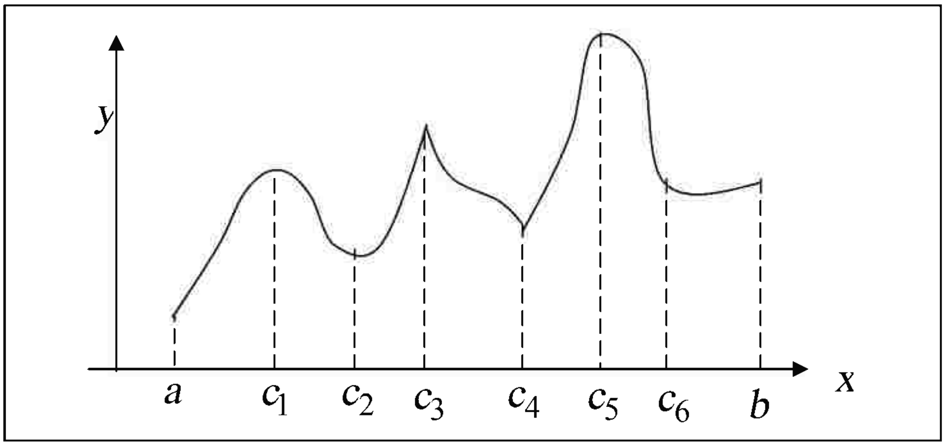
الباب الخامس

الحدود القصوى للدوال

بند 5-1: الحدود القصوى للدوال Extreme of functions

إذا كان شكل (88) يمثل كمية فيزيائية y مثل درجة الحرارة أو مقاومة كهربية أو ضغط الدم أو مقدار مادة كيميائية في محلول أو غيرهم وتغيرها مع الزمن x . في الفترة $[a,b]$



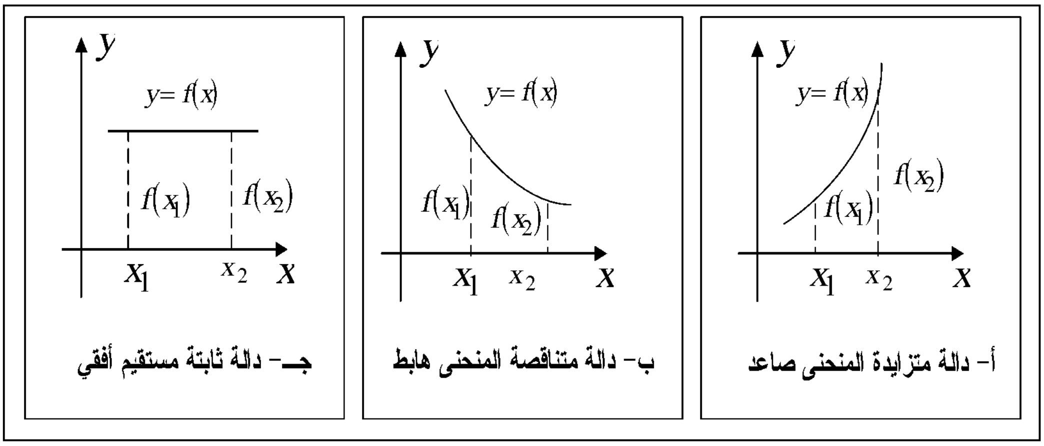
شكل (88)

يتضح من الشكل أن y تتزايد في الفترات $[a,c_1]$ ، $[c_2,c_3]$ ، $[c_4,c_5]$ ومتناقصة خلال الفترات $[c_1,c_2]$ ، $[c_3,c_4]$ ، $[c_5,c_6]$ وثابتة في الفترة $[c_6,b]$

وهذه التزايدات والتناقصات تحدث في جميع الدوال. وفيما يلي نعطي تعريفا دقيقاً لمعنى التزايد والتناقص.

تعريف: " إذا كان f دالة معرفة على فترة I ، x_1 ، x_2 عددين في I .
فإن:
أ- f تزايدية على I إذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$.
ب- f تناقصية على I إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ عندما $x_1 < x_2$.
جـ- f ثابتة على I إذا كان $f(x_1) = f(x_2)$ لكل x_1 ، x_2 .

وشكل (89) يوضح بيان التعريف السابق. حيث نرى في شكل (89-أ) أن الدالة المتزايدة بيانها صاعدا كلما زادت x .
وفي شكل (89-ب) أن الدالة المتناقصة وبيانها هابطا كلما زادت x .
أما شكل (89-جـ) فالدالة ثابتة وبيانها مستقيم أفقي.



شكل (89)

إذا رجعنا لشكل (88) وركزنا على الفترة $[c_1, c_4]$ نجد أن الكمية الفيزيائية y تبلغ أكبر قيمة لها (نهاية عظمى) عند c_3 وأصغر قيمة لها (نهاية صغرى) عند c_2. كما توجد قيم كبرى وقيم صغرى مختلفة في الفترات الأخرى. وإذا اعتبرنا الفترة $[a, b]$ بكاملها نجد أن النهاية العظمى تحدث عند c_5. والنهاية الصغرى عند a. ولذلك نعرف النهاية العظمى والنهاية الصغرى لدالة f على النحو التالي

<u>**تعريف:**</u> إذا كان f دالة معرفة على مجموعة S من الأعداد الحقيقية، c عدد في S.

أ- $f(c)$ تكون نهاية عظمى لـ f على S، إذا كان $f(c) \geq f(x)$ لكل x في S.

ب- $f(c)$ تكون نهاية صغرى لـ f على S، إذا كان $f(c) \leq f(x)$ لكل x في S.

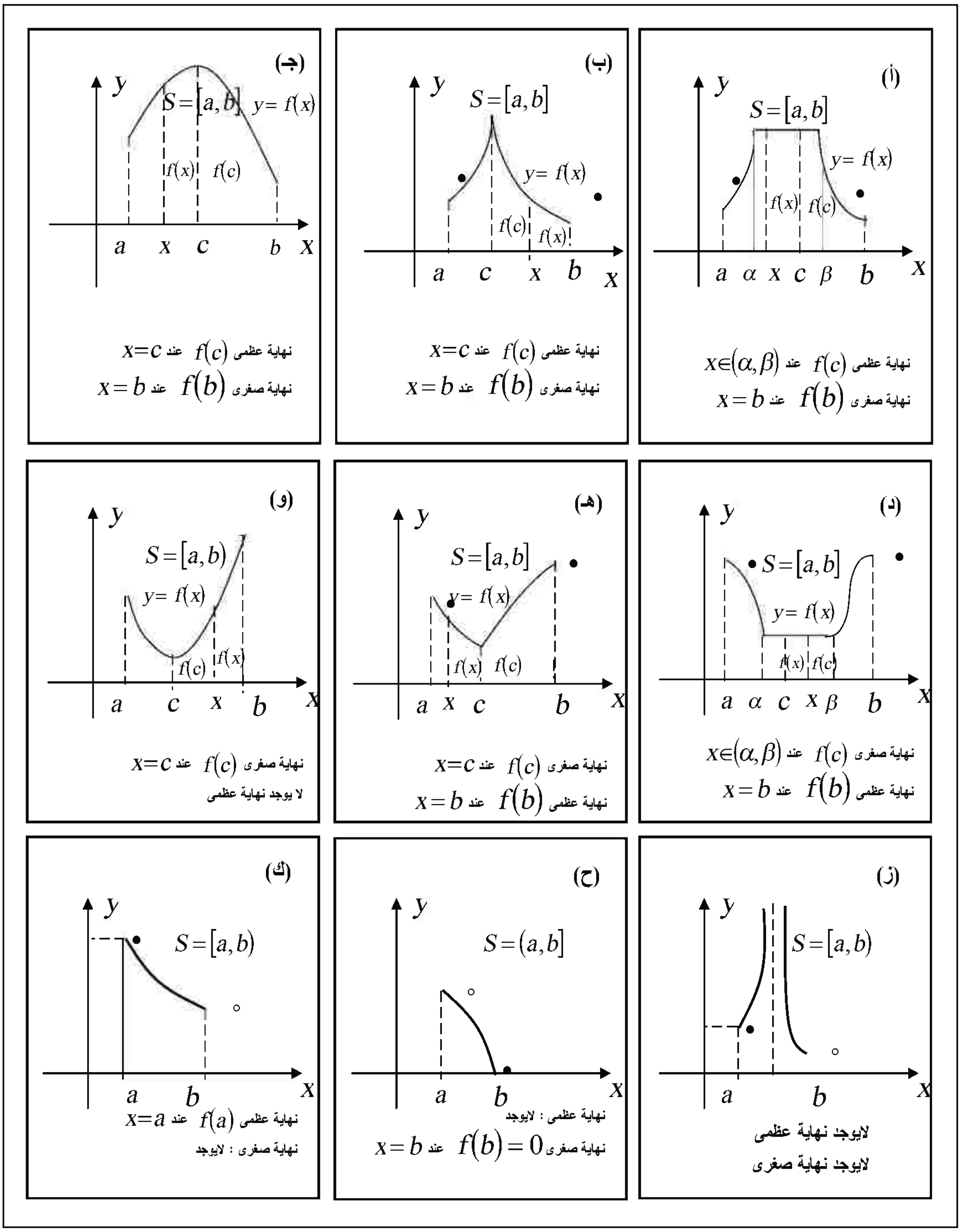
وشكل (90) يوضح النهاية العظمى والنهاية الصغرى لبعض أشكال منحنيات الدوال. ويلاحظ من الشكل أنه في الفترة S.

يكون لكل منحنى نهاية عظمى أو نهاية صغرى $f(c)$ أو كلاهما، $c \in S$.

وهذه القيم القصوى (عظمى أو صغرى) قد تحدث عند نقطتي نهاية الفترة أي عند a أو b. إذا كان $f(c)$ نهاية عظمى نقول أن f تأخذ نهاية عظمى عند c. والنقطة $(c, f(c))$ هي أعلى نقطة على المنحنى.

إذا كان $f(c)$ نهاية صغرى نقول أن f تأخذ نهايتها عظمى عند c. والنقطة $(c, f(c))$ هي أوطى نقطة على $gr(f)$. أحياناً نسمي النهايات العظمى والصغرى بالقيم القصوى.

القيمتان العظمى والصغرى لدالة f في نطاقها تسميان القيمتان العظمى والصغرى المطلقتان.

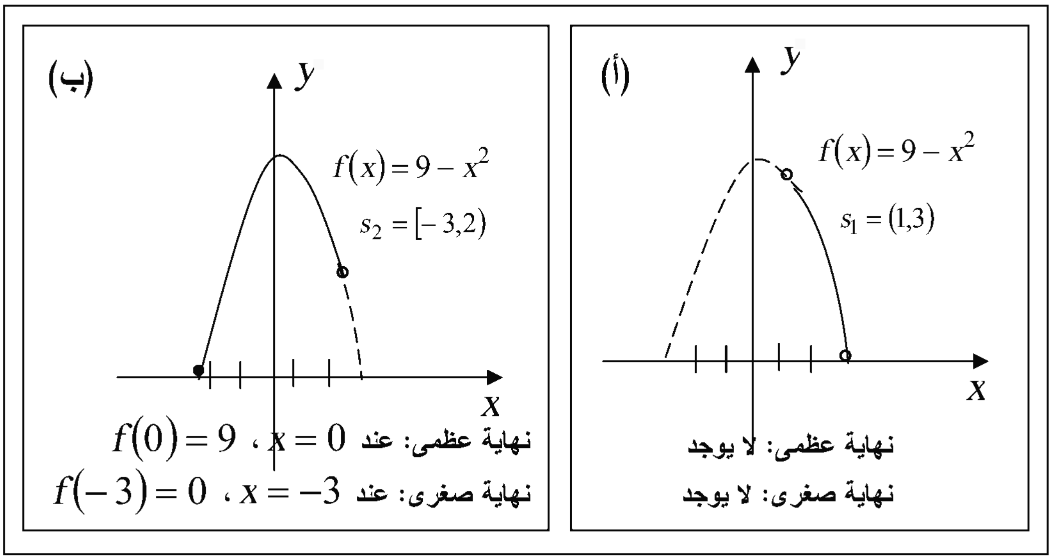


شكل (90) القيم القصوى

مثال (1):

اوجد القيمتان العظمى والصغرى للدالة f في الفترتين $S_1 = (1,3)$ ، $S_2 = [-3,2)$ عندما $f = 9 - x^2$

الحـــل



شكل (91)

شكل (91) يوضح بيان الدالة في كل من الفترتين. نجد أن في الفترة $(1,3)$ لا يوجد أي عدد c في الفترة $(1,3)$ يكون عنده $f(c)$ نهاية عظمى أو صغرى أما في شكل (91−ب) نجد أن أعلى نقطة هي $(0,9)$ ويوجد عدد $c = 0$ تكون عنده الدالة $f(0) = 9$ هي القيمة العظمى. كما يوجد عدد $c = -3$ يكون عنده $f(-3) = 0$ هي القيمة الصغرى.

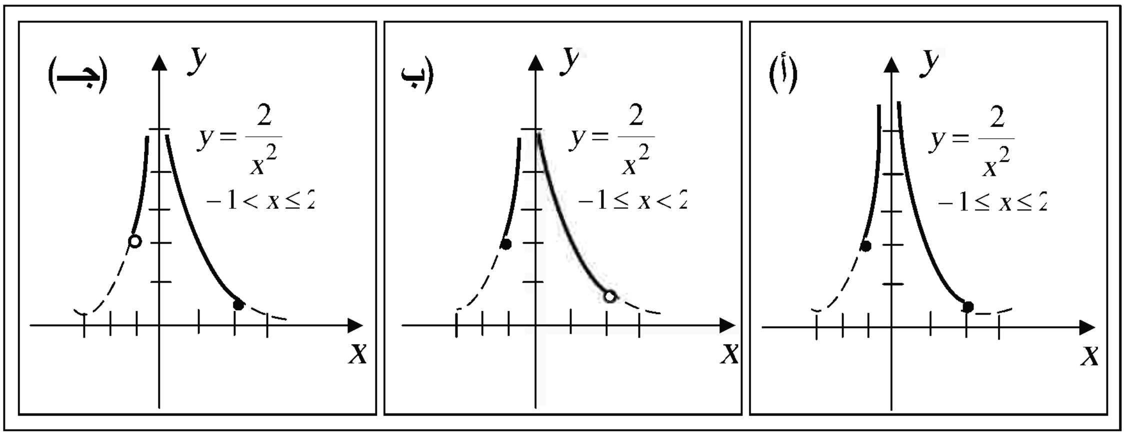
ونستطيع القول أن أي دالة f إذا كانت مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ فإنها تأخذ قيمة صغرى وقيمة عظمى على الأقل مرة واحدة في $[a,b]$. لأنه إذا كان $f(a)$ ، $f(b)$ قيمتين معرفتين فإنه حتى ولو لم يكن هناك عدد c

في (a,b) تكون عنده $f(c)$ قصوى فإن $f(a)$ ، $f(b)$ ستمثلان القيمة العظمى والقيمة الصغرى. ففي شكل (92) تمثيلا بيانياً للدالة $f(x)=\frac{2}{x^2}$ في الفترات $[-1,2]$، $(-1,2]$، $[-1,2)$.

ويوضح القيمة العظمى والصغرى في الفترة $[-1,2]$ هما، $f(2)=\frac{1}{2}$ صغرى، $f(-1)=2$ عظمى.

وفي الفترة $(-1,2]$ القيمة العظمى هي $f(-1)=\frac{1}{2}$ ولا يوجد صغرى.

أما في $[-1,2)$ فالقيمة الصغرى هي $f(2)=\frac{1}{2}$ ولا يوجد عظمى.



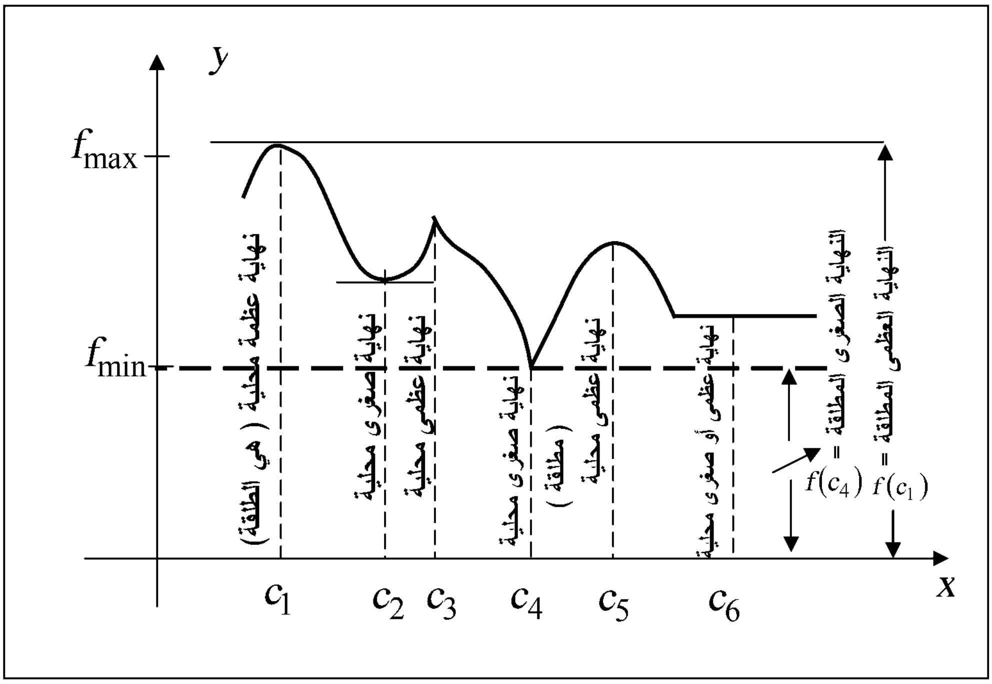
شكل (92)

تعريف: إذا كان c عدد في نطاق الدالة f ،

أ) $f(c)$ تكون نهاية عظمى محلية لـــ f إذا كان هناك عدد c بحيث $f(x)\leq f(c)$ لكل x في (a,b) أي في نطاق f .

ب) $f(c)$ تكون نهاية صغرى محلية لـــ f إذا كان هناك عدد c بحيث $f(x)\geq f(c)$ لكل x في (a,b) أي في نطاقها.

وشكل (93) يوضح النهاية العظمى المطلقة عند c_1 أي $f(c_1)$ مع وجود نهايات عظمى محلية أخرى $f(c_3)$ ، $f(c_5)$ ، $f(c_6)$. والنهاية الصغرى المطلقة عند c_4 أي $f(c_4)$ رغم وجود النهايات صغرى محلية أخرى $f(c_2)$ ، $f(c_6)$.



شكل (93)

وعندما نقول النهاية العظمى أو النهاية الصغرى دون ذكر محلية أو مطلقة إنما نقصد النهاية العظمى المطلقة $f_{\max}$ والنهاية الصغرى المطلقة $f_{\min}$.
ويلاحظ أن النقط المناظرة للقيم القصوى المحلية يكون عندها إما المماس أفقياً أو أن عندها ركن (ناب). أي أن الإحداثي x عند هذه النقط إما المشتقة تساوي 0 أو غير موجودة. وهنا نورد مبرهنتين:

مبرهنة (1):

إذا كان للدالة f قيمة قصوى محلية عند c في فترة مفتوحة، فإنه إما $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

وينتج مباشرة أن،

إذا كان $f'(c)$ موجودة، $f'(c)\neq 0$ فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى.

مبرهنة (2):

إذا كانت f دالة مستمرة على فترة مغلقة $[a,b]$ ولها نهاية عظمى أو صغرى عند c في الفترة المفتوحة (a,b)، فإنه: إما $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

تعريف: يسمى العدد c، في نطاق الدالة f ، عددا حرجا لـــ f إذا كان $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

ولإيجاد القيم القصوى لدالة مستمرة f نتبع الخطوات الآتية:

1- أوجد جميع القيم الحرجة لـــ f في (a,b)

2- احسب $f(c)$ لكل c أوجدتها في (1).

3- احسب القيم الحدية $f(a)$ ، $f(b)$.

4- النهايتان العظمى والصغرى لـــ f على $[a,b]$ هما القيمتان الأكبر والأصغر لقيم الدالة المحسوبة في (2)، (3).

مثال (2):

اوجد القيمتان العظمى والصغرى للدالة f ،

$$f(x)=2x^3-54x \quad , \quad -4\le x\le 5$$

الحـــل

نبدأ بإيجاد القيم الحرجة فنوجد $f'(x)$ ،

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2-54 \\ &= 6\left(x^2-9\right) \\ &= 6(x-3)(x+3) \end{aligned}$$

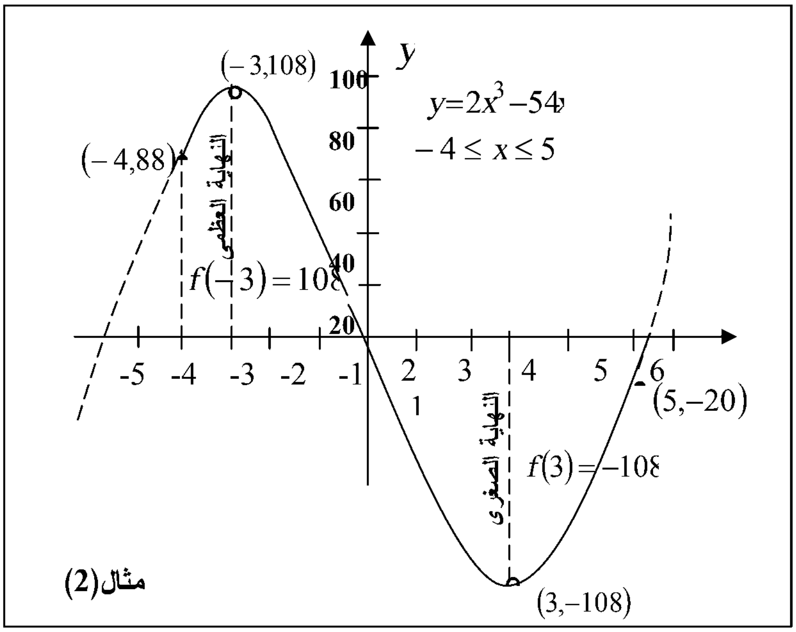
بما أن $f'(x)$ كثير حدود موجود لكل $x\in R$ فإن القيم الحرجة هي فقط التي تجعل $f'(x)=0$. أي 3− و 3.

ولما كانت f على $[-4,5]$ ينتج أن القيم العظمى والصغرى هي من بين $f(-4)$ ، $f(-3)$ ، $f(3)$ ، $f(5)$ وهم،

$$f(-4)=88$$
$$f(-3)=108$$
$$f(3)=-108$$
$$f(5)=-20$$

فنجد أن النهاية العظمى هي $f(-3)=108$ عند القيمة الحرجة $x=-3$ والنهاية الصغرى هي $f(3)=-108$ عند القيمة الحرجة $x=3$.

شكل (94) يوضح $gr(f)$.



شكل (94)

مثال(3):

إذا كان، $f(x)=3+2(x-2)^{\frac{2}{3}}$ ، أوجد النهايتين العظمى والصغرى على الفترة $[0,10]$ ووضح بيان الدالة.

الحـــــل

بما أن $\left[(x-2)^{\frac{1}{3}}\right]^2=(x-2)^{\frac{2}{3}}$ قيمة موجبة معرفة لجميع $x\in R$ وقيمتها 0 عند $(x=2)$. نجد أن،

$f(x)=$ 3+ (قيمة موجبة أو صفر)

أي أن $f(x)\geq 3$ وما عدا $x=2$ فإن $f(x)>3$ نستنتج أن القيمة الصغرى للدالة f هي $f(2)=3$ ومشتقة f هي،

$$f'(x)=\frac{4}{3}(x-2)^{-\frac{1}{3}}=\frac{4}{3(x-2)^{-\frac{1}{3}}} \quad , \quad x\neq 2$$

$f'(x)$ لا يمكن تساوي صفر وغير موجودة عند $x = 2$.

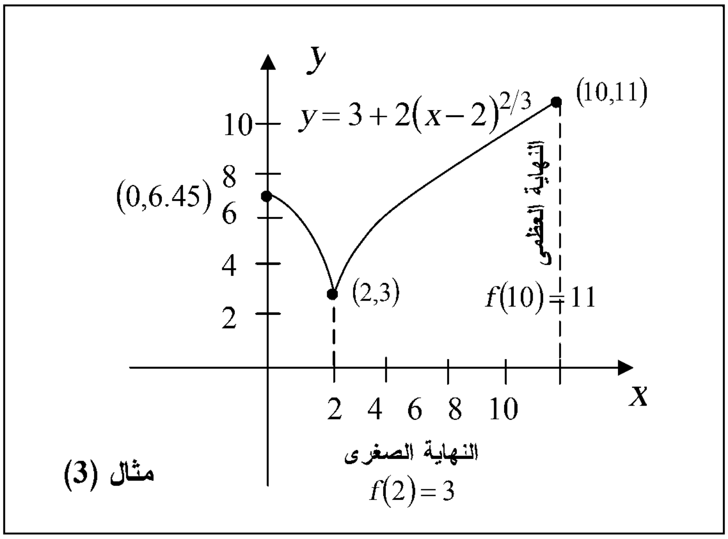
إذن القيمة الحرجة الوحيدة هي $x = 2$ في الفترة $[0,10]$.

والقيم الحدية،

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 + 2(-2)^{\frac{2}{3}} \\ &= 3 + 2\sqrt[3]{4} \\ &\approx 6.45 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(10) &= 3 + 2(10-2)^{\frac{2}{3}} \\ &= 3 + 2(8)^{\frac{2}{3}} \\ &= 11 \end{aligned}$$

$\therefore$ الدالة لها نهاية عظمى $f(10) = 11$ ونهاية صغرى $f(2) = 3$ وبيان الدالة موضح في شكل (95).



شكل (95)

ونلاحظ أن

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = +\infty$$

ولما كانت f مستمرة عند $x = 2$ ، ينتج أن المنحنى له ناب عند $(2,3)$.

مثال(4):

اوجد القيم الحرجة للدالة f ،

$$f(x) = (x+5)^2 \sqrt[3]{x-4}$$

الحـــل

$$f'(x) = (x+5)^2 \frac{1}{3}(x-4)^{-\frac{2}{3}} + 2(x+5)(x-4)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (x+5)\left[\frac{(x+5)}{3(x-4)^{-\frac{2}{3}}} + 2(x-4)^{\frac{1}{3}}\right]$$

$$= \frac{(x+5)[x+5+6(x-4)]}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{(x+5)(7x-19)}{3(x-4)^{\frac{2}{3}}}$$

ولذلك فإن $f'(x) = 0$ عند $x = -5$ ، $x = \dfrac{19}{7}$ و $f'(x)$ غير موجودة عند $x = 4$.

$\therefore f$ لها ثلاثة قيم حرجة هي 4 , $\dfrac{19}{7}$, 5-.

مثال (5):

اوجد الأعداد الحرجة للدالة،

$f(x)=4\sin^3 x+3\sqrt{2}\cos^2 x \quad , \quad 0\le x\le \pi$ ثم أوجد النهايتين

العظمى والصغرى.

الحـــل

الدالة معرفة لجميع قيم $x\in[0,\pi]$.

$$f'(x)=12\sin^2 x\cos x+6\sqrt{2}\cos x(-\sin x)$$

$$f'(x)=6\sin x\cos x\left(2\sin x-\sqrt{2}\right)$$

كذلك $f'(x)$ معرفة لجميع $x\in(0,\pi)$ ، بقي بحث متى $f'(x)$ تساوي صفر،

$$6\sin x\cos x\left(2\sin x-\sqrt{2}\right)=0$$

$\sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $\cos x=0$ أو $\sin x=0$

$x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$ أو $x=\frac{\pi}{2}$ أو $x=0,\pi$

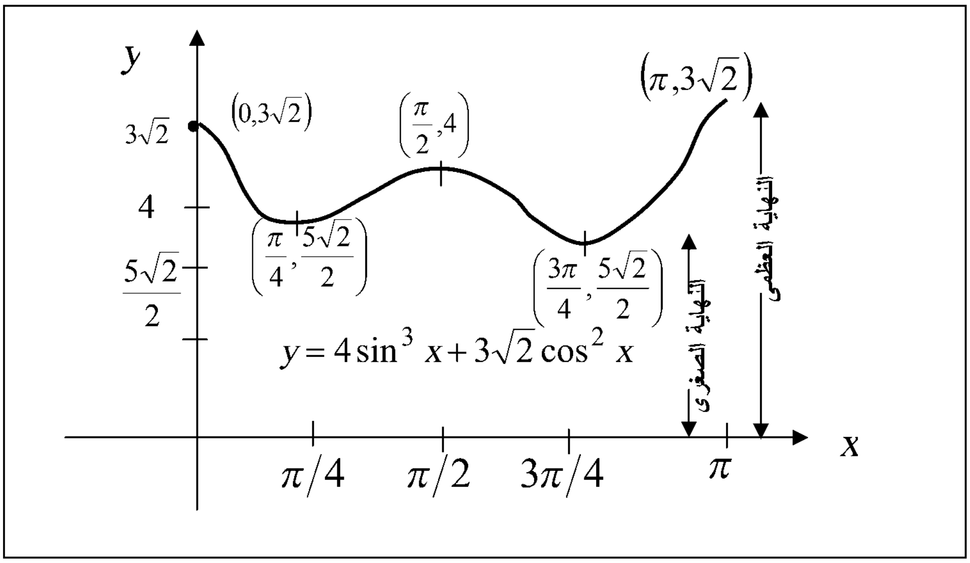
$\therefore$ يوجد 5 قيم حرجة هي $0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4},\pi$

وقيم $f(x)$ المناظرة هي،

$$3\sqrt{2},2.5\sqrt{2},4,2.5\sqrt{2},3\sqrt{2}$$

$\therefore$ النهاية العظمى هي $f(0)=f(\pi)=3\sqrt{2}$ ، والنهاية الصغرى هي

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{5}{2}\sqrt{2}$. (شكل (96))


y
x
$3\sqrt{2}$
4
$\frac{5\sqrt{2}}{2}$
$(0,3\sqrt{2})$
$\left(\frac{\pi}{2},4\right)$
$(\pi,3\sqrt{2})$
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$
$y=4\sin^3 x+3\sqrt{2}\cos^2 x$
النهاية الصغرى
النهاية العظمى
$\pi/4$
$\pi/2$
$3\pi/4$
π

شكل (96)

تمارين (5−1)

من (1) إلى (4) وضح بيان f وجد القيم القصوى في كل فترة

(1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$

أ- $[2,5]$ ب- $[0,5)$ جـ- $(0,2)$ د- $(0,4)$

(2) $f(x)=2(x-1)^{\frac{2}{3}}-4$

أ- $[0,1)$ ب- $(-7,2)$ جـ- $(1,2]$ د- $[0,9]$

(3) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}$ ، $x\in R$

(4) $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ ، $x\in R$

من (5) إلى (10) أوجد القيم القصوى للدالة f على الفترة المعطاة

(5) $f(x)=5-6x^2-2x^3$ ، $x\in[-3,1]$

(6) $-1\le x\le 3$, $f(x)=3x^2-10x+7$

(7) $-1\le x\le 8$, $f(x)=1-x^{\frac{2}{3}}$

(8) $f(x)=x^4-5x^2+4$ ، $x\in[0,2]$

(9) $f(x)=\sin^2 x-\cos x$ ، $x\in[0,\pi]$

(10) $f(x)=(2x-3)\sqrt{x^2-9}$ ، $x\in(3,\infty)$

في التمارين من (11) إلى (36) أوجد الأعداد الحرجة للدالة.

(11) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2-4}$

(12) $f(t)=\dfrac{t^2}{5t+4}$

(13) $g(x)=(x-3)\sqrt{9-x^2}$

(14) $f(x)=x^2\sqrt[3]{2x-5}$

(15) $R(u)=(4u+1)\sqrt{u^2-1}$

(16) $f(x)=(2x-5)\sqrt{x^2-4}$

(17) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x-2}$

(18) $f(t)=\sqrt{t^2-64}$

(19) $f(x)=x^5-2x^3+x-12$

(20) $f(x)=x^4-32x$

(21) $f(t)=4t^3+5t^2-42t+7$

(22) $f(x)=2x^3+x^2-20x+4$

(23) $u(x)=3x+1$

(24) $T(\alpha)=4\alpha^2-3\alpha+2$

(25) $g(\theta)=2\sqrt{3}\theta+\sin 4\theta$

(26) $f(x)=\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}$

(27) $f(x)=8\cos^3 x-3\sin 2x-6x$

(28) $g(t)=\sin 2t+2\cos t$

(29) $K(r)=4\sin^3 r+3\sqrt{2}\cos^2 r$

(30) $f(\theta)=\cos^2\theta-\sin\theta$

(31) $f(x)=\sec\left(x^2+1\right)$

(32) $f(x)=\dfrac{\sec x+1}{\sec x-1}$

(33) $H(\phi)=\cot\phi+\csc\phi$

(34) $g(x)=2x+\cot x$

(35) $P(\alpha)=3\tan\alpha-4\alpha$

(36) $f(x)=x-\tan x$

(37) إذا كان $f(x)=|x|$ أثبت أن 0، هو العدد الحرج الوحيد وأن $f(0)$ هي نهاية صغرى محلية لـــ f وأن بيان f ليس له مماس عند $(0,0)$.

(38) اثبت أن f ليس لها قيم قصوى محلية وأرسم بيان f . اثبت أن f مستمرة على $(0,1)$ ولكن ليس لها نهاية عظمى ولا صغرى على $(0,1)$.

أ- $f(x)=1/x^2$ ب- $f(x)=x^3+1$

(39) اوجد الأعداد الحرجة والقيم القصوى للدالة f ،

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & ,\ 0\le x\le 1 \\ -3(x-1)^2+2(x-1)+1 & ,\ 1\le x<2 \\ 3(x-2)^2-4(x-2) & ,\ 2\le x<3 \\ -(x-4)^2 & ,\ 3\le x\le 4 \end{cases}$$

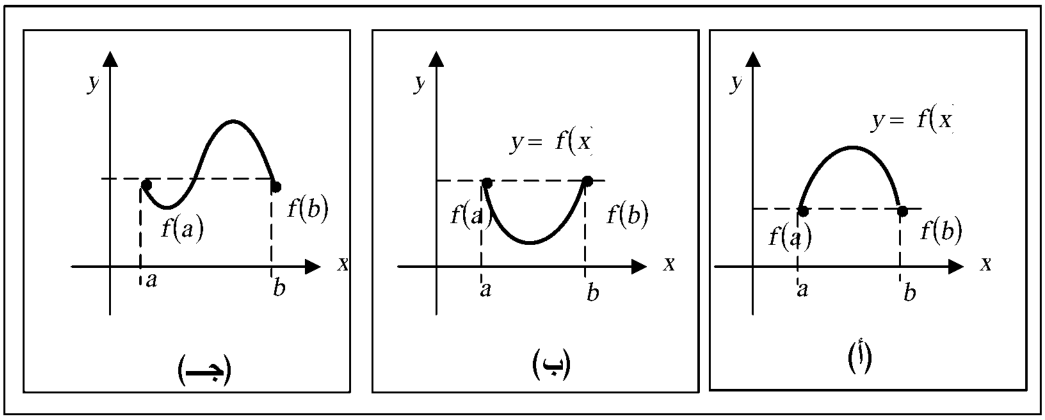
بند 5-2: مبرهنة القيمة المتوسطة The Mean Value Theorem

لمناقشة مبرهنة القيمة المتوسطة للعالم لويس لاجرانج نبدأ بمناقشة مبرهنة رول التي تعود للفرنسي ميخائيل رول في القرن السابع عشر.

مبرهنة رول: Rolle's Theorem

إذا كانت f مستمرة على فترة مغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) وكان $f(a)=f(b)$ ، فإنه يوجد على الأقل عدد واحد c في (a,b) بحيث $f'(c)=0$.

والأشكال (97 – أ، ب، جـ) توضح صحة توقع رول.



شكل (97)

البرهان: الدالة f لا يمكن إلا أن تكون واحدة من ثلاثة أنواع.

الأول : $f(x)=f(a)$ لكل x في (a,b). وعندئذ f مقدار ثابت و $f'(x)=0$ لكل x . أي لكل c في (a,b).

الثاني: $f(x) > f(a)$ لقيمة معينة x في (a,b). عندئذ تكون النهاية العظمى لـــ f في $[a,b]$ اكبر من $f(a)$ أ، $f(b)$ ومن ثم يجب أن تكون عند عدد معين c في الفترة المفتوحة (a,b). ولما كان $f'(x)$ موجودة خلال الفترة (a,b) نستنتج أن $f'(c)=0$.

الثالث: $f(x) < f(a)$ لقيمة معينة x في (a,b). وفي هذه الحالة القيمة الصغرى لـــ f في $[a,b]$ اصغر من $f(a)$ أ، $f(b)$ ويجب حدوثها عند عدد ما c في (a,b). كما في ثانياً، $f'(c)=0$.

انتهى البرهان.

نتيجة:

إذا كان f مستمرة على الفترة $[a,b]$، $f(a)=f(b)$ ، فإن f لها على الأقل عدد حرج واحد في الفترة المفتوحة (a,b).

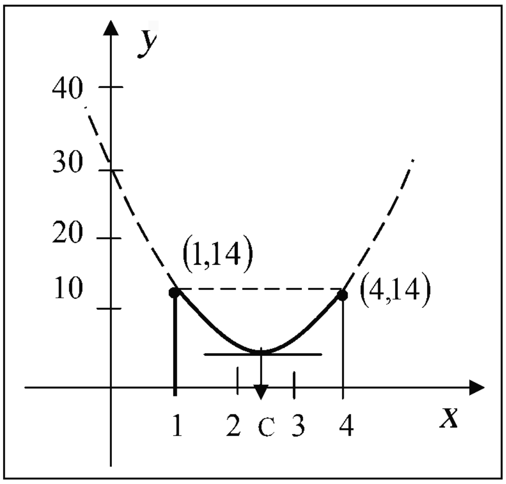
البرهان:

إذا كان f' غير موجودة عند c في (a,b) فإن c هي عدد حرج. كما وأن إذا كان f' موجودة في (a,b) فإن، من مبرهنة رول، يوجد عدد حرج. (انتهى البرهان)

مثال (6):

إذا كان $f(x)=4x^2-20x+30$

اثبت أن f تحقق مبرهنة رول على الفترة $[1,4]$ وأوجد قيم c الحقيقية التي تحقق $f'(c)=0$.



الحـــل (شكل 98)

$$f(1)=4-20+30=14$$

$$f(4)=4(4)^2-20(4)+30=$$

$$=64-80+30=14$$

$$f(1)=f(4)$$

بما أن f مستمرة وقابلة للتفاضل

كونها كثير حدود، $f(1)=f(4)$

إذن هي تحقق فروض مبرهنة رول

شكل (98)

على $[1,4]$، $f'(x)=8x-20$, $f'(x)=0$

$$\Rightarrow x=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

إذن

$$f'\left(\frac{5}{2}\right)=0\ ,\ 1<\frac{5}{2}<4\Rightarrow c=\frac{5}{2}$$

وبيان f هو قطع مكافئ موضح في شكل (98). وحيث أن $f'\left(\frac{5}{2}\right)=0$ ،

فإن المماس أفقياً عند الرأس $\left(\frac{5}{2},5\right)$.

على الرغم من أهمية مبرهنة رول نفسها إلا أننا نعتبرها خطوة لاستعمالها في برهان وأعمدة من أهم أدوات الحسبان، وهي مبرهنة القيمة المتوسطة.

مبرهنة القيمة المتوسطة: (Mean value theorem)

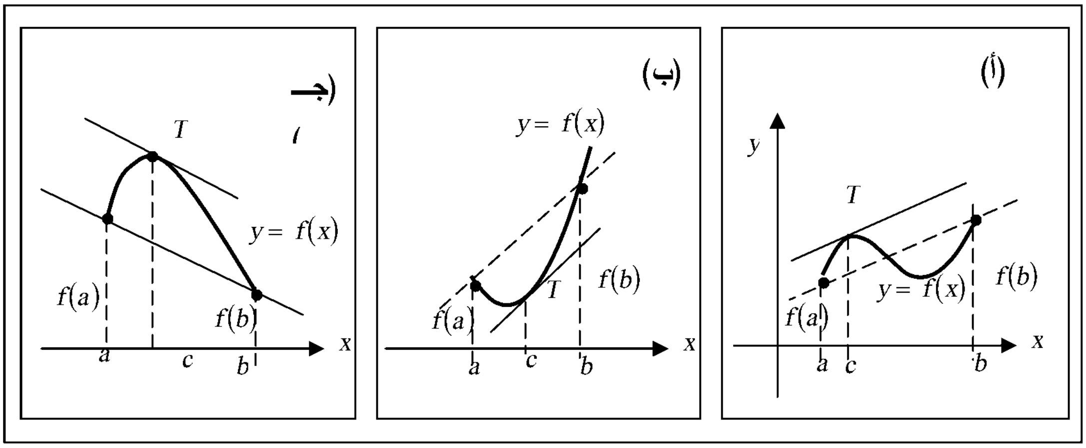
إذا كان f دالة مستمرة على فترة مغلقة $[a,b]$ وقابلة للتفاضل على الفترة المفتوحة (a,b)، فإنه يوجد عدد c في (a,b) بحيث

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

أو الشكل المكافئ،

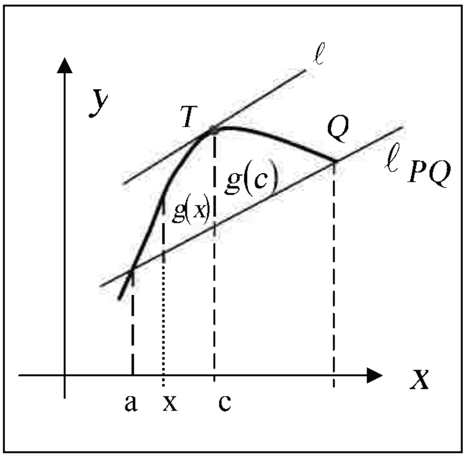
$$f(b)-f(a)=f'(c)\ (b-a)$$

شكل (99) يصور بيانياً مبرهنة القيمة المتوسطة حيث $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ هو ميل الوتر بين النقطتين $(a,\ f(a))$، $(b,\ f(b))$ والنقطة T على المنحنى هي نقطة ميل المماس عندها $(f'(c))$ يوازي الوتر المذكور.



شكل (99)

البرهان:



شكل (100)

معادلة المستقيم الواصل من P إلى Q هي $y-f(a)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ ولنفرض $T(c, f(c))$ نقطة على المنحنى بحيث المماس ℓ عندها يوازي ℓ_{PQ}، فإذا كان $g(x)$ هي المسافة الرأسية من الوتر PQ إلى المنحنى f . كما هو موضح في شكل (100) فإن المسافة $g(c)$ هي قيمة قصوى محلية لـــ g .

$$g(x)=f(x)-y$$

$$g(x)=f(x)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

وبما أن $g(a)=0$ ، $g(b)=0$ ، $g(x)$ مستمرة وقابلة للتفاضل، إذن يمكن استعمال مبرهنة رول. يوجد عدد c في الفترة المفتوحة (a,b) بحيث

$$g'(c)=0$$

ولكن

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

إذن يوجد عدد c بحيث

$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

أو

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

انتهى البرهان.

مثال (7):

إذا كان $f(x)=x^2-8x$

فاثبت أن f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[1,8]$ وأوجد عدد c في $(1,8)$ يحقق نتيجة المبرهنة.

الحـــــل

f دالة تربيعية مستمرة وقابلة للتفاضل،

$f(1)=-7$ ، $f(8)=0$

$\therefore f$ تحقق فروض مبرهنة القيمة المتوسطة، نوجد c بحيث

$$f'(c)=\frac{f(8)-f(1)}{8-1}=\frac{0+7}{8-1}=1$$

$$f'(x)=2x-8 \Rightarrow f'(c)=2c-8$$

إذن

$$2c-8=1$$

$$2c=9$$

$$c=4.5$$

مثال (8):

إذا كان $f(x)=2x^3-15x^2+ax+b$

فاثبت أن f تحقق فروض مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[0,3]$ علماً بأن a ، b ثابتين حقيقيين.

الحـــــل

الدالة كثير حدود مستمر على $[0,3]$ وقابل للتفاضل على $(0,3)$

$f(0)=b$ ، $f(3)=-81+3a+b$

$$f'(x)=6x^2-30x+a$$

$$f'(c)=6c^2-30c+a=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}$$

$$6c^2-30c+a=-27+a$$

$$6c^2-30c+27=0$$

$$2c^2-10c+9=0$$

$$c=\frac{10\pm\sqrt{100-72}}{4}$$

$$c=\frac{10\pm\sqrt{28}}{4}$$

$$c=\frac{5\pm\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{5+\sqrt{7}}{2}>3 \quad , \quad \frac{5+\sqrt{7}}{2}\notin[0,3]$$

إذن

$$c=\left(\frac{5-\sqrt{7}}{2}\right)$$

مثال (9):

إذا كان $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

فاثبت أن f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة $[3,5]$ وأوجد c.

الحـــل

الدالة f مستمرة على $[3,5]$ لأن $x=2$ لا تقع في الفترة. وقابلة للتفاضل على $(3,5)$.

$$f(3)=\frac{1}{3-2}=1$$

$$f(5)=\frac{1}{5-2}=\frac{1}{3}$$

$$f'(x)=\frac{-1}{(x-2)^2}$$

إذن،

$$\frac{-1}{(c-2)^2}=\frac{\frac{1}{3}-1}{5-3}=\frac{-\frac{2}{3}}{2}=-\frac{1}{3}$$

$$(c-2)^2=3$$

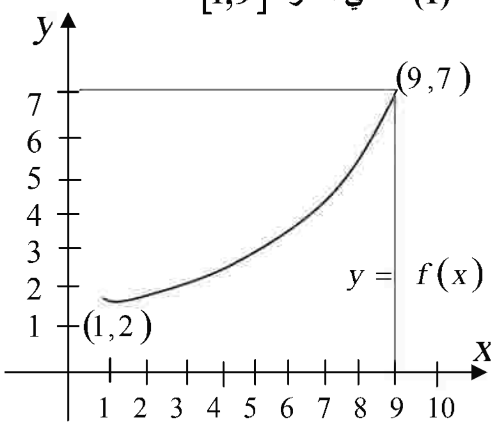
$$c=2\pm\sqrt{3}\quad,\ 2-\sqrt{3}\notin[3,5]$$

$$c=2+\sqrt{3}$$

تمارين (2−5)

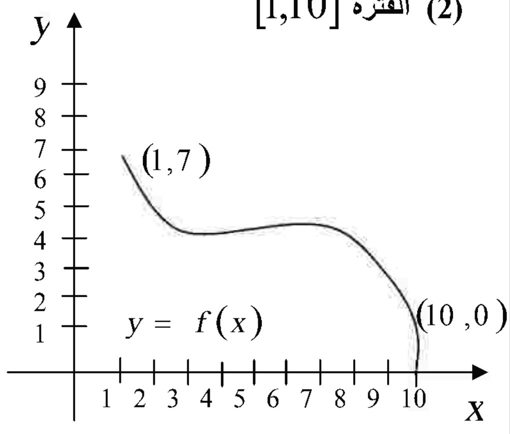
في التمارين من (1) إلى (4) أوجد قيمة c في الفترة المعطاة التي تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة f الموضح بيانها.

(1) في الفترة $[1,9]$



شكل (101)

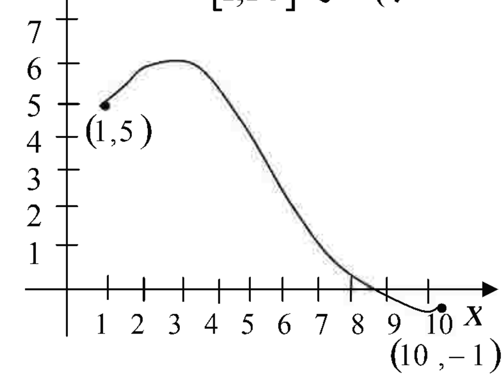
(2) الفترة $[1,10]$



شكل (102)

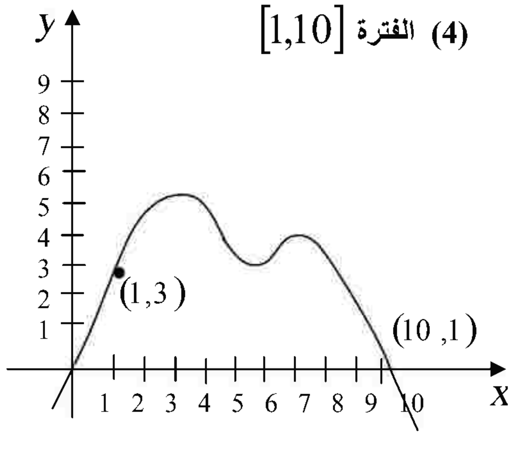
(3) أ) الفترة $[1,7]$

ب) الفترة $[1,10]$



شكل (103)

(4) الفترة $[1,10]$



شكل (104)

في التمارين من (5) إلى (14) أثبت أن f تحقق فروض مبرهنة رول على $[a,b]$ وأوجد الأعداد c في (a,b) بحيث $f'(c)=0$.

(5) $f(x)=4x^3-8x^2+5 \quad , \ [0,2]$

(6) $f(x)=3x^3-12x^2+5 \quad , \ [0,4]$

(7) $f(x)=2+7x-x^2 \quad , \ [3,4]$

(8) $f(x)=11-12x-2x^2 \quad , \ [-7,1]$

(9) $f(x)=x^4+4x^2+1 \quad , \ [-3,3]$

(10) $f(x)=8x^3-2x+1 \quad , \ \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

(11) $f(x)=\sin 2x \quad , \ [0,\pi]$

(12) $f(x)=\csc x \quad , \ \left[\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$

(13) $f(x)=\cos 2x+2\cos x \quad , \ [0,2\pi]$

(14) $f(x)=x^2+\cos x^2 \quad , \ \left[-\frac{3\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$

في التمارين من (15) إلى (33) أذكر ما إذا كانت f تحقق فروض مبرهنة القيمة المتوسطة على $[a,b]$ وأوجد جميع قيم $c\in(a,b)$ بحيث
$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

(15) $f(x)=4x-3x^3+8 \quad , \ [1,2]$

(16) $f(x)=5x^2-3x+11 \quad , \ [1,3]$

(17) $f(x)=1-3x^{\frac{1}{3}} \quad , \ [-8,-1]$

(18) $f(x)=x^3-2x^2+x+10 \quad , \ [-1,1]$

(19) $f(x)=3x^5+5x^3+15x \quad , \ [-1,1]$

(20) $f(x)=x+\frac{4}{x} \quad , \ [1,4]$

(21) $f(x)=|x-4| \quad , [-1,5]$

(22) $f(x)=x^{\frac{2}{3}} \quad , (-1,-8)$

(23) $f(x)=\dfrac{x+3}{x-2} \quad , [-2,3]$

(24) $f(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2} \quad , [0,2]$

(25) $f(x)=4+\sqrt{x-1} \quad , [1,3]$

(26) $f(x)=(x+2)^{2/3} \quad , [-1,6]$

(27) $f(x)=x^3+1 \quad , [-2,4]$

(28) $f(x)=x^3+4x \quad , [-3,6]$

(29) $f(x)=\sin x \quad , [0,\pi/2]$

(30) $f(x)=\tan x \quad , [0,\pi/4]$

(31) $f(x)=\begin{cases} -x^2+x+5 & ; \ x<0 \\ x^3-4x^2+x+5 & ; \ x\geq 0 \end{cases}$ ، $[a,b]=[-1,1]$

(32) $f(x)=\left|x^2-8x\right|$ ، أ) $[a,b]=[-1,9]$ ، ب) $[a,b]=[1,8]$

(33) إذا كان $f(x)=px^n+qx+r \ , x\in[a,b]$ ، r ، q ، p ثوابت حقيقية، $n\in N$ ، $n>1$ أثبت أن f تحقق فروض مبرهنة القيمة لا تعتمد على p ، q ، r . تحقق بعد إيجاد c أنها فعلاً تقع في الفترة (a,b).

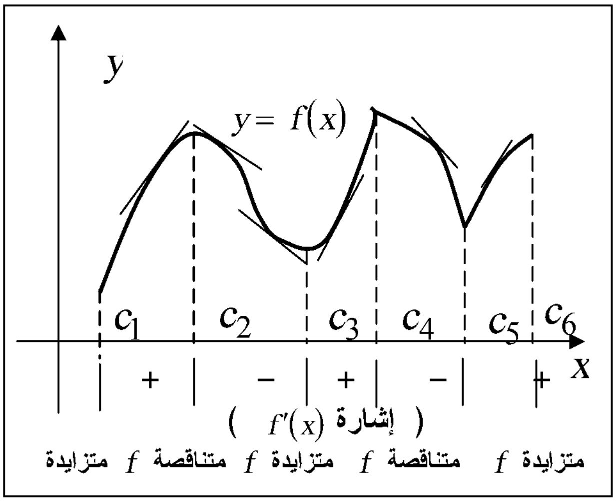
(34) إذا كان f دالة من الدرجة الثانية معرفة على $[a,b]$، اثبت أنه يوجد عدد واحد c في (a,b) يحقق نتيجة المبرهنة هو $c=\dfrac{a+b}{2}$.

(35) بتطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة f ، $f(x)=\sqrt{1+x}$ ، أثبت أن $h>0$ ، $\sqrt{1+f}<1+\dfrac{h}{2}$.

بند 5–3: اختبار المشتقة الأولى

نورد هنا كيفية استخدام f' للتعرف على المواضع التي عندها f متزايدة وأين تكون متناقصة ومن ثم تحديد مواضع القيم القصوى المحلية.

شكل (105) يوضح بيان المعادلة $y = f(x)$ ويتضح منه أن ميل المماس موجباً في الفترات المفتوحة (c_1, c_2) و (c_3, c_4) و (c_5, c_6) أيْ $f'(x) > 0$ عندما تكون f متزايدة وبالمثل يتضح أن ميل المماس سالباً في الفترات المفتوحة (c_2, c_3) و (c_4, c_5) أيْ عندما f متناقصة تكون $f'(x) < 0$.



شكل (105)

وهذه النتائج ندمجها في المبرهنة الآتية.

مبرهنة :

إذا كانت f مستمرة على $[a, b]$ وقابلة للتفاضل على (a, b) فإن :
1) إذا $f'(x) > 0$ لكل $x \in (a, b)$ فإن f متزايدة على $[a, b]$
2) إذا $f'(x) < 0$ لكل $x \in (a, b)$ فإن f متناقصة على $[a, b]$.

البرهان

1) إذا كان $f'(x) > 0$ في (a, b)، x_1, x_2 عددين في $[a, b]$ بحيث $x_1 < x_2$ فمن مبرهنة القيمة المتوسطة،

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)\ (x_2-x_1)$$

ولأن $x_2-x_1>0$ ، $f'(c)>0$ إذن $f(x_2)>f(x_1)$

2) البرهان بنفس الطريقة كما في (1).

انتهى البرهان.

يلاحظ أيضاً أن إذا كان $f'(x)>0$ في الفترة $(-\infty,a)$ أو (b,∞) فإن f متزايدة على $(-\infty,a]$ أو $[b,\infty)$ على الترتيب. وبالمثل متناقصة لما $f'(x)<0$.

مثال (10):

إذا كان $f(x)=4x^3+3x^2-18x+11$

أوجد الفترات التي تكون فيها f أ) متزايدة ب) متناقصة

وأرسم المنحنى $y=f(x)$.

الحـــل

$$f'(x)=12x^2+6x-18$$

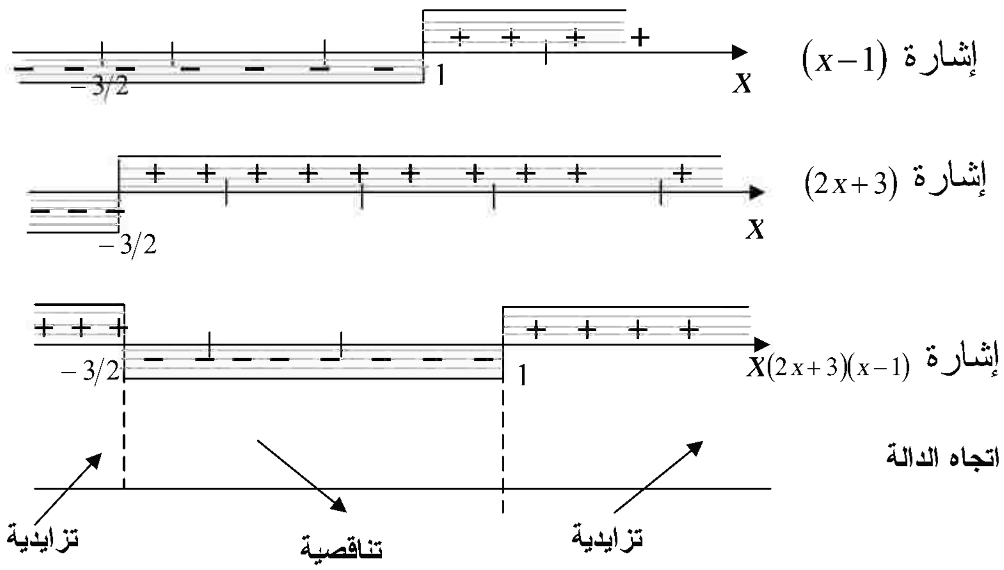
أ) تكون f متزايدة عندما

$$f'(x)>0$$

$$12x^2+6x-18>0$$

$$2x^2+x-3>0$$

$$(2x+3)(x-1)>0$$



إذن f' موجبة على الفترتين $(1,\infty)$ ، $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$

أيْ أن منحنى $y=f(x)$ صاعدا في الفترة $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup(1,\infty)$

ينتج مباشرة من (أ) أن f متناقصة في الفترة $\left(-\frac{3}{2},1\right)$

أيْ أن المنحنى $y=f(x)$ هابطا خلال الفترة $\left(-\frac{3}{2},1\right)$

لرسم المنحنى،

1) نوجد y عند القيم الحرجة $x=1$ ، $x=-\frac{3}{2}$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=31.25 \text{ ، } f(1)=0$$

2) نوجد نقط التقاطع مع المحورين ما أمكن،

أولاً : مع المحور y ، نضع $x=0$ ، نجد $y=11$

$(0,11)$ نقطة التقاطع مع المحور y .

ثانياً : مع المحور x ، نضع $y=0$

$$0=4x^3+3x^2-18x+11$$

بما أن $x=1$ تحقق هذه المعادلة إذن $x-1$

هو احد العوامل وبالقسمة نجد أن

$$0=(x-1)(4x^2+7x-11)$$

$$0=(x-1)(x-1)(4x+11)$$

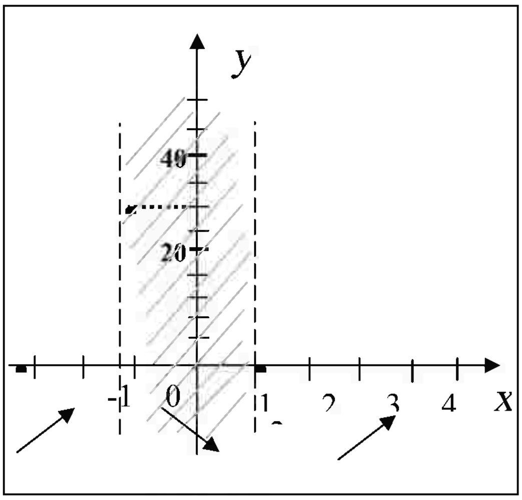
$$0=(x-1)^2(4x+11)$$

توجد نقطتي تقاطع مع المحور x هما $(1,0)$ و $\left(-\frac{11}{4},0\right)$

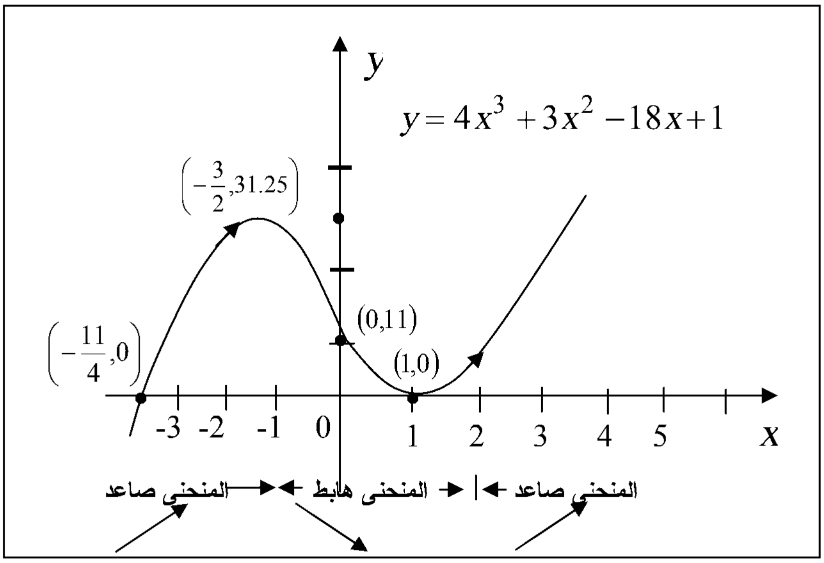
نضع جميع النقط على الرسم. شكل (106− أ)،

نقط التقاطع مع المحورين $(0,11)$، $\left(-\frac{11}{4},0\right)$، $(1,0)$ والنقط الحرجة $(1,0)$، $\left(-\frac{3}{2},31.25\right)$

ثم نستعمل معلومات صعود وهبوط المنحنى السابقة لنحصل على المنحنى كما موضح في شكل (106− ب)



شكل (106−أ)



شكل (106– ب)

ونلاحظ أن عند النقطة الحرجة $\left(-\frac{3}{2}, 31.25\right)$ يوجد عدد حرج -2 وقيمة عظمى محلية $f\left(-\frac{3}{2}\right) = 31.25$ وأن المنحنى قبلها كان صاعدا ثم تغير بعدها إلى هابطا.

أي أن عند القيمة العظمى المحلية تتغير $f'(x)$ من موجب إلى سالب قبل وبعد العدد الحرج وبالمثل عند العدد الحرج $x = 1$ توجد نهاية صغرى للدالة $f(0) = 1$.

وتتغير $f'(x)$ من سالب إلى موجب قبل وبعد $x = 0$. ويمكن صياغة المبرهنة التالية:

مبرهنة:

إذا كان c عدد حرج للدالة f ، f مستمرة عند c وقابلة للتفاضل على فترة مفتوحة I تحتوي c ما عدا من الممكن عند c نفسها فإن :

1) إذا f' تغيرت من موجب إلى سالب عند c فإن $f(c)$ نهاية عظمى محلية.

2) إذا f' تغيرت من سالب إلى موجب عند c فإن $f(c)$ نهاية صغرى محلية.

3) إذا $f'(x)>0$ أو $f'(x)<0$ لكل $x\in I$ ما عدا $x=c$ فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى محلية للدالة f .

<u>**البرهان**</u>

إذا f' تغيرت من موجب إلى سالب عند c. إذن يوجد فترة مفتوحة (a,b) تحتوي على c بحيث

$$f'(x)>0 \quad , \ a<x<c$$
$$f'(x)<0 \quad , \ c<x<b$$

ونستطيع اختيار (a,b) بحيث f مستمرة على $[a,b]$.

وينتج من المبرهنة السابقة مباشرة أن f متزايدة على $[a,c]$ ومتناقصة على $[c,b]$

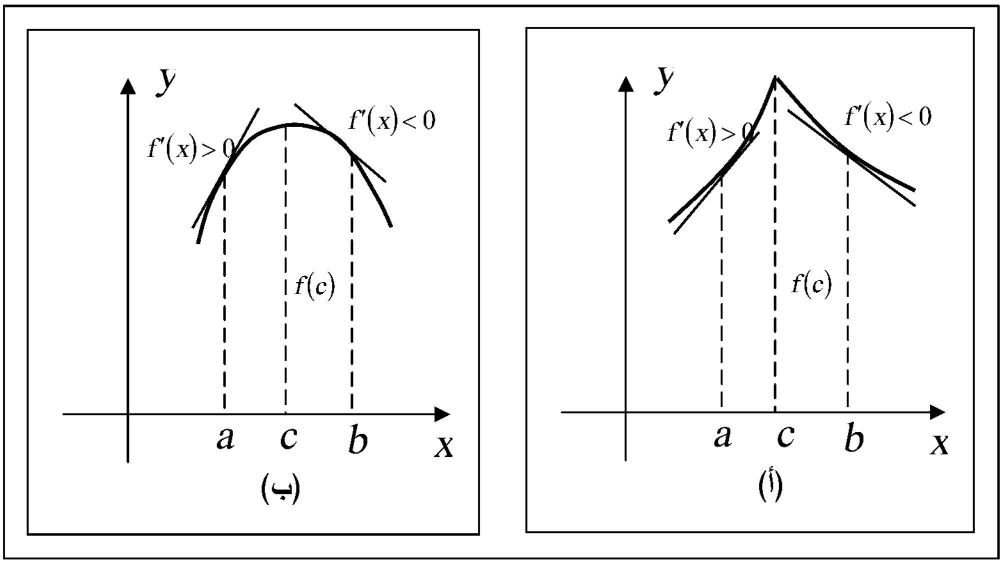
أي أن $a<x<b$ ، $f(x)<f(c)$ ما عدا $x=c$.

إذن $f(c)$ هي نهاية عظمى محلية للدالة f .

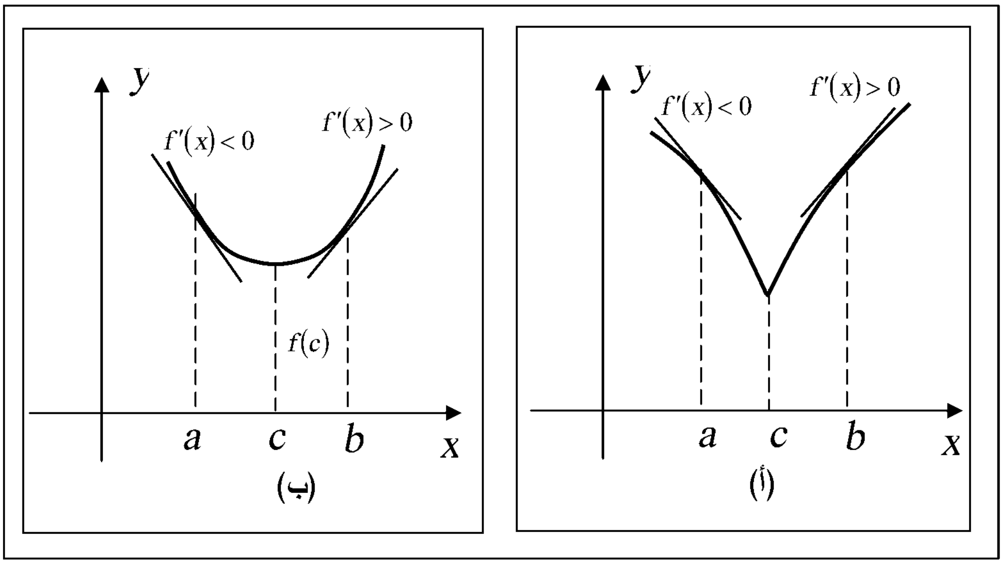
بذلك نكون قد أثبتنا الفقرة (1) وبالمثل يمكن إثبات (2)، (3).

وشكل (107– أ،ب) يذكرنا بشكل بيان المنحنى بالقرب من النهاية العظمى المحلية حيث تتغير $f'(x)$ أي ميل المماس من موجب لما $x<c$ إلى سالب لما $x>c$.

والعكس يحدث للنهاية الصغرى المحلية كما في شكل (108– أ،ب).



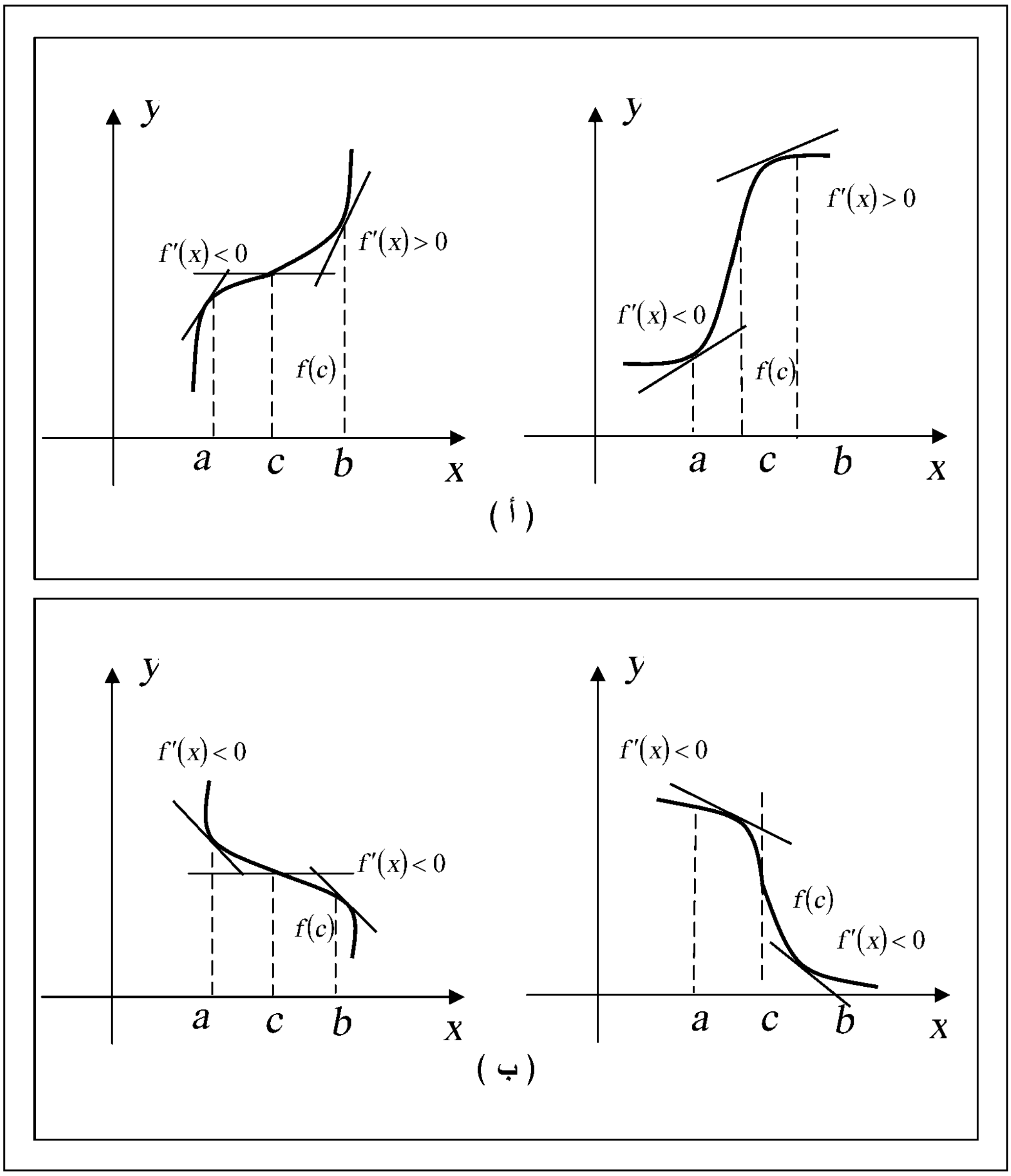
شكل (107): النهاية العظمى المحلية.



شكل (108): النهاية الصغرى المحلية.

وشكل (109– أ،ب) يوضح الفقرة الثالثة عندما لا تتغير إشارة $f(c)$ عند $x = c$

ولا يوجد قيمة قصوى محلية.



شكل (109): $f(c)$ ليست قيمة قصوى.

مثال (11):

اوجد النهاية العظمى المحلية للدالة f ووضح بيانها

أ- $f(x)=x^{\frac{1}{3}}(10-x)$

ب- $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1}$

الحـــل

أ- $$f'(x)=x^{\frac{1}{3}}(-1)+(10-x)x^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{-3x+(10-x)}{3x^{3/2}}$$

$$=\frac{10-4x}{3x^{3/2}}$$

$$f'(x)=\frac{2(5-x)}{3x^{3/2}}$$

إذن يوجد عددين حرجين، $x=5$ ، $x=0$

لذلك نبحث إشارة $f'(x)$ في الفترات

$(-\infty,0)$, $(0,5)$, $(5,\infty)$

وبما أن f' مستمرة وليس لها أصفار في أي من الفترات الثلاث، نستطيع تعيين إشارة f' . وليس من الضرورة لحساب قيمة f' عند هذه القيم، مجرد معرفة الإشارة.

في الفترة $(-\infty,0)$ نختار $x=-1$ ، وفي الفترة $(0,5)$ نأخذ $x=3$ ، وفي الفترة $(5,\infty)$ نأخذ $x=6$ ونكون جدول كالآتي:

الفترة	$(5,\infty)$	$(0,5)$	$(-\infty,0)$
مقدار x	6	3	-1
مقدار $f'(x)$	$f'(6)=$ $\frac{-2}{3\times 6^{3/2}}<0$	$f'(3)=$ $\frac{4}{3^{5/2}}>0$	$f'(-1)=$ $4>0$
إشارة $f'(x)$	$-$	$+$	$+$
النتيجة	f متناقصة على $[5,\infty)$	f متزايدة على $[0,5]$	f متزايدة على $(-\infty,5]$

أي أن f' موجبة على $(-\infty,5]$ ثم متناقصة على $[5,\infty)$

أي أن الدالة لها نهاية عظمى محلية عند 5. ومقدار النهاية العظمى المحلية هو،

$$f(5)=5^{\frac{1}{3}}(10-5)=5\sqrt[3]{5}$$

وليس للدالة قيمة قصوى عند $x=0$ لأن f' لا تغير إشارتها عند 0.

ولرسم بيان الدالة نوقع أولاً النقط المقابلة الأعداد الحرجة $(0,0)$، $(5,5\sqrt[3]{5})$.

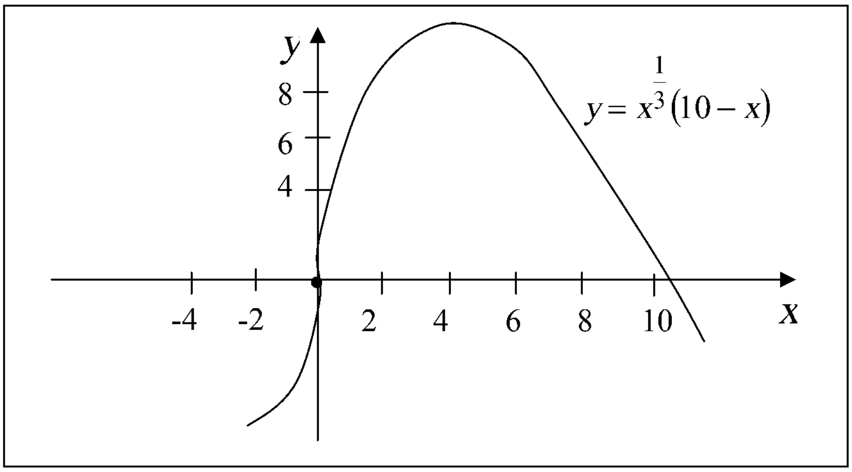
ونقط التقاطع مع المحور x عند $x=0$ ، $x=10$ أي $(0,0)$، $(10,0)$ مع ملاحظة أن $(0,0)$ هي نقطة تقاطع المنحنى مع محور y الوحيدة.

والمنحنى له مماس رأسي عند $x=0$ ، لأن

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=\infty$$

بينما الدالة مستمرة عند $x=0$.

وشكل (110) يوضح بيان المنحنى



شكل (110): مثال (11) (أ)

ب-

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{(x+1)(2x)-(x^2+3)(1)}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{2x^2+2x-x^2-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$$

نجد أن $f'(x)=0$ عند $x=1$ ، $x=-3$ ، $f'(x)=\infty$ عند $x=-1$

$\therefore$ يوجد ثلاثة أعداد حرجة هي $x=1$ ، $x=-1$ ، $x=-3$

والآن سنبحث إشارة $f'(x)$ في الفترات

$$(-\infty,-3)\ ,\ (-3,-1)\ ,\ (-1,1)\ ,\ (1,\infty)$$

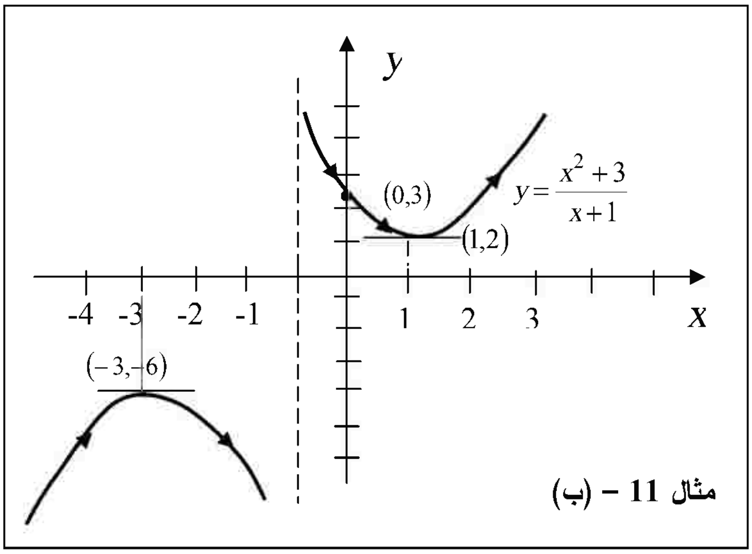
الفترة	$(1,\infty)$	$(-1,1)$	$(-3,-1)$	$(-\infty,-3)$
x المختارة	2	0	-2	-4
$f'(x)$	$f'(2)=$ $\frac{5}{9}>0$	$f'(0)=$ $-3<0$	$f'(-2)=$ $-3<0$	$f'(-4)=$ $\frac{5}{9}>0$
إشارة $f'(x)$	+	−	−	+
النتيجة	f متزايدة على $[1,\infty)$	f متناقصة على $[-1,1]$	f متناقصة على $[-3,-1]$	f متزايدة على $(-\infty,-3]$

$\therefore$ f لها نهاية عظمى محلية عند $x=-3$ وصغرى محلية عند $x=1$

ولكن عند العدد الحرج $x=-1$ لا يوجد قيمة قصوى ولكن

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+} f'(x)=-\infty$$

$\therefore$ يوجد خط تقاربي رأسي عند $x=-1$.



شكل (111)

والمنحنى لا يقطع محور x لأن $f(x) \neq 0$ ويقطع المحور y عند $(0,3)$

$\therefore$ النهاية العظمى المطلوبة هي $f(-3) = -6$.

مثال (12):

إذا كان $f(x) = x^{2/3}\left(x^2 - 9\right)$

أولاً : أوجد النهايات القصوى المحلية وارسم المنحنى.

ثانياً : ثم أوجد النهاية العظمى والنهاية الصغرى للدالة المذكورة على كل من الفترات الآتية :

أ- $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ ب- $[-1,4]$ جـ- $\left[-\frac{7}{2}, -2\right]$

الحـــل

$$f'(x) = x^{2/3}(2x) + \left(x^2 - 9\right)\frac{2}{3}x^{-1/3}$$

$$= \frac{6x^2 + 2\left(x^2 - 9\right)}{3x^{-1/3}}$$

$$= \frac{2\left(4x^2 - 9\right)}{3x^{1/3}}$$

أولاً : الأعداد الحرجة هي $x = \pm\frac{3}{2}$ ، إذن نبحث إشارة $f'(x)$ في الفترات

$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ ، $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ، $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ، $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

الفترة	$\left(\frac{3}{2},\infty\right)$	$\left(0,\frac{3}{2}\right)$	$\left(-\frac{3}{2},0\right)$	$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$
x المختارة	2	1	-1	-2
$f'(x)$	$f'(2)=$ $\frac{14}{3\sqrt[3]{2}}>0$	$f'(1)=$ $-\frac{10}{3}<0$	$f'(-1)=$ $\frac{10}{3}>1$	$f'(-2)=$ $-\frac{14}{3\sqrt[3]{2}}<0$
إشارة $f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
النتيجة	f متزايدة على $\left[\frac{3}{2},\infty\right)$	f متناقصة على $\left[0,\frac{3}{2}\right]$	f متزايدة على $\left[-\frac{3}{2},0\right]$	f متناقصة على $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$

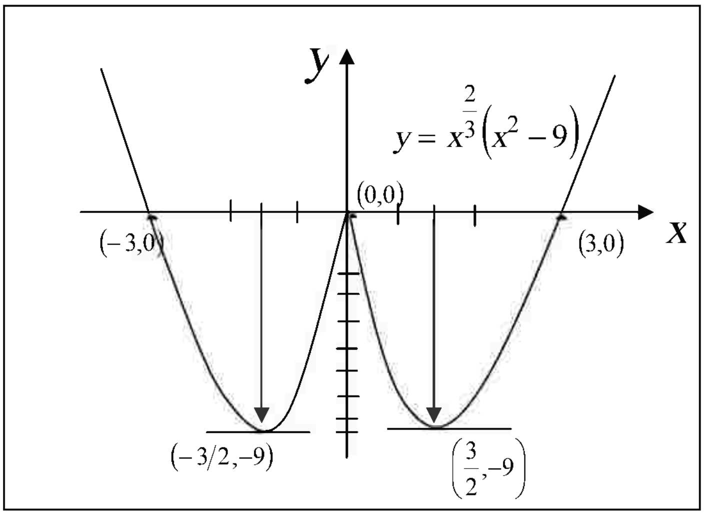
إذن f لها نهايتين صغريتين محليتين عند $x=-\frac{3}{2}$ ، $x=\frac{3}{2}$ يناظرها القيمتان الصغريتان المحليتان،

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)= f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{27}{8}\sqrt[3]{18}\approx -9$$

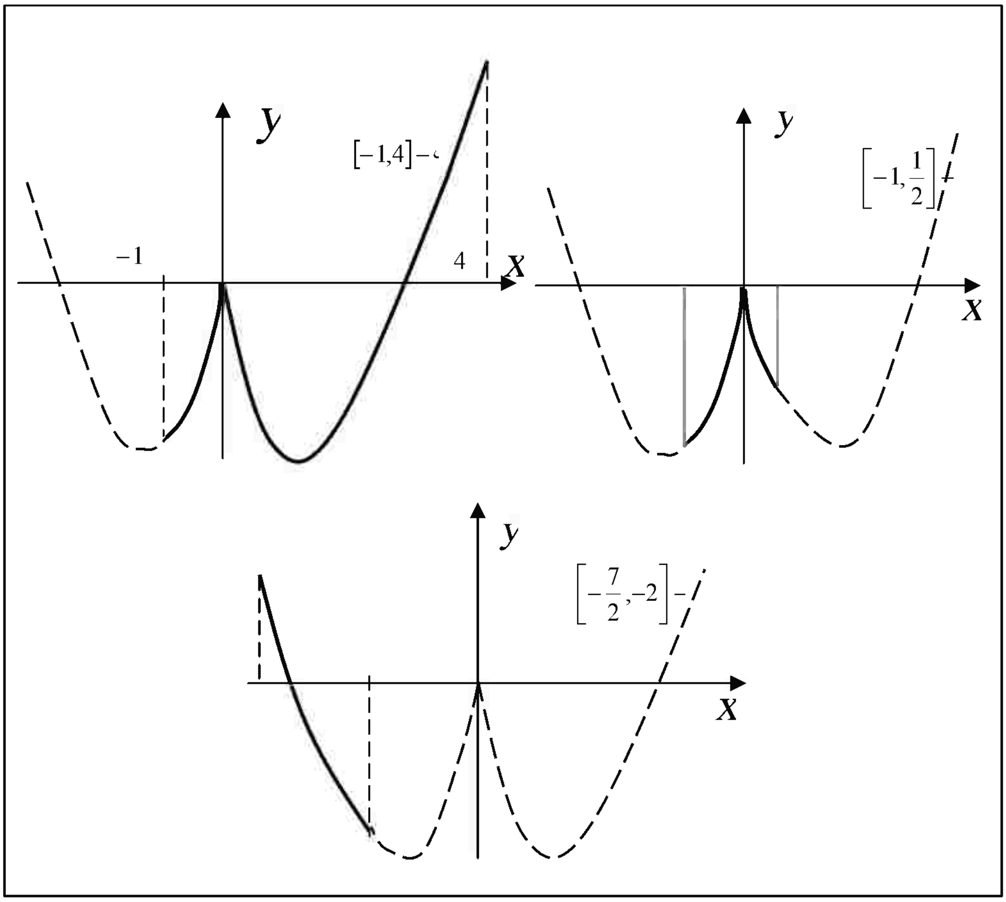
وعند العدد الحرج $x=0$ ، الدالة مستمرة، $f(0)=0$ ولكن

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=-\infty$$

$\therefore$ المنحنى له ناب عند $(0,0)$ وشكل (112) يوضح بيان الدالة



شكل (112) (مثال (12): أولاً)



شكل (113) (مثال (12): ثانياً)

ثانياً: أ) في الفترة $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$

$$f_{\min} = f(-1) = -8$$

$$f_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{35}{4\sqrt[3]{4}}$$

ب) الفترة $[-1,4]$

$$f_{\min} = f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}\sqrt[3]{18} \approx -9$$

$$f_{\max} = f(4) = 7\sqrt[3]{16}$$

جـ) الفترة $\left[-\frac{7}{2},-2\right]$

$$f_{\min} = f(-2) = -5\sqrt[3]{4}$$

$$f_{\max} = f\left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{13}{28}\sqrt[3]{98}$$

مثال (13):

أوجد النهايات القصوى المحلية وارسم المنحنى

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 24x^2 + 48x$$

الحـــــل

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 - 48x + 48 \\ &= 12x^2(x-1) - 48(x-1) \\ &= 12(x-1)(x^2-4) \\ &= 12(x-1)(x-2)(x+2) \end{aligned}$$

إذن يوجد ثلاثة أعداد حرجة عندما $f'(x) = 0$ هي

$$x = -2,1,2$$

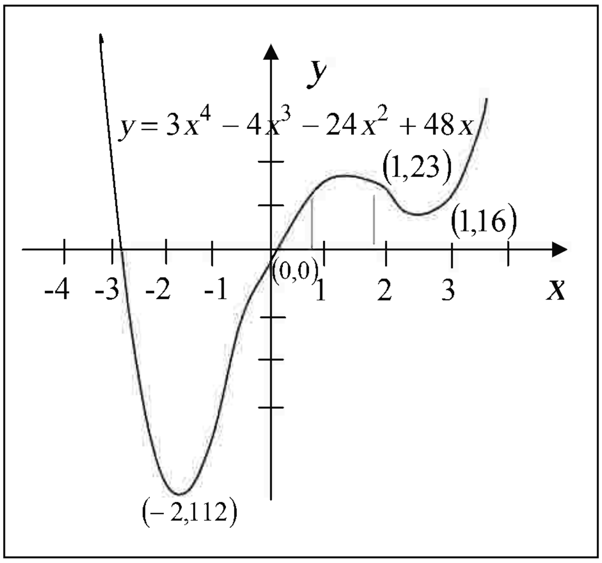
نبحث إشارة $f'(x)$ على الفترات $(2,\infty)$ ، $(1,2)$ ، $(-2,1)$ ، $(-\infty,-2)$

الفترة	$(2,\infty)$	$(1,2)$	$(-2,1)$	$(-\infty,-2)$
x المختارة	3	$\frac{3}{2}$	0	-3
$f'(x)$	$f'(3)=$ $120>0$	$f'\left(\frac{3}{2}\right)=$ $-\frac{21}{2}<0$	$f'(0)=$ $48>0$	$f'(-3)=$ $-240<0$
إشارة $f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
النتيجة	f متزايدة على $[2,\infty)$	f متناقصة على $[1,2]$	f متزايدة على $[-2,1]$	f متناقصة على $(-\infty,-2]$

$\therefore$ يوجد نهاية عظمى محلية هي $f(1)=23$

ويوجد نهايتان صغريتان محليتان هما $f(2)=16$ ، $f(-2)=-112$

ورسم بيان المنحنى مبين في شكل (114) حيث يمر بنقطة الأصل $(0,0)$ وإنما يقطع محور x في نقطة أخرى قيمة x عندها تقع في الفترة $(-3,-2)$ لأن $f(-2)<0$ ، $f(-3)>0$.



شكل (114): مثال (13)

تمارين (5−3)

في التمارين من (1) إلى (24) أوجد القيم القصوى المحلية للدالة f وفترات تزايد وتناقص الدالة ثم خطط بيان المنحنى $y = f(x)$.

(1) $f(x) = 4x^3 - 3x^4$

(2) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 1$

(3) $f(x) = x^3 - x^2 - 40x + 8$

(4) $f(x) = 2x^3 + x^2 - 20x + 1$

(5) $f(x) = 8x^2 - 7x - 1$

(6) $f(x) = 19 - 8x - 11x^2$

(7) $f(x) = 6x^2 - 9x + 5$

(8) $f(x) = 5 - 7x - 4x^2$

(9) $f(x) = (x^2 - 8x)^2$

(10) $f(x) = x^{2/3}(8 - x)$

(11) $f(x) = x(x-5)^{1/3}$

(12) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x^2 - 4}$

(13) $f(x) = 10x^3(x-1)^2$

(14) $f(x) = 8 - \sqrt[3]{x^2 - 2x + 1}$

(15) $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$

(16) $f(x) = x\sqrt{x^2 - 9}$

(17) $f(x) = x^{2/3}(x-6)^2 + 4$

(18) $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

(19) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$

$$f(x)=(x-2)^3(x+1)^4 \qquad (20)$$

$$f(x)=\sqrt{x^2+4} \qquad (21)$$

$$f(x)=x^2(x-5)^4 \qquad (22)$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-4}}{x^2} \qquad (23)$$

$$f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+2}} \qquad (24)$$

في التمارين من (25) إلى (34) أوجد القيم القصوى المحلية لدالة f على الفترة المعطاة والفترات الجزئية التي فيها f متزايدة أو متناقصة مع توضيح بيان المنحنى بالرسم.

$$f(x)=\cos x+\sin x \quad , \quad [0,2\pi] \qquad (25)$$

$$f(x)=2\cos x+\sin 2x \quad , \quad [0,2\pi] \qquad (26)$$

$$f(x)=\cos x-\sin x \quad , \quad [0,2\pi] \qquad (27)$$

$$f(x)=2\cos x+\cos 2x \quad , \quad [0,2\pi] \qquad (28)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x \quad , \quad [0,2\pi] \qquad (29)$$

$$f(x)=\sec\left(\frac{x}{2}\right) \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad (30)$$

$$f(x)=x+2\cos x \quad , \quad [0,2\pi] \qquad (31)$$

$$f(x)=\cot^2 x+2\cot x \quad , \quad \left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right] \qquad (32)$$

$$f(x)=2\tan x-\tan^2 x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right] \qquad (33)$$

$$f(x)=\tan x-2\sec x \quad , \quad \left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \qquad (34)$$

في التمارين من (35) إلى (39) ارسم بيان الدالة f التي تحقق الشروط المعطاة لك.

(35) $f(3)=5$ ، $f(5)=0$ ، $f'(5)$ غير معرفة ، $f'(3)=0$
$f'(x)>0$ إذا كان $x<3$ أو $x>5$ ولكن $f'(x)<0$ عندما
$3<x<5$

(36) $f(0)=3$ ، $f(-2)=f(2)=-4$ ، $f'(0)$ غير معرفة ،
$f'(-2)=f'(2)=0$ ، $f'(x)>0$ عندما $x>2$ أو
$-2<x<0$ ، $f'(x)<0$ عندما $x<-2$ أو $0<x<2$.

(37) $f(a)=a$ ، $f'(a)=0$ عندما $a=0,\pm1,\pm2,\pm3$ ، $f'(x)>0$
لجميع قيم x.

(38) $f(0)=0$ ، $f(-5)=4$ ، $f(5)=-4$ ،
$f'(-5)=f'(0)=f'(5)=0$
$f'(x)>0$ لما $|x|>5$ ، $f'(x)<0$ لما $0<|x|<5$.

(39) $f(0)=3$ ، $f(-2)=f(2)=-4$ ،
$f'(-2)=f'(0)=f'(2)=0$
$f'(x)>0$ لما $x>2$ أو $-2<x<0$ ،
$f'(x)<0$ لما $x<-2$ أو $0<x<2$.

بند 5–4: اختبار المشتقة الثانية (والتقعر)

درسنا في بند 3–4 كيفية استعمال إشارة f' لمعرفة فترات تزايد أو تناقص f . أما في هذا البند فسوف نستخدم إشارة f'' لهذا الغرض ونورد تعريف التقعر وفترات تقعر المنحنى لأعلى أو لأسفل ونقطة حرجة جديدة تسمى نقطة الانقلاب.

تعريف: (التقعر)

إذا كانت f قابلة للتفاضل على فترة مفتوحة I .

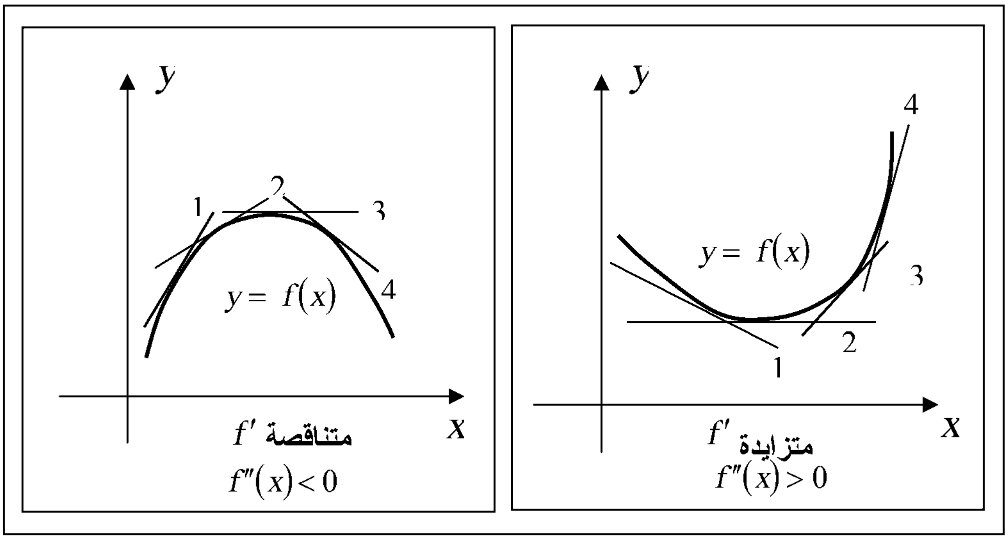
فإن بيان f يكون :

أ– مقعر لأعلى على I إذا f' متزايدة على I .

ب– مقعر لأسفل على I إذا f' متناقصة على I .

ففي شكل (115) منحنى مقعر لأعلى وميل المماس، f' ، يتزايد من قيمة إلى صفر عند النهاية الصغرى إلى قيمة موجبة. أيْ أن معدل تغير f' بالنسبة إلى x موجباً، أيْ $f''(x) > 0$.

وفي شكل (116) منحنى مقعر لأسفل ونرى ميل المماس، f' ، يتناقص من قيمة موجبة إلى صفر عند النهاية الصغرى إلى قيمة سالبة. أيْ أن معدل تغير f' بالنسبة إلى x يكون سالباً ، أيْ $f''(x) < 0$



شكل (116)   شكل (115)

ومن ثم نورد الاختبار الآتي .

<u>**اختبار التقعر**</u>

إذا كانت f'' قابلة للتفاضل على فترة مفتوحة I .

فإن بيان f يكون :

أ- مقعر لأعلى على I عندما $f''(x) > 0$ على I .

ب- مقعر لأسفل على I عندما $f''(x) > 0$ على I .

أما النقطة التي يتغير عندها بيان f من مقعر لأعلى إلى مقعـر لأسـفل أو العكس فتسمى نقطة انقلاب "Point of In flection "

ويبنى على ذلك التعريف الدقيق الآتي .

<u>**تعريف : (نقطة الانقلاب)**</u>

تسمى النقطة $(c, f(c))$، على $gr\ f$ ، نقطة انقلاب

إذا تحقق الشرطان الآتيان .

أ- f مستمرة عند c.

ب- يوجد فترة مفتوحة (a,b) تحتوى c بحيث

يكون المنحنى مقعر لأعلى على (a,c) ولأسفل

على (c,b) أو العكس .

إذا كانت f'' بالإضافة إلى استمرارية f ، مستمرة هي الأخرى عند c. فإن $f''(c)=0$ عند نقطة الانقلاب ولكن يجب أن يبقى بالذهن أنه من الممكن أن تكون، $f''(c)$ غير موجودة عند نقطة انقلاب. ولذلك فلإيجاد نقطة الانقلاب، نبدأ بإيجاد أصفار f'' وكذلك الأعداد التي عندها f'' غير موجودة. ثم نختبر جميع هذه الأعداد لتعيين ما إذا كانت هي نقط انقلاب أم لا.

اختبار المشتقة الثانية

إذا كانت f قابلة للتفاضل على فترة مفتوحة تحتوى c ،

وكان $f'(c)=0$ فإن :

أ) إذا كان ، $f''(x)<0$ فإن $f(c)$ نهاية عظمى محلية .

ب) إذا كان ، $f''(x)>0$ فإن $f(c)$ نهاية صغرى محلية .

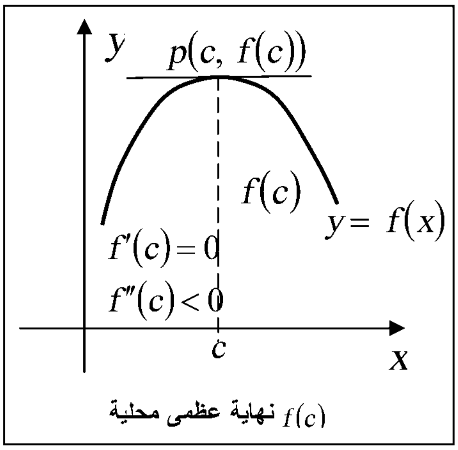
جـ) إذا كان ، $f''(x)=0$ يفشل اختبار المشتقة الثانية

ويجب العودة لاختبار المشتقة الأولى.

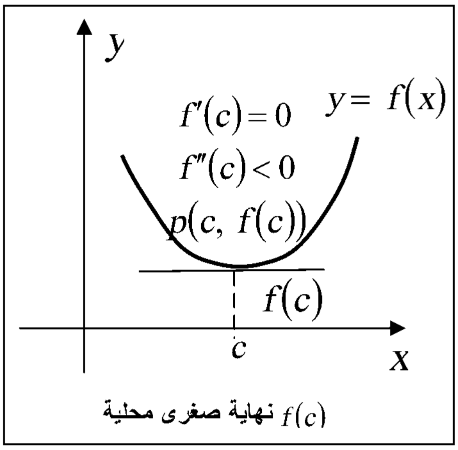
البرهان :

أ) فإذا كان $f'(c)=0$ يكون ميل المماس عند $(c, f(c))$ أفقياً ، فإذا كان بالإضافة لذلك $f''(c)=0$ فإن المنحنى يكون مقعر لأسفل ولذلك يكون هناك فترة مفتوحة (a,b) تحتوي c بحيث يقع المنحنى بأكمله أسفل المماسات وينتج أن $f(c)$ هي نهاية عظمى محلية. وشكل (117) يوضح ذلك.

بالمثل يمكن إثبات (ب) و (جـ) وشكل (118) يوضح الحالة (ب).



شكل (117)



شكل (118)

مثال (14)

أوجد القيم القصوى المحلية للدالة f ووضح بيانها بالرسم .

$f(x)=2\left(\sin x-\sin^2 x\right)+1$ على الفترة $[0,2\pi]$

الحل

$$f'(x)=2(\cos x-2\sin x-\cos x)=2\cos x(1-2\sin x)$$

$$f''(x)=2(-\sin x)(1-2\sin x)+2\cos x(-2\cos x)$$

$$=2\left[-\sin x+2\sin^2 x-2\cos^2 x\right]$$

الأعداد الحرجة لـــ f هي قيم x عندما $f'(x)=0$ ،

$$2\cos x(-2\sin x)=0$$

$$\cos x=0 \quad , \quad \sin x=\frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{2}\ ,3\frac{\pi}{2} \qquad , \quad x=\frac{\pi}{6}\ ,\frac{5\pi}{6}$$

$\therefore$ الأعداد الحرجة هي $\frac{3\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, x=\frac{\pi}{6}$,

وقيم $f''(x)$ عند هذه النقط هي

$$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-3\ , \quad f''\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-3\ , \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\ , \quad f''\left(\frac{3\pi}{6}\right)=6$$

ومن اختبار المشتقة الثانية نجد أن لدينا

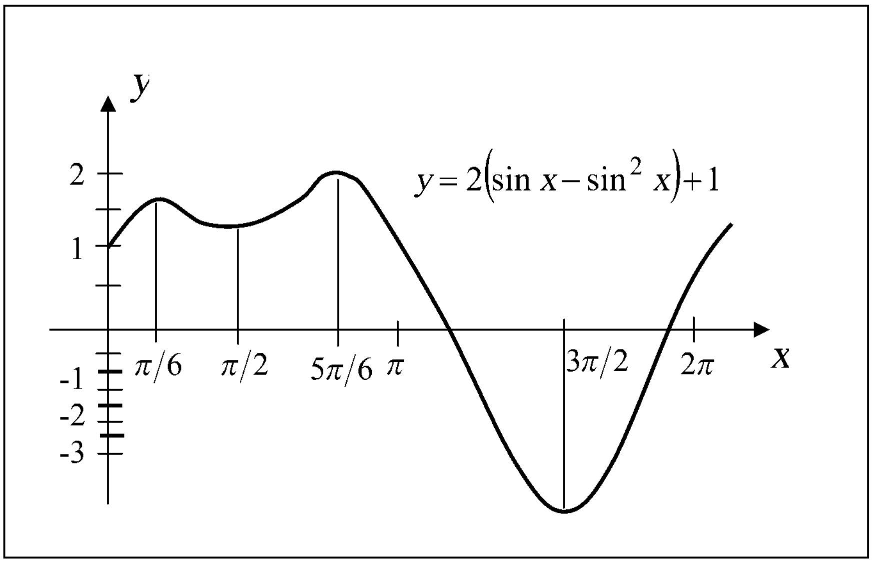
نهاية عظمى محلية: $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3/2$

نهاية عظمى محلية: $f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=3/2$

نهاية صغرى محلية: $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

نهاية صغرى محلية : $f(3\pi/2)=-3$

بتوقيع هذه النقط الحرجة وبعض نقط اختيارية بينها نحصل على المنحنى شكل (119) .



شكل (119) : مثال (14)

مثال (15)

إذا كانت $f(x) = 2x^{1/3} + x^{4/3}$

أ- أوجد النهايات العظمى والصغرى وفترات التقعر المختلفة .

ب- أوجد نقط الانقلاب .

جـ- ارسم بيان الدالة f .

الحـــل

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\ \frac{(1+2x)}{x^{2/3}}$$

$$f''(x)=-\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}+\frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{4}{9}\ \frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{5/3}}$$

من $f'(x)$ نجد أن هناك عددان حرجان

$$x=\left(-\frac{1}{2}\right)\ ,\quad x=0$$

، $$f''\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{9}\ \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}-1}{\left(\frac{-1}{2}\right)^{5/3}}$$

$$=\frac{4}{9}\ \frac{-\frac{-1}{2^{1/3}}-1}{-\frac{-1}{2^{5/3}}}=$$ كمية موجبة

، غير موجودة $=f''(0)$

إذن : عند $x=-\frac{1}{2}$ يوجد نهاية صغرى محلية هي

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{-1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\left(2-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}$$

، عند $x=0$ يفشل اختبار المشتقة الثانية ، سنطبق اختبار المشتقة الأولى.

باختيار $x=-\frac{1}{4}$ في الفترة $\left(-\frac{1}{2},0\right)$، $x=1$ في الفترة $(0,\infty)$ نجد أن

موجبة $f'(1)$, موجبة $=f'\left(-\frac{1}{4}\right)$

إذن عند $x=0$ لا يوجد قيم قصوى وإنما $f'(0)=\infty$

ولبحث التقعر ندرس إشارة $f''(x)$ في الفترات $(0,\infty)$ و $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

و $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

فنجد باختبار قيم اختيارية لـــ x في الفترات الثلاثة

مثل $x=-1$ في $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ ، نجد

$f''(-1)=$ موجبة

والمنحنى مقعر لأعلى في $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$

، $x=-\frac{1}{4}$ في $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ ، نجد

موجبة $= f''\left(-\frac{1}{4}\right)$

والمنحنى مقعر لأعلى في $\left(-\frac{1}{2},0\right)$

، $x=1/2$ في $(0,1)$ ، نجد أن

$f''(1/2)=$ سالبة

والمنحنى مقعر لأسفل في $(0,1)$

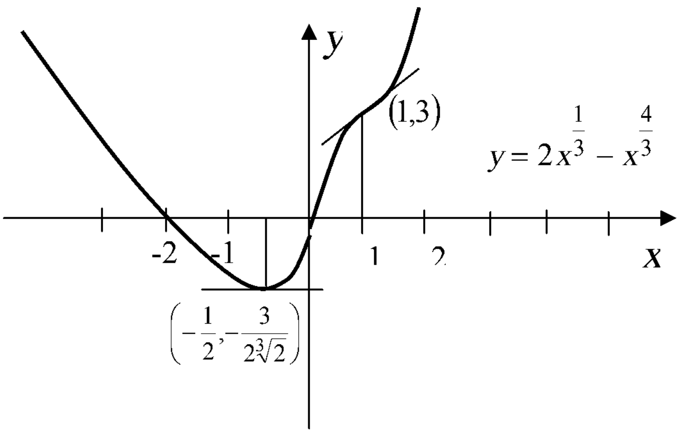
وللمنحنى نقط انقلاب عند

$$f''(x)=0$$

أيْ $x^{\frac{1}{3}}-1=0$

$$x=1$$

$\therefore$ يوجد نقط انقلاب $(1,3)$ بتقعر المنحنى بعدها لأعلى.



المنحنى مقعر لأعلى على $(1,\infty)\cup(-\infty,0)$ المنحنى مقعر لأسفل على $(0,1)$ ميل المماس $=\infty$ عند $x=0$
$\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right)$ تناظر نهاية صغرى $(1,3)$ هي نقطة انقلاب

شكل (120) : مثال (15)

مثال (16)

كرر مثال (15) للدالة $f(x)=5x^{2/3}+x^{5/3}$

الحل

$$f'(x)=\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}$$

$$=\frac{5}{3}\ \frac{(2+x)}{x^{1/3}}$$

$$f''(x)=-\frac{10}{9}x^{-4/3}+\frac{10}{9}x^{-1/3}$$

$$=\frac{10}{5}\ \frac{(x-1)}{x^{1/3}}$$

من $f'(x)$ نجد أن الأعداد الحرجة هي -2 ، 0

عند $x=-2$ $\quad f''(-2)=\dfrac{-10}{3(-2)^{4/3}}$ أيْ ، سالب = $f''(-2)=$

يوجد نهاية عظمى محلية هي $f(-2)=3\times 2^{\frac{2}{3}}\approx 4.8$

عند $x=0$ $\quad f''(0)$ غير موجودة ، يفشل اختبار المشتقة الثانية . نلجأ لاختبار المشتقة الأولى حيث نبحث إشارة $f'(x)$ قبيل وبعيد $x=0$.

$$f'(-1)=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{-1}\right)=-\frac{5}{3}=\text{سالب}$$

$$f'(1)=\frac{5}{3}\left(\frac{3}{1}\right)=5=\text{موجب}$$

إذن يوجد نهاية صغرى محلية عند $x=0$ هي

$$f(0)=0$$

وميل المماس عند $x=0$ ، نجد

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\quad \text{سالب}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\quad \text{موجب}$$

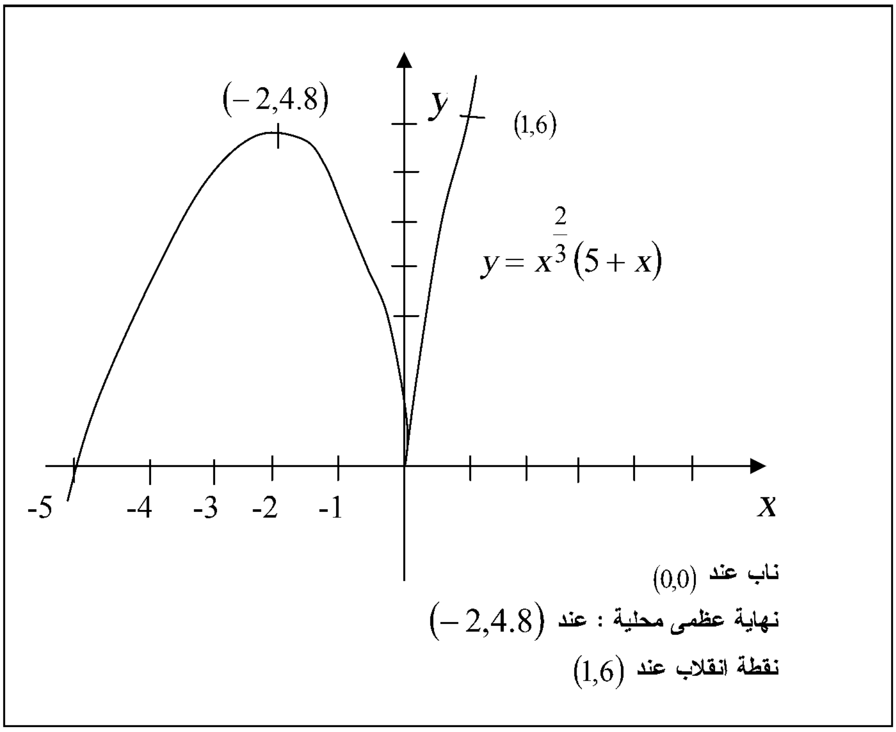
أيْ أن المنحنى له ناب عند $x=0$ لان $f(0)=0$ موجودة ولتعيين التقعر، نلاحظ أن يوجد عند $f''(x)=0$ نقطة انقلاب ، أيْ عند $x=1$ ، $y=6$

وفي الفترة $(-\infty,0)$ ، سالب = $f''(-1)$ ، المنحنى مقعر لأسفل

، في الفترة $(0,1)$ ، سالب = $f''\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ ، المنحنى مقعر لأسفل

، في الفترة $(1,\infty)$ ، موجب = $f''(2)$ ، المنحنى مقعر لأعلى

وبيان الدالة f موضح في شكل (121).



شكل (121) : مثال 16

تمارين (4-5)

في التمارين من (1) إلى (33) أوجد القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الثانية إذا كان ممكنا . عين فترات التقعر لأعلى والتقعر لأسفل وأوجد نقط الانقلاب . ارسم بيان الدالة .

(1) $f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x + 1$

(2) $f(x) = 2x^6 - 6x^4$

(3) $f(x) = x^{1/3} - 1$

(4) $f(x) = (x^2 - 1)^2$

(5) $f(x) = 8x^2 - 2x^4$

(6) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$

(7) $f(x) = 15x^5 - 25x^3$

(8) $f(x) = 2 - x^{2/3}$

(9) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 8$

(10) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

(11) $f(x) = x^{2/3}(3x + 10)$

(12) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1 - x)$

(13) $f(x) = x^2(3x - 5)^{1/3}$

(14) $f(x) = x\sqrt[3]{3x + 2}$

(15) $f(x) = 8\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^4}$

(16) $f(x) = 6\sqrt{x} + \sqrt{x^3}$

(17) $f(x) = x^2\sqrt{16 - x^2}$

(18) $f(x) = x\sqrt{9 - x^2}$

في التمارين (19) حتى (24) الدوال معرفة على الفترة $[0,2\pi]$.

$$f(x)=\cos x+\sin x \qquad (19)$$

$$f(x)=\cos x-\sin x \qquad (20)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(1-2\sin x) \qquad (21)$$

$$f(x)=\cos x(1+\sin x) \qquad (22)$$

$$f(x)=2x+4\cos 2x \qquad (23)$$

$$f(x)=2\cos x+\cos 2x \qquad (24)$$

$$f(x)=2\tan x+\tan^2 x \qquad (25)$$

$$f(x)=\sec x-\tan x \qquad (26)$$

$$f(x)=\csc\frac{x}{2} \ ,\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad (27)$$

$$f(x)=\cot^2 x+2\cot x \ ;\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right] \qquad (28)$$

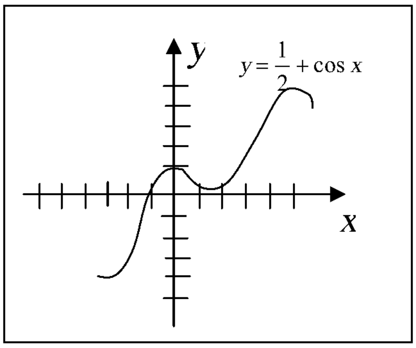
$$f(x)=2\tan x-\tan^2 x \ ;\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right] \qquad (29)$$

$$f(x)=\tan x-2\sec x \ ;\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right] \qquad (30)$$

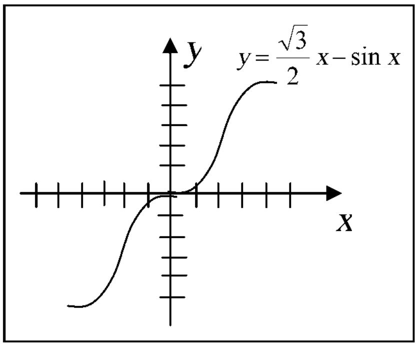
$$f(x)=\frac{2x^3-3x^2}{(2x-1)^3} \qquad (31)$$

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1} \qquad (32)$$

(33) منحنى المعادلة $y=\frac{1}{2}x+\cos x$ موضحة في شكل (122)
في الفترة $-2\pi \le x \le 2\pi$ أوجد القيم القصوى المحلية .



شكل (122) تمرين (33)



شكل (123) : تمرين (34)

(34) منحنى المعادلة $y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\sin x$ موضح في شكل (123). في الفترة $[-2\pi,2\pi]$ أوجد، باستعمال اختبار المشتقة الثانية، القيم القصوى المحلية .

(35) عين نقط الانقلاب لبيان f ومن ثم فترات التقعر لأعلى ولأسفل

أ- $f(x)=(x-1)^2\sqrt{9-x^2}$

ب- $f(x)=10x^9-9x^{10}$

جـ- $f(x)=5\left(x^5+x^3\right)+9x$

(36) أوجد القيم القصوى ونقط الانقلاب.
$f(x)=\sin\left(x^2-7x+3\right)$ و $[0,6]$

بند 5-5 رسم المنحنيات

إن تخطيط بيان دالة f ، أي منحنى المعادلة $y = f(x)$ يوضح خواص هذه الدالة التي قد تكون غير واضحة ويمدنا بطريقة سهلة نرى بها سلوك الدالة كيفيا مثل التقعر والقيم القصوى المحلية ومناطق تزايد أو تناقص الدالة. وقد شرحنا في البنود السابقة أفكار عديدة مختلفة لتخطيط بيان دالة.

وسوف نلخص هنا هذه الأفكار ونعرف نقط إضافية أخرى.

فنبلور ذلك في مجموعة من الإرشادات نتبعها عن تخطيط منحنى.

مثل $y = f(x)$:

1- أوجد نطاق f (D_f)

2- عين مناطق وجود المنحنى أعلى محور x أو أسفله .

أيْ قيم x التي تكون $f(x) > 0$ ، وقيم x التي تكون $f(x) < 0$

3- أوجد وصنف عدم الاستمرارية إن وجد .

4- أوجد تقاطع المنحنى مع المحورين.

نقط التقاطع مع محور x هي $\{x : f(x) = 0\}$،

نقط التقاطع مع محور y هي $(0, f(0))$ إذا وجدت $f(0)$.

5- إذا كانت f دالة زوجية تكون الدالة متماثلة حول المحور y وإذا كانت فردية كان بيان الدالة متماثل بالنسبة لنقطة الأصل (بالنسبة للمستقيم $y = x$ ،أ $y = -x$)

6- أوجد الأعداد الحرجة والقيم الحرجة المحلية. وذلك بإيجاد قيم x التي عندها $f'(x) = 0$ أو $f'(x)$ غير موجودة ثم استخدام اختبار المشتقة الأولى لتصنيف القيم القصوى.

عين ما إذا كان هناك أركان أو ناب للمنحنى.

7- أوجد نقط الانقلاب ومناطق تقعر المنحنى لأعلى ولأسفل .

وذلك بإيجاد $f''(x)$ واستعمال اختبار المشتقة الثانية كلما أمكن. فيكون المنحنى مقعر لأعلى عندما $f''(x)>0$ ولأسفل عندما $f''(x)<0$.

إذا كانت f مستمرة عند c، $f''(x)$ تغير إشارتها عند c فإن $(c,\ f(c))$ هي نقطة انقلاب.

8- إذا كان $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

فإن $y=L$ هو خط تقاربي أفقي

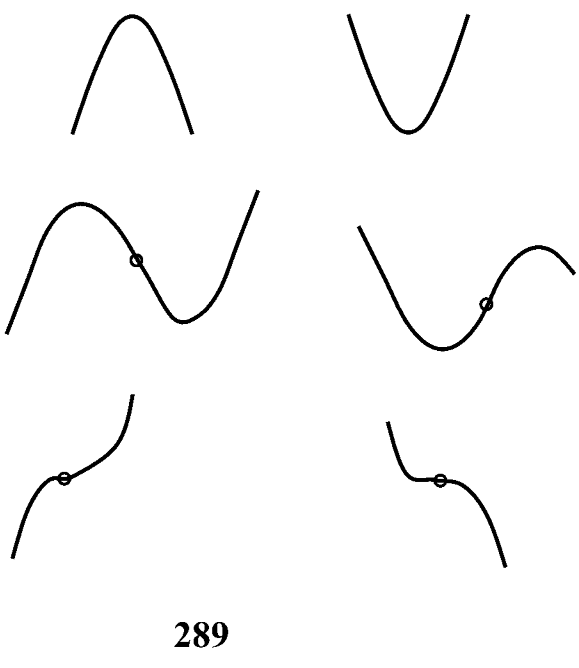
إذا $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)$ أو $\lim\limits_{x\to a^{-}} f(x)$

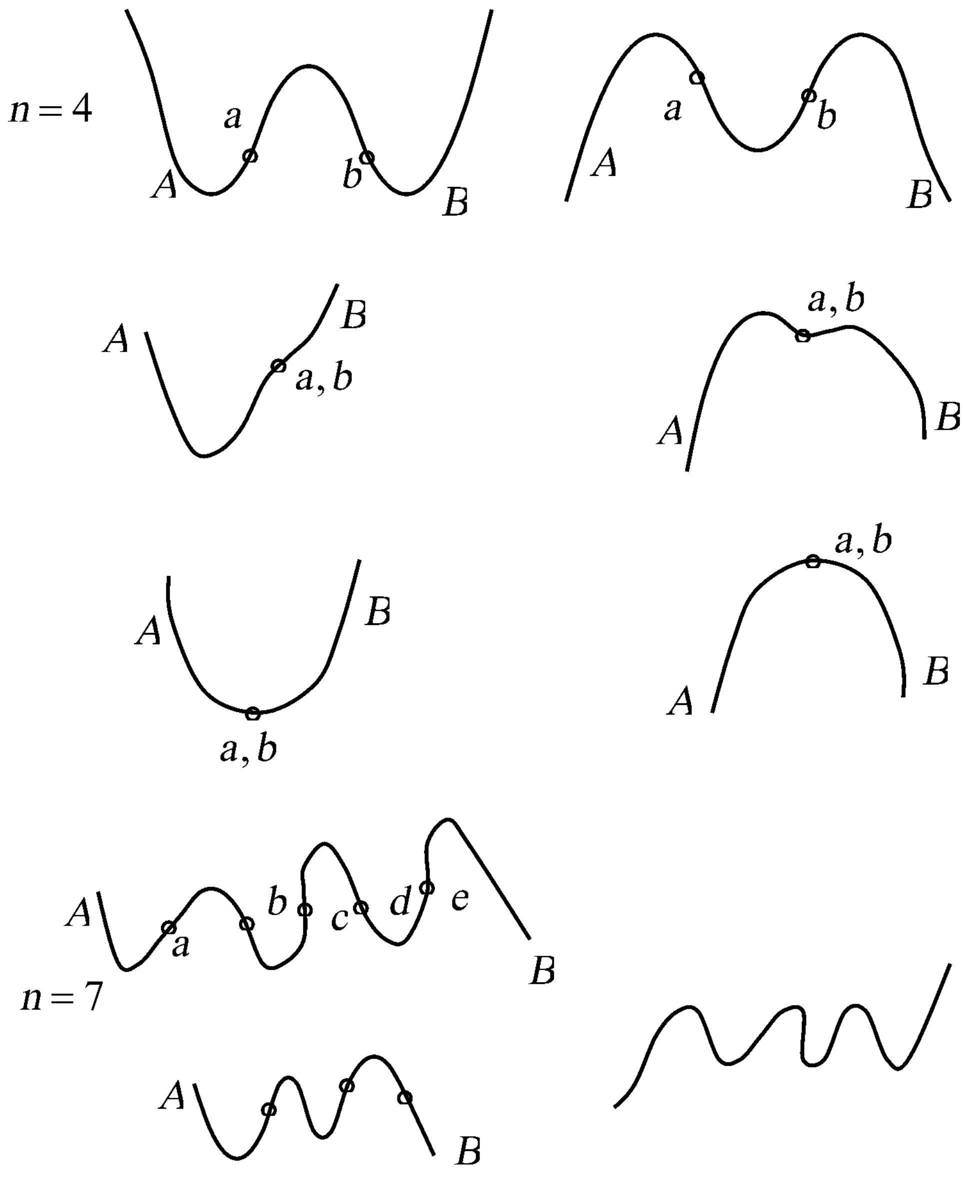
هي ∞ أو $-\infty$ فإن $x=a$ هو خط تقاربي رأسي .

من أبسط الدوال هي كثيرات الحدود. فيبدو بيانها مستمر وأملس دائماً وله كثير من النقط العليا والنقط السفلى. وكل عدد حرج يعين قيمة قصوى محلية أو نقطة انقلاب وعدد طيات المنحنى عادة هي $(n-1)$ إذا كان كثير الحدود من الدرجة n . فمثلا

$n=2$

$n=3$





عدد المناطق المقعرة لأعلى + عدد المناطق المقعرة لأسفل $= n-1$

عدد النقاط الحرجة $= n-2$

ولكن قد تنطبق بعض النقاط الحرجة على بعضها فيكون

عدد المناطق $\leq n-1$

عدد النقاط الحرجة $\leq n-2$

والدالة الكسرية مثل $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ ، g ، f كثيري حدود يكون لكل صفر من أصفار $h(x)$ ، مثل $x=c$ ، حط تقاربي رأسي. وإذا كانت درجة $g(x)$ مساوية لدرجة $h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$ ، المستقيم $y=L$ هو خط تقاربي أفقي.

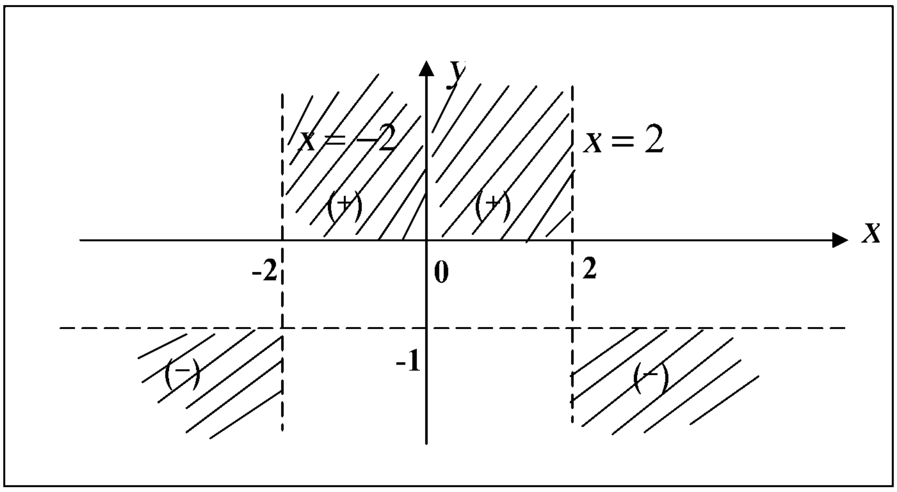
مثال (17)

ناقش وخطط بيان f ، $f=\frac{x^2}{4-x^2}$

الحـــل

$(2,1,8$ نوجد D_f $f(x)=\frac{x^2}{(2-x)\ (2+x)}$ ، الأعداد الحرجة $-2,0,2$

الفترة	$(2,\infty)$	$(0,2)$	$(-2,0)$	$(-\infty,-2)$
إشارة f	$-$	$+$	$+$	$=$



شكل (124)

$D_f = R - \{-2,2\}$ أي $D_f = (-\infty,-2) \cup (-2,2) \cup (2,\infty)$

وأماكن وجود المنحنى هي المظللة في شكل (124)

ويوجد خطان تقاربيان رأسيان $x=-2$ ، $x=2$ يمثلان بخطان رأسيان متقاطعان كما بالشكل (124).

، $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -1$

أيْ $y=-1$ هو خط تقاربي أفقي

3) ماعدا عند $x=\pm 2$ الدالة مستمرة .

4) نقط التقاطع مع المحور x ، $f(x)=0$ ، $x=0$

نقط التقاطع مع المحور y عند $x=0$ ، $f(0)=0$

المنحنى يقطع المحورين عند $(0,0)$ فقط .

5) $f(-x)= f(x)$ ، f دالة زوجية بيانها متماثل حول المحور y .

6)
$$f'(x) = \frac{(4-x^2)(2x) - x^2(-2x)}{(4-x^2)^2}$$
$$= \frac{2x(4-x^2+x^2)}{(4-x^2)^2}$$
$$= \frac{8x}{(4-x^2)^2}$$

$f'(x)=0$ عند $x=0$ $\therefore$ $x=0$ عدد حرج.

نختبر فترات تزايد وتناقص الدالة في الفترات الموضحة

الفترة	$(2,\infty)$	$(0,2)$	$(-2,0)$	$(-\infty,-2)$
إشارة f'	$+$	$+$	$-$	$-$
النتيجة f	متزايدة	متزايدة	متناقصة	متناقصة

تتغير إشارة $f'(x)$ عند $x=0$ من $(-)$ إلى $(+)$

إذن $f(0)$ نهاية صغرى محلية.

7)

$$f''(x)=\frac{\left(4-x^2\right)^2 8-8x2-\left(4-x^2\right)\left(-2x\right)}{\left(4-x^2\right)^4}$$

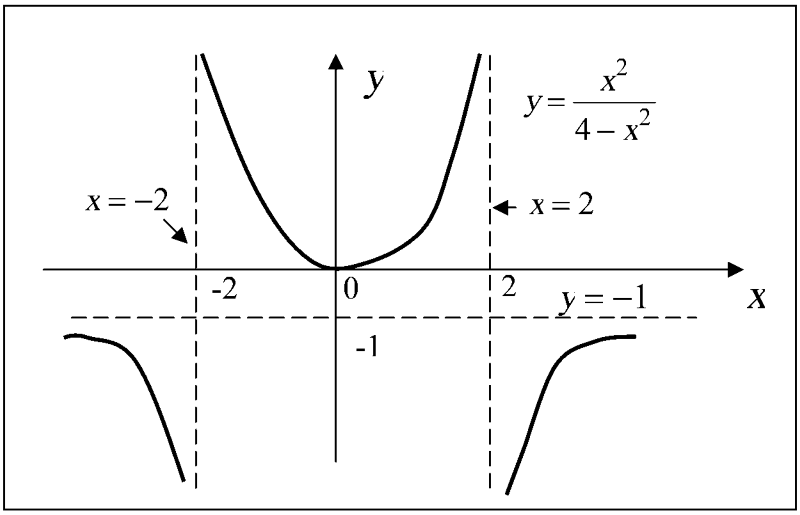
$$=8\frac{4-x^2+4x^2}{\left(4-x^2\right)^3}$$

$$=8\frac{\left(3x^2+4\right)}{\left(4-x^2\right)^3}$$

البسط موجب دائماً وتحدد إشارة f'' من $\left(4-x^2\right)^3$

الفترة	$(2,\infty)$	$(-2,2)$	$(-\infty,-2)$
إشارة f''	$-$	$+$	$-$
التقعر	لأسفل	لأعلى	لأسفل

ولا يوجد نقط انقلاب عند -2 أو 2 لأن f غير مستمرة عندها وحيث أن $f''(0)=+\frac{1}{2}$ ، فهذا يؤكد أن $x=0$ هي نقطة نهاية صغرى محلية ، $f(0)=0$. وبيان المنحنى يصبح كما في شكل (125)



شكل (125): مثال (17)

مثال (18): ناقش وخطط بيان f

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-5x+6}$$

الحـــــل

1) النطاق: المقام $=(x-2)(x-3)$ $\therefore$ D_f هو جميع الأعداد الحقيقية ماعدا $x=2$ ، $x=3$

2) المدى: البسط موجب دائماً ماعدا $x=0$. والمقام سالب في الفترة $(2,3)$ وموجب في الفترة $(-\infty,2)\cup(3,\infty)$.

إذن $f(x)$ موجبة على $(-\infty,2)$، سالبة على $(2,3)$ وموجبة على $(3,\infty)$.

3) f لها عدم استمرارية لا نهائية عند 2، 3 ومستمرة ما عدا ذلك.

4) نقط التقاطع مع محور x عند $f(x)=0$ هي $x=0$

ونقط التقاطع مع محور y عند $x=0$ ، $y=f(0)=0$ المنحنى يقطع المحورين عند $(0,0)$ فقط.

5) f ليست زوجية ولا فردية ولذلك غير متماثلة حول y ولا حول نقطة الأصل.

6)
$$f'(x)=\frac{(x^2-5x+6)4x-2x^2(2x-5)}{(x^2-5x+6)^2}$$
$$=\frac{2x(2x^2-10x+12-2x^2+5x)}{(x^2-5x+6)^2}$$
$$f'(x)=\frac{2x(-5x+12)}{(x^2-5x+6)^2}$$

بوضع $f'(x)=0$ نحصل على $x=0$ ، $x=\frac{12}{5}$ كنقط حرجة

أما $x=2$ ، $x=3$ ليست حرجة لأن $f(2)$ ، $f(3)$ غير موجودتان.

باختيار قيمة مناسبة لـــ x في الفترات المختلفة نحصل على مناطق تزايد وتناقص الدالة كما بالجدول الآتي

الفترة	$(3,\infty)$	$\left(\frac{12}{5},3\right)$	$\left(2,\frac{12}{5}\right)$	$(0,2)$	$(-\infty,0)$
إشارة f'	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
النتيجة f	متناقصة	متناقصة	متزايدة	متزايدة	متناقصة

ومن اختبار المشتقة الأولى، f لها نهاية صغرى محلية، $f(0)=0$ ونهاية عظمى محلية $f\left(\frac{12}{5}\right)=-48$

7) يمكنك إثبات أن،

$$f''(x)=\frac{4\left(5x^3-18x^2+36\right)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

ولحل المعادلة $f''(x)=0$ يلزمنا حل معادلة الدرجة الثالثة

$$5x^3-18x^2+36=0$$

وهذا أمر صعب في المرحلة الحالية إلا إننا نعلم أن لهذه المعادلة حل حقيقي عند $x\approx 2.35$ أي يوجد نقطة انقلاب عند $(2.35,-50.4)$ وكذلك عند $x\approx 2.5$ ، $x\approx -1.2$

8) لإيجاد الخطوط التقاربية الأفقية،

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x^2-5x+6}=2$$

إذن يوجد خط تقاربي أفقي $y=2$

أما الخطوط التقاربية الرأسية فهي

$$x=2 \text{ ، } x=3$$

من الجدير بالملاحظة (شكل 126) أن بيان f يقطع خط التقارب الأفقي، $y=2$ ، عندما،

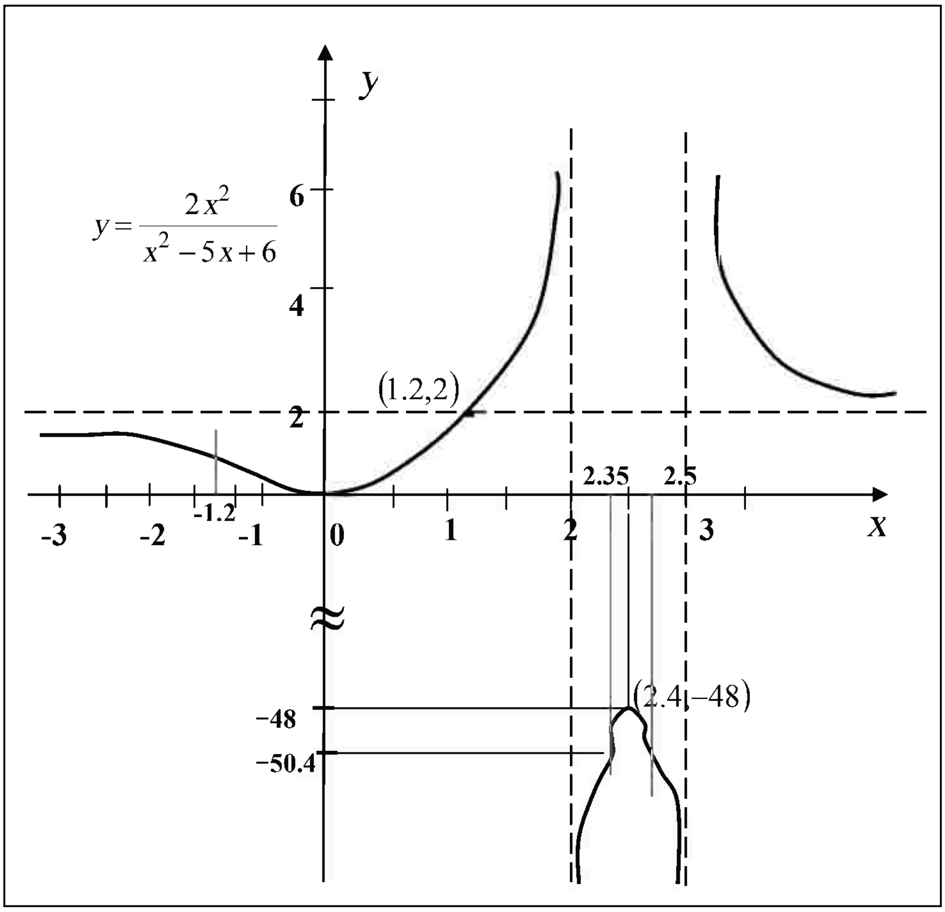
$$f(x)=2$$

$$\frac{2x^2}{x^2-5x+6}=2$$

$$x^2=x^2-5x+6$$

$$x=\frac{6}{5}$$

أي أن نقطة التقاطع $\left(\frac{6}{5},2\right)$.



شكل (126): مثال (18)

<u>الخطوط التقاربية المائلة</u>

إذا كان $f(x)=N(x)/D(x)$ ، $N(x)$ ، $D(x)$ كثيرا حدود بحيث درجة $N(x)$ أكبر من درجة $D(x)$ بمقدار 1، فإن بيان f يكون له خط تقاربي مائل $y=mx+c$ ، أي أن المسافة الرأسية بين بيان f وهذا المستقيم يقترب من 0 كلما اقتربت x من $\pm\infty$. ولبرهان هذه القاعدة، نستعمل القسمة المطولة $N(x)$ تقسيم $D(x)$ للتعبير عن $f(x)$ على الشكل.

$$f(x)=\frac{N(x)}{D(x)}=mc+c+\frac{r(x)}{D(x)}$$

حيث $r(x)$ ذو درجة أقل من $D(x)$ لدرجة أن $\lim_{x\to\infty}\frac{r(x)}{D(x)}=0$ ،

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{r(x)}{D(x)}=0$$

وبالتالي تقترب $f(x)$ من $y=mx+c$ كلما اقتربت x من ∞ أو $-\infty$.

مثال (19):

اوجد الخطوط التقاربية لبيان f ،

$$f(x)=\frac{3x^3}{x^2+1}$$

الحـــل

درجة البسط أعلى من درجة المقام، لا يوجد خطوط تقاربية أفقية، المقام موجب دائماً ولا ينعدم، لا يوجد خطوط تقاربية رأسية وبإجراء القسمة نجد

$$f(x)=\frac{3x^3+3x-3x}{x^2+1}$$

$$=\frac{3x(x^2+1)-3x}{x^2+1}$$

$$f(x)=3x-\frac{-3x}{x^2+1}$$

ولكن

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{x^2+1}=0$$

$\therefore$ يوجد خط تقاربي مائل هو $y=3x$

مثال (20):

ناقش وارسم بيان f ،

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+6x-7}$$

الحـــــل

$$f(x)=\frac{x^3}{(x+6)(x-1)}$$

الدالة مستمرة ما عدا عند $x=1$ ، $x=-7$ حيث يوجد عدم استمرارية لا نهائية. وبحث إشارة الدالة نجد أن

$(-\infty,-7)$	$(-7,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$	الفترة
-8	-1	$\frac{1}{2}$	2	نختار x للاختبار
$-$	$+$	$-$	$+$	إشارة $f(x)$
سالبة	موجبة	سالبة	موجبة	النتيجة أن f

لا يوجد خطوط تقاربية أفقية لأن درجة البسط > درجة المقام.

يوجد خطان تقاربيان رأسيان عند $x=1$ ، $x=-7$

وبما أن،

$$f(x)=x+\frac{-6x^2+7x}{x^2+6x-7}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-6x^2+7x}{x^2+6x-7}=-6$$

إذن يوجد خط تقاربي مائل،

$$y=x-6$$

نستطيع الآن إثبات أن

$$f'(x)=\frac{x^2\left(x^2+12x-21\right)}{\left(x^2+6x-7\right)^2}$$

يوجد نقط حرجة عند $x=0$ وعندما

$$x^2+12x-21=0$$

$$x=\frac{-12\pm\sqrt{144+84}}{2}$$

$$=-6\pm\sqrt{57}$$

$$\approx 1.6\ ,\quad -13.6$$

لذلك نبحث إشارة f' لتحديد القيم القصوى. ويكفي لذلك

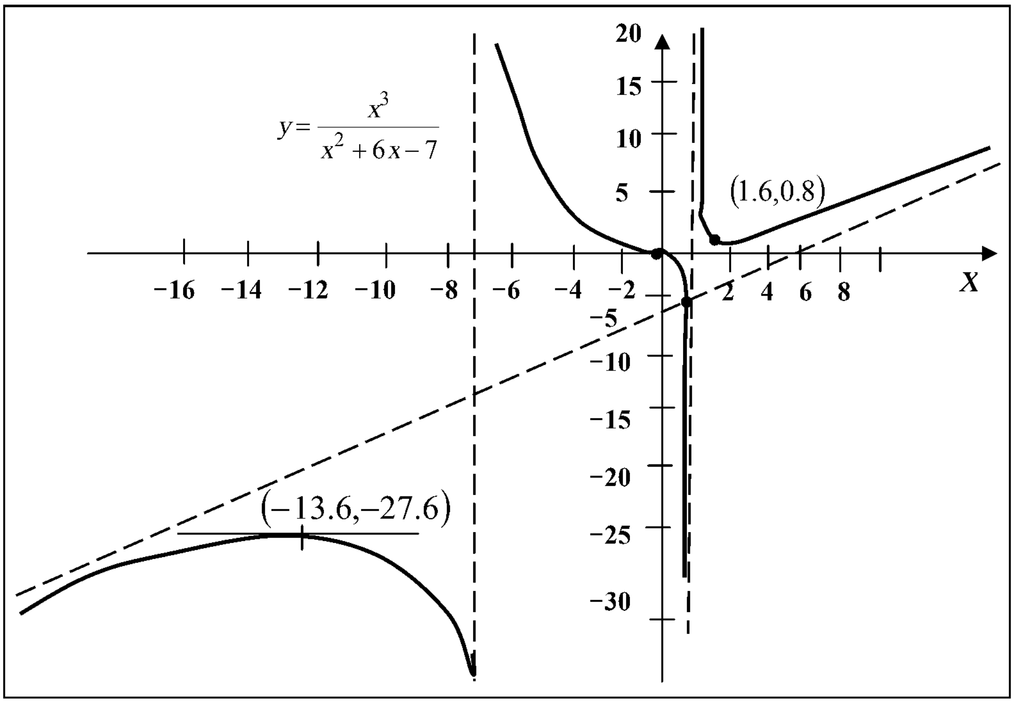
الفترة	x – المختارة	إشارة f'	النتيجة أن f
$(-\infty,-13.6)$	-20	$+$	متزايدة
$(-13.6,-7)$	-8	$-$	متناقصة
$(-7,0)$	-1	$-$	متناقصة
$(0,1)$	0.5	$-$	متناقصة
$(1,1.6)$	1.5	$-$	متناقصة
$(1.6,\infty)$	10	$+$	متزايدة

بحث إشارة المقدار $x^2+12x-21$ لأن باقي العوامل موجبة.

نجد أن، توجد نهاية عظمى محلية عند $x=-13.6$ هي $f(-13.6)\approx -27.3$ ،

توجد نهاية صغرى محلية عند $x=1.6$ هي $f(1.6)\approx 0.8$.

مما سبق يتضح بيان الدالة كما هو في شكل (127).



شكل (127): مثال (20)

ويمكننا إضافة ملاحظتين،

1) $x=0$ ليست قيمة قصوى هي نقطة انقلاب ميل المماس عندها 0.

2) المنحنى يقطع خطه التقاربي $y=x-6$ عندما

$$\frac{x^3}{x^2+6x-7}=(x-6)$$

$$x^3=(x-6)(x^2+6x-7)$$

$$=x^3-43x+42$$

$$x=\frac{42}{43}\approx 0.977$$

أي عند النقطة $(0.977,-5.023)$

مثال (21):

ناقش وارسم $gr(f)$ ،

$$f(x)=4x^3-3x^4$$

ثم ارسم بياني الدالتين g ، h حيث

$$h(x)=\sqrt{4x^3-3x^4} \quad ، \quad g(x)=\left|4x^3-3x^4\right|$$

الحــــل

الدالة f مستمرة على R ، حيث أن $f(x)=x^3(4-3x)$

f موجبة على الفترة $\left(0,\frac{4}{3}\right)$ وسالبة على الفترتين $\left(\frac{4}{3},\infty\right)$ ، $(-\infty,0)$وبيان الدالة يقطع المحور x عند $x=\frac{4}{3}$, $x=0$ والمحور y عند $x=0$ أي يمر بالنقطتين $(0,0)$، $\left(\frac{4}{3},0\right)$.

$$f'(x)=12x^2-12x^3$$
$$f''(x)=24x-36x^2$$

$f'(x)=0$ عند $x=0$ ، $x=1$

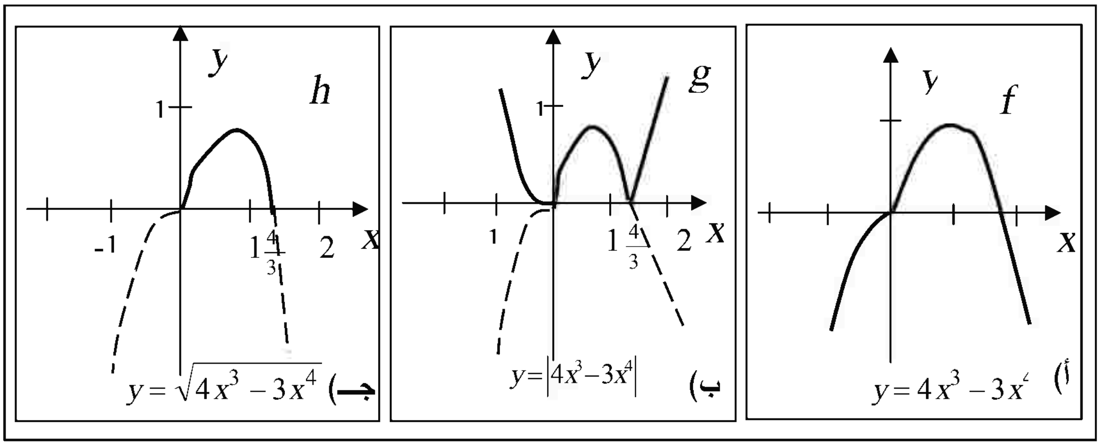
، $f''(0)=0$ ، $f'(1)=-12$

$\therefore$ النقطة $(1,1)$ تناظر نهاية عظمى محلية

أما عند $x=0$ فإن $f'(-1)=24$ ، $f'\left(\frac{1}{2}\right)=+\frac{3}{2}$

أي f' لا تتغير إشارتها وهي ليست نقطة حرجة وإنما هي نقطة إنقلاب ميل المماس عندها 0.

ولا يوجد أي خطوط تقاربية. الرسم في شكل (128-أ).



شكل (128): مثال (21)

الدالة $g(x)=\left|4x^3-3x^4\right|$ هي نفسها $f(x)$ على الفترة التي فيها f موجبة أي على $\left[0,\frac{4}{3}\right]$ لأن $g=|f|=f$ ولكن على الفترتين $\left[\frac{4}{3},\infty\right)$، $(-\infty,0]$ فإن f سالبة $g=|f|=-f$ فيكون بيان g هو انعكاس لبيان f بالنسبة للمحور x كما هو واضح في شكل (128-ب).

الدالة $h(x)=\sqrt{4x^3-3x^4}$ هي في الواقع $h(x)=\sqrt{f(x)}$ ونطاق $h(x)$ هو قيم x التي تجعل $f(x)>0$ أي أن نطاقها $0\le x\le\frac{4}{3}$. لذلك فبيان $h(x)$ يقع فقط في الفترة $\left[0,\frac{4}{3}\right]$. وقيم $h(x)$ هي الجذور التربيعية لقيم $f(x)$ المناظرة شكل (128-جـ).

تمارين (5−5)

فيما يلي من (1) إلى (24) ناقش وارسم بيان الدالة f .

(1) $f(x)=\dfrac{3-x}{x+2}$ (2) $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x^2-1}$

(3) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ (4) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$

(5) $f(x)=2x\Big/\sqrt{x^2+x+2}$ (6) $f(x)=-3x\Big/\sqrt{x^2+9}$

(7) $f(x)=\dfrac{4x}{x^2-4x+3}$ (8) $f(x)=\dfrac{2x-5}{x+3}$

(9) $f(x)=(x-4)\Big/\sqrt[3]{x^2}$ (10) $f(x)=\dfrac{-x^2-4x-4}{x+1}$

(11) $f(x)=\dfrac{x+5}{\sqrt{x}}$ (12) $f(x)=\left(1-x^3\right)\Big/2x^2$

(13) $f(x)=x^2\Big/(x+1)$ (14) $f(x)=\dfrac{2x^2-6x}{x^2-x-12}$

(15) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-3}{x-2}$ (16) $f(x)=\left(4-x^2\right)\Big/(x+3)$

(17) $f(x)=\dfrac{-2x^2+14x-24}{x^2+2x}$ (18) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x+1}$

(19) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-1}$ (20) $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2-4}$

(21) $f(x)=\dfrac{2x^2-2x-4}{x^2+x-12}$ (22) $f(x)=\dfrac{-3x^2-3x+6}{x^2-9}$

(23) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ (24) $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}}$

(25) عين القيم القصوى وارسم بيان الدالة f ،

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ,x<1 \\ 3(x-1)^2 & ,1\le x<3 \\ -7x^2+54x-87 & ,3\le x<5 \\ 8(6-x)^2 & ,5\le x<6 \\ 0 & ,x\ge 6 \end{cases}$$

في التمارين من (26) إلى (31) أوجد القيم القصوى ونقط الانقلاب وخطط بيان f .

(26) $f(x)=\dfrac{x^2}{(2x-1)^2}$ (27) $f(x)=\dfrac{2x}{(x+2)^2}$

(28) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$ (29) $f(x)=\dfrac{-4}{x^2+1}$

(30) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{x^2}$ (31) $f(x)=8x^3+\dfrac{3}{8x}$

خطط بيان f من (32) إلى (44)

(32) $f(x)=\dfrac{2x^2+x-6}{x^2+3x+2}$ (33) $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$

(34) $f(x)=\dfrac{x-4}{4-x^2}$

(35) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2+2x-3}$

(36) $f(x)=\sqrt{x^2+6x-7}$

(37) $f(x)=\left|x^2+6x-7\right|$

(38) $f(x)=\left(x^2+6x-7\right)^2$

(39) $f(x)=\left(x^2+6x-7\right)^3$

(40) $f(x)=\left|8+2x-x^2\right|$

(41) $f(x)=\left|2x^3-6x\right|$

(42) $f(x)=\left|x^3+8\right|$

(43) $f(x)=2+\left|\cos x\right|$

(44) $f(x)=1-\left|\sin x\right|$

في التمارين من (45) إلى (50) عين جميع الخطوط التقاربية لبيان f .

(45) $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$

(46) $f(x)=\dfrac{2x^3}{9-x^2}$

(47) $f(x)=\dfrac{2x}{9-x^2}$

(48) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

(49) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^4-9x^2+1}{x^2-9}}$

(50) $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2}{x^2-1}$