناء حكم أتاللوس الأول . . ولايعرف تاريخ موت أبولونيوس ولا مكانه ، كما أننا لا نعلم كيف قضى آخر أيام حياته ، وهو فى هذا أقل حظا من أرشميدس الذى كان موته سنة ٢١٢ قمة بطولة معروفة .

وبالرغم من أن أبولونيوس قد ألف كتباً كثيرة مثل أرشميدس ، إلا أنه كان يشبه إقليدس فى أن أحد كتبه كان أهم من الكتب الأخرى لدرجة يمكن معها التغاضى عنها (وهذا ما حدث بصفة عامة) . وكما أن إقليدس أولا وقبل كل شئ مؤلف « الأصول » كذلك كان أبولونيوس معروفاً كمؤلف القطوع المخروطية .

وكما أن « الأصول » كان كتاباً دراسياً عن الهندسة المستوية والفراغية ، كانت « القطوع المخروطية » أيضاً كتاباً دراسياً . ولكنه كان يعالج القطوع المخروطية وحدها ، وقد كان نصفه عبارة عن مسح وإعادة منظمة للنتائج التى توصل إليها من سبقوه من علماء الرياضيات . على أن جزءاً أكبر من أعماله كان إما جديداً تماماً وإما متكوناً من نظريات معروفة . ولكنها فسرت بطريقة جديدة زادت من خصوبتها . وقد كان أسلاف أبولونيوس كثيرين نذكر منهم منيايخموس (النصف الثانى من القرن الرابع قبل الميلاد) وأريستايوس (النصف الثانى من القرن الرابع قبل الميلاد) وإقليدس وأرشميدس[٤٣] .

ومن المعروف أنه بالرغم من أن أبولونيوس قد أمضى معظم حياته بالإسكندرية إلا أنه أهدى أعظم أعماله إلى البرجاميين . وهذا يذكرنا بالحقيقة المؤسفة وهى أن حياته قد انتهت بغموض . ترى هل حدث بينه وبين معهد العلوم سوء تفاهم ، أو من المحتمل بينه وبين الإباحى المجرم بطلميوس الرابع فيلوباتر ؟ وقد أهدى من

مؤلفه القطوع المخروطية الأجزاء الأول والثانى والثالث إلى يوديموس البرجى[٤٤]، كما أهدى الباقى إلى أتاللوس الأول ملك برجامة من ٢٤١ – ١٩٧ ، وكذلك كتب أبوللونيوس مقدمة خاصة لكل من المجلدات ٤، ٥، ٦، ٧، (٨ ؟) ، وكانت كلمات الإهداء أقصرما يكون مثل: « من أبوللونيوس إلى أتاللوس مع التحية » . ويذكرنا هذا بإهداء أرشميدس لكتابه « عداد الرمل » لملك سيراكوز الذى كاد يكون الإهداء عرضياً : « هناك أيها الملك جيلون من يظن أن عدد الرمل لانهائى فى مقداره . . . إلخ » . وقد كان جيلوس وأتاللوس من الملوك الجبابرة وفى يدهم أن يهبوا الحياة أو يحكموا بالموت، وكانوا يستخدمون هذا الحق بالفعل . ولكن الحرية الفكرية ، وبخاصة روح اليونان الديموقراطية (حتى فى العصر الهيللينى) كانت من الأصالة بحيث يبدو من البساطة التامة مخاطبة الملك كأى رجل آخر[٤٥] . ونحن إذ نقارن هذه الإهداءات بتلك الإهداءات الممقوتة المبالغ فيها التى كان يوجهها علماء القرون الوسطى لصغار الدوقات واللوردات ، فإننا نقدر القدماء تقديراً عظيما .

وقد قسم كتاب القطوع المخروطية إلى ثمانية مجلدات فقد آخرها . وقد فسر أبوللونيوس أهدافها تفسيراً جيداً فى مقدمة النسخة المصححة لكتابه الأول . ومن الأفضل أن نعيدها هنا لأنها ستعطى القارئ فكرة عن طريقة أبوللونيوس فى الكتابة وهى طريقة ممتازة وخالية من أى نوع من التصنع .

« تحية من أبوللونيوس إلى يوديموس .

إذا كنت فى صحة جيدة ، وكانت الأمور على مايرام ، وكان ذلك خيرا . وفيما يتعلق بى فالأمر على مايرام إلى حدما . وفى أثناء إقامتى معك فى برجامة لاحظت تلهفك على معرفة عملى الخاص بالقطوع المخروطية ، ولهذا فإنى أبعث إليك بالكتاب الأول بعد تصحيحه ، وسأبعث إليك بالكتب الباقية بعد أن أنتهى منها بما يرضينى .

وأظن أنك لم تنس أننى قلت لك إننى قمت ببحث هذا الموضوع برجاء من نوقراطيس عالم الهندسة[٤٦] ، فى الوقت الذى كان فيه معى بالإسكندرية ، وكنت قد انتهيت من كتابة الموضوع فى ثمانية كتب أعطيتها له على عجل ، لأنه كان على أهبة الإبحار ، ولذلك لم أتمكن من مراجعتها ،

وقد وضعت كل شيء كما بدا لى ، وكنت قد أجلت المراجعة حتى أنتهى منها ، وعلى ذلك فإننى أنشر كلما سنحت الظروف أجزاء من هذا العمل بعد تصحيحها . وفى الوقت الحالى حدث أن اخذ بعض الأشخاص ممن قابلتهم ، الكتابين الأول والثانى قبل تصحيحهما ، ولذلك لاتندهش إذا صادفت هذين الكتابين فى صورة أخرى .

وإن الكتب الأربعة الأولى من المجلدات الثمانية ماهى إلا مقدمة مبدئية ، ففى الكتاب الأول توجد طرق تكوين القطوع الثلاثة والفروع الأخرى من القطع الزائد ، فضلا عن الخواص الأساسية الموجودة بها ، وقد درست هذه الموضوعات على صورة أكمل مما هى عليه فى كتابات الآخرين . ويحتوى الكتاب الثانى على خواص أقطار القطوع ومحاورها فضلا عن الخطوط التقريبية وغيرها من الأشياء المستخدمة بالضرورة لتعيين حدود الإمكانيات (٤٧) . وستعرف من هذا الكتاب ما أعنيه بالأقطار والمحاور على الترتيب . أما الكتاب الثالث فيحتوى على نظريات ملحوظة يستفاد بها فى ربط المحلات الهندسية المجسمة وفى حدود الإمكانيات . وأغلب هذه النظريات وأجملها حديث ، وقد جعلنى كشفها أدرك أن إقليدس لم يتوصل إلى المحل الهندسى بالطريقة التركيبية فيما يتعلق بثلاثة خطوط أو أربعة . وكل ماقام به بنجاح محدود هو أجزاء منها اختيرت بمحض المصادفة . وذلك لأنه لم يكن من الممكن أن تتم الطريقة التركيبية دون إضافة النظريات التى كشفتها . ويبين الكتاب الرابع بطرق متعددة كيف تتقاطع القطوع المخروطية مع بعضها ومع محيط الدائرة ، وكذلك يحتوى على أشياء أخرى لم يناقش الكتاب السابقون أيا منها . وفذكر بصفة خاصة المسألة المتعلقة بكم عدد النقط التى فيها يتقاطع فرعا كل من قطعين زائدين .

وبقية الكتب الأخرى هى تزيد إلى حد ما . ويعالج أحدها بتفصيل النهايات الصغرى والعظمى ، ويعالج آخر القطوع المخروطية المتساوية والمتشابهة ، ويعالج ثالث النظريات الخاصة بتعيين النهايات ، ويعالج الأخير مسائل معينة متعلقة بالقطوع المخروطية . على أنه بطبيعة الحال إذا نشرت جميعها ، فإذ ذاك تصبح مكشوفة لكل من قرأها ، ومن ثم يمكنه أن يحكم عليها حكمه الخاص كما يحلو له . وإلى اللقاء .

دعنا نقتطف أيضاً مقدمة الكتاب الرابع الموجه إلى أتوللوس

« تحية من أبوللونيوس إلى أتاللوس

منذ وقت مضى فسرت وأرسلت إلى يوديموس البرجى الكتب الثلاثة الأولى من «قطوعى المخروطية » ، وقد جمعتها فى ثمانية مجلدات ، ولكن لما كان يوديموس قد توفاه الله ، فقد صممت أن أهدى لك الكتب الباقية لعلمى برغبتك الشديدة فى امتلاك عملى ، ولذلك فإننى أبعث لك بالكتاب الرابع ، ويشمل مناقشة المسألة المتعلقة بأكبر عدد ممكن من النقط يمكن فيها أن تتقاطع القطوع المخروطية مع محيط دائرة ، أو التى تتقاطع فيها بعضها مع البعض على فرض أنها لاتنطبق على بعضها . وكذلك يتناول الكتاب أقصى عدد من النقط يقطع فيها قطع مخروطى ، أو محيط دائرة ، القطع الزائد ذا

الفرعين (أو أن يتقاطع فرعا قطعين زائدين) ، ويحتوى الكتاب كذلك على مسائل أخرى من نوع مشابه ، هذا علما بأن كونون قد فسّر المسألة الأولى لثراسيدايوس دون أن يظهر قوة البرهان كما يجب ، ولهذا سخر منه نيكوتليس البرقاوى (٤٨) وهو محق فى هذا. أما المسألة الثانية فقد ذكرها نيكوتليس فى سياق خلافه مع كونون وقال إنها مسألة يمكن البرهان عليها ، ولكنى لم أعثر لها على برهان سواء بواسطة نيكوتليس أو غيره . والمسألة الثالثة وغيرها من المسائل المشابهة لم أجد من التفت إليها . وكل ما أشرت إليه من مسائل ، والتى لم أجد لها مثيلا فى مكان آخر ، تحتاج فى حلها إلى كثير من النظريات المتعددة الجديدة ، وقد سبق لى أن ذكرت معظمها فى الكتب الثلاثة الأولى ، أما الباقى فهو موجود فى الكتاب الحالى ، وهذه النظريات ذات فوائد جمة لتركيب المسائل من جهة ولتعيين شروط الإمكانيات من جهة أخرى. ونيكوتليس بسبب ما بينه وبين كونون من خلاف لن يقبل أن يفيد من كشوف هذا الأخير فيما يتعلق بتعيين شروط الإمكانيات ، ومع ذلك فهو على خطأ فى فكرته هذه ، وذلك لأنه لو كان من الممكن بدونها الوصول إلى نتائج خاصة بشروط الإمكانيات فإنها تمدنا بوسائل أطوع للملاحظة الأشياء . فمثلا إن مجرد معرفتنا بأن هناك كثيراً من الحلول يمكن استخدامها أو أنه لاتوجد لدينا حلول ممكنة ، فإن هذه المعرفة السابقة لا شك بداية مرضية للبحث ، أما النظريات موضوع الدراسة فهى مفيدة فى تحليل شروط الإمكانيات ، وبصرف النظر عن فائدتها ، فإنها تستحق أن نقبلها من أجل البراهين نفسها ، كما نقبل أشياء أخرى كثيرة غير الرياضيات لهذا الغرض دون غيره (٤٩) .

ولا توجد مقدمة للكتاب الثالث ، أما مقدمات الكتاب الثانى ليوديموس والكتب ٥، ٦، ٧، إلى أتاللوس ، فقد كانت قصيرة جداً .

ويمكن تلخيص محتوى « القطوع المخروطية » فيما يلى :

١ — توليد القطوع المخروطية الثلاثة .

٢ — الخطوط التقريبية ، المحاور ، الأقطار .

٣ — تساوى الأشكال أو تناسبها ، المعينة بأجزاء القواطع ، الأوتار ، الخطوط التقريبية ، المماسات ، بؤرتا القطع الناقص والقطع الزائد .

٤ — القسمة التوافقية للخطوط المستقيمة ، المواضع النسبية لقطعين مخروطيين ، تقاطعهما ، لايمكن أن يقطع أحدهما الآخر فى أكثر من أربع نقط .

وكما ذكر ذلك أبوللونيوس فى مقدمة كتابه الأول ، فإن الكتب من الأول إلى الرابع ما هى إلا مقدمة مبدئية ، بينما ما تليها تحتوى على نظريات أخرى لطلاب البحث المتقدمين .

٥ — النهايات الصغرى والعظمى (يعتبر هذا أحسن ما أنتج) ، كيف نجد أقصر وأطول الخطوط التى يمكن أن ترسم من نقطة ما إلى قطع مخروطى . المنشآت ، مراكز التلاثم .

٦ — تشابه القطوع .

٧ — ٨ الأقطار المترافقة .

وقد ولّد مينايخوموس Menaichmos وأريستايوس القطوع المخروطية بقطع مستو لمخروط دائرى قائم ، بحيث يكون المستوى عمودياً على أحد رواسم المخروط ، ويكون القطع ناقصاً أو مكافئاً أو زائداً على حسب كون زاوية رأس المخروط حادة أو قائمة أو منفرجة ، وقد أرانا أبوللونيوس أنه يمكن الحصول على الأنواع الثلاثة للقطوع المخروطية من نفس المخروط : ويكون بذلك قد مهد السبيل لفهم أفضل لوحدة هذه القطوع [٥٠] . وتتبع كل القطوع أسرة واحدة مقسمة إلى مجموعات . وأصبحت تسمية مينايخوموس لكل مجموعة : (قطع المخروط الحاد الزاوية ، والقائم الزاوية ، والمنفرج الزاوية) غير مستخدمة للقطوع المولدة بالطريقة الجديدة . أما الأسماء المألوفة لنا الآن ، فقد قدمها أبوللونيوس : الأقل مساحة (القطع الناقص) ، المساوى للمساحة كلها (القطع المكافئ) ، الأزيد مساحة (القطع الزائد) ، (إذا كانت أ هى بارامتر فإن $ص^2 < أ س$. $ص^2 = أ س$ ، $ص^2 > أ س$ هى الحالات الثلاث على الترتيب). ويلاحظ أن تمييزه لفرعى القطع الزائد لمنحن واحد مكنه من أن يرينا تشابه كل القطوع المخروطية .

وقد استطاع أبوللونيوس أن ينشىء القطوع المخروطية بواسطة المماسات (المجلد الثالث نظريات ٦٥ — ٦٧) . وكذلك استطاع أن ينشىء قطعاً مخروطياً بمعرفة خمس نقط عليه ، وإن كانت طريقة إنشائه لم تذكر بوضوح .

ولن تنتهى مناقشة العدد الكبير من نظريات القطوع المخروطية ، وقد يكون مشوقاً لنا أن نشير إلى إغفال فريد ؛ إذ لم يتكلم أبوللونيوس مطلقاً عن الدليل[٥١]. وقد كان يعرف الخواص البؤرية للقطع الناقص والقطع الزائد ، ولكنه لم يفطن إلى وجود البؤرة فى القطع المكافئ .

وقد تبدو مثل هذه الفجوة غريبة على القارئ ، لأننا قدمنا له الموضوع بطريقة مختلفة تماماً . وقد تكلم أبوللونيوس عن بؤر القطوع المخروطية المركزية فى نهاية كتابه الثالث . ولكن طلبتنا يسمعون عنها فى بداية المقرر ، فيعرف لهم القطع الناقص بأنه المحل الهندسى لنقطة ق إذا كان مجموع بعديها عن نقطتين معينتين $ب_١$ ، $ب_٢$ ثابتاً . فإذا كان بعدها عن $ب_١$ هو ل١ ، وبعدها عن $ب_٢$ هو $ل_٢$ كان ل + ل = ك ،والنقطتان ب ،$ب_٢$ هما البؤرتان . ويعرف القطع المكافئ بأنه المحل الهندسى للنقطة ق المتساوية البعد عن نقطة ثابتة ب (تسمى البؤرة) وعن مستقيم معين د(يسمى الدليل) .

ولما كان الطالب الحديث يقدم للقطوع المخروطية عن طريق الهندسة التحليلية لذلك كانت طريقة معالجته لها تختلف تماماً عن طريقة أبوللونيوس التى هى طريقة هندسية بحتة . ومن ثم كانت أفكاره الأساسية مختلفة ، على أنه لن يلبث رجال الرياضيات المحدثون والقدامى أن يكشفوا نفس النتائج النهائية وقد فعلوا ذلك إلى حد كبير .

وليس من الحكمة دراسة القطوع المخروطية فى الوقت الحالى بطريقة أبوللونيوس لأن الطرق الحديثة (سواء أكانت بالهندسة التحليلية أوالهندسة الإسقاطية) أبسط وأسهل وأعمق بكثير ، على أن العبقرية التى مكنت أبوللونيوس من أن يكشف كل هذا بما لديه من أدوات ناقصة لتدعو إلى الإعجاب . وإن المرء ليعيد ما سبق أن ذكره عن أرشميدس ، وهو أن هذا الإنتاج فاق خيالنا ، وإنه حقاً لسحر .

وقد جاء ذكر كثير من العلماء الرياضيين فى مقدمات أرشميدس وأبوللونيوس وسبق لى أن أسميت قليلا منهم ، وإننى لا أطلب من القارئ أن يتذكرها (لقد

نسيتها أنا نفسى). وإنما هى توضح لنا الكثرة النسبية لحب الاستطلاع المتعلق بالرياضيات فى القرن الثالث ، وبالإضافة إلى الملوك الثلاثة : هيرون الثانى ، وجيلون الثانى السيراكوزيين ، وأتاللوس الأول البرجامى[٥٢] ، فهناك آخرون مثل دوسيثيوس ، وزيوكسيبوس ، وكونون الساموسى ، ويوديموس البرجامى ، ونوقراطيس ، وفيلونيديس[٥٣] وثراسيدايوس ، ونيكوتليس البرقاوى . وتتحدانا مثل هذه القائمة لأننا نريد أن نعرف عنها أكثر ، وحقاً إن الرجال الذين أهدى لهم عملاق الرياضة السابقان أعمالهما رجال غير عاديين .

وقد فقد الأصل اليونانى لأعمال أبوللونيوس الأخرى ، ولذلك فنحن نعرفها فى الوقت الحالى عن طريق مجموعة بابوس (النصف الثانى من القرن الثالث) ، وقد حفظت إحداها بالعربية . وهذه هى « القطع بنسبة » ، وقد ترجمه إلى اللاتينية إدموند هالى ، وقد سمى الأعمال الأخرى : القطع بمساحة ، والمقطع المعين ، والتماس ، والمحلات الهندسية المستوية ، والميل ، وقد عرفنا محتوى هذه الأعمال الستة من تحليل بابوس وتعليقاته . وهناك كتب أخرى تعزى إلى أبوللونيوس ، على أن الشواهد على ذلك ضعيفة ، مثل مقارنة ذى الاثنى عشر وجهاً بذى العشرين وجهاً ، ودراسة القواعد الرئيسية ، ثم دراسة الحلزون الأسطوانى ، والبرهنة على أنه متحد المركز[٥٤] ، والكميات الصماء غير المرتبة ، والمرايا الحارقة ، والتوزيع السريع ، ويعطينا تقريبا لقيمة ط ، أفضل من تقريب أرشميدس ، ولكنه أقل من الأخير من حيث مناسبته للأغراض العملية .

وقد كان من الطبيعى أن يخصص أبوللونيوس جزءاً من انتباهه للمسائل الفلكية ، والمشكلة البارزة التى كافح فيها علماء الفلك اليونانى أكثر من قرنين هو إيجاد تفسير كيناتيكى لحركات الكواكب تتفق مع مظاهرها وتحافظ عليها ، مثل تلك التى تفسر لنا التقهقر الظاهرى للكواكب . وقد اخترع يودكسوس الكنيدى (النصف الأول من القرن الرابع قبل الميلاد) الحل الأول للمشكلة وهو الخاص بالكرات متحدة المركز ، وقد عدله تدريجياً كاليبوس

الكيزيكوسى (النصف الثانى من القرن الرابع قبل الميلاد)وأرسطو ، ثم أوتوليكوس البيتانى (النصف الثانى من القرن الرابع قبل الميلاد)[٥٥]. وكانت نتائجه تدعو إلى الإعجاب ، ولكنه لم يحافظ على كل الظاهرات . وكان لابد من البحث عن تفسير آخر ، خصوصاً فيما يتعلق بالكواكب الدنيا . وكان هيراكليديس البنطى (النصف الأول من القرن الرابع قبل الميلاد)مؤسس نظام مركزية الأرض والشمس ، وهو مخترع الدوائر الفوقية لتعليل الحركة الظاهرية لعطارد والزهرة ، ولكى يعلل الحركة الظاهرة للكواكب العليا (المريخ والمشترى وزحل) عمم أبوللونيوس استخدام نظرية الدوائر الفوقية ، ثم أدخل أوساعد على إدخال نوع ثالث من النظرية وهى نظرية « البعد عن المركز » . ويقول بطلميوس[٥٦] : إن أبوللونيوس قد اخترع أو أكمل هاتين النظريتين ، وقد استخدمها كل من هبارخوس وبطلميوس ورفضا نظرية « الكرات المتحدة المركز » ، على أن هذه الأخيرة قد عادت إلى الظهور فى وقت متأخر ، وكان تاريخ علم الفلك فى القرون الوسطى إلى حد ما ، صراعا بين نظريتى « البعد عن المركز » و « متحد المركز » ، أو بعبارة أخرى بين الفلك البطلميوسى والفلك الأرسطاليسى[٥٧] .

وإذا قارنا أريستارخوس الساموسى ، وكوبرنيكوس ، فإنه لايسعنا إلا أن نسمى أبوللونيوس سلف تيخو براهه ، وإن كان من الممكن أن نعطى هذا اللقب لهيراكليديس .

وعلى أية حال فإن أبوللونيوس يستحق مركزاً مرموقاً جداً فى تاريخ العلوم، حتى ولو ضاع مؤلفه « القطوع المخروطية » . فقد مهد الطريق الرياضى هيبارخوس وبطلميوس وجعل تأليف « المجسطى » ممكنا . هذا ومن المتناقضات ألا تستغل إضافاته الرئيسية لعلم الفلك الرياضى والقطوع المخروطية . إلا بعد تأليفها بثمانية عشر قرنا بواسطة يوحنا كبلر .

التراث الأبوللونى :

لقد قلنا ما فيه الكفاية فيما يتعلق بنظريات الدوائر الفوقية والاختلاف المركزى ، وذلك حينما أشرنا إلى استخدام هيبارخوس وبطلميوس لها . أما الباقى فهو متطابق مع التعاليم البطلميوسية نفسها .

ولهذا سنركز انتباهنا فى الوقت الحاضر على القطوع المخروطية، وقد كان من نتائج ما تتمتع به من قوة منطقية ووضوح وشمول، الفضل فى اعتبار كتاب القطوع المخروطية المعيار الذى يجب أن يقاس عليه فى هذا الموضوع (كما كانت الأصول لإقليدس معياراً آخر) ، وقد درست بحماسة من Epigoni اليونانية، وكما هو شأن تعاليم أرشميدس فإننا نجهل ما حدث فى القرون الأولى (قل من القرن الثانى قبل الميلاد إلى القرن الثالث الميلادى ، وهى فترة طويلة حقاً) ، وقد كان پاپوس (النصف الثانى من القرن الثالث) أول المعقبين، وإليه يرجع الفضل فى الاحتفاظ بكثير من أعمال أبوللونيوس الثانوية ، ثم ثيون السكندرى (النصف الثانى من القرن الرابع)، ثم ابنته المشهورة هيباتيا (النصف الأول من القرن الخامس) ، وأخيراً يوتوكيوس (النصف الأول من القرن السادس)(٥٨) . وبعد ذلك تكررت قصة تعاليم أرشميدس .

ومن الجائز أن تكون الأصول الأولى للمخطوطات التى ما زالت موجودة(٥٩)، قد نقلت فى أثناء عصر النهضة البيزنطية تحت قيادة ليون الثيسالونى (النصف الأول من القرن التاسع) ، وقد ظهرت ثمارها عند نهاية القرن التاسع ، ليس فى الدولة البيزنطية ، وإنما فى البلاد الإسلامية، فقد ترجم إلى العربية هلال بن الحمصى (النصف الثانى من القرن التاسع) الكتب من ١ — ٤ من القطوع المخروطية، تحت اسم كتاب المخروطات، كما ترجم ثابت بن قرة (النصف الثانى من القرن التاسع) الكتب من ٥ — ٧ ، ولهذا يبدو لنا أن الكتاب الثامن قد فقد أيضاً . فهل أتمه أبوللونيوس ؟ . وفى القرن التالى أخذ علماء الرياضيات العرب أمثال إبراهيم بن سنان (النصف الأول من القرن العاشر) والكوهى

(النصف الثانى من القرن العاشر) فى مناقشة مسائل أبوللونيوس وفى التعليق عليها ، كما ظهرت لأبى الفتح محمود بن محمد الأصفهانى (النصف الثانى من القرن العاشر) ترجمة أفضل للقطوع المخروطية ، وتعليق على الكتب ١ — ٥ .

ولا يعرف كثير من الكتب اليونانية إلا عن طريق الترجمات العربية ، بينما يكون الأصل قد فقد ، وهذه هى الحالة البارزة . ولا يوجد كتاب فى أهميته يرجع إلى العرب فى الاحتفاظ به على مر العصور غيره .

وكما سبق أن ذكرنا هناك كتاب آخر لأبوللونيوس (القطع بنسبة) قد أبقى عليه بنفس الطريقة ، فقد نشر أدموند هالى ترجمة لاتينية عن العربية فى أكسفورد سنة ١٧٠٦ شكل ٢٧ ، ولم يظهر العمل اللاتينى إلا فى القرن الثانى

APOLLONII PERGÆI

DE

SECTIONE RATIONIS

LIBRI DUO

Ex Arabico MS^tm^. Latine Versi.

ACCEDUNT

Ejusdem de Sectione Spatii

Libri Duo Restituti.

Opus Analyseos Geometricæ studiosis apprime Utile.

PRÆMITTITUR

Pappi Alexandrini Præfatio

ad VII^mum Collectionis Mathematicæ,

nunc primum Græce edita:

Cum Lemmatibus ejusdem Pappi ad hos

Apollonii Libros.

Opera & studio Edmundi Halley

Apud Oxonienses

Geometriæ Professoris Saviliani.

OXONII,

E Theatro Sheldoniano

Anno MDCCVI.

شكل ٢٧ — هناك كتابان آخران لأبوللونيوس نشرهما إدموند هالى (٢٠ سم ، ٢٣٠ص أكسفورد سنة ١٧٠٦) وقد أهدى إلى هنرى الدريتش عميد كنيسة المسيح بأوكسفورد . (محفوظات مكتبة كلية هارفارد)

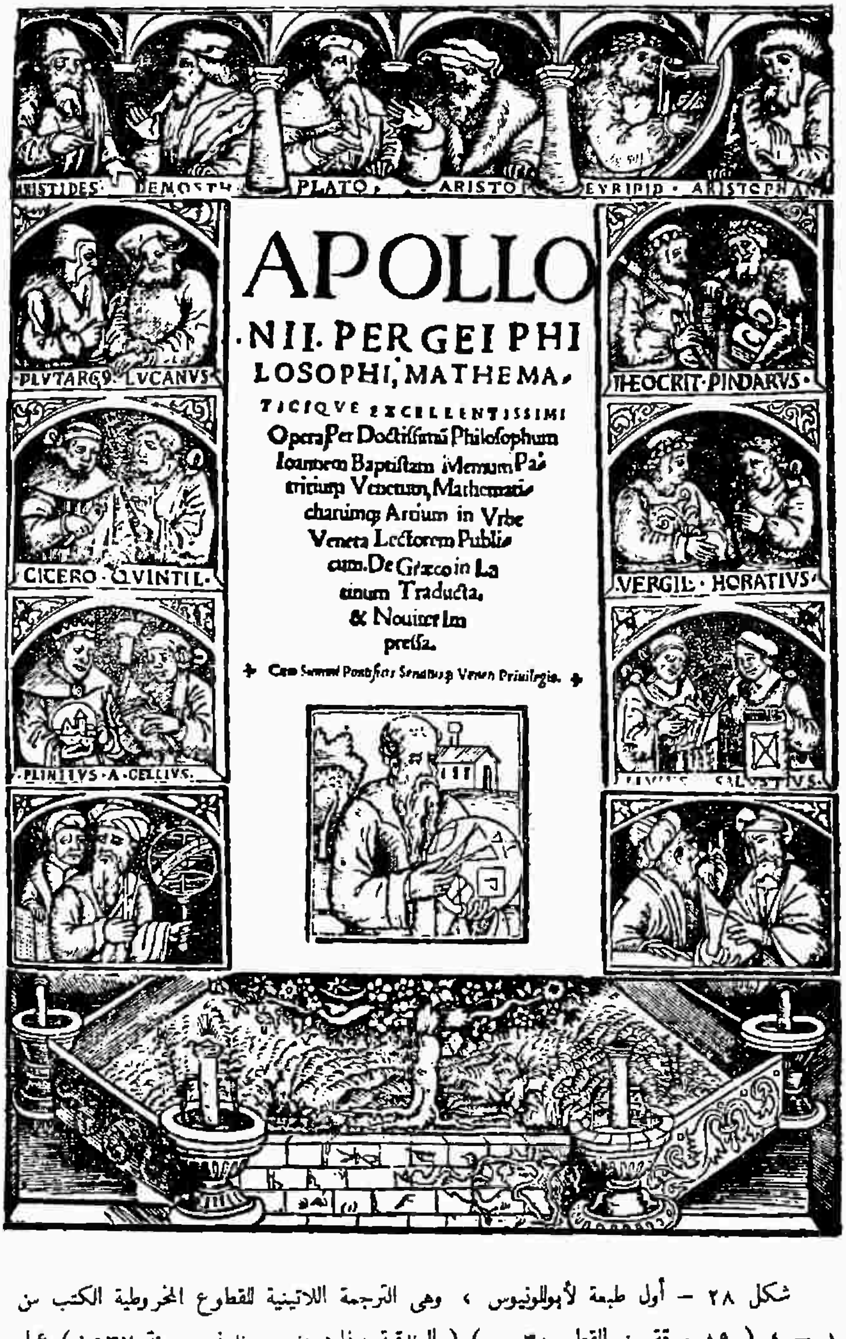
عشر ، مع ترجمة عن العربية ، ويعزى إلى جيرار الكريمونى (النصف الثانى من القرن الثانى عشر)، أما العمل العبرى فلم يظهر إلا فى القرن الرابع عشر مع قالونيموس بن قالونيموس (النصف الأول من القرن الرابع عشر) . وقد ترجم مقتطفات من العربية إلى العبرية (وليس هذا مؤكداً)، ويمكننا أن نغفل تفاصيل أخرى من أعمال العصور الوسطى فى هذا الموضوع .

ويرجع ضعف هذا العمل (كما هو الشأن عند أرشميدس) إلى نقص المراجع الأصلية ، والنسخة المطبوعة الأولى (شكل ٢٨) للقطوع المخروطية (وهى مقصورة على الكتب من ١ — ٤) هى الترجمة اللاتينية ، وقد نشرها جيوفانى باتستاميمو (البندقية سنة ١٥٣٧) ، ولكنها لم تلبث أن استبدلت بترجمة أفضل كثيراً بواسطة فدريكو كومنديىنو (بولونيا سنة ١٥٦٦) وبها تمهيديات پاپوس وتعليق يوتوكيوس فضلا عن ملاحظات تفسيرية (شكل ٢٩) .

ولما كانت الكتب من ٥ — ٧ لا توجد إلا بالعربية فإنها لم تنشر (أو تراجمها اللاتينية) إلا بعد ذلك بقرن من الزمان . وكانت مؤسسة على الأصول العربية كما راجعها أبو الفتح الأصفهانى سنة ٩٨٢ ، وكما أعدها اللبنانى المارونى أبراهام أشيلنسيس—(إبراهيم الحاقلانى) مع جياكومو ألفونسو بوريللى (فلورنسا سنة ١٦٦١) .

وتدين بالأصول اليونانية لعبقرية إدموند هالى (شكل ٣٠) وهى طبعة عظيمة تحتوى على الكتب اليونانية من ١ — ٤ ، مضافاً إليها الترجمة اللاتينية (راجعها بنفسه من مخطوطات عربية جديدة) للكتب من ٥ — ٧ ، ويوجد كذلك إحياء للكتاب الثامن ، وهو أقرب من التخمين من الواقع . وكذلك تعليقات پاپوس ويوتوكيوس (أكسفورد سنة ١٧١٠) .

وكذلك يستطيع علماء الرياضيات فى العصور الوسطى أن يدرسوا نظرية القطوع المخروطية من طبعة ميمو سنة ١٥٣٧ ، أو بصورة أفضل من طبعة كومنديىنو سنة ١٥٦٦ ، ومن ١٥٦٦ فصاعداً كانت لديهم معلومات جيدة



شكل ٢٨ – أول طبعة لأبولونيوس ، وهى الترجمة اللاتينية للقطوع المخروطية الكتب من ١ – ٤ (٨٩ ورقة من القطع ٣٠ سم) (البندقية برنارد ينوس بندونوس سنة ١٥٣٧) عمل جيوفانى باتستاميمو ، مواطن من البندقية . وقد طبعت هذه بعد موت ميمو بواسطة ابنه الذى لم يكن لديه من المعلومات الرياضية مايجعله يحسن عملها . وقد أهدى الكتاب إلى الكردينال ماريئو جريمانى بطريق أكويليا .

(محفوظات مكتبة كلية هارفارد)

APOLLONII
PERGAEI CONICORVM
LIBRI QVATTVOR.
VNA CVM PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATIBVS, ET COMMENTARIIS
EVTOCII ASCALONITAE.
SERENI ANTINSENSIS
PHILOSOPHI LIBRI DVO
NVNC PRIMVM IN LVCEM EDITI.
QVAE OMNIA NVPER FEDERICVS
Commandinus Vrbinas mendis quamplurimis expurgata è Graeco conuertit, & commentariis illustrauit.

CVM PRIVILEGIO PII IIII. PONT. MAX.
IN ANNOS X.

BONONIAE,
EX OFFICINA ALEXANDRI BENATII.
M D LXVI.

شكل ٢٩ — الطبعة الثانية للنسخة اللاتينية للقطوع المخروطية لأبولونيوس للكتب من ١ — ٤ عمل فدريكو كومنديتو ومعها تمهيديات بابوس (النصف الثانى من القرن الثالث) وتعليقات يوتوكيوس (النصف الأول من القرن السادس) وكتابا القطوع المخروطية لسيرينوس (النصف الأول من القرن الرابع) (جزءان من القطع ٥,٢٧ سم ، ٣ + ١١٤ ورقة، ١ + ٣٥ ورقة، بولونيا ، الاسكندر بناتيوس، ١٥٦٦) ويحتوى الجزء الثانى على سيرينوس ، وقد أهدى كل جزء منها لشخص مختلف من عائلة جويدو أوبالدو ، دوقات أوربنيو.

(محفوظات مكتبة كلية هارفارد)

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM
LIBRI OCTO,
ET
SERENI ANTISSENSIS
DE SECTIONE
CYLINDRI & CONI
LIBRI DUO.

OXONIÆ,
E THEATRO SHELDONIANO, An Dom. MDCCX.

شكل ٣٠ — قواعد أبولونيوس طبعها أدموند هالى (١٦٥٦–١٧٤٢) عن المخطوطات اليونانية (القطع الفاخر ٤٠ سم. اكسفورد، ١٧١٠) مقسمة إلى ثلاثة أقسام جلدت معا . الأول (٢٥٤ ص) ويحتوى على الكتب من١–٤ باللغتين اليونانية واللاتينية ومعها تمهيديات بابوس وتعليقات يوتوكيوس ، والثانى (١٨٠ ص) للكتب من ٥ — ٧ مترجم من العربية إلى اللاتينية مضافا إليه إحياء للكتاب الثامن . والثالث (٨٨ ص) كتب عن قطوع الأسطوانة والمخروط ، عمل سيرينوس باللغتين اليونانية واللاتينية ، وأهدى كل جزء منها لشخص مختلف ، ويلاحظ السطح النحاسى الجميل المكون للصفحة الأولى هو نفس المستخدم فى كتاب إقليدس اللاتينىّ اليونانى (أكسفورد ١٧٠٣) والمبين فى شكل ١٣ .

(محفوظات مكتبة كلية هارفارد)

عن الكتب من ١ ــ ٤ ، وعلاوة على ذلك فإنه يمكنهم استخدام الكتاب ، ٥ (النهايات العظمى والصغرى) ، وذلك بعد أن أحياه فرانسسكو موروليكو المسينى على أساس كتابات پاپوس ، ويمكنهم كذلك استخدام Libellus يوحنا ورنر (نورنبرج سنة ١٥٢٢) وكان هذا أول كتاب عن القطوع المخروطية يظهر فى أوربا ، ويلاحظ أنه كان مطبوعًا قبل أبوللونيوس.

وقد استخدم يوحنا كِبْلَر سنة١٦٠٩ القطوع المخروطية فى الميكانيكا السماوية. وكما أثار أرشميدس ديكارت سنة ١٦٣٧ ،فكذلك أثار أبوللونيوس جيرارد يسارج (١٦٣٦) ، وبطريق غير مباشر باسكال (١٦٣٧)[٦٠] ، وقد بحث كتاباته كثير من علماء الرياضيات فى القرن التاسع عشر أمثال فرما ، فرانتس فان شوتن ، وجيمس جريجورى ، وأدريانوس رومانوس ، والأميرة إليزابيث (تلميذة ديكارت) . وستكون القائمة الكاملة طويلة جداً . وقد كان إنتاج أرشميدس وأبوللونيوس كخميرة قوية من القرن السادس عشر حتّى القرن السابع عشر . وكان فيليب دى لاهير أول من جمع المعلومات المتراكمة عن القطوع المخروطية ، وكان أستاذاً فى الكوليج دى فرانس ، وذلك فى كتب ثلاثة (باريس ١٦٧٣ ، ١٦٧٩ ، ١٦٨٥)[٦١] .

وبعد ذلك فقدت آثار أبوللونيوس فى الهندسة الحديثة كما يفقد نهر فى المحيط .

الطبعات الأخيرة : قام ج . ل . هايبرج بطبع كل الكتب اليونانية بعضها مع البعض الآخر ومعها التعليقات القديمة (مجلدان : ليبزج ١٨٩١ ــ ١٨٩٣) ، وقام بالترجمة الإنجليزية ت . ل . هيث (٤٢٦ ص ، كامبردج سنة ١٨٩٦) أما الترجمة الفرنسية فقد قام بها بول ڤيرايك (٧٠٨، ص ٤١٩ شكلا Bruges سنة ١٩٢٤) .

أما طبعة هالى (أكسفورد سنة ١٧١٠) للكتب من ٥ ــ ٨ من القطوع المخروطية فلم يظهر حتى الآن ما هو أحسن منها .

ويستمر تاريخ الرياضيات فى الفصل الثامن عشر .

تعليقات

(١) لتعريف اليونان الكبرى ، انظر المجلد الأول ص ٤٤٢ . (الطبعة العربية) .

(٢) ص ٢٢٧ – ٢٣٩ جـ ١ . وانظر ص ٢٠٣ جـ ١ إذ بها خريطة لمراكز الفينيقيين حول البحر المتوسط .

(٣) على وجه التأكيد فإن غرب صقلية كان أول ممتلكات روما سنة ٢٢٧، وبقى شرق صقلية تحت سيطرة هيرون الذى كان صديقا وحليفا للرومان ، ولقد كانت كل شبه جزيرة هسبان فيما عدا الجزء الشمالى منها (شمال خط عرض ٤١ ، ٤٢) جزءاً أساسيا من الإمبراطورية القرطاجية من سنة ٤٥٠ إلى سنة ٢٠١ ق . م .

(٤) فيما يلى بعض البيانات لمن يريد من القراء معرفة تتابع التاريخ القرطاجى .
لقد أتت الحرب البونية الثالثة (١٤٩–١٤٦) على قرطاجة تماما، وكان ذلك على يد سكيپو أميليانوس. ومع ذلك فإن الموقع جيد لدرجة لايمكن معها هجره . ولهذا فقد استعمره قيصر ثم أغسطس ، ولم تلبث أن أصبحت إحدى المدن الرئيسية للإمبراطورية الرومانية . وفى سنة ٤٣٩ استولى الوندال على قرطاجة ، وصارت عاصمة لهم حتى سنة ٥٣٣ ، وحين استعادها بلزاريوس للإمبراطورية البيزنطية أخذها العرب سنة ٦٤٨ . وبها مات القديس لويس سنة ١٢٧٠ فى أثناء الحرب الصليبية الثامنة والأخيرة وكانت تحت قيادته .

(٥) الحقائق الرئيسية فى تاريخ سيراكوز المتأخر : لقد صارت صقلية بأجمعها إقليما رومانيا بعد سنة ٢١٢ ، وكانت سيراكوز عاصمة النصف الشرقى . ولقد كان أوغسطين سنة ٢١ ق . م . يرسل إليها المستوطنين . وفى سنة ٢٨٠ م نهب الفرنجة سيراكوز ، كما غزاها بلزاريوس سنة ٥٣٥ ، والعرب سنة ٨٧٨ ، والنورمان سنة ١٠٨٧ .

(٦) كريستوفر بولهم (١٦٦١ – ١٧٥١) ارجع إلى « إيزيس » ٤٣ ، ٦٥ سنة ١٩٥٢

(٧) أخذها بلوتارك من حياة ماركللوس الذى وصف بوضوح الدور الذى لعبه أرشميدس فى الدفاع عن سيراكوز (تراجم بلوتارك من مكتبة لويب القديمة مجلد رقم ٥ ، ص ٤٦٩ – ٧٩) .
لقد أعد أرشميدس للملك هيرون آلات عدوانية وآلات دفاعية متعددة الأنواع . ارجع إلى ص ٤٨٧ لقراءة القصص المتعلقة بوفاته . وكان ماركوس كليوديوس ماركسللوس (أول من تسمى بهذا الاسم) الضابط الرومانى الذى حاصر سيراكوز وقد مات عام ٢٠٨ .

(٨) وهذا ممكن من الوجهة التاريخية لأن هيرون الثانى مات سنة ٢١٦ فى سن ٩٢ أما جيلون الثانى الذى عينه أبوه ملكا فقد مات قبله . ومن الصعب أن نفهم صداقته، لأن هيرون كان حليفا للرومان فى الحرب البونية الثانية وظل مخلصا لهم . وكما قال أحد الموسكيون لقد بنى

أرشميدس مركبا لهيرون ، ولقد احتفظ أثينايوس النقراطيسى (المجلد الخامس ٤٠ – ٤٤) بوصف كامل لهذا المركب عن موسخيون ، وهذا النص مشوق للغاية باعتباره وثيقة لتاريخ الصناعة اليونانية (انظر الفصل السابع) .

(٩) لقد أهدى أحد كتبه للملك جيلون ، وأهدى اثنين إلى اراتوسثنيس ، وليس أقل من أربعة لدوسيثيوس ، وفى هذه المؤلفات الأربعة أكثر من ٧٠ ٪ من مجموع كتاباته ، الموجودة ، ولذلك يمكن أن نقول إن دوسيثيوس البلوزيونى كان أقرب أصدقائه . وبلوزيون تقع على الساحل شرق قناة السويس . وكانت المفتاح الشرق لمصر . ومن المحتمل أن تكون هى سيناء (أزيكيل ٣٠ : ١٥ ، ١٦) .

(١٠) طنبور أرشميدس هو قطعة خشب لفت بطريقة حلزونية على محور مائل ، ومحاطة بأسطوانة مجوفة مفتوحة ويوضع جزؤها الأسفل فى الماء ، وتدار فيرتفع الماء إلى المستويات الأعلى ، ولم توصف لنا الطريقة فى كتابات أرشيمدس التى وصلت إلينا ، ولكن لا يدل هذا على أنه لم يكن مخترع الطنبور ، ومثل هذه المخترعات يمكن إدراكها دون أن تشرح بطريقة أدبية .

(١١) أوجد أرشيمدس النسبة بين أحجامها ومساحاتها (٣ : ٢) وقد أعطانا البرهان فى كتابه عن الكرة والاسطوانة كما يوجد أيضاً فى مؤلفه « الطريقة » .

(١٢) مؤلف شيشرون Tuscuianarum disputationum المجلد الخامس ، ٢٣ وتوجد ترجمة إنجليزية للنص الخاص بهذا الموضوع فى كتاب المؤلف « تقدير العلوم القديمة وعلوم العصور الوسطى فى أثناء عصر النهضة (١٤٥٠ – ١٦٠٠) » (فيلادلفيا جامعة بنسلفانيا سنة ١٩٥٥) ص ٢١٤ .

(١٣) بعبارة أدق لقد جعل المسألة عبارة عن معادلة تكعيبية ، ولم يحلها فى كتابه . ويبدو أنه حل المعادلة عن طريق تقاطع القطع المكافىء والقطع الزائد القائم ، وذلك فى جزء معروف للمعلق يوتوكيوس (النصف الأول من القرن السادس) .

(١٤) حدث هذا التعريف فى بداية الكتاب ، انظر شكل ٢١ ، حيث يتولد الحلزون من النقطة أ ، فإذا كانت المسافة م أ (= ر) ، والزواية ﻫ تتزايد بمعدل ثابت ، كان حلزون أرشميدس هو أسهل عضو فى أسرة المنحنيات ر^{م} = أ^{م} ﻫ .

(١٥) بابوس « سينا جوج » ٥ نظرية ١٩ . الطبعة اليونانية : إعداد فريدريش هولتش (برلين سنة ١٨٧٦) (المجلد الأول ص ٣٥١ – ٣٦١) الترجمة الفرنسية لبول فيرايك (بروجز سنة ١٩٣٣ ص ٢٧٢ – ٢٧٧) .

(١٦) Schoy, C. : Graeco - Arabische Studien. إيزيس مجلد ٨ ص ٢١ – ٤٠ سنة ١٩٢٦.

(١٧) ربما كان استخدامنا لكلمة « طريقة » مضللا ، فلم تكن لديه طريقة عامة للتكامل ولكنه اخترع بعبقرية فائقة طريقة خاصة لحل كل مسألة ، وكان كل حل من الحلول حاسما ، غير أنه لايمكن استخدامها لمسائل أخرى .

(١٨) المجلد الأول ص ١٤٣ – ٢١٥ .

(١٩) المجلد الأول ص ٤٢١ – ٤٢٨ ، وكان النظام العددى اليونانى رديئاً مثل النظام السامى (العبرى أو العربى) .

(٢٠) إنه يذكرنا بعلماء الرياضيات الإنجليز حين حاولوا تبرير غرابة علم المقاييس الإنجليزية.

(٢١) سبق لنا أن تكلمنا عن عداد الرمل ، وهو على جانب كبير من الأهمية ، إذ إليه وحده تعزى معرفتنا بنظرية التمركز الشمسى لأريستارخوس الساموسى .

(٢٢) لدراسة الأفكار البوذية ، انظر :

William Montgomery McGovern : Manual of Budhist Philosophy

المجلد الأول « علم الكون » (لندن سنة ١٩٢٣ ص ٣٩ وما بعدها) . وقد عملت النظرية الحديثة الخاصة بالمجموعات على رفع مثل هذه المسألة من مستوى التفاهة ولغة ماوراء الطبيعة إلى مستوى علمى .

(٢٣) إذا كان ى ، **ى** ، س ، **س** ، ص ، **ص** ، ع ، **ع** ، هى المجاهيل حيث تمثل الحروف الفارسية الثيران وتمثل الحروف الرقمة البقر ، ويمثل كل من المجموعات الأربع لونا معينا ، ويتمثل الشرطان فى : ى + ع = عددا مربعا ، ص + ع = عددا مثلثا .

(٢٤) علم الروافع ، مراكز الثقل ، التوازن . هذه المناوين قد تشير إلى كتاب واحد أو إلى كتب عدة .

(٢٥) توجد صورة يوحنا لودفيج هايبرج (١٨٥٤ – ١٩٢٨) وسيرته فى تأليف هانزريدر فى إيزيس المجلد الثانى ص ٣٦٧ – ٣٧٤ (١٩٢٨) . وهذا المخطوط كتب مكان نص قديم زالت معالمه . ويرجع السبب فى إزالة هذه النصوص القديمة إلى ارتفاع ثمن جلود الكتابة . وكان الرهبان ميالين إلى مسح النصوص الرياضية التى لاتعنى شيئا بالنسبة لهم ، وإحلال نصوص أخرى تهمهم أكثر محلها ، ومن الممكن فى كثير من الأحيان إعادة ظهور النصوص الممسوحة باستخدام مواد كيمائية وأشعة ضوئية خاصة ، وقد مسح النص الأرشميدى الذى كشفه هايبرج ليحل محله (تعويذة دينية للكنيسة الأرثوذكسية) .

(٢٦) استخدمت كلمة طرق ، ولو أنه لم تكن هناك طريقة عامة ، وإنما حلت كل مسألة بطريقتها الخاصة .

(٢٧) T.L. Heath : The Method of Archimedes (كمبردج سنة ١٩١٢ ص ١٣) وقد جاءت العبارة فى بداية الكتاب .

(٢٨) المجلد الأول ص ٢٧٧ ، ٤٤٤ .

(٢٩) بونافنتورا كافاليرى (١٥٩٨ — ١٦٤٧) وهو تلميذ جاليليو ، وقد نشر كتابا فى الهندسة شرح فيه « طريقة الأشياء غير القابلة للانقسام » ، وقد سبقت كشوف نيوتن لايبنتز وساعدتها ، وقد كانت طريقة الاستنفاد التى استخدمها يودوكسوس وأرشميدس أحسم من طريقة كافاليرى ، وقد قام أرشميدس بكشوفه على الطريقة الكافاليرية ، ولكنه لم يكتف بذلك حتى استطاع البرهنة عليها بطريقة الاستنافاد. وقد كان أرشميدس رياضيا أكثر عمقا من العالم الإيطالى الذى جاء بعده بثمانية عشر قرنا ونصف قرن .

(٣٠) Ptolemy, Almagest, III, 1. Claudii ptolemaei opera quae exstant omnia,vol.I, Syntaxis mathematica, ed J.L. Heiberg (Leipzig : Teubner, 1898 - 1903), pp. 194, 23 : Composition mathématique de Claude Ptolémée trans. N.B. Halma (Paris: Grand, 1813; facsimilé ed. Paris Hermann, 1927) p. 153.

(٣١) Codex Arcerianus محفوظة فى مكتبة Wolfenbüttel ببراونشفايج انظر Introduction المجلد الأول ص ٣٩٧ . وقد أعطى أرشميدس مجموع الأعداد المربعة فى أشباه المخروط وأشباه الكرة (Lemma to Prop. 2.) وفى الحلزونات (نظرية ١٠) .

(٣٢) Marshall Clagett, "Archimedes in the Midlle Ages قياس الدائرة، أوزيريس ١٠ ، ٥٨٧ — ٦١٨ (١٩٥٢) . وظهرت دراسات أخرى للمؤلف عن التقليد الأرشميدى فى العصور الوسطى فى إيزيس وأوزيريس . ارجع إلى ملخصه فى إيزيس ٤٤ ، ٩٢ — ٩٣ (١٩٥٣) وكذلك المنحنيات الأرشميدية. كذلك تعليق يرجع إلى القرون الوسطى وقام به يوحنا التنيميونى عن الكرة والأسطوانة . أوزيريس ، ٢ ، ص ٢٩٤ — ٣٥٨ (١٩٥٤) ومن المحتمل أن يكون يوحنا التنيميونى (؟) قد ظهر فى القرن الثالث عشر ، وأن تكون تعليقاته قد ترجمت عن العربية إيزيس ٤٦ ، ٢٨١ (١٩٥٥) . انظر أيضاً كلاجيت « العلم اليونانى فى العصور القديمة » (نيويورك ابيلارد شومان ١٩٥٥) .

(٣٣) ڤيتربو (٤٢ ميلا شمال الشمال الغربى لروما) وكانت جزءاً من ميراث القديس بطرس والذى تركته الكونتيسة العظيمة ماتيلدا التوسكانية (ماتت ١١١٥)، ولّى وليام الموبريكى تشجيعا من كليمنت الرابع (ابن فولك). وهو الذى أمر سنة ١٢٦٦ روجر باكون (النصف الأول من القرن الثالث عشر) بأن يرسل له نسخاً من كتاباته ، وقد مات كليمنت الرابع فى ڤيتربو سنة ١٢٦٨ .

(٣٤) للحصول على تفاصيل أخرى عن التقليد الخاص بالبند الثامن ارجع إلى ملاحظة Alexander Pogo . إيزيس ٢٢ ، ٣٢٥ (١٩٣٤ — ٣٥) . أما عن التقليد الأرشميدى بصفة عامة فارجع إلى Horus : A guide to the history of science, Chronica Botanica

١٩٥٢) ١٨ – ٢٢ إيزيس ٤٤ ، ٩١ ، ٩٣ سنة ١٩٥٣ ، أما المخطوط فقد عثر عليه سنة ١٨٩٩ بابادو بولوس كرمايوس فى البطريركية اليونانية ،فى القدس ، وكان هايبرج أول من أدرك أهميتها .

(٣٥) قد توجد هذه مثلا فى مخطوطات مركبة ، قد تحلل بطريقة بعيدة عن الكمال بواسطة بعض العلماء العرب غير الرياضيين .

(٣٦) وجدت بجانب الهرم الثانى بسقارة ، وهى ورقة بردى كتبت فى القرن الأول الميلادى وهى محفوظة فى متحف اللوفر . وهى أغنية جماعية تغنى دون اشتراك الجنسين ، أى أغنية تغنيها الفتيات على الفلوت مع الرقص ، وكتب الأغنية الكهان لبن ديوسكوروى كاستور وبوليديوسيز (كاستور ، بولكس) .

(٣٧) إن هيراكليديس هذا غير معروف . ولكن الاسم معروف إلى حدما . وقد كان الأبونيميون والهيراكليديين خلفاء هيراكليز ، الذين اتحدوا مع الدوريين وغزوا البلوبونيز بعد تخريب تروادة بثمانين عاما .

(٣٨) T.L. Heath (ed), The Works of Archimedes (كامبردج . مطبعة الجامعة ١٨٩٧) . ص ١٥١ .

(٣٩) إنها المجموعة النجمية الصغيرة التى تسمى كوما برينيكا (شعر برينيس) شمال العذراء وتقع بين العواء والليث ، والملكة برينيكا هى ابنة ماجاس، ملك برقة وقد قتلها ابنها بطلميوس الرابع فيلوباترفى ٢٢١ بعد توليه العرش مباشرة .

(٤٠) ليس لدينا إلا جزء من قصيدة كليما خوس (شعر برينيكا) رقم ١١٠ فى طبعة رود لفوس فيفر (جزءان . أكسفورد . مطبعة كلارندن سنة ١٩٤٩) . الجزء الأول ص ١١٢ . وقد قلد هذه القصيدة باللغة اللاتينية الشاعر كاتولوس (رقم ٦٦).

(٤١) بامفيليا بلد صغير فى وسط الساحل الجنوبى الشرقى لآسيا الصغرى وغرب قبرص . وقصة مامربها من تغيرات سياسية معقدة للغاية لدرجة تجعلنا غير قادرين على سردها هنا . وقد كانت أيام أبولونيوس جزءا من مملكة برجامة ، وهذا يساعدنا على فهم تاريخه .

(٤٢) لقد أدت الحماية الرومانية لبرجامة إلى سهولة ازدهارها ، وقد كان لهذه الحماية أثر بالغ لدرجة أنه فى سنة ١٣٣ ق . م. ترك أتاللوس الثالث مملكته لروما! وقد ضعفت مصر اليونانية فى القرنين الثانى والأول ، ولكن لم تمتصها روما حتى سنة ٣٠ ق . م . ، وقد عاشت الإسكندرية البطلمية قرنا من الزمان بعد منافستها الأسرة الأتاللوسية فى برجامة .

(٤٣) لدراسة تاريخ القطوع القديم ارجع إلى المجلد الأول ص ٨٢ – ٣ (الترجمة العربية).

(٤٤) يوديموس هذا عالم رياضيات غير معروف . وقد مات قبل أن يكتب أبوللونيوس مقدمة

المجلد الرابع من القطوع المخروطية . ويجب ألا يخلط بينه وبين آخرين يحملون ذات الاسم مثل يوديموس القبرصى تلميذ أفلاطون ، والرياضى يوديموس الرودسى (النصف الثانى من القرن الرابع قبل الميلاد) ويوديمون السكندرى (النصف الأول من القرن الثالث قبل الميلاد) ، وقد كان اسمه يوديموس (أناس طيبون) اسما شائعاً ، وقد عالج مؤلف بولى ديسوا عشرين اسما ، ولم يكن يوديموس هذا من بينها (المجلد الثانى ص ٨٩٤ — ٩٠٥) .

(٤٥) لست أعلم إذا كان أتاالوس الذى أهداه أبوللونيوس النصف الثانى من القطوع المخروطية هو الملك حقا . وأظن أنه كان كذلك ، وإلا احتاج الأمر إلى تعريف .

(٤٦) ونوقراطيس هذا غير معروف أيضاً .

(٤٧) الكلمة التى استخدمها Diorismos تعنى فى الجمع شروط إمكانية المسألة .

(٤٨) نيكوتليس البرقاوى غير معروف ، وهو يختلف عن فيلسوف برقاوى آخر يحمل نفس الاسم ، وقد ظهر مع أخيه أنيكيريس تحت حكم بطلميوس الأول .

(٤٩) قد اقتطفت هاتان المقدمتان من ترجمة هيث فى كتابه History of Greek mathematics ، (أكسفورد سنة ١٩٢١) المجلد الثانى ص ١٢٨ — ١٣١ .

(٥٠) توضح الهندسة التحليلية هذه الوحدة بطريقة أبسط ؛ إذ تمثل القطوع المخروطية بمعادلات من الدرجة الثانية فى مجهولين .

(٥١) ومع ذلك فقد عرف إقليدس العلاقة بين البؤرة والدليل ، وكما قال بابوس (الكتاب السابع لهلتسن ص ٦٧٨ ، فيرايك ص ٥٠٨) بين إقليدس أن المحل الهندسى للنقطة التى تكون النسبة بين بعدها عن نقطة معينة إلى بعدها عن مستقيم معين نسبة معينة هو قطع مخروطى ، ويكون ناقصا أو مكافئاً أو زائداً على حسب ماتكون النسبة المعينة $<$ أو $=$ أو $>$ ١ .

(٥٢) هل ياترى يهتم ملوك الحاضر اهتماما كافيا بالرياضيات لدرجة تشجيعهم إهداء الكتب لهم ؟ حقا إن الملكة فيكتوريا قد فضلت تشارلز لودفيج دودجسن ، ولم يكن ذلك بسبب رياضياته ولكن بسبب « مغامرات أليس فى أرض العجائب » ١٨٦٥ .

(٥٣) لقد قدم أبوللونيوس ، فيلونيدس إلى يوديموس فى أفسيس ، وكما هى الحال بالنسبة لكل رجل يونانى صالح وقادر ، ومن المحتمل أن يكونوا قد حجوا إلى معبد أرتيميس .

(٥٤) متساو فى كل أجزائه .

(٥٥) لقد بين أوتوليكوس أن نظرية « الكرات المتحدة المركز » لا تتسق مع الاختلاف الظاهرى لأحجام الشمس والقمر ، ولا تتسق أيضاً مع اختلاف بريق الكواكب (المجلد الأول صفحة ٥١٢) .

(٥٦) Almagest, XII, 1., Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia, vol. 2, Opera astronomica minora, ed. J.L. Heiberg (Leipzig: Teubner 1907), pp. 450 f., Composition mathématique ou astronomie ancienne, trans. N.B. Halma (Poris: Eberhart, 1816; facsmilé ed. (Paris : Hermann, 1927), pp. 312 f. Full discussion by- Otto Neugebauer, "Apollonius, planetary theory", Communications on pure and applied math. 8, 641 - 648 (1955).

(٥٧) للحصول على ملخص لهذا الصراع ارجع إلى "my Introduction" المجلد الثانى ص ١٦ – ١٩ ، والمجلد الثالث ص ١١٠ – ١٣٧ ، ١١٠٥ – ١١٢١ .

(٥٨) تعليقات يوتوكيوس مفصلة تماماً . وتغطى هذه التعليقات ١٩٤ ص فى نسخة هايبرج اليونانية اللاتينية لأبولونيوس . المجلد الثانى ص ١٦٨ – ٣٦١ .

(٥٩) يرجع تاريخ أفضل مخطوط للقطوع المخروطية إلى القرن الثانى عشر أو الثالث عشر ، ولكن المخطوط الخاص بتعليقات يوتوكيوس يرجع إلى القرن العاشر . والمخطوطات اليونانية للقطوع المخروطية مقصورة على الكتب ١ – ٤ . أما الكتب من ٥ – ٧ فيمكن الحصول عليها من المخطوطات العربية .

(٦٠) إيزيس ١٠ ، ١٦ – ٢٠ (١٩٢٨) ، ٤٣ ، ٧٧ – ٧٩ (١٩٥٢) .

(٦١) كان كتابا دى لاهير سنة ١٦٧٣ وسنة ١٦٧٩ بالفرنسية ؛ أما الكتاب الثالث وهو أهمها فقد كان باللاتينية (باريس سنة ١٦٨٥م) .