الباب الثاني

النهايات واتصال الدوال

بند 2-1: مقدمة للنهايات

عادة ما نحتاج في الحسبان وتطبيقاته لإيجاد قيمة دالة $f(x)$ عندما تكون x قريبة من عدد معلوم a وليس بالضرورة يساوى a. فإذا كان المطلوب هو $f(0.998)$ أ، $f(1.001)$ فنحن إذن نريد حساب $f(x)$ بالقرب من $x=1$ وليس $f(1)$. فقد تكون $f(1)$ غير معرفة. مثال ذلك لو أن

$$f(x)=\frac{x+1}{|x-1|}$$

نجد أن $f(1)$ غير معرفة

أما $f(0.998)=\frac{1.998}{0.002}$ أي $f(0.998)=999$

، $f(1.001)=\frac{2.001}{0.001}$ أيْ $f(1.001)=2.001$

وكلما اقتربت x من أكثر زاد مقدار $f(x)$ ، فنجد

$$f(1.00001)=2.00001 \quad \text{و} \quad f(1.0001)=2.0001$$

وهكذا أما $f(1)$ نفسها تصل إلى مالانهاية أيْ غير معرفة .

واتخذنا مثال آخر مثل $f(x)=\frac{x^3-2x^2}{3x-6}$ نجد أن، بالقرب من $x=2$ ،

$f(1.9997)=1.332933363$ ، $f(1.999999)=1.333332000$

$f(2.00002)=1.333336000$ ، $f(2.00000)=1.333334667$

بينما $f(2)=\frac{0}{0}$ أيْ غير معرفة.

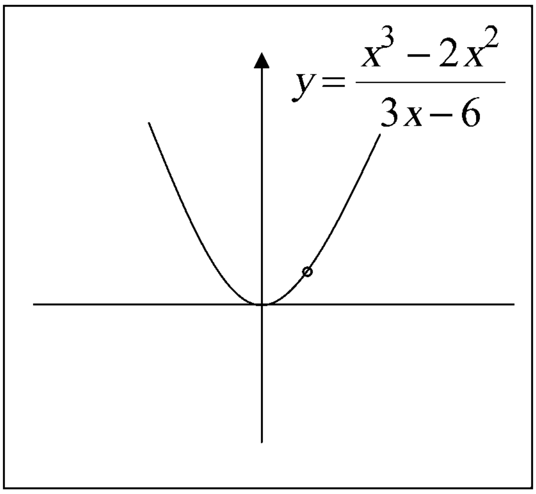
وضح مما سبق أنه كلما اقتربت x من 2 اقتربت $f(x)$ من العدد $\frac{4}{3}=1.333333333$ ولكن لا يمكن التأكد من ذلك لأننا مجرد حسبنا قيم مختلفة اختيارية للدالة لقيم للمتغير x قريبة من 2 . ولكن نعطى نقاشاً مقدما لهذه النتيجة دعنا نحلل البسط والمقام لعوامل على النحو التالي

$$f(x)=\frac{x^2(x-2)}{3(x-2)}$$

وطالما أن $x-2\neq 0$ ، ولأن x قريبة من 2 ولا تساوي 2 نستطيع حذف العامل $(x-2)$، لتصبح،

$$f(x)=\frac{x^2}{3}$$

وبيان f هو إذا القطع المكافئ $y=\frac{x^2}{3}$ محذوفاً من النقطة $(2,4/3)$ كما هو واضح في شكل (39) .



شكل (39)

ويتضح من هندسة الشكل أنه كلما اقتربت x من 2، $f(x)$ تقترب من $\frac{4}{3}$ كما كان متوقع .

وعموماً إذا كانت f دالة معرفة على فترة مفتوحة، a ينتمي إلى هذه الفترة بحيث،

1) كلما اقتربت x من a (وتظل $x\neq a$)
فإن $f(x)$ تقترب من عدد حقيقي L .

2) وأنه من الممكن جعل قيمة الدالة $f(x)$ قريبة من L بتمدد كافي وذلك باختيار x قريبة بقدر كاف من a (لكن $x \neq a$).

فإننا عندئذ يمكننا استعمال الترميز

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

وتقرأ " The limit of $f(x)$, as x approaches a , is L "

أو " نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من a هي L "

وقد نكتب $f(x) \to L$ كلما $x \to a$

وذلك يعني على بيان $f(x)$ أن النقطة $(x, f(x))$ تقترب من النقطة (a, L) كلما اقتربت x من a .

ففي المثالين السابقين نكتب

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 2x^2}{3x-6} = \frac{4}{3} \quad ، \quad \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{|x-1|} = \text{قيمة غير معرفة}$$

يلاحظ إننا عرفنا النهاية باستعمال جمل "تقترب من"، و "تؤول إلى" بالبداهة؛ ولكننا سوف نضمن البند القادم تعريفاً رسمياً للنهاية بعيداً عن هذه المصطلحات.

أحياناً نعرف أن $f(x)$ تقترب من عدد معين كلما اقتربت x من a ولكننا لا نعرف هذا العدد، عندئذ نستعمل التعبير، $\lim_{x\to a} f(x)$ موجودة ويجب الانتباه إلى أن حساب، $\lim_{x\to a} f(x)$ ، يجب افتراض إن $x \neq a$ دائماً، أيْ أن قيمة الدالة $f(a)$ خارجة عن الموضوع فليس بالضرورة أن تكون $\lim_{x\to a} f(x)$ مساوية $f(a)$ وإن حدث أحياناً . فمثلاً إذا كانت،

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x-1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

فإن $\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1} \quad = \lim_{x\to1} f(x)$

$$= \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to1}(x+1) = 2$$

بينما $f(1) = 3$

في حالة التعبيرات الجبرية البسيط، نجد أن إيجاد، $\lim_{x\to a} f(x)$ هو أمر بسيط .

فمثلاً عندما $f(x) = 3x+1$

$$\lim_{x\to4} f(x) = \lim_{x\to4}(3x+1) = 3(4)+1 = 13$$

لأننا إذا اتخذنا قيمة x قريبة جداً من 4 مثل $x = 4\pm\in$ ، $\in$ عدد موجب قريب جداً من صفر فإن $f(4\pm\in) = 3(4\pm\in)+1$

$$= 13\pm\in$$

باتخاذ $\in$ أصغر فأصغر حتى تصبح تقريباً صفر فإن $f(4\pm0) = 13$ ، في هذه المسألة، $\lim_{x\to4} f(x) = f(4)$

وببساطة يكون،

$\lim_{x\to4}(2x-3) = 2(4)-3 = 5$ ، $\lim_{x\to4}\sqrt{x^2+9} = \sqrt{16+9} = 5$

$\lim_{x\to-3}(x^2+1) = 10$ ، $\lim_{x\to11}\sqrt{x+5} = 4$

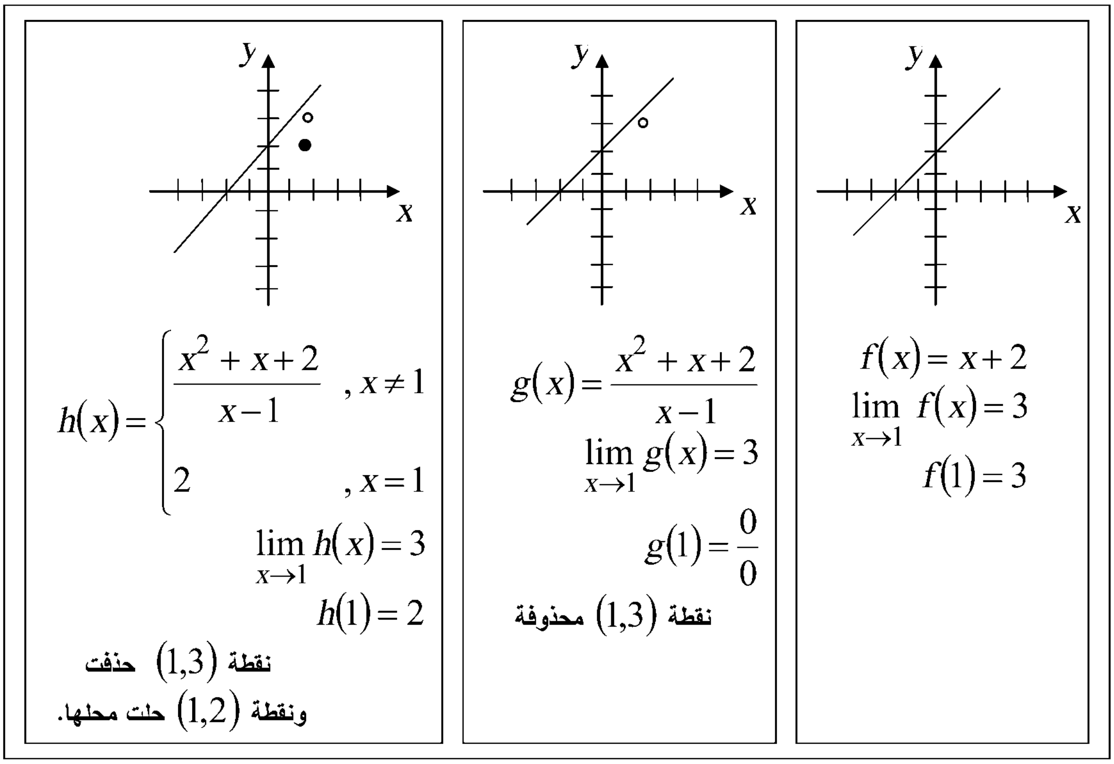
إن بعض الدوال الخاصة التي يتحقق فيها تساوي $f(a)$ ، $\lim_{x\to a} f(x)$ تسمى دوال مستمرة أو متصلة وسنعود إليها فيما بعد، عندئذ نحسب النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ بالتعويض عن $x = a$.

ولكن في دوال أخرى لا نستطيع استعمال التعويض المباشر السالف الذكر فمثلاً

$$\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)}=x+2\ ,\quad x\neq 1$$

وبما أن $x\neq 1$ ، فإن $x-1\neq 0$ ومن المسموح به حذف العامل المشترك بين البسط والمقام $(x-1)$ وينتج عن ذلك أن بياني المعادلتين $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ ، $y=x+2$ مماثلان لبعضهما .

ماعدا عند $x=1$ لأن النقطة $(1,3)$ تقع على بيان المعادلة $y=x+2$ ولا تقع على بيان الدالة $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ كما هو موضح في شكل (40) .



شكل (40)

مثال(1): أوجد النهايتين،

$$\lim_{x\to 9} = \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \quad ، \quad \lim_{x\to 2} = \frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6}$$

الحـــــل

بما أن التعويض المباشر يعطي

$$\lim_{x\to 2} = \frac{2x^2-5x+2}{5x^2-7x-6} = \frac{0}{0}$$

$\therefore$ $x=2$ ليست في نطاق الدالة أيْ أن $x \neq 2$ ، $x-2 \neq 0$ إذن النهاية تصبح،

$$\lim_{x\to 2} = \frac{(x-2)(2x-1)}{(x-2)(5x+3)} = \lim_{x\to 2} = \frac{2x-1}{5x+3} = \frac{3}{13}$$

كذلك، التعويض المباشر $x=9$ في المقدار $\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

يعطي $\frac{0}{0}$، $x=9$ ليست في نطاق الدالة،

أيْ $x-9 \neq 0$ ، إذن،

(ضربنا في المرافق)

$$\lim_{x\to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} = \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}$$

$$= \lim_{x\to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)}$$

$$= \lim_{x\to 9} \sqrt{x}+3 = \sqrt{9}+3 = 6$$

مثال(2): أوجد النهايتين

$(i \quad \lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{x}$ ، $(ii \quad \lim_{x\to 0} = \frac{\sin x}{x}$ ،

باختيار قيم لـــ x مناسبة وحساب $f(x)$

الحــــل

نكون جدول للدالة $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

لقيم x القريبة من 0،

x	$y = \sin x / x$
0.01	0.999983333
−0.001	0.999999833
−0.0001	0.999999998
0	L
+0.0001	0.999999998
+0.001	0.999999833
+0.01	0.999983333

نلاحظ أن التعويض المباشر $x = 0$ يعطي $\frac{0}{0} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ ولكن الجدول الموضح أعلاه يعطي قيم تقريبية للدالة $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ بالقرب من $x = 0$ ، حيث x عدد حقيقي أو هو التقدير الدائري للزاوية x ويتضح مباشرة من الجدول أنه يمكننا تخمين قيمة النهاية،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$ii)$ نكون جدول للدالة $f(x)\frac{\log_{10} x}{x-1}$ بالقرب من $x = 1$

x	$f(x)=\log x/(x-1)$
0.997	0.434947229
0.998	0.434729356
0.999	0.434511774
1	L
1.001	0.434077479
1.002	0.433860766
1.003	0.433644340

نجد أنه لما $0.999 < x < 1.001$ تكون $0.43408 < f(x) < 0.43451$

ونستطيع التخمين بأن، $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0.4343$

$((0.43408 + 0.43451)/2)$

لاحظ أيضاً أن، $\left(\dfrac{1}{\log_{10} e}\right) = 0.4343$ وسنثبت فيما بعد في هذا الكتاب أن،

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_{10} x}{x-1} = \frac{1}{\log_{10} e}$$

النهاية من جانب واحد One – sided limits

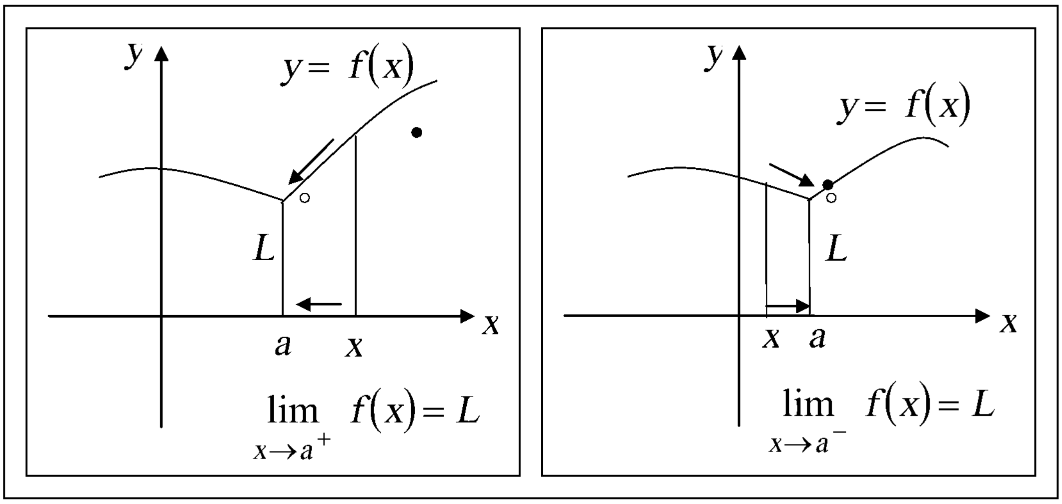
عند حساب $\lim_{x\to a} f(x)$ فإننا نجعل x تقترب من a بقدر كاف فإذا كانت x أكبر من a وبدأنا ننقص منها حتى تقترب من a ، نقول أننا نحسب النهاية من الجهة اليمنى حيث $x > a$ ، ونكتب

$$\lim_{x\to a^+} f(x)$$

وإذا حسبننا النهاية من الجهة اليسرى ، $x < a$ ، وجعلنا x تزايد حتى تصبح قريبة من a فنكتب النهاية على الصورة

$$\lim_{x\to a^-} f(x)$$

وشكل (41) يوضح اقتراب x من a بالطريقتين .



شكل (41)

ولحساب النهاية من اليمين يجب أن تكون f معرفة على الأقل في فترة مفتوحة (a,c) حيث c عدد حقيقي، ولحساب النهاية من اليسار يجب أن

تكون f معرفة في فترة (a,c) لعدد حقيقي c . الترميز $x \to a^-$ يقرأ x تقترب من اليسار من a ، $x \to a^+$ يقرأ ، x تقترب من اليمين من a .

ويكون للنهاية $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ وجود فقط إذا كان ،

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

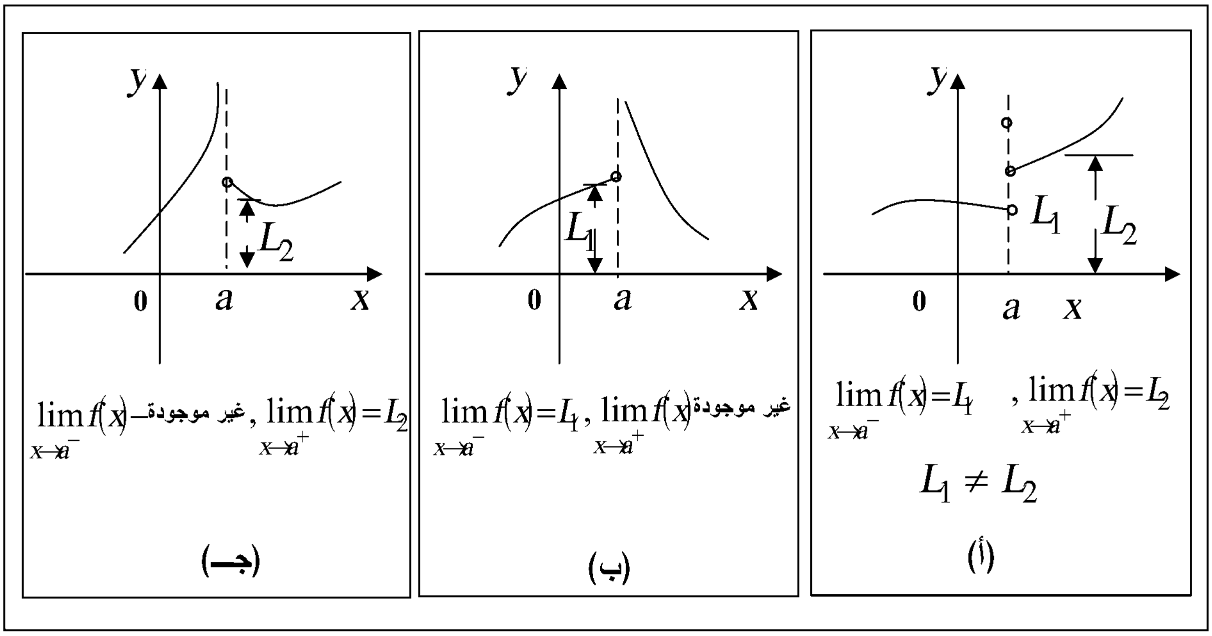
أما إذا كان ،

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \ , \ \lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

وكان $L_1 \neq L_2$ أ، أيْ من L_1 أو L_2 غير موجودة فإن النهاية $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

تكون غير موجودة

كما في شكل (42) الذي يوضح حالات تكون فيها النهاية الأخيرة غير موجودة



شكل (42)

مثال(3):

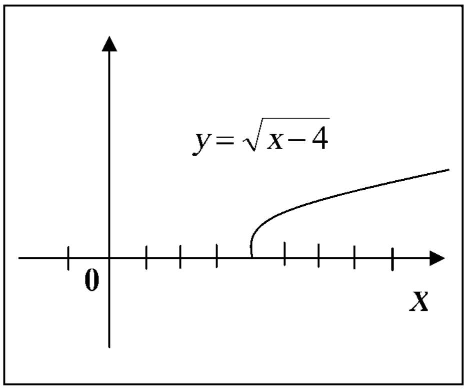
إذا كانت $f(x)=\sqrt{x-4}$ ، خطط بيان f وأوجد ما أمكن

أ) $\lim\limits_{x\to 4^{+}} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to 4^{-}} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ د) $f(4)$.

الحــــل

تخطيط $gr(f)$ واضح في شكل (43)



شكل (43)

أ) إذا كان $x>4$ ، فإن $x-4>0$ ومن ثم $f(x)=\sqrt{x-4}$ هي عدد حقيقي، أيْ أن $f(x)$ معرفة ومن ثم

$$\lim_{x\to 4^{+}}\sqrt{x-4}=\sqrt{4-4=0}$$

ب) إذا كانت $x<4$ ، فإن $x-4<0$ ومن ثم $f(x)=\sqrt{x-4}$ ليست عدداً حقيقياً وبالتالي فإن ، ($\lim\limits_{x\to 4^{-}} f(x)$ غير موجودة).

جـ) وبذلك $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ غير موجودة لأن $f(x)$ غير معرفة على فترة تحتوي 4، أي فترة تحتوي على أعداد حقيقية أقل من 4 وأخرى أكبر من 4.

د) $f(4)$ تحسب من التعبير الجبري مباشرة $f(4)=\sqrt{4-4}=0$

مثال(4):

إذا كانت $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ ، خطط $gr(f)$ وأوجد

ما أمكن ذلك ، أ) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ جـ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

الحـــــل

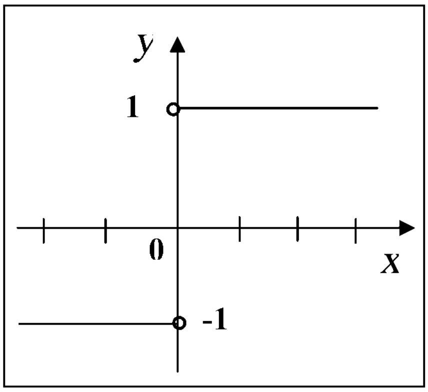
$gr(f)$ موضح في شكل (44) الدالة غير

معرفة عند $x=0$ حيث $f(0)=\dfrac{0}{0}$

أ) عندما $x<0$ ، فإن $|x|=-x$

$f(x)=\dfrac{x}{-x}=-1$ ،

إذن ، $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$



شكل (44)

ب) عندما $x>0$ فإن $|x|=x$ ، $f(x)=\dfrac{x}{x}=1$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

جـ) بما أن النهاية من اليمين والنهاية من اليسار غير متساويتين ، ينتج أن

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{|x|}$ غير موجودة .

مثال (5):

خطط بيان الدالة f ،

$$f(x)=\begin{cases}2+x & ; \quad x<2\\ 10 & ; \quad x=2\\ 3x^2-4x & ; \quad x>2\end{cases}$$

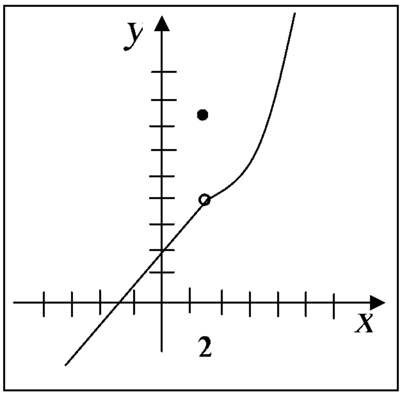
ثم أوجد ، $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

الحـــل

البيان $gr(f)$ مخطط في شكل (45)

أ) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(2+x)=4$

ب) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2-4x\right)=4$



شكل (45)

جــ) من (أ)، (ب) نجد أن النهايتين اليمنى واليسرى متساويتان

وينتج أن : $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=4$

لاحظ أن قيمة الدالة عند $x=2$ ، أيْ $f(2)=10$ ، ليس لها أي دخل في حساب النهاية.

تمارين 2−1

(1 $\lim_{x\to 3}(2x+3)$ (2 $\lim_{x\to 2}(x^2+5)$ (3 $\lim_{x\to 4} x$

(4 $\lim_{x\to 6} 11$ (5 $\lim_{x\to 7} 100$ (6 $\lim_{x\to(-1)}(\pi^2-1)$

(7 $\lim_{x\to\pi/6}(-1)$ (8 $\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{2x+1}$ (9 $\lim_{x\to 5}\frac{x^3-x^2}{15-x}$

(10 $\lim_{x\to\frac{3}{2}}\frac{2+[x]}{2x-1}$.

في التمارين من (11) إلى (24) استعمل الاختصارات الجبرية للمساعدة على إيجاد النهاية إن كانت موجودة

(11 $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-x-12}{x^2+4x+1}$ (12 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

(13 $\lim_{t\to 1}\frac{t^2-t}{2t^2+5t-7}$ (14 $\lim_{h\to 4}\frac{h^2-16}{\sqrt{h}-2}$

(15 $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$ (16 $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

(17 $\lim_{x\to -2}\frac{x^3+18}{x+2}$ (18 $\lim_{z\to -2}\frac{z-4}{z^2-2z-8}$

(19 $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x^2+3x+3}{x+1}$ (20 $\lim_{x\to 3}\frac{2x^3-6x^2+x-3}{x-3}$

(21 $\lim_{r\to -3}\frac{r^2+2r-3}{r^2+7r+12}$ (22 $\lim_{x\to 49}\frac{\sqrt{x}-7}{x-49}$

$\lim\limits_{z\to 5} \dfrac{z-5}{z^2-10z+25}$ (24 $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ (23

في التمارين (25) – (35) أوجد النهايات الآتية إن وجدت :

أ) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ $\qquad$ ب) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ $\qquad$ ج) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

25) $a=-5$, $f(x)=\dfrac{|x+5|}{(x-3)}$

26) $a=3$, $f(x)=\dfrac{|x-5|}{(x-3)}$

27) $a=-8$, $f(x)=\sqrt{x+8}-x$

28) $a=0$, $f(x)=\dfrac{2}{x^2}$

29) $a=8$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-8}$

30) $a=\dfrac{7}{3}$, $f(x)=\sqrt{7-3x}-x^2$

31) $a=1.5$, $f(x)=x+[x]$

32) $a=2$, $f(x)=x+[x]$

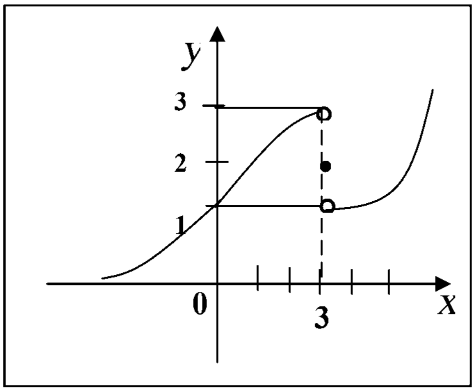
33) $a=1$, $f(x)=\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$

34) $a=1$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x|-1}$

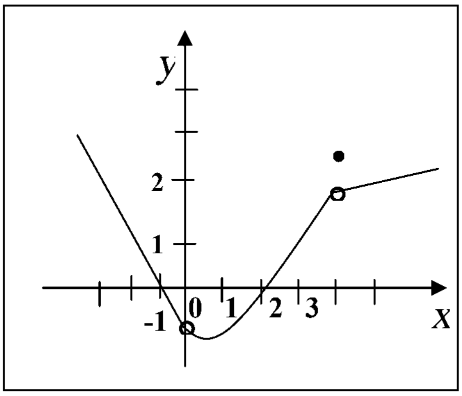
في التمارين من (36) إلى (45) استخدام بيان الدالة f وأوجد الموجود من النهايات الآتية ، نهاية $f(x)$ عندما:

$x \to 3^{-}$ ، $x \to 3^{+}$ ، $x \to 3$ ، $x \to 0^{-}$ ، $x \to 0^{+}$ ، $x \to 0$

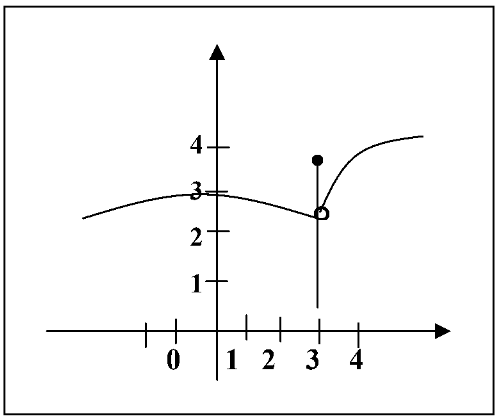
(36



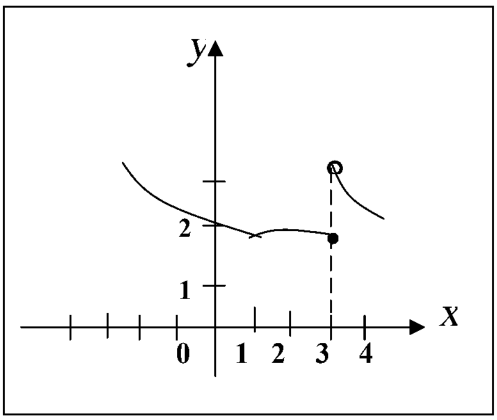
(37



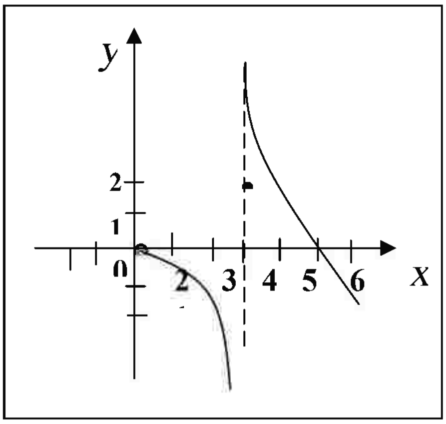
(38



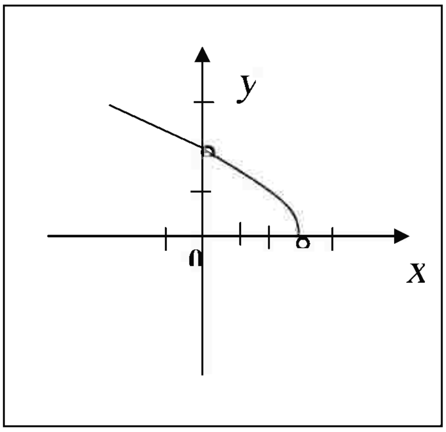
(39



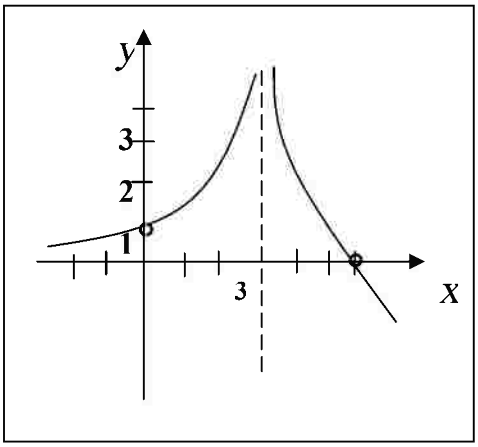
(40



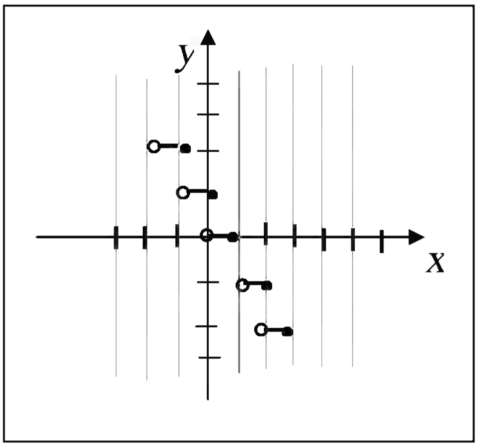
(41



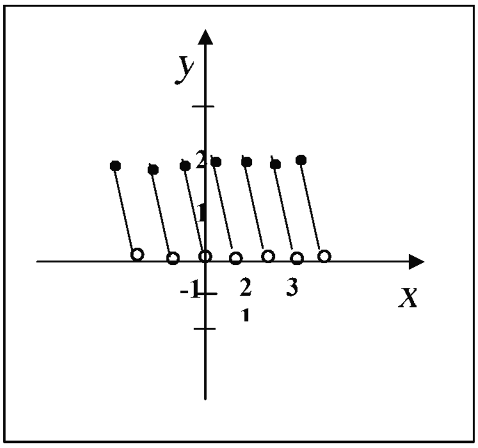
(42



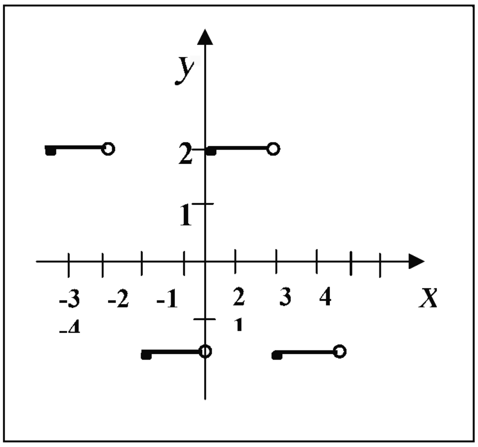
(43



(44



(45



في التمارين من (46) إلى (52) إرسم $gr(f)$ وأوجد النهايات الآتية إن وجدت .

أ) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ب) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ جـ) $\lim_{x\to a} f(x)$

46) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, x<1 \\ 4-x, x\geq 1 \end{cases}$, $a=1$

47) $f(x)=\begin{cases} x^3-1, x\leq 1 \\ 3-x, x>1 \end{cases}$, $a=1,-1,2$

48) $f(x)=\begin{cases} 4x-2, x<1 \\ 4 \quad , x=1 \\ 4-2x, x>1 \end{cases}$, $a=1$

49) $f(x)=\begin{cases} 3x-1, x\leq 1 \\ 3-x \quad , x>1 \end{cases}$, $a=1$

50) $f(x)=\begin{cases} |x-1|, x\neq 1 \\ 1 \quad , x=1 \end{cases}$, $a=1$

51) $f(x)=\begin{cases} x^3+2, x<1 \\ 1 \quad , x=1 \\ x^3+x+1, x>1 \end{cases}$, $a=1$

52) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, x<1 \\ 6 \quad , x=2 \\ \dfrac{x^2+3x+2}{x+1}, x>2 \end{cases}$ عندما $a=2,-1,3$

في التمارين من (53) إلى (60) استعين بجدول مناسب لإيجاد قيمة النهاية وأثبت ما يلي :

(53 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x} \approx 2.72$

(54 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{3/x} \approx 403.4$

(55 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^x-9}{x-2} \approx 9.89$

(56 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4^{|x|}-9^{|x|}}{2}\right)^{1/|x|} = 6$

(57 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-2}{x-1} \approx 1.39$

(58 $\lim\limits_{x\to 0}|x|^x = 1$

(59 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos^{(\pi x/2)}}{x-1} \approx -1.571$

(60 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\tan x-2x}{x\cos x} = -1$

بند 2 – 2 تعريف النهاية Definition of limit

سوف نعطى الآن معنى دقيق للجملة ، y تقترب من L عندما x تقترب من a والذي رمزنا له ،

$$\lim_{x \to a} y = L$$

بأن نرفع y أن تبقى قريبة جداً من L بجعل قيم x قريبة من a .

فإذا كان $\in$ هي عدد موجب حقيقي صغير يكفى لأن تكون

$$L - \in < y < L + \in$$

أيْ

$$|y - L| < \in$$

فإننا نقول أن y لها سماحية $\in$ عند L . ومن ثم، القول أن y لها سماحية 0.01 عند L يعني $|y - L| < 0.01$ ؛ أيْ أن على بعد أقل من 0.01 عن L .

بالمثل لنعتبر عدد حقيقي موجب صغير δ يعطي سماحية δ عند a ، $x \neq a$. أيْ x لها δ سماحية عند a ، إذا كان

$$0 < |x - \delta| < \delta$$

أ،

$$a - \delta < x < a + \delta \quad , \quad x \neq a$$

فإذا كان لأي عدد $\not\in > 0$ يوجد عدد $0 < \delta$ بحيث إذا كان لــ x سماحية فإن y يكون لها سماحية $\in$ عند L فإن ،

$$\lim_{x \to a} y = L$$

ولتقريب المفهوم ، إذا كان لجميع قيم x في الفترة (0.999,1001) تكون y في الفترة (2.9998,3.0002) أيْ x لها سماحية 0.001 عند 1 ، و y لها سماحية 0.0002 عند 3 فإننا مقول أن

$$\lim_{x \to 1} y = 3$$

كما كنا نخمن قيمة النهاية باستعمال الجدول في البند (2−1)

وثم فإن $\lim\limits_{x\to a} y = L$ يعنى أنه لكل $\in > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x-a| < \delta$ فإن $|y-L| < \in$

تعريف النهاية

" إذا كانت y معرفة على فترة مفتوحة تحتوي على a ، ماعدا أحياناً عند a نفسها ، وكان L عدد حقيقي . فإن الجملة ،

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

تعنى أنه لكل $\in > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا كان $0 < |x-a| < \delta$ فإن $|f(x)-L| < \in$ "

وتسمى المتباينة $0 < |x-a| < \delta$، السماحية δ والمتباينة $|f(x)-L| < \in$، السماحية $\in$.

ويمكن كتابة المتباينتين بدون استعمال القيم المطلقة على النحو :

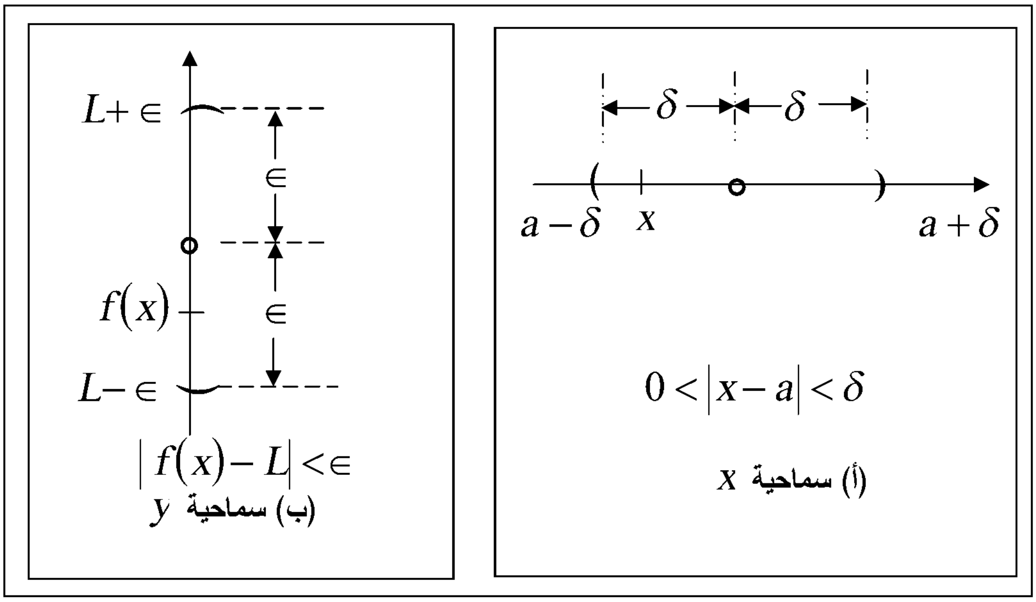
$a-\delta < x < a+\delta \ , \ x \neq a$ للسماحية δ

$L-\in < f(x) < L+\in$ للسماحية $\in$

وشكل (46) يمثل المتباينتان على خطى أعداد . كما يمكننا صياغة تعريف النهاية السابق بطريقة أخرى كما يلي :

" $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ تعنى أنه لكل $\in > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث إذا x تقع في الفترة $(a-\delta, a+\delta)$، $x \neq a$ فإن $f(x)$ تقع في الفترة $(L-\in, L+\in)$ "

وإذا كان للدالة $f(x)$ نهاية عندما تقترب x من a ، فإن هذه النهاية وحيدة.



شكل (46)

مثال(6): أثبت باستعمال التعريف الرسمي للنهاية أن

$$\lim_{x\to 4}=(3x-5)=7$$

الحـــــل

نفرض أن $f(x)=3x-5$ ، $a=4$ ، $L=7$ ونحاول أثبات أنه لأي عدد $0<\in$، يمكن ايجاد $\delta>0$ بحيث إذا كان $0<|x-4|<\delta$ فأن $|(3x-5)-7|<\in$ ، على النحو التالي :

$$|(3x-5)-7|<\in$$

$$|3x-12|<\in$$

$$|3(x-4)|<\in$$

$$3|x-4|<\in$$

$$|x-4|<\frac{\in}{3}$$

إذن باختيار $\delta \le \frac{\in}{3}$ نحصل على ،

$$0<|x-4|<\delta$$

$$0<|x-4|<\frac{\in}{3}$$

$$0<3|x-4|<\in$$

$$0<|3x-12|<\in$$

$$0<|(3x-5)-7|<\in$$

هذه المتباينات المتكافئة تحقق المطلوب وأكملت البرهان.

مثال(7):

اثبت أن $\lim\limits_{x\to a} x^3=a^3$

الحــــل

نفرض أن $\in>0$ ،

$$|x^3-a^3|<\in$$

$$|(x-a)(x^2+ax+a^2)|<\in$$

$$|x-a|\,|x^2+ax+a^2|<\in$$

$$|x-a|<\frac{\in}{|x^2+ax+a^2|}$$

$$0<|x-a|<\frac{\in}{a^2}$$

$\therefore$ لكل $\in>0$ ، بأخذ $\delta=\frac{\in}{a^2}$ ، يكون

$$0<|x-a|<\delta$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to a} x^3=a^3$

طريقة أخرى للحل

لنفرض الحالة $a > 0$ ، و

$f(x) = x^3$ $L = a^3$ ومن ثم أي

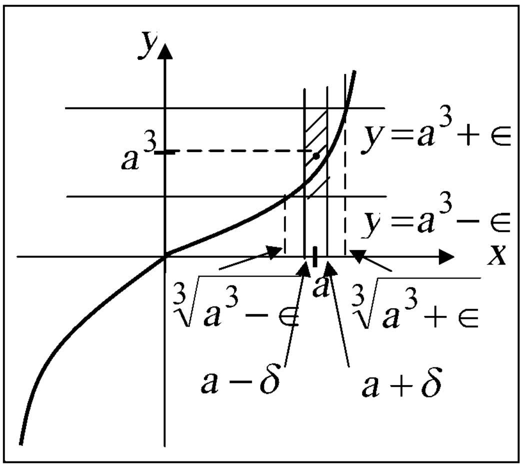
$\in > 0$ علينا أن نجد $\delta > 0$

بحيث " إذا x في الفترة

$(a-\delta, a+8)$

و $x \neq a$ فإن x^3 في الفترة

" $(a^3-\in, a^3+\in)$



شكل (47)

بفحص شكل (47)، رسمنا الخطان الأفقيان $y = a^3 \pm \in$ اللذان يقطعان بيان المعادلة $y = x^3$

في نقطتين إحداثياتهما الأفقيان، x ، هما $\sqrt[3]{a^3+\in}$ ، $\sqrt[3]{a^3-\in}$. النقطة (x, x^3) على المنحنى بين هذين الخطين الأفقيين إذا كانت x تقع في الفترة المفتوحة $\left(\sqrt[3]{a^3-\in} \ , \ \sqrt[3]{a^3+\in}\right)$.

إذا ما اخترنا δ عدد موجب أصغر من كل من ،

$\sqrt[3]{a^3+\in}-a$ ، $a-\sqrt[3]{a^3-\in}$ مع بقاء $a^3-\in > 0$ ، كما هو في الشكل (47) . إذن عندما يكون لـــ x سماحية δ عند a ، تكون النقطة (x, x^3) واقعة بين الخطين الأفقيين $y = a^3 \pm \in$ ، أيْ يكون للدالة x^3 سماحية $\in$ عند a^3 .

هذا البحث الهندسي يثبت أنه "إذا كان x في الفترة $(a-8, a+8)$، $x \neq a$ فإن x^3 في الفترة $(a^3-\in \ , \ a^3+\in)$" ويمكن تكرار نفس الفحص عندما $a < 0$ وبذلك ثبت المطلوب ، $\lim\limits_{x \to a} x^3 = a^3$

مثال(8): اثبت باستخدام التعريف أن

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}=2$$

الحـــل

نأخذ $\quad a=1$ ، $L=2$ ، $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$$|f(x)-L|<\in \quad , \quad \in>0$$

$$\Rightarrow \qquad \left|\frac{x^2-1}{x-1}-2\right|<\in \quad , \quad \in>0$$

$$\left|\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right|<\in$$

$$\left|\frac{(x-1)^2}{x-1}\right|<\in$$

$$|x-1|<\in$$

إذن بأخذ $\in>0$ ، $\delta=\in$ يكون

$$|f(x)-2|<\in\Rightarrow 0<|x-1|<\delta$$

إذن

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$$

تمارين 2-2

اثبت باستعمال التعريف الرسمي أن النهايات الآتية صحيحة أو باستعمال الرسم.

1) $\lim\limits_{x\to 2} = 2$

2) $\lim\limits_{x\to 5}(-3x) = -15$

3) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = 5$

4) $\lim\limits_{x\to 2}(5x-3) = 7$

5) $\lim\limits_{x\to 5} 4 = 4$

6) لكل a ، c حقيقيتان $\lim\limits_{x\to a} c = c$

7) $\lim\limits_{x\to c}(ax+b) = ac+b$ لكل الأعداد الحقيقة a ، b ، c .

8) $\lim\limits_{x\to a} x^2 = a^2$ ، لكل a حقيقية ، $a>0$

9) $\lim\limits_{x\to a} x^4 = a^4$ ، لكل a حقيقية ، $a>0$

10) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ ، لكل a حقيقية ، $a>0$

11) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$ ، لكل a حقيقية ، $a>0$

12) كرر التمارين 8 ، 9 ، 11 لكل a حقيقية ، $a<0$

13) استعمل طريقة الرسم المستعملة في مثال (7) لإثبات أن النهايات الآتية غير موجودة .

$$\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{|x+1|} \text{ ، } \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} \text{ ، } \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1} \text{ ، } \lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}$$

بند 2–3 : أساليب ايجاد النهايات

إنه لمن المجهد لتحقيق أيْ نهاية باستخدام التعريف. وذلك فإن هدف هذا البند هو تقديم مبرهنات تستخدم لتبسيط مسائل النهايات. لنبدأ بأبسط الدوال وهي $f(x)=c$ نجد أن

$$|\,f(x)-c| = |c-c| = 0$$

وحيث أن $\in > 0$ لكل $0 < \in$ ينتج أن $f(x)$ نهايتها c
كلما اقتربت x من أي عدد حقيق a .

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c \quad (1)$$

أيْ أن نهاية مقدار ثابت هي المقدار الثابت نفسه . وبالمثل يمكن إثبات أن،

$$\lim_{x\to a} x = a \quad (2)$$

المعادلتان (1) ، (2) تعتبران أول مبرهنة في هذا البند
فمثلاً

$$\lim_{x\to 11} 7 = 7 \qquad ، \qquad \lim_{x\to 3} 8 = 8$$

$$\lim_{x\to \sqrt{2}} x = \sqrt{2} \qquad ، \qquad \lim_{x\to 5} x = 5$$

وهذه المبرهنة على بساطتها سنرى أنها تستخدم لإيجاد نهايات معقدة ومركبة، باستعمال المبرهنات الآتية :

مبرهنة:

إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ، $\lim_{x\to a} g(x) = M$ موجودتان ، فإن

$$\lim_{x\to a}[\,f(x)+g(x)] = L+M \quad (3)$$

$$\lim_{x\to a}[\,f(x).g(x)] = LM \quad (4)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{L}{M} \quad ,M\neq 0 \quad (5)$$

$$\lim_{x\to a}[cf(x)]=cL\ , \quad \text{أي عدد } c \quad (6)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)]=L-M \quad (7)$$

أيْ أننا نستطيع تذكر المعادلات من 3− إلى 7 على النحو

3) نهاية المجموع = مجموع النهايات

4) نهاية حاصل ضرب دالتين = حاصل ضرب النهايتين .

5) نهاية خارج القسمة = خارج قسمة النهايتين بشرط عدم انعدان المقام .

6) نهاية مضروب دالة في مقدار ثابت = نهاية الدالة في المقدار الثابت .

7) نهاية الفرق هو فرق النهايتين .

نتيجة(1):

$$\lim_{x\to c}(ax+b)=ac+b \quad (8)$$

لأن ،

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c}(ax+b)&=\lim_{x\to c}ax+\lim_{x\to c}b\\&=a\lim_{x\to c}x+b\\&=ac+b\end{aligned}$$

نتيجة(2):

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=L^n=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]^n \quad (9)$$

لأن ،

$$\lim_{x\to a}[f(x)]^n=\lim_{x\to a}[f(x).\,f(x)........]$$

$$= \lim_{x\to a} f(x) . \lim_{x\to a} f(x) ....$$

$$= \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n$$

$$= L^n$$

مثال (9):

أوجد النهايات الآتية

$$\lim_{x\to a} x^3 \quad ، \quad \lim_{x\to 2} \frac{3x+4}{5x+7}$$

$$\lim_{x\to -2} \left(5x^3+3x^2+33\right) \quad ، \quad \lim_{x\to -1} (3x+1)^5$$

الحـــــل

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x+4}{5x+7} = \frac{\lim_{x\to 2}(3x+4)}{\lim_{x\to 2}(5x+7)} = \frac{3(2)+4}{5(2)+7} = \frac{10}{17}$$

$$\lim_{x\to 2} x^3 = \left(\lim_{x\to 2} x\right)^3 = a^3$$

$$\lim_{x\to -1} (3x+1)^5 = \left[\lim_{x\to -1}(3x+1)\right]^5 = (-2)^5 = -32$$

$$\lim_{x\to -2} \left(5x^3+3x^2+33\right) = 5(-2)^3 + 3(-2)^2 + 33$$

$$= -40 + 12 + 33 = 5$$

مبرهنة:

1) إذا كانت f كثير حدود ، a عدد حقيقي فإن

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \quad (10)$$

2) إذا كان q دالة قياسية ، a عدد حقيقي فإن

$$\lim_{x \to a} q(x) = q(a) \quad (11)$$

البرهان:

إذا كان

$$f(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + b_0$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(b_n x^n\right) + \lim_{x \to a} \left(b_{n-1} x^{n-1}\right) + \ldots + \lim_{x \to a} b_0$$

$$= b_n \left[\lim_{x \to a} x\right]^n + b_{n-1} \left[\lim_{x \to a} x\right]^{n-1} + \ldots + b_0$$

$$= b_n a^n + b_{n-1} a^{n-1} + \ldots + b_0$$

$$= f(a)$$

ولبرهان فقرة (2) نفرض ، $f(x)$ ، $h(x)$ كثيري حدود ،

$$q(x) = \frac{f(x)}{h(x)}$$

$$\lim_{x \to a} q(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{f(a)}{h(a)} = q(a)$$

ونترك للطالب برهان ما يلي من مبرهنات ،

لأجل $a > 0$ ، n عدد حقيقي صحيح

أو $a < 0$ ، n عدد حقيقي فردي

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a} \quad (12)$$

لأجل m ، n أعداد صحيحة موجبة،

$$\lim_{x \to a} x^{m/n} = a^{m/n} \quad (13)$$

لأجل r عدد حقيقي موجب ،

$$\lim_{x \to a} x^{r} = a^{-r} \quad (14)$$

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \quad (15)$$

<u>مبرهنة السندوتش Sandwich Theorem</u>

إذا كان لدينا $f(x) \le h(x) \le g(x)$ لكل x في فترة مفتوحة تحتوي على a.

وكان

$$\lim_{x \to a} f(x) = L = \lim_{x \to a} g(x)$$

فإن

$$\lim_{x \to a} h(x) = L$$

فإذا كانت $a \le h \le b$ ، $a = 4$ ، $b = 4$

فلابد أن $4 \le h \le 4$ أي $h = 4$.

مثال (10):

استخدم مبرهنة السندوتش لإثبات أن

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

الحـــــل

$$-1 \le \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \le 1$$

بما أن $x = 0$ نستطيع الضرب في x^2 ،

$$-x^2 \le x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \le x^2$$

بأخذ النهاية لما $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\left(-x^2\right) < \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) < \lim_{x\to 0} x^2$$

$$0 < \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) < 0$$

إذن ،

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

مثال (11):

أوجد النهايات ،

(i $\displaystyle \lim_{x\to 8}\frac{x^{2/3}+3\sqrt{x}}{4-\frac{16}{x}}$ (ii $\displaystyle \lim_{x\to 5}\sqrt[3]{3x^2-4x+9}$

(iii $\displaystyle \lim_{x\to 2^+}\left(1+\sqrt{x-2}\right)$ (iv $\displaystyle \lim_{v\to c^+}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

الحـــل

(i
$$\lim_{x\to 8}\frac{x^{2/3}+3\sqrt{x}}{4-\frac{16}{x}} = \frac{8^{\frac{2}{3}}+3\sqrt{8}}{4-\frac{16}{x}} = \frac{4+6\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2}$$

(ii
$$\lim_{x\to 5}\sqrt[3]{3x^2-4x+9} = \sqrt[3]{75-20+9} = \sqrt[3]{64} = 4$$

(iii
$$\lim_{x\to 2^+}\left(1+\sqrt{x-2}\right) = \left(1+\sqrt{2^+-2}\right) = 1$$

لأن 2^+ تقع في نطاق $\sqrt{x-2}$.

مثال (12):

أوجد النهاية ، $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

الحـــل

واضح أن $f(0)=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$ قيمة غير معرفة

ولكن إذا ضربنا البسط والمقام في مرافق البسط تصبح

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)}{x}\cdot\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$=\frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

بما أن $x\neq 0$ إذن تحذف x من البسط والمقام وتصبح

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+D}+\sqrt{1-D}}=\frac{2}{1+1}=1$$

مثال (11):

أوجد النهاية الآتية باستخدام مبرهنات النهايات ، إذا كانت موجودة

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)$$

الحـــل

$$f(h)=\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)$$

$$f(0)=\left(\frac{1}{0}\right)\ (1-1)=\infty\times 0$$

أيْ أن $f(0)$ غير معرفة، وبإجراء بعض الاختصارات الجبرية ،

$$f(h)=\left(\frac{1}{h}\right)\ .\frac{\left(1-\sqrt{1+h}\right)}{\sqrt{1+h}}$$

ضرب في المرافق ،

$$=\frac{1}{h}\ .\frac{\left(1-\sqrt{1+h}\right)}{\sqrt{1+h}}.\frac{\left(1+\sqrt{1+h}\right)}{\left(1+\sqrt{1+h}\right)}$$

$$=\frac{1}{h}\ .\frac{1-\left(\sqrt{1+h}\right)}{\left(\sqrt{1+h}+1+h\right)}$$

$$=\frac{1}{h}\ .\frac{1-h}{\sqrt{1+h}+1+h}$$

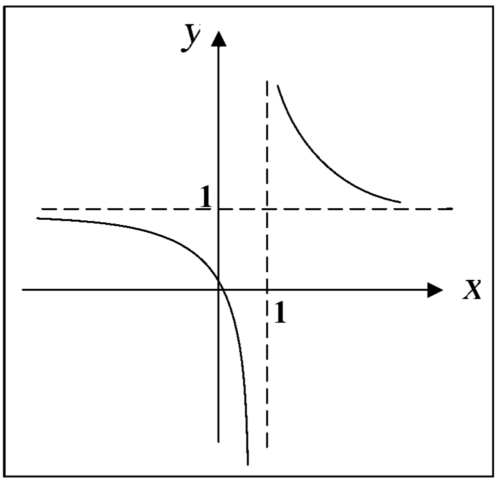
$$\lim_{x\to 0} f(h)=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+h}+1+h}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+0}+1+0}=-\frac{1}{2}$$

النهايات التي تشمل المالانهاية

عند إيجاد النهاية اليمنى أو اليسرى لدالة f عند a قد نجد $f(x)$ متزايدة بلا حدود أو متناقصة بلا حدود. ولتصور ذلك دعنا نعتبر الدالة

$$f(x)=\frac{x}{x-1}$$



شكل (48)

$gr(f)$ موضح في شكل (48) ويمكننا تبيان أن ،

$$\lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}$$ غير موجودة

والجدول الآتي يوضح بعض قيم الدالة
بالقرب من $x=1$.

x	0.97	0.98	0.99	1	1.01	1.02	1.03
$f(x)$	−32.3	−49	−99	?	101	51	34.3

نجد أنه كلما اقتربت x من اليمين نحو $x=1$ ، $f(x)$ تتزايد بدون حدود بمعنى أننا نستطيع أن نجعل $f(x)$ كبيرة حسب الرغبة باختيار x قريبة من 1 بالحد الكاف ولكنها أكبر من 1، مثل $x=1.00001$ حيث تكون $f(1.00001)=1.00001$ ، فنقول ،

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x-1}=\infty$$

أو $\frac{x}{x-1}\to\infty$ كلما $x\to 1^+$

الرمز ∞ (مالانهاية) لا يمثل عدد حقيقي، وإنما هو رمز اصطلاحى نستعمله لتبيان سلوك الدالة. و ثم على الرغم من أننا قد نقول كلما اقتربت x إلى 1 من اليمين، اقتربت $\frac{x}{x-1}$ من ∞ (أو تؤول إلى ∞).

إلا أننا لا نعنى أن ، $\lim_{x\to 1^+}[x/(x-1)]$ موجودة .

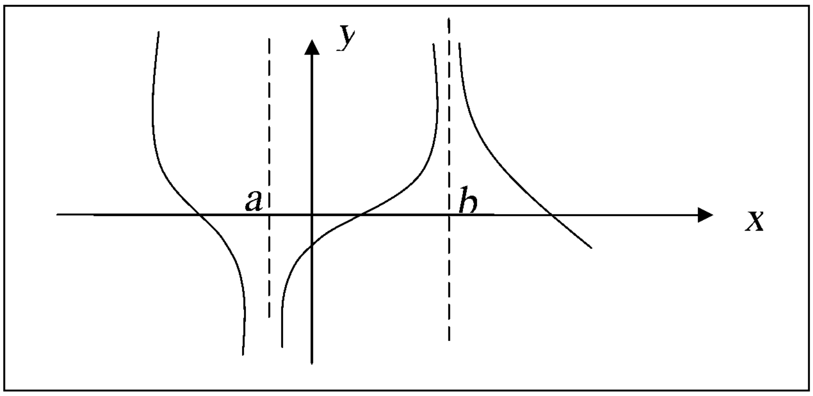
أما الرمز $(-\infty)$ (ناقص مالانهاية) فلنستعمل بأسلوب مشابه ليعطى دلالة على أن $f(x)$ تتناقص بدون حدود (تأخذ قيمة سالبة كبيرة جداً)

فمثلاً عندما $x=0.9999$ ، $f(0.9999)=-9999$ لذلك نقول أن،

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x-1} = -\infty$$

أو $\frac{x}{x-1} \to -\infty$ كلما $x \to 1^-$

لنعتبر الآن النهاية من الجانبين الموضحة في شكل (49) لدالة اختيارية



شكل (49)

f . نسمى الخطان $x = b$ ، $x = a$ خطوط رأسية تقاربية (Vertical Asymptotes) للدالة f . لاحظ أنه لأجل $f(x)$ تقترب من ∞، $x \to b$ من كلا الجانبين الأيمن والأيسر. ولأجل $f(x)$ تقترب من $-\infty$، $x \to a$ من كلا الجانبين الأيمن والأيسر.

إذا كانت نهاية $f(x)$ من أحد الجانبين هي ∞ ومن الجانب الآخر $-\infty$، كما في شكل (48)، نقول أن $\lim_{x \to a} f(x)$ غير موجودة.

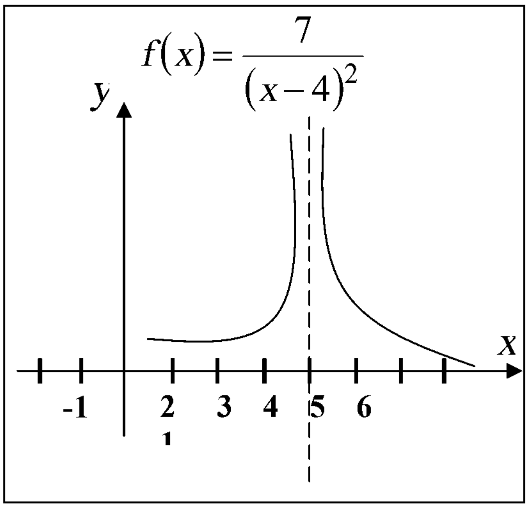
مثال (12):

أوجد $\lim_{x \to 4} \frac{7}{(x-4)^2}$ ، إذا كانت موجودة

الحـــل

إذا كانت x قريبة من 4، $x \neq 4$ ، فإن $(x-4)^2$ موجب وقريب من 0 .

من ثم، فمقلوب $(x-4)^2$، $\frac{1}{(x-4)^2}$، موجب ومتناهي في الكبر . لا يوجد عدد حقيقي



أيْ نهاية للمقدار $\frac{1}{(x-4)^2}$ أو $\frac{7}{(x-4)^2}$ محددة لما x تقترب من 4 النهاية إذن غير موجودة، لأننا نستطيع أن نجعل $\frac{7}{(x-4)^2}$ كبيرة كما نريد على حسب اختيار x قريبة بالقدر الكافي من 4. وبما أن $\frac{7}{(x-4)^2}$ تتزايد بدون حدود ، نكتب

$$\lim_{x\to 4}\frac{7}{(x-4)^2}=\infty$$

بيان الدالة $f(x)=\frac{7}{(x-4)^2}$ موضح في شكل (50) . الخط $x=4$ هو خط تقاربي رأسي للدالة f .

مثال (13):

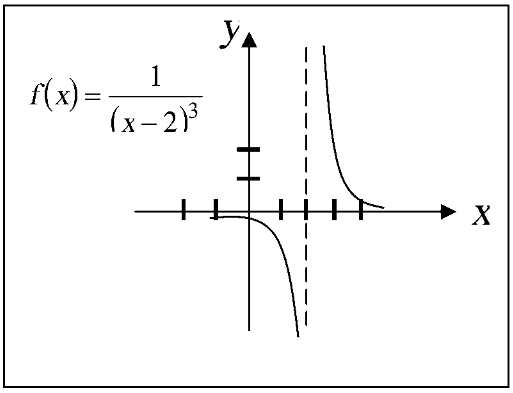
أوجد ما هو موجود من النهايات الآتية

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^3} \quad ، \quad \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^3} \quad ، \quad \lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3}$$

الحـــــل

في جميع الحالات الثلاث، النهاية غير موجودة لأن المقام يؤول إلى صفر عندما x تؤول إلى 2.

وبالتالي يؤول الكسر إلى قيمة غير محدودة.



شكل (51)

1) عندما x قريبة من 2 ، $x < 2$ ، $x - 2$ قريبة من 0

وسالب $\lim\limits_{x \to 2^-} \frac{1}{(x-2)^3} = -\infty$

2) عندما x قريبة من 2 ، $x > 2$ ، $x - 2$ قريبة من 0

وسالب $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{1}{(x-2)^3} = \infty$

3) لأن النهايتين من كل جانب أحدهما ∞ والأخرى $-\infty$، نستطيع استنتاج،

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{(x-2)^3} \to \text{غير موجودة}$$

بيان المعادلة $y = \frac{1}{(x-2)^3}$ مرسوم في شكل (51) . والخط $x = 2$ هو خط تقاربي رأسي .

نناقش الآن قطاع من الدوال تقترب قيمتها من عدد L عندما تصبح $|x|$ كبيرة جداً .

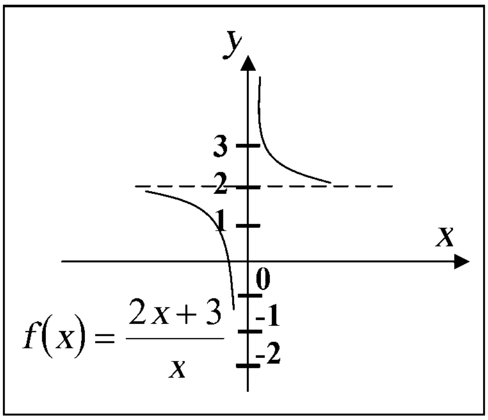
لنعتبر الدالة ، $f(x) = \frac{2x+3}{x}$ والموضح بيانها في شكل (52)

ولنكتب الدالة على الصورة

$$f(x) = 2 + \frac{3}{x}$$

واضح أنه من الممكن جعل $f(x)$ قريبة من 2 بقدر كاف باختيار x كبيرة بالقدر الكافي فنكتب ،

$$\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)=2$$



شكل (52)

وتذكر دائماً أن ∞ ليست عدد حقيقي وأنه لا يمكن التعويض عن x ، ∞، نحن نفكر في x بأنها تتزايد بدون حدود أو أنها عدد كبير جداً . فإذا جعلنا تتناقص بدون حدود ، أيْ جعلناها تأخذ قيمة سالبة متناهية في الكبر فإن $f(x)$ تؤول مرة أخرى إلى 2 .

فنكتب
$$\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)=2$$

ونصيغ الآن تعريفاً دقيقاً للنهاية عندما تزداد x بدون حدود .

<u>تعريف 1</u>

إذا كانت f معرفة في فترة لانهائية (c,∞)، c عدد حقيقي، L عدد حقيقي . فإن

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L$$

تعنى أنه لكل $\in>0$ ، يوجد عدد $M>0$ بحيث إذا كان $x>M$ ، فإن

$$|f(x)-L|<\in$$

تعريف 2

إذا كانت f معرفة في فترة لانهائية $(-\infty, c)$، c عدد حقيقي، L عدد حقيقي. فإن

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

تعنى أنه لكل $\in>0$ ، يوجد عدد $N<0$ بحيث إذا كان $x<N$ ، فإن

$$|f(x)-L|<\in$$

ومن النتائج الهامة التي نستعملها في هذا النوع من النهايات ،

1) $\lim_{x\to\pm\infty} c=c$ ، c أي عدد قياسي حقيقي .

2) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{c}{x^k}=0$ ، k أي عدد قياسي حقيقي .

وبشرط x^k معرفة دائماً .

مثال (14):

أوجد $$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+2x-1}{2x^2+3x+2}$$

الحـــــل

بقسمة البسط والمقام x وات أعلى أس ، x^2 ، نحصل على

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+2x-1}{2x^2+3x+2}= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(2+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{4+0-0}{2+0+0} \quad =2$$

وينتج أن $y=2$ هو خط تقارب أفقي لبيان الدالة $f=\frac{4x^2+2x-1}{2x^2+3x+2}$

مثال (15):

أوجد النهايتين ،

$$i)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-5}{3x^2+x+2} \qquad\qquad ii)\quad \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^4+3x-1}}{x^2+x+3}$$

الحـــل

(i

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-5}{3x^2+x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{5}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}$$

$$= \infty = \frac{2-0^+}{0^+ + 0^+ + 0^+} = \frac{2}{0^+}$$

(ii

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^4+3x-1}}{x^2+x+3}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^4+3x-1}}{x^2}}{\frac{x^2+x+3}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{3}{x^3}-\frac{1}{x^4}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4+0^+-0^+}}{1+0^+ + 0^+} = \frac{2}{1} = 2$$

الخط $y=2$ هو خط تقاربي أفقي لبيان الدالة .

تعريف (3)

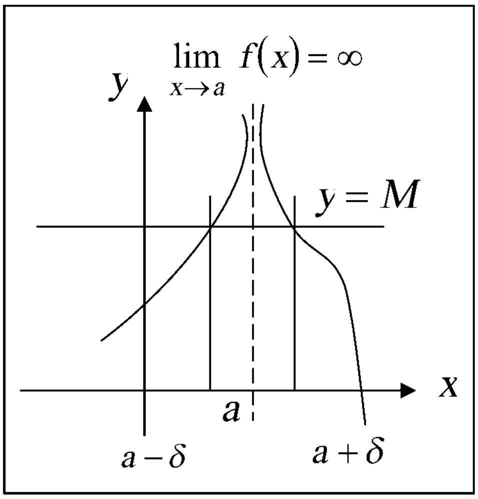
إذا كانت f معرفة في فترة مفتوحة تحتوى a، ماعدا أحياناً عند a، فإننا لو كتبنا

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

تعنى أنه لكل $M>0$، يوجد عدد $\delta>0$ بحيث إذا كان $0<|x-a|<\delta$، فإن

$$f(x)>M$$

وشكل (53) يوضح عناصر هذا التعريف ، كما يلي:



شكل (53)

خذ أي خط أفقي $y=M$ كما في الشكل (53).

إذا كان $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$، فإنه كلما كانت x في فترة مناسبة $(a-\delta,a+\delta)$، $x\neq a$، تكون نقط المنحنى الذي يبين f واقعة فوق الخط الأفقي.

ويمكن تغيير التعريف باستبدال $M>0$ بـ $N<0$ و $f(x)>M$ بـ $f(x)<N$ لنحصل على تعريف $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$

فإذا اتخذنا أيْ خط أفقي $y=N$ (N سالبة) ، فإن $gr(f)$ يقع أسفل هذا الخط كلما كانت x في فترة مناسبة $(a-\delta,a+\delta)$ ، $x\neq a$.

مثال (16):

أوجد النهايات الآتية :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x} \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x}$$

الحـــل

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x}}{3^x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+1-\dfrac{5}{3^x}}{\dfrac{4}{3^x}+3-\left(\dfrac{2}{3}\right)^x}$$

بما أن $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 0$ ، $\lim_{x\to\infty} 3^x = \infty$

إذن $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x} = \dfrac{0+1-0}{0+3-0} = \dfrac{1}{3}$

لإيجاد النهاية $x\to-\infty$ يمكننا استبدال x بـــ $-t$ ، $t\to\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2^x+3^x-5}{4+3^{x+1}-2^x} = \lim_{t\to\infty} \frac{\dfrac{1}{2^t}+\dfrac{1}{3^t}-5}{4+\dfrac{3}{3^t}-\dfrac{1}{2^t}}$$

بضرب البسط والمقام في 2^t

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^t - 5x2^t}{4 \times 2^t + 3\left(\frac{2}{3}\right)^t - 1}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{1 - 5x2^t}{4 \times 2^t - 1}$$

بالقسمة على 2^t

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{\frac{1}{2^t} - 5}{4 - \frac{1}{2^t}}$$

$$= \frac{0 - 5}{4 - 0} = -\frac{5}{4}$$

<u>**حل آخر**</u>

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2^x + 3^x - 5}{4 + 3^{x+1} - 2^x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2^x + 3^x - 5}{4 + 3 \times 3^x - 2^x}$$

باستعمال القاعدة $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$ ، $a > 1$

النهاية $= \dfrac{0 + 0 - 5}{4 + 3 \times 0 - 0} = -\dfrac{5}{4}$

تمارين 2-3

أوجد النهايات الآتية إن وجدت بدون استعمال التعريف وباستعمال المبرهنات.

1) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}} 6$

2) $\lim\limits_{x\to 1/2} (6x-2)^{20}$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{(x-2)^2}$

4) $\lim\limits_{x\to 3^-} x\sqrt{9-x^2}$

5) $\lim\limits_{x\to 6} \sqrt{3}$

6) $\lim\limits_{x\to -2} \left(3x^3-2x+7\right)$

7) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+5x+6}$

8) $\lim\limits_{x\to 5^+} \left(\sqrt{x^2-25+3}\right)$

9) $\lim\limits_{x\to -4} x$

10) $\lim\limits_{x\to 4} \left(5x^2-9x-8\right)$

11) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+8}{x^4-16}$

12) $\lim\limits_{k\to 2} \sqrt{3k^2+4}\,\sqrt[3]{3k+2}$

13) $\lim\limits_{x\to 3} x$

14) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}} \left(x^2+3\right)\left(4-x^2\right)$

15) $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$

16) $\lim\limits_{v\to 3} v^2(3v-4)\left(9-v^3\right)$

17) $\lim\limits_{x\to 4} 3x-4$

18) $\lim\limits_{t\to 3} (3t+4)(7t+9)$

19) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(1/x)-(1/2)}{x-2}$

20) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-7x+10}{x^6-64}$

21) $\lim\limits_{x\to -2} (-4x+2)$

22) $\lim\limits_{t\to \pi} (t-3.1416)$

23) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{(1/x)+(1/3)}$

24) $\lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{1}{h}\right)\left(\dfrac{3}{\sqrt{2+h}}-\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x-5}{4x+3}$$ (25

$$\lim_{x\to \pi} \left(\frac{x}{2}-\frac{11}{7}\right)$$ (26

$$\lim_{x\to 1} \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$$ (27

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}\right)$$ (28

$$\lim_{x\to 4} \frac{2x-1}{3x+1}$$ (29

$$\lim_{x\to 4} \frac{6x-1}{2x-9}$$ (30

$$\lim_{x\to 16} \frac{2\sqrt{x}+x^{3/2}}{\sqrt[4]{x}+5}$$ (31

$$\lim_{x\to -8} \frac{16x^{3/2}}{4-x^{4/3}}$$ (32

$$\lim_{x\to 1} (-2x+5)^4$$ (33

$$\lim_{x\to -4} \frac{4x^2-6x+3}{16x^2+8x-7}$$ (34

$$\lim_{x\to -4} \sqrt[3]{x^2-5x-4}$$ (35

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^5-1}$$ (36

$$\lim_{x\to -2} (3x-1)^5$$ (37

$$\lim_{x\to 1/2} \frac{2x^2-3}{6x^2-7x+2}$$ (38

$$\lim_{x\to -2} \sqrt{x^4-4x+1}$$ (39

$$\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{\frac{2+5x-3x^3}{x^2-1}}$$ (40

$$\lim_{x\to 3} (3x-8)^{100}$$ (41

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3-8}$$ (42

$$\lim_{x\to \pi} \sqrt[5]{\frac{x-\pi}{x+\pi}}$$ (43

$$\lim_{x\to 0} \frac{4-\sqrt{16+x}}{x}$$ (44

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$$ (45

$$\lim_{x\to -10^-} \frac{x+10}{\sqrt{(x+10)^2}}$$ (46

(47 $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{\sqrt[4]{x^2-16}}{x+4}$

(48 $\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{1+\sqrt{2x-10}}{x+3}$

(49 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{3x-2}}$

(50 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{3-x}}{x}$

(51 $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{2x+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$

(52 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1)^5-1^5}{x}$

(53 $\lim\limits_{x\to 1.5}\dfrac{1-[x]}{x-1}$

(54 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|+1}{[1+x]}$

(55 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{2}}{x^2-3x+2}$

(56 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

(57 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3^x-2^x}{x^3-x^2}$

(58 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\times 2^x-6^x+1}{x+1}$

(59 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9^x-4^x}{3^x-2^x}$

(60 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2 3x+7}{2x^2+x+3}$

(61 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3+2x^2-7}{6x+2x^3}$

(62 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4-7x}{2+3x}$

(63 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(3x+4)(x-1)}{(2x+7)(x+2)}$

(64 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+5x-3}{x^3+9}$

(65 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-x^3+3x}{2x^2-11}$

(66 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+2}{x-1}$

(67 $\lim\limits_{x\to \infty}\sqrt[3]{\dfrac{6+2x^2}{2x(x+7)}}$

(68 $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x-3}{\sqrt{x^2+1}}$

(69 $\lim\limits_{x\to \infty}\sin x$

(70 $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\cos x}{x+2}$

أوجد كل النهايات الآتية إذا كانت موجودة .

أ) $\lim_{x\to a^-} f(x)$ ب) $\lim_{x\to a^+} f(x)$ جـ) $\lim_{x\to a} f(x)$

71) $f(x)=\sqrt{5-x}\ ;\ a=5$ 72) $f(x)=\sqrt[3]{x^3-1}\ ;\ a=1$

73) $f(x)=\sqrt{8-x^3}\ ;\ a=2$ 74) $f(x)=x^{2/3}\ ;\ a=-8$

إذا كانت n عدد صحيح . ارسم بيان f وأوجد النهايتين

$$\lim_{x\to \overline{n}} f(x) \quad ، \quad \lim_{x\to a^+} f(x)$$

75) $f(x)=(-1)^n \quad , \quad n\le x<n+1$

76) $f(x)=n \quad , \quad n\le x<n+1$

77) $f(x)=\begin{cases} x & , \quad x=n \\ 0 & , \quad x\ne n \end{cases}$

78) $f(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x=n \\ 1 & , \quad x\ne n \end{cases}$

79) $f(x)=[x]$ 80) $f(x)=-[x]$

81) $f(x)=x-[x]$ 82) $f(x)=[x]-x$

استعمل مبرهنة سندويتش لتحقيق النهاية المعطاة $(83 \leftarrow 86)$

83) $\lim_{x\to 0}\left(x^2+1\right)=1$ 84) $\lim_{x\to 0}\dfrac{|x|}{\sqrt{x^4+4x^2+7}}$

85) $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ 86) $\lim_{x\to 0} x^4\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)=0$

87) إذا كانت $0\le f(x)\le c$ لعدد حقيقي c . اثبت أن $\lim_{x\to 0} x^2 f(x)=0$

88) اذكر سبب ما يأتي ،

أ) $\lim\limits_{x\to 0} \ x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \neq \left(\lim\limits_{x\to 0} x\right)\left(\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}\right)$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}+x\right) \neq \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to 0} x$

89) إذا كان $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

اثبت أن $\lim\limits_{x\to a} \left[\,f(x)/g(x)\right]$ غير موجودة .

(إرشاد : أفرض وجود عدد M بحيث $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}=M$

واعتبر أن $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x).g(x)}{g(x)}$

90) أوجد النهايتين

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ ، $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

91) أوجد ،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4^x-3^{x+1}+5}{2^{2x-1}+12}$$

في التمارين من (92) إلى (99) أوجد النهايات الآتية على شكل ∞ ، $-\infty$ أو DNE (اختصار كلمة Does not exist وتعني غير موجودة) .

أ) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ جـ) $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

92) $f(x)=\frac{3}{x-4}\ ,\ a=4$ 93) $f(x)=\frac{5}{2-x}\ ,\ a=2$

(94 $f(x)=\frac{8}{(2x+5)^3}, a=-\frac{5}{2}$

(95 $f(x)=\frac{-4}{7x+3}, \; a=-\frac{3}{7}$

(96 $f(x)=\frac{3x^2}{(2x-9)^2}, \; a-\frac{9}{2}$

(97 $f(x)=\frac{2x^2}{x^2-x-2}, \; a=-1$

(98 $f(x)=\frac{1}{x(x-3)^2}, \; a=3$

(99 $f(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}, \; a=-1$

في التمارين من (100) إلى (103) الدالة f تحقق الشروط المعطاة، ارسم الشكل الممكن للدالة f ، مفترضاً أن بيانها لا يقطع أي خط تقارب أفقي .

(100 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=1$

، $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\infty$

(101 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-1$

، $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\infty$ ، $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$

(102 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=2$

، $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\infty$ ، $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=-\infty$

، $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\infty$ ، $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$

(103 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=3$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$

، $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\infty$ ، $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$

، $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=\infty$

في التمارين (104) إلى (117) أوجد الخطوط التقاربية الرأسية والأفقية .

(104 $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$

(105 $f(x)=\dfrac{1}{x^3+x^2-6x}$

(106 $f(x)=\dfrac{5x}{4-x^2}$

(107 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{16-x^2}$

(108 $f(x)=\dfrac{3x}{x+1}$

(109 $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{x^2+2x-3}$

(110 $f(x)=\dfrac{3x^3}{(x^2+1)(x-1)}$

(111 $f(x)=\dfrac{x^2-5x}{x^2-25}$

(112 $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-16}$

(113 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{16-x^2}}{4-x}$

(114 $f(x)=1+\sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}$

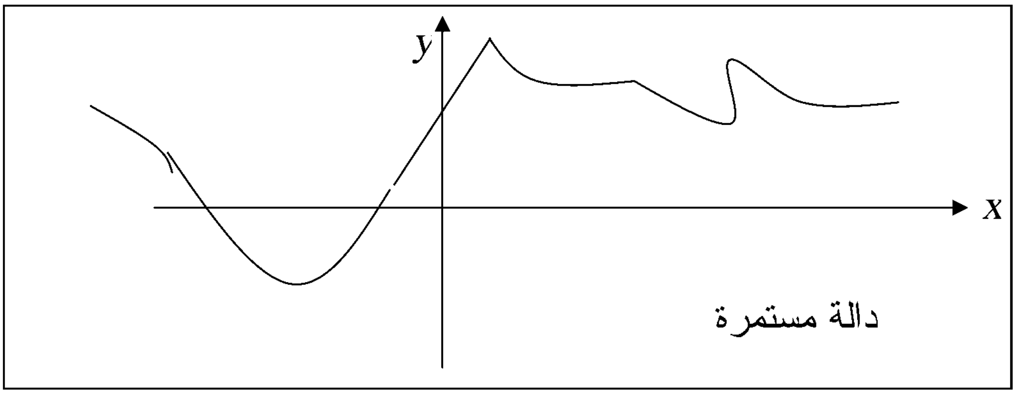
(115 $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2+3x-5}}$

(116 $f(x)=\left|\dfrac{-x^3+8}{x(x-1)(x+2)}\right|$

(117 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+7x+12}}{1-\sqrt{x^2-3}}$

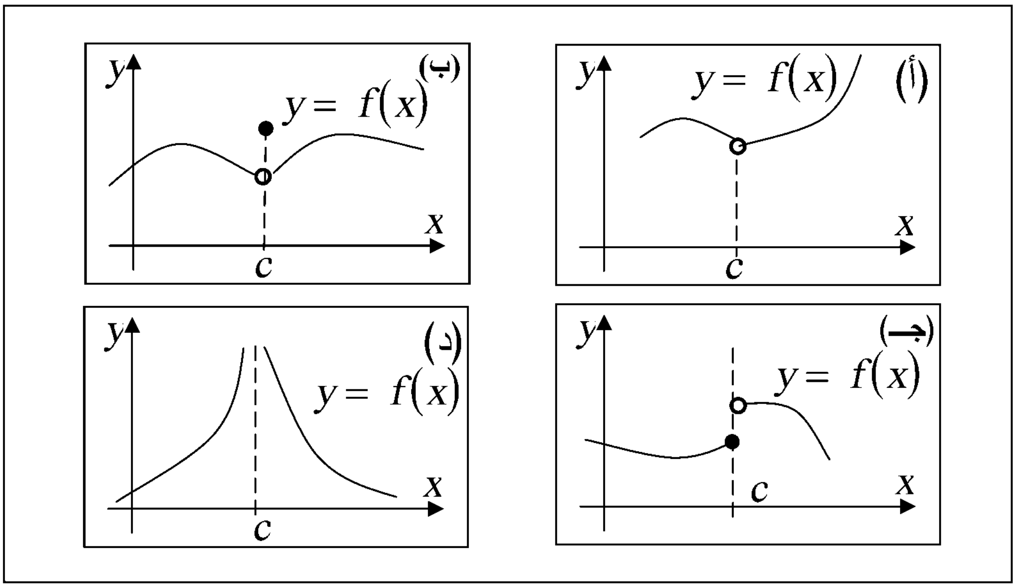
بند 2−4 الدوال المستمرة **Continuous functions**

الدالة المستمرة أو المتصلة هي الدالة التي يخلو بيانها من كسور أو فجوات أو خطوط تقارب رأسية ، فبيانها عبارة عن منحنى متصل ليس به أىْ تقطعات مثل الموضح في شكل (54)



شكل (54)

أما بيانات الدالة الموضحة في شكل (55) فهي بيانات لدالة غير مستمرة (غير متصلة) عند $x = c$.



شكل (55)

ففي شكل (55(أ)) $f(c)$ غير معرفة وفي شكل (55(ب)) $f(c)$ معرفة إلا أن $\lim_{x\to c} f(x) \neq f(c)$ أما في شكل (55(جـ)) فإن $\lim_{x\to c} f(x)$ غير موجودة وأخيراً في شكل (55(د)) $f(c)$ غير معرفة بالإضافة إلى أن $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ وبيان $f(x)$ لن يكون من هذه الأنواع إذا حققت f ثلاثة شروط نذكرها في التعريف الآتي

<u>**تعريف:**</u> "دالة f تكون مستمرة عند عدد c إذا تحققت الشروط الثلاثة الآتية.

(أ) $f(c)$ تكون معرفة . (ب) $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة .

(جـ) $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$"

أيْ أن شروط استمرارية الدالة عند c ممكن كتابتها على النحو:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = f(c) =$$ قيمة معرفة

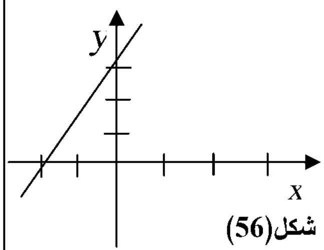
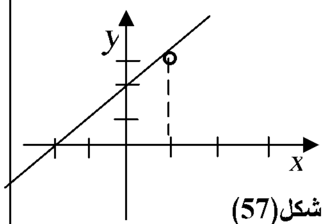
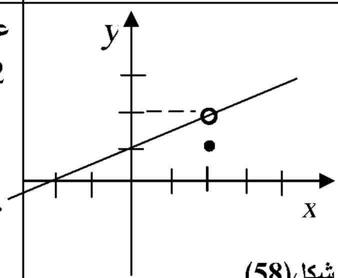
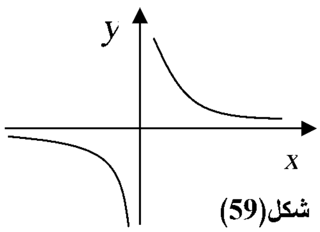
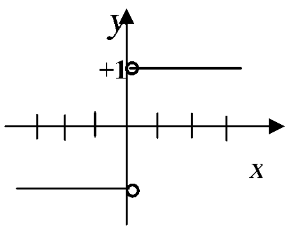
فالشرط (جـ) يكفى لإيضاح أن f مستمرة عند c، لان إذا كانت $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ فهي يعنى أن $f(c)$ لابد معرفة وان النهاية $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة . والشرطان (أ) ، (ب) يتحققان أوتوماتيكيا.

ويطلق على عدم الاستمرار عند c الموضحان في شكل (55(أ) ،(ب)، <u>عدم استمرار قابل للإزالة</u> removable discontinuity لأنه من الممكن إزالة عدم الاستمرار بتعريف الدالة بقيمة مناسبة .

أما في شكل (55(جـ)) فتسمى <u>قفزة عدم استمرارية</u> jump discontinuity.

إذا كان $f(x)$ تؤول إلى ∞ أو $-\infty$ عندما تؤول x إلى c من الجانبين كما في شكل (55(د)) نقول أن للدالة <u>عدم استمرارية لانهائية</u> عند c Infinite discontinuity

فيما يلي نذكر بعض الدوال ونناقض استمراريتها على سبيل التوضيح .

الدالـــــــة	بيـــــــانها	استمـــراريتها
$f(x)=2x$	 شكل(56)	لكل قيمة c ، $\lim\limits_{x\to c} f(x)=2c= f(c)$ الدالة مستمرة
$f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$	 شكل(57)	عند $c=1$ ، نجد $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ إذن الدالة لها ،عدم استمرارية قابلة للإزالة إذا عرفنا ، $f(1)=3$.
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{2(x-2)} & , x\neq 2\\ 1 & , x=2\end{cases}$	 شكل(58)	عند $c=2$ ، نجد $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=2$ $f(2)=1$ $\therefore$ يوجد عند $c=2$ عدم استمرارية قابلة للإزالة لوعرفنا، $f(2)=2$ بدلا من 1
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	 شكل(59)	عند $c=0$ $\lvert f(x)\rvert$ يكون لانهائي بطريقة اختيارية كلما اقتربت من 0 الدالة عند 0 لها عدم استمرارية لانهائية .
$f(x)=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$	 شكل(60)	عند $c=0$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=1,\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$ النهايتان غير متساويتان. إذن يوجد قفزة عدم استمرار عند $c=0$ (مقدار القفزة =2)

مبرهنة:

" 1)كثيرة الحدود f هو دالة مستمرة لكل عدد حقيقي c

2) خارج قسمة q لكثيري حدود f ، g،أي $q=\dfrac{f}{g}$ هو دالة مستمرة عند كل عدد حقيقي c ماعدا الذي يحقق الشرط $g(c)=o$ "

والبرهان منطقي لأن إذا f كثير حدود، c عدد حقيقي، فإن $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

وإذا كان $g(c)\neq 0$ ، فان c في نطاق $q=\frac{f}{g}$ ويكون $\lim\limits_{x\to c} f(x)=q(c)$ ،

أي q مستمرة عند c.

مثال (1)

إذا كانت، $f(x)=|x|+|x-1|$

أثبت أن $f(x)$ مستمرة عند أي عدد حقيقي c.

الحـــل:

بيان f موضح في الشكل (61)

إذا كانت $x<0$ فإن

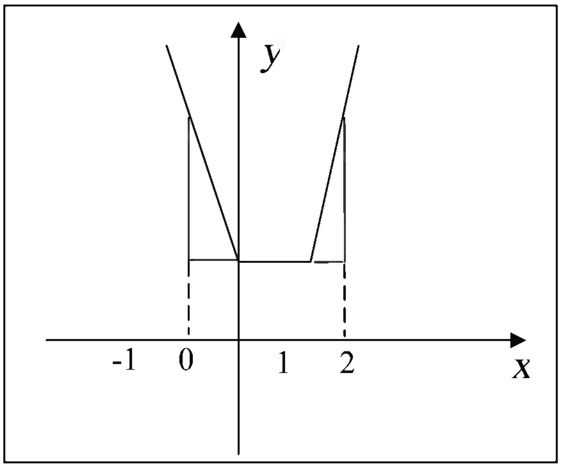
$$f(x)=-x-(x-1)$$
$$=-2x+1$$

وإذا كانت $0<x>1$ فإن

$$f(x)=x-(x-1)$$
$$=1$$

وإذا كانت $x>1$ فإن

$$f(x)=x+x-1$$
$$=2x-1$$



شكل (61)

وبما أن جميع أجزاء $f(x)$ هي كثيرات حدود مستمرة عند أي نقطة في الفترة المعرف الأ الجزء، بقي أن ندرس الاستمرارية عند $x=0$ وعند $x=1$ عند $x=0$

عند $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0} -2x+1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0} 1=1$$

$$f(0)=|0|+|0-1|$$
$$=1$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=0$

وعند $x=1$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 1=1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} 2x-1=1$$

$$f(1)=|1|+|1-1|$$

$$=1$$

$\therefore$الدالة مستمرة عند $x=1$

وينتج أن الدالة f عند أيْ عدد حقيقي c.

مثال (2)

ابحث استمرارية الدالة

$$f(x)=\begin{cases} [x] & , \quad 2\le x<3 \\ x^2-2 & , \quad x<2 \\ x-1 & , \quad x>3 \end{cases}$$

الحـــــل:

نعلم أن $[x]=2$ عند أية نقطة في الفترة $2 \le x < 3$

إذن يمكن كتابة الدالة على النحو

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2 & x<2 \\ 2 & 2 \le x < 3 \\ x-1 & x>3 \end{cases}$$

وكل جزء من الدالة مستمر في الفترة المعرف بها.

بقى أن نبحث استمرارية الدالة عند $x=2$ وعند $x=3$.

عند $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(x^2-2\right)=2$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2} 2=2$$

$$f(2)=2$$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=2$.

عند $x=3$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3}\left(x^2-2\right)=2$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3} 2=2$$

$$f(3)=2$$

الدالة مستمرة عند $x=3$

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة على جميع الأعداد الحقيقية R .

مثال (3)

ابحث استمرارية الدالة

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x \notin (-2,2) \\ \dfrac{x}{2} & x \in (-2,2) \end{cases}$$

الحـــــل:

عندما x لا تنتمي إلى $(-2,2)$ أيْ $x \geq 2$ ، و $x \leq -2$

عندما $x \geq 2$ ، يكون

$$\frac{|x|}{x} = \frac{+x}{x} = +1$$

وعندما $x \leq 2$ يكون

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

يمكننا إذن إعادة صياغة الدالة على النحو

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -2 \\ x/2 & -2 < x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

<u>وعند $x = -2$</u>

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2} (-1) = -1$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to -2} x/2 = -1$$

$$f(2) = 1$$

إذن الدالة مستمرة عند $x = -1$

<u>وعند $x = 2$</u>

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2} x/2 = 1$$

$$\lim_{x \to -2+} f(x) = \lim_{x \to 2} 1 = -1$$

$$f(-2) = -1$$

$$x = 2$$

$\therefore$ الدالة مستمرة أيضاً عند $x = 2$

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة على جميع الأعداد الحقيقية R .

مثال (4)

أوجد النقط التي تكون عندها الدالة $f(x)$ غير مستمرة.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+1|}{x+1} & x>0\\ 1 & x=0\\ \dfrac{x^3+8}{x+2} & x<0\end{cases}$$

الحـــــل:

عند $x>0$ تكون $1=\dfrac{x+1}{x+1}=\dfrac{|x+1|}{x+1}$

الدالة مستمرة على هذه الفترة (نقطة عدة الاستمرار $x=-1$ لا تقع داخل هذه الفترة)

عند $x<0$ تكون الدالة $\dfrac{x^3+8}{x+2}$ غير مستمرة

عند النقطة $x=-2$ لأن،

غير موجودة $f(-2)=\dfrac{0}{0}=$

ومستمرة على بقية الفترة.

عند $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+8}{x+2}=4$$

$$\lim_{x\to -0+} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{|x+1|}{x+1}=1$$

$$f(0)=1$$

$\therefore$ الدالة مستمرة أيضاً عند $x=0$

$\therefore$ $f(x)$ غير مستمرة فقط عند $x=2$ ، $x=0$.

مثال (5)

ابحث استمرارية الدالة

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right) & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$$

عند $x=0$

الحـــــل:

نبحث نهاية الدالة عند $x\to 0$ ، ويناسبنا هنا استعمال مبرهنة الحصر (السندوتش).

$$-1<\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)<1$$

ضرب في x^2 ، لأنها دائماً موجبة، $x\neq 0$

$$-x<x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x}}<x^2$$

عندما تؤول x إلى صفر

$$0<x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x}}<0$$

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

ومعطى أن $f(0)=0$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x=0$.

مثال (6)

أوجد قيمتي a ، b اللتان تجعلان الدالة $f(x)$ مستمرة عند a .

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-a^2}{x-a} & , \quad x<a\\ 5 & , \quad x=a\\ bx+ax^2 & , \quad x>a\end{cases}$$

حيث a ، b عددان حقيقيان.

الحـــل:

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}(x+a)$$
$$=2a$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a} bx+ax^2$$
$$=ab+a^3$$
$$f(a)=5$$

ولكي تكون $f(x)$ مستمرة عند a،

$$\lim_{x\to a^-} f(x)= f(a)= \lim_{x\to a^+} f(x)$$
$$2a=5=ab+a^3$$
$$\Rightarrow \qquad a=\frac{5}{2}, \quad 5=\frac{5}{2}b+\frac{125}{8}$$
$$b=-\frac{17}{4} \qquad \frac{5}{2}b=-\frac{85}{8}$$

تعريف :

إذا كانت f دالة معرفة على فترة مغلقة $[a,b]$ فإن f تكون مستمرة على $[a,b]$ إذا كانت مستمرة على (a,b) بالإضافة إلى أن،

$$\lim_{x\to a^+} f(x)= f(a) \quad ، \quad \lim_{x\to b^-} f(x)= f(b)$$

مثال (7)

اثبت أن الدالة $f(x)=\sqrt{8x-x^2}$ مستمرة على الفترة المغلقة $[0,8]$.

الحـــــل:

شكل (62) يوضح بيان الدالة

$$f(x)=\sqrt{8x-x^2}$$

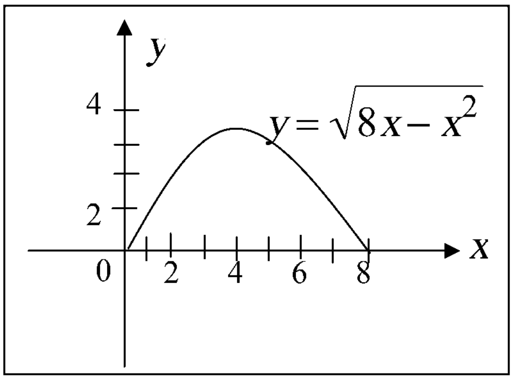
إذا كانت $0<c<8$،

فإن $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c}\sqrt{8x-x^2}$

$$=\sqrt{8c-c^2}$$

$$=\sqrt{(8-c)c}$$

$$= f(c)$$



شكل (62)

(لأن إذا كان للدالة $g(x)$ نهاية عند $x=c$ فإن

$$\lim_{x\to c}\sqrt{g(x)}=\lim_{x\to c}\sqrt{g(x)}$$

بشرط أن، $\lim_{x\to c} g(x)>0$،

لإذن الدالة مستمرة عند c ويبقى لنا مرجاعة النقطتين الحديتين للفترة $[0,8]$ باستعمال النهايات من جانب واحد.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{8x - x^2} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x(8-x)}$$
$$= \sqrt{0^+ \times 8} = 0 = f(0)$$
$$\lim_{x\to 8^-} f(x) = \lim_{x\to 8^+} \sqrt{8x - x^2}$$
$$\lim_{x\to 8^-} \sqrt{x(8-x)} = \sqrt{8 \times 0^+}$$
$$= 0 = f(8)$$

إذن الدالة مستمرة من اليمين عند $x = 0$ ومن اليسار عند $x = 8$. ومن التعريف السابق ينتج أن الدالة f مستمرة على الفترة $[0,8]$.

يمكننا تعريف الاستمرارية على الفترة $[a,b)$ أ، $[a,\infty)$ إذا كانت f مستمرة عند $x > a$ في الفترة بالإضافة إلى استمراريتها عند a. كذلك f تكون مستمرة على الفترة $(a,b]$ أ، $(\infty,b]$ إذا كانت مستمرة على كل نقطة في الفترة، $x < b$. ومستمرة عند $x = b$. وإذا كانت الدالتان f ، g مستمرتان عند عدد حقيقي c،

فإن الدوال الآتية مستمرة هي الأخرى عند c،

$f + g$ ، $f - g$ ، fg وكذلك f/g بشرط $g(c) \neq 0$.

نذكر هنا أيضاً عدة مبرهنات يمكن للقارئ برهنتها بسهولة باستعمال مبرهنات النهايات وهي.

1) إذا كان $\lim\limits_{x\to} g(x) = b$ ، كانت f مستمرة b

فإن

$$\lim_{x\to} f(g(x)) = f(b)$$
$$= f\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

وينتج من هذه المبرهنة أن،

$$\lim_{x\to c} \sqrt[n]{g(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} g(x)}$$

و $$\lim_{x\to c} \sin(g(x)) = \sin\left(\lim_{x\to c} g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to c} (\log_a f(x)) = \log_a\left(\lim_{x\to c} f(x)\right)$$

وهكذا.

2) إذا f مستمرة عند c، و g مستمرة عند $f(c)$ فإن الدالة التركيبية gof مستمرة عند c.

أيْ أن،

$$\lim_{x\to c} g(f(x)) = g\left(\lim_{x\to c} f(x)\right) = g(f(c))$$

فإذا كان $g(x) = |x|$ ، $f(x) = 3x^2 - 7x - 12$

المستمرتان دائماً . فإن $k(x) = g(f(x))$

أيْ $k(x) = (gof)(x)$ مستمرة أيضاً دائماً.

أي أن الدالة $k(x) = \left|3x^2 - 7x - 12\right|$ مستمرة

دائماً (أيْ عند أية قيمة حقيقية c).

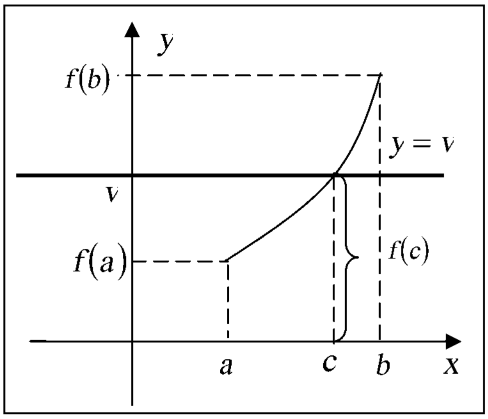
3) إذا f مستمرة على فترة مغلقة $[a,b]$، v أيْ عدد بين $f(a)$ و $f(b)$ ، فإنه يوجد على الأقل عدد واحد c في $[a,b]$ بحيث يكون،

$$f(c) = v$$

المبرهنة رقم (3) تسمى مبرهنة القيمة الوسطى

"وتنص على أنه بينما تتغير x من a إلى b فإن الدالة المستمرة f تأخذ كل القيم بين $f(a)$ و $f(b)$."

أيْ إذا كان بيان الدالة المستمرة f ممتدا باتصال وبدون كسور من نقطة $(a, f(a))$ إلى نقطة $(b, f(b))$، كما هو واضح في شكل (63) فإن لكل عدد v بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يقطع الخط الأفقي $y=v$ بيان f على الأقل نقطة واحدة p . الإحداثي x أيْ c لنقطة p يكون عنده $.v=(f(c))$



شكل (63)

ويتبع من مبرهنة القيمة الوسطى أنه إذا كان $f(a)$ و $f(b)$ مختلفين في الإشارة فإنه يوجد عدد c يقع بين a ، b بحيث، $f(c)=0$ أيْ أن f لها جذر أو صفر عند c

وتساعدنا مبرهنة القيمة الوسطى في إيجاد مواضع أصفار الدالة f فمثلاً إذا كان، $f(x)=x^5+2x^4-6x^3+2x-3$

وحسبنا قيم f عند الأعداد الصحيحة من 4− إلى 2 كما يلي،

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-139	72	41	2	-3	-4	17

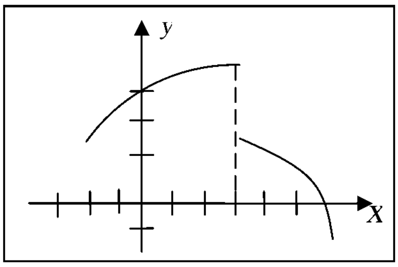
بما أن $f(x)$ كثير حدود فهو إذن مستمر لجميع x ومن مبرهنة القيمة الوسطى نجد أن f لها أصفار c_1 ، c_2 ، c_3 حيث $-4<c_1<-3$ ، $-1<c_2<0$ ، $1<c_3<2$

أيْ أن للدالة f ثلاثة أصفار حقيقية في الفترة $[-4,2]$

تمارين 2 – 4

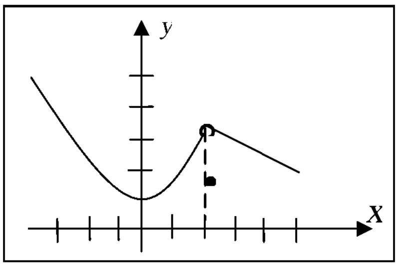
في التمارين من (1) إلى (8) معطى والمطلوب معرفة نوع عدم الاستمرارية، قابلة للإزالة أو قفزة أم لانهائية.

1)



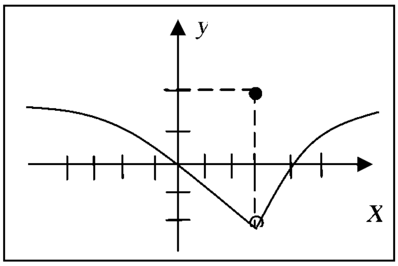
شكل (63)

2)



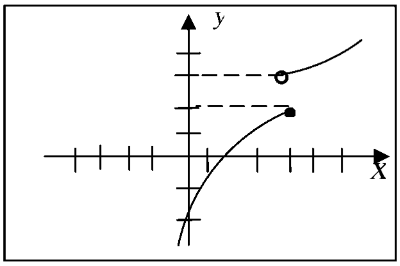
شكل (64)

3)



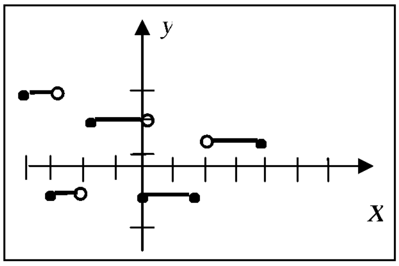
شكل (65)

4)



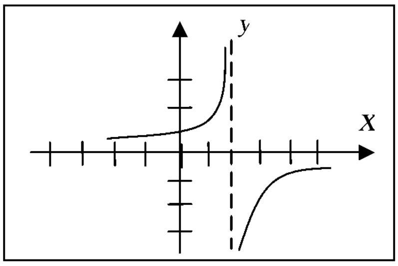
شكل (66)

5)



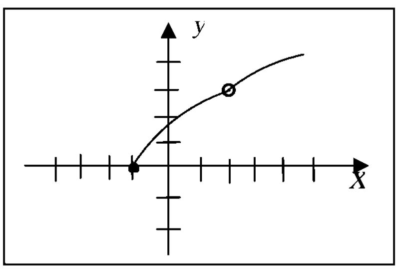
شكل (67)

6)



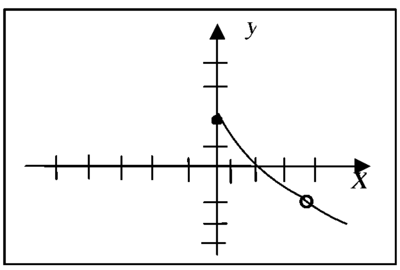
شكل (68)

7)



شكل (69)

8)



شكل (70)

في التمارين من (9) إلى (18) صنف عدم الاستمرارية لــ f قابلة للإزالة، قفزة أم لانهائية.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & ; \quad x<1 \\ 3-x & ; \quad x\geq 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f(x)=\begin{cases} 1+x^3 & ; \quad x\leq 1 \\ 2x-1 & ; \quad x>1 \end{cases} \quad (10)$$

$$f(x)=\begin{cases} |x+3| & ; \quad x\neq -2 \\ 2 & ; \quad x=-2 \end{cases} \quad (11)$$

$$f(x)=\begin{cases} |x-2| & ; \quad x\neq 2 \\ 3 & ; \quad x=2 \end{cases} \quad (12)$$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ; \quad x<1 \\ 2 & ; \quad x=1 \\ x & ; \quad x>1 \end{cases} \quad (13)$$

$$f(x)=\begin{cases} 3-x^2 & ; \quad x<1 \\ 1 & ; \quad x=1 \\ x+1 & ; \quad x>1 \end{cases} \quad (14)$$

$$f(x)=\frac{x^2}{|x|} \quad (15)$$

$$f(x)=|x-1|+[x] \quad (16)$$

$$f(x)=x^{-\frac{1}{3}}\sin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-x^2\right)\right) \quad (17)$$

$$f(x)=\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{(x-1)^2} \quad (18)$$

في التمارين من (19) إلى (30) ابحث استمرارية الدالة عند a .

$$f(x)=\sqrt{2x-5}+3x \ , a=4 \quad (19)$$

$$f(x)=\frac{3}{x+2} \ , a=-2 \quad (20)$$

$$f(x)=\frac{1}{x-2} \ , a=2 \quad (21)$$

$$f(x)=\sqrt{x^2+2} \ , a=-5 \quad (22)$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & ; x\neq 3\\ 4 & ; x=3\end{cases} \quad , a=3 \qquad (23)$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3} & ; x\neq -3\\ 2 & ; x=-3\end{cases} \quad , a=-3 \qquad (24)$$

$$f(x)=3x^2+7-\frac{1}{\sqrt{-x}} \quad , a=-2 \qquad (25)$$

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 3\\ 0, & x=3\end{cases} , a=3 \qquad (26)$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-2|}{x-2} & , x\neq 2\\ 1 & , x=2\end{cases} , a=2 \qquad (27)$$

$$f(x)=\frac{3\sqrt{x}}{2x+1} ; \; x=8 \qquad (28)$$

$$f(x)=\begin{cases}(\sin)/x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases} \quad a=0 \qquad (29)$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{x} & , x\neq 0\\ 1 & , x=0\end{cases} , a=0 \qquad (30)$$

أوجد نقط عدم استمرار الدالة f في تمارين (31) حتى (34) :

$$f(x)=\frac{x}{x^2+3x-10} \quad (31) \qquad\qquad f(x)=\frac{3}{3x^2-11x+8} \quad (32)$$

$$f(x)=\frac{(x-1)}{2x^2+x-3} \quad (33) \qquad\qquad f(x)=\sqrt{\frac{2x^2+1}{x^2-1}} \quad (34)$$

اثبت أن الدالة f مستمرة على الفترة المعطاة في التمارين من (35) إلى (42).

(35) $[-3,3]$ $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

(36) $[4,8]$ $f(x)=\sqrt{x-4}$

(37) $(-\infty,7]$ $f(x)=\sqrt{7-x}$

(38) $(0,\infty)$ $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(39) $[1,2)$ $f(x)=x-[x]$

(40) $(2,3)$ $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

(41) $[0,3]$ $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$

(42) $[2,3)$ $f(x)=\dfrac{x+1}{[x+1]}$

في التمارين من (43) إلى (62) أوجد قيم c التي تكون عندها الدالة f مستمرة عند $x=2$.

(43) $f(x)=\dfrac{3x+11}{2x^2-x-3}$ (44) $f(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$

(45) $f(x)=\sqrt{3x-2}+x^2+1$ (46) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-8}}$

(47) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (48) $f(x)=\dfrac{|x+5|}{x+5}$

(49) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+x+1}$ (50) $f(x)=\dfrac{2}{x^3-x}$

(51) $f(x)=\dfrac{3x+5}{x(x^2+3x-4)}$ (52) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4}\sqrt{9-x^2}}{(2x-1)}$

(53) $f(x)=\sqrt{\dfrac{9-x}{x-6}}$ (54) $f(x)=\sec\dfrac{1}{3}x$

(55) $f(x)=\tan 2x$ (56) $f(x)=1+\cot x$

(57) $f(x)=\sin|x|$ (58) $f(x)=\sqrt{(2+x)(3-x)}$

(59) $f(x)=2x^4-\sqrt[3]{x+1}$ (60) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^4-16}$

(61) $f(x)=\dfrac{|x^2-16|}{x^2-16}$ (62) $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x^2-2x}$

في التمارين من (63) إلى (68) أوجد قيم الثوابت الحقيقية c، d التي تجعل f مستمرة على R.

(63)
$$f(x)=\begin{cases} cx^2-3 & ,x\le 2 \\ cx+2 & ,x>2 \end{cases}$$

(64)
$$f(x)=\begin{cases} c^2x-3 & ,x<1 \\ 3cx-2 & ,x\ge 1 \end{cases}$$

(65)
$$f(x)=\begin{cases} c & ,x\le -3 \\ \dfrac{9-x^2}{4-\sqrt{x^2+7}} & ,|x|<3 \\ d & ,x\ge 3 \end{cases}$$

(66)
$$f(x)=\begin{cases} 4x & ,x\le -1 \\ cx+d & ,-1<x<2 \\ -5x & ,x\ge 2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & ,x\le c \\ x^2 & ,c<x\le d \\ cx+d & ,x>d \end{cases} \qquad (67)$$

$$f(x)=\begin{cases} x+c & ,x<c \\ d & ,x=2 \\ cx+d & ,x>2 \end{cases} \qquad (68)$$

في التمارين من (69) إلى (74) حقق مبرهنة القيمة الوسطى للدالة f في الفترة المذكورة $[a,b]$ أيْ وضح أنه إذا كان $f(a)\le v\le f(b)$ فإنه يوجد عدد c في $[a,b]$ بحيث $f(c)=v$.

$$f(x)=x^3+1 \ ; \ [-1,2] \qquad (69)$$

$$f(x)=2x-x^2 \ ; \ [-2,-1] \qquad (70)$$

$$f(x)=\sqrt{9-x^2} \ ; \ [0,3] \qquad (71)$$

$$f(x)=-x^3 \ ; \ [0,2] \qquad (72)$$

$$f(x)=x^2-x \ ; \ [1,3] \qquad (73)$$

$$f(x)=x^2+x-2 \ ; \ \left[-\frac{1}{2},1\right] \qquad (74)$$

(75) اثبت أن المعادلة $x^5-3x^4-2x^3-x+1=0$ لها حل حقيقي في الفترة $(0,1)$.

(76) استخدم مبرهنة القيمة الوسطى لتثبت أن بياني الدالتين $f(x)=x^4-5x^2$ و $g(x)=2x^3-4x+6$ يتقاطعان بين $x=3$ و $x=4$.