الفصل الأول

مبادئ العد الأساسية
Basic counting Principles

نتناول في هذا الفصل المبادئ الأساسية للعد وهي مبادئ الجمع والضرب والتقابل.

عد الصفحات[Counting Pages]

لنفرض أن أحمد قام بقراءة الصفحات من 124إلى 312من كتاب المطالعة. ما عدد الصفحات التي قرأها أحمد ؟ لاحظ أن أحمد قام بقراءة الصفحات

$$124\,,\,125\,,\,126\,,\,\ldots\,,\,312$$

وإذا قمنا بطرح العدد 123من كل من حدود هذه المتتابعة فإن عدد حدود المتتابعة يبقى ثابتاً. وبهذا نحصل على المتتابعة

$$1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,189$$

ومن الواضح الآن أن عدد الصفحات التي قرأها أحمد هو عدد حدود المتتابعة

$$1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,189$$

وهو 189. وبصورة عامة إذا كان a وbعددين صحيحين موجبين حيث $a<b$فإن عدد الأعداد الصحيحة xحيث $a<x<b$ يساوي

$$(b-a)-1$$

وإن عدد الأعداد الصحيحة x حيث $a \leq x \leq b$ هو

$$(b-a)+1$$

مثال (١) كم عدد الأعداد الزوجية x حيث $1 \leq x \leq 413$؟

الحل

يمكن حل هذه المسألة بكتابة متتابعة الأعداد المطلوب إيجاد عددها وهي

$$2\,,4\,,6\,,\ldots\,,412$$

وبقسمة كل من حدود هذه المتتابعة على العدد 2 نحصل على المتتابعة

$$1\,,2\,,3\,,\ldots\,,206$$

وعدد حدود هذه المتتابعة يساوي عدد حدود المتتابعة السابقة وهو 206. ◇

مثال (٢)لدينا 123 عدداً متتالياً. إذا كان أكبر هذه الأعداد هو 414 فما أصغرها ؟

الحل

بما أن عدد الأعداد المتتالية هو 123 وأكبرها 414 فإنه يوجد 122 عدداً قبل العدد 414. وبهذا يكون أصغر هذه الأعداد هو $292 = 122 - 414$. ◇

مثال (٣) لدينا مسطرة غير مُعَلَّمة طولها 30 سم. أردنا تعليم هذه المسطرة بوضع علامات عند كل سم وكل نصف سم وكل ربع سم. كم عدد العلامات اللازمة لذلك ؟

الحل

عدد العلامات عند كل سم هو عدد الأعداد الصحيحة x حيث $0 \leq x \leq 30$ وهو

$$(30-0)+1=31$$

الآن، نضع علامة في منتصف كل فترة جزئية طولها 1سم. وبهذا نحتاج إلى 30 علامة أخرى.ولتعليم أرباع السنتمتر نحتاج لوضع علامة في منتصف كل فترة جزئية طولها $\frac{1}{2}$سم وعدد هذه الفترات الجزئية هو 60. ولذا نحتاج إلى 60علامة أخرى. إذن، العدد الكلي للعلامات التي نحتاج إليها هو $121 = 60 + 30 + 31$. ◇

مثال (٤) كم عدد مضاعفات العدد 11الواقعة بين 1و 2000؟

الحل

الأعداد المطلوبة هي $1991, \ldots, 33, 22, 11$. بقسمة كل من هذه الأعداد على 11نحصل على المتتابعة $181, \ldots, 3, 2, 1$وعدد حدودها 181. ◇

ملحوظة

يمكن إيجاد عدد هذه الأعداد على النحو التالي: $181 = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor$

حيث $\lfloor x \rfloor$يعني أكبر عدد صحيح أصغر من أو يساوي x.

مثال (٥) كم عدد الأعداد الصحيحة بين 1و 2000التي من مضاعفات العدد 11 ومن مضاعفات العدد 3 ؟

الحل

لاحظ أن أي مضاعف للعدد 11والعدد 3هو مضاعف للعدد 33. لذا يكون المطلوب هو إيجاد عدد مضاعفات 33بين 1و 2000وهذا العدد هو $60 = \left\lfloor \frac{2000}{33} \right\rfloor$. ◇

مثال (٦) كم عدد الأعداد الصحيحة بين 1 و 2000 التي من مضاعفات العدد 11 وليست من مضاعفات العدد 3؟

الحل

الأعداد التي من مضاعفات العدد 11 وليست من مضاعفات العدد 3 هي الأعداد التي من مضاعفات العدد 11 وليست من مضاعفات العدد 33.

عدد مضاعفات العدد 11 يساوي $181 = \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor$.

عدد مضاعفات العدد 33 يساوي $60 = \left\lfloor \frac{2000}{33} \right\rfloor$.

إذن، عدد الأعداد المطلوبة هو $121 = 60 - 181$. $\diamond$

مثال (٧) ما عدد المربعات الكاملة بين العددين 15 و 626؟

الحل

أصغر هذه المربعات هو $16 = 4^2$ وأكبرها هو $625 = 25^2$. إذن، المطلوب هو عدد الأعداد x حيث $25 \leq x \leq 4$. وهذا العدد يساوي $22 = 1 + (4 - 25)$. $\diamond$

مبدأ الجمع[Addition Principle]

إذا أردنا اختيار طالب من الصف الأول أو الثاني أو الثالث ثانوي ليمثل مدرسة عمر بن الخطاب في مسابقة الرياضيات التي تعقد في مدينة الرياض وإذا كان عدد طلاب الصفوف الأول والثاني والثالث ثانوي هي 32، 29، 25، على التوالي فإن عدد الطرق المختلفة لاختيار الطالب هي

$$32 + 29 + 25 - = 86$$

هذا المثال هو مثال على مبدأ عد يسمى مبدأ الجمع (Addition Principle) وينص على

إذا كان إنجاز المهمة T يتطلب إنجاز أي من المهمات $T_1 , T_2 , \ldots , T_k$ وإذا استحال إنجاز أي مهمتين T_i و T_j حيث $i \neq j$ في الوقت نفسه وكان عدد طرق إنجاز المهمة T_r يساوي n_r فإن عدد طرق إنجاز المهمة T يساوي $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$

ملحوظة

يمكن استخدام مفهوم المجموعات للتعبير عن مبدأ الجمع على النحو التالي:

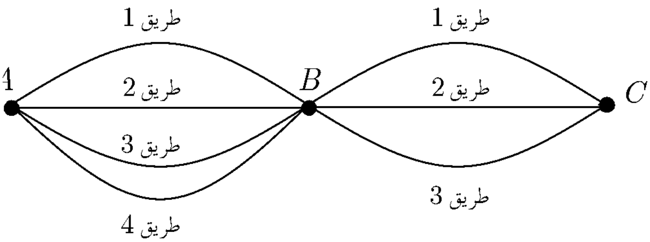
نفرض أن T_i هي مهمة اختيار عنصر من المجموعة A_i لكل $i = 1 , 2 , \ldots , k$. إذن، عدد طرق إنجاز المهمة T_i هو $|A_i|$. وبما أنه لا يمكن إنجاز مهمتين مختلفتين في الوقت نفسه فإن $A_i \cap A_j = \phi$ لكل $i \neq j$. وبهذا عدد طرق إنجاز المهمة T هو

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_k|.$$

مثال (٨) لنفرض أن لدينا ثلاث مدن A، B، C ولنفرض وجود 4 طرق مختلفة يستطيع أن يسلكها فيصل للوصول إلى المدينة B من المدينة A وثلاثة طرق مختلفة يستطيع أن يسلكها فيصل للوصول إلى المدينة C من المدينة B. كم عدد الطرق المختلفة التي يستطيع أن يسلكها فيصل للوصول إلى C منطلقاً من A مروراً بالمدينة B ؟

الحل

الشكل المرفق يبين جميع الطرق المختلفة



إذا سلك فيصل الطريق 1من A إلى B فإنه يمكن أن يسلك أياً من الطرق الثلاثة من B إلى C ليصل إلى C. وبالمثل، إذا سلك فيصل الطريق2أو الطريق 3أو الطريق 4 . إذن، باستخدام مبدأ الجمع يكون عدد الطرق المختلفة للوصول إلى C عبر B هو $3+3+3+3=12$. ◇

لاحظ أنه يمكن حل المثال (٥) على النحو التالي: يوجد 4 خيارات للانطلاق من A إلى B ولكل من هذه الخيارات يوجد 3 خيارات للوصول من B إلى C. إذن، عدد الخيارات الممكنة هو $4\times 3=12$. إن هذا يقودنا إلى مبدأ العد الثاني وهو مبدأ الضرب.

مبدأ الضرب [Multiplication Principle]

إذا تطلب إنجاز المهمة T إنجاز المهمات $T_1 , T_2 , \dots , T_k$ واحدة بعد الأخرى. (أي إنجاز T_1 ثم T_2 ثم T_3 وهكذا) وكان عدد طرق إنجاز المهمة T_i هو n_i وكان عدد طرق إنجاز المهمة T_i لا يعتمد على كيفية إنجاز المهمات السابقة لها فإن عدد طرق إنجاز المهمة T هو $n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$.

مثال (٩) يقدم أحد المطاعم شطائر لحم بثلاثة أحجام هي صغير، متوسط، كبير. يمكن أن يضاف إلى كل شطيرة الجبن أو الطماطم أو كلاهما. أراد فيصل أن يطلب

شطيرة لحم. ما عدد الخيارات المتاحة له؟

الحل

يمكن حل هذا المثال باستخدام مبدأ الضرب. يوجد 3 طرق لاختيار شطيرة اللحم وهي صغير، متوسط، كبير. يوجد خياران للجبن (إما أن يضاف الجبن أو لا يضاف). يوجد خياران للطماطم (إما أن يضاف الطماطم أو لا يضاف). إذن، حسب مبدأ الضرب يكون عدد الخيارات المختلفة للشطيرة هو

$$3 \times 2 \times 2 = 12.$$

وبما أن عدد هذه الخيارات صغير نسبياً فيمكن سرد هذه الخيارات على النحو التالي:

$$\begin{array}{l}(S,C,T),(S,C,NT),(S,NC,T),(S,NC,NT)\\(M,C,T),(M,C,NT),(M,NC,T),(M,NC,NT)\\(L,C,T),(L,C,NT),(L,NC,T),(L,NC,NT)\end{array}$$

حيث S ، M ، T ترمز إلى صغير، متوسط، كبير على التوالي و C ، NC ترمز إلى إضافة جبنة أو عدم إضافة جبنة و T ، NT ترمز إلى إضافة طماطم أو عدم إضافة طماطم. ◇

مثال (١٠) محل أحذية لديه 6 أنواع من الأحذية وكل نوع متوافر بسبعة ألوان. كم عدد خيارات الأحذية المختلفة المتوفرة في هذا المحل ؟

الحل

يمكننا اختيار أي من الأنواع المتوافرة الستة من الأحذية ويمكن وبشكل منفصل أن نختار لوناً من أي من الألوان المتوافرة السبعة من كل نوع وبالتالي سيكون لدينا $42 = 7 \times 6$ اختياراً من الأحذية المختلفة استناداً إلى مبدأ الضرب. ◇

مثال (١١) اشترى توفيق قفلاً رقمياً لدراجته يفتح باستعمال ثلاثة أرقام مختلفة من بين الأرقام 1 إلى 9. بكم طريقة يمكنه أن يختار أرقام القفل ؟

الحل

لتصور الحل سنمثل خانات القفل كما يلي

الأولى	الثانية	الثالثة

يمكن لتوفيق أن يختار أي عدد من 1 إلى 9 للخانة الأولى من الرقم السري وبعد اختيار أحد الأرقام التسعة للخانة الأولى وبما أن تكرار العدد ممنوع فسيختار العدد للخانة الثانية من الرقم السري من بين الثمانية أعداد المتبقية. إلى الآن تم اختيار عددين من 9 وبقي 7 أعداد سيتم اختيار أحدها للخانة الثالثة من الرقم السري. وبالتالي من مبدأ الضرب نجد أن عدد الأرقام السرية الممكنة المختلفة للقفل يساوي $504 = 7 \times 8 \times 9$ رقماً. ◇

مثال (١٢) تتكون لوحات السيارات في المملكة العربية السعودية من ثلاثة حروف مختارة من اللغة العربية (عدد حروفها 28 حرفاً) متبوعة بأربعة أرقام مختارة من بين الأرقام 0 إلى 9. ما عدد لوحات السيارات الممكنة ؟

الحل

يمكن اختيار أي من الحروف الثلاثة بعدد من الطرق يساوي 28. ولذا عدد طرق اختيار ثلاثة حروف هو $21952 = 28 \times 28 \times 28$. ويمكن اختيار أي من الأرقام الأربعة بعدد من الطرق يساوي 10. ولذا عدد طرق اختيار أربعة أرقام هو $10000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10$. إذن، عدد لوحات السيارات المختلفة هو

$$21952 \times 10000 = 219520000.$$ ◇

مثال (١٣) إذا كانت A مجموعة منتهية عدد عناصرها m وكانت B مجموعة

منتهية عدد عناصرها n. ما عدد التطبيقات $f : A \to B$؟

الحل

لاحظ أن التطبيق يتحدد باختيار عنصر من عناصر المجال المقابل B (عددها n) لكل عنصر من عناصر المجال A (عددها m). إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب نجد أن عدد التطبيقات المختلفة هو $n \times n \times \cdots \times n = n^m$. ◇

مبدأ التقابل [Correspondence Principle]

إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين وكان عدد عناصر A معلوماً واستطعنا إيجاد تقابل بين A و B فيكون عدد عناصر B يساوي عدد عناصر A. هذا هو مبدأ التقابل وينص على:

إذا كان $f : A \to B$ تقابلاً بين المجموعتين المنتهيتين A و B فإن $\lvert B \rvert = \lvert A \rvert$.

مثال (١٤) ما عدد الكلمات الثنائية (الكلمة الثنائية تستخدم الرقمين 0 و 1) من الطول m؟

الحل

لنفرض أن $a_1 a_2 \ldots a_m$ كلمة ثنائية طولها m. يوجد خياران (إما 0 أو 1) لكل a_i. إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب يكون عدد الكلمات الثنائية من الطول m هو $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^m$. ◇

مثال (١٥) لتكن A مجموعة منتهية عدد عناصرها m. ما عدد المجموعات الجزئية المختلفة من المجموعة A؟

الحل

نستخدم مبدأ التقابل لإيجاد عدد المجموعات الجزئية من المجموعة A. لنفرض أن $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$. ولنفرض أن S هي مجموعة الكلمات الثنائية من الطول m. نعرف التقابل $f : P(A) \to S$ على النحو التالي: $B \in P(A)$ يكون $f(B)$ هو الكلمة $a_1 a_2 \dots a_m \in S$ حيث $a_i = 1$ إذا كان $a_i \in B$ و $a_i = 0$ إذا كان $a_i \notin B$. إذن، من مبدأ التقابل نجد أن $\left|S\right| = \left|P(A)\right|$. ولكننا وجدنا في المثال (١٤) أن $\left|S\right| = 2^m$. إذن، $\left|P(A)\right| = 2^m$. ◇

في العديد من مسائل العد نحتاج إلى تقسيم المسألة إلى حالات ومن ثم الاستفادة من مبدأي الجمع والضرب ونوضح ذلك ببعض الأمثلة.

مثال (١٦) كم عدد الأعداد الصحيحة غير السالبة المكونة من ثلاث خانات مختارة من الأرقام 0 إلى 9 بحيث تكون جميع خاناتها زوجية وفيها خانتان مكررتان فقط ؟

الحل

لدينا الحالات الثلاثة التالية لهذه الأعداد:

الحالة الأولى: yxx حيث $y \neq 0$. في هذه الحالة يوجد أربعة خيارات للمرتبة (الخانة) y وهي 2 أو 4 أو 6 أو 8. بعد اختيار المرتبة y يتبقى أربعة خيارات للمرتبة x. إذن، عدد الخيارات في هذه الحالة هو $4 \times 4 = 16$.

الحالة الثانية: xyx، $x \neq 0$. في هذه الحالة أيضاً يوجد أربعة خيارات للمرتبة x وأربعة خيارات للمرتبة y. إذن، عدد الخيارات في هذه الحالة هو $4 \times 4 = 16$.

الحالة الثالثة: xxy حيث $x \neq 0$. في هذه الحالة أيضاً يوجد أربعة خيارات للمرتبة

xوأربعة خيارات للمرتبة y. إذن، عدد الخيارات في هذه الحالة هو أيضاً $16 = 4 \times 4$.الآن، استناداً إلى مبدأ الجمع يكون عدد الأعداد الصحيحة غير السالبة المكونة من ثلاث خانات جميع خاناتها زوجية وفيها خانتان متشابهتان فقط هو

$$16 + 16 + 16 = 48 \qquad \diamond$$

مثال (١٧) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ثلاث خانات مختارة من الأرقام 0إلى 9بحيث تكون واحدة فقط من خاناتها زوجية؟

الحل

لدينا الحالات الثلاثة التالية:

الحالة الأولى: xyz، xزوجي و $x \neq 0$. عدد الخيارات في هذه الحالة هو $4 \times 5 \times 5 = 100$.

الحالة الثانية: xyz، $x \neq 0$و yزوجي. في هذه الحالة يوجد خمس خيارات للخانة yوهي $0 , 2 , 4 , 6 , 8$وخمس خيارات لكل من xو yوهي $1 , 3 , 5 , 7 , 9$. إذن عدد الخيارات في هذه الحالة هو $125 = 5 \times 5 \times 5$.

الحالة الثالثة: xyz، $x \neq 0$ و zزوجي. هذه الحالة مشابهة للحالة الثانية و عدد خياراتها $125 = 5 \times 5 \times 5$.إذن عدد الأعداد المطلوبة هو

$$100 + 125 + 125 = 350 . \qquad \diamond$$

مثال (١٨) ما عدد الكلمات من الطول 3أو 4التي يمكن اختيارها من مجموعة الرموز $\{1, 2, 3, 4, 5, A, B, C, D, E\}$بحيث تحتوي كل كلمة من هذه الكلمات على حرف واحد على الأقل؟

الحل

لنفرض أن N هو عدد الكلمات المطلوبة وأن N_3 و N_4 هي أعداد الكلمات من الأطوال 3 و 4 على التوالي. باستخدام مبدأ الجمع نجد أن $N = N_3 + N_4$. لإيجاد N_3 يكون من الأفضل إيجاد عدد الكلمات من الطول 3 بما في ذلك الكلمات التي لا تحتوي على حروف ومن ثم الطرح من هذا العدد، عدد الكلمات من الطول 3 التي لا تحتوي على حروف. وبهذا نجد استناداً إلى مبدأ الضرب أن $N_3 = 10^3 - 5^3 = 875$. وبالمثل، $N_4 = 10^4 - 5^4 = 9375$.

إذن، $N = N_3 + N_4 = 875 + 9375 = 10250$. ◇

مبدأ التضمين والإقصاء [Inclusion-Exclusion Principle]

إذا كان من الممكن إنجاز مهمتين T و S في الوقت نفسه فإننا لا نستطيع استخدام مبدأ الجمع لإيجاد عدد طرق إنجاز T أو S، لأننا بجمع العددين نكون قد جمعنا عدد طرق إنجازهما معاً مرتين. ولهذا يجب طرح هذا العدد من المجموع. يدعى مبدأ العد هذا، مبدأ التضمين والإقصاء ويمكن استخدام لغة المجموعات للتعبير عنه على النحو التالي:

> إذا كانت أعداد عناصر المجموعتين A و B هي $|A|$ و $|B|$ على التوالي فإن عدد عناصر المجموعة $A \cup B$ هو
>
> $$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

مثال (١٩) في أحد ملتقيات التدريب خُيِّر أعضاء الفريق السعودي للناشئين بين لعب كرة القدم و السباحة في الوقت المخصص للرياضة و قد كان عدد أعضاء الفريق 20 طالباً. فاختار 12 طالباً أن يلعبوا كرة القدم واختار 10 منهم السباحة

فإذا علمت أن 8 من الطلاب قد اختاروا النشاطين معاً فكم عدد الطلاب الذين لم يختاروا أياًمن النشاطين ؟

الحل

لاحظ أن عدد الطلاب الذين اختاروا كرة القدم 12 وعدد الذين اختاروا السباحة 10 و مجموعهما 22 ولكن عدد الطلاب الإجمالي 20 وهذا يفسر بأن هناك طلاباً قد اختاروا النشاطين معا فنحن قد حسبناهم مع المجموعة الأولى وكذلك حسبناهم مع المجموعة الثانية مرة أخرى و بالتالي لنحصل على عدد الطلاب الذين يشاركون في أحد النشاطين أو كليهما لابد أن نطرح المتكرر وهو 8 طلاب الذين اختاروا النشاطين معا لنحصل على $14 = 8 - 10 + 12$ طالباً مشاركين وبالتالي لدينا 6 طلاب لم يختاروا أياًمن النشاطين. ◇

مسائل محلولة

(١) كم عدد الأعداد الصحيحة من 17 إلى 311؟

(٢) ما هو العدد الثالث والخمسون في المتتابعة $\ldots, 88, 87, 86$؟

(٣) لدينا r من الأعداد الصحيحة المتتالية. إذا كان n هو أصغر هذه الأعداد فما أكبر هذه الأعداد؟

(٤) كم عدد الأعداد الصحيحة x التي تحقق $16 > \sqrt{x} > 12$؟

(٥) كم عدد المضاعفات الموجبة للعدد 7 الأصغر من العدد 200؟

(٦) كم عدد الأعداد الصحيحة n حيث $500 < n < 2000$ والتي هي مضاعفات لكل من العددين 7 و 11 ؟

(٧) كم عدد الأعداد الصحيحة بين 10 و 500 التي باقي قسمتها على 4 يساوي 3؟

(٨) كم عدد المجموعات المكونة من أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية بحيث يكون حاصل ضرب أعدادها أصغر من 100000؟

(٩) كم عدد المربعات الكاملة بين العددين 313 و 160110؟

(١٠) بكم طريقة يمكن توزيع الجوائز الأولى والثانية والثالثة على فصل مكون من 25 طالباً؟

(١١) ما عدد الأعداد الصحيحة الزوجية الموجبة المكونة من أربع مراتب (خانات)؟

(١٢) كم عدد الأعداد الصحيحة x حيث $1000 < x < 10000$ التي مراتبها مأخوذة من الأعداد 0، 6، 7، 9 ؟

(١٣) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة VARIOUS إذا كانت حروف

العلة تتناوب مع الحروف الساكنة (حروف العلة باللغة الانجليزية هي (A,E,I,O,U)؟

(١٤) ما عدد التطبيقات الأحادية (المتباينة) $f : A \to B$ حيث $\left|A\right| = m$ و $\left|B\right| = n$؟

(١٥) [Aust.MC 1981] يبيع متجر مكعبات خشبية مرقمة بالأرقام $0,1,2,\ldots,9$ لتكوين أرقام المنازل المكونة من ثلاث مراتب فقط. باع المتجر جميع المكعبات و لم يتبق لديه إلا مكعبات مرقمة بالأرقام 4 ، 7 ، 8 . ما عدد أرقام المنازل التي يمكن تكوينها من هذه المراتب؟

(١٦) [Aust.MC 1981] في أحد الاحتفالات تمت 28 مصافحة بين الحاضرين. كل من الحاضرين صافح جميع الآخرين مرة واحدة فقط. ما عدد الحاضرين في هذا الحفل؟

(١٧) [Aust.MC 1979] في دوري التنس، فقط اللاعب الذي يكسب مباراة سيلعب مباراة أخرى وهكذا إلى أن يتحدد المركز الأول. إذا كان عدد اللاعبين في الدورة هو 128 فما عدد المباريات اللازمة لتحديد المركز الأول؟

(١٨) [Aust.MC 1979] استخدمت 852 مرتبة (خانة) لترقيم صفحات كتاب ابتداءً من الصفحة الأولى. ما عدد صفحات الكتاب؟

(١٩) [Math counts 1985] ما عدد الطرق المختلفة التي يستطيع بها طالب أن يخمن إجابات خمسة أسئلة، الإجابة عن كل منها صائب أو خاطئ؟

(٢٠) [Math counts 1984] ما عدد قواسم العدد 2^{95} الأكبر من 10^6؟

(٢١) [Mandelbrot#3] نقول إن العدد متناظر إذا تطابقت قراءته من اليمين إلى

اليسار مع قراءته من اليسار إلى اليمين [العدد 3443 متناظر]. ما عدد الأعداد المتناظرة المكونة من 4 مراتب؟

(٢٢) [Gauss 2011] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 400 التي يمكن الحصول عليها باستخدام المرتبة 1 أو 2 أو 3 فقط؟

(٢٣) [Gauss 2009] كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها كتابة 101 كمجموع عددين صحيحين موجبين بحيث يكون العدد الثاني أكبر من العدد الأول؟

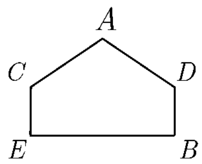
(٢٤) [Gauss 2009] فصل مكون من 40 طالباً، 18 طالباً يفضلون فطيرة التفاح و 15 طالباً يفضلون فطيرة الكرز و 12 طالباً لا يفضلون أياً منهما. ما عدد طلاب الفصل الذين يفضلون كليهما؟

(٢٥) كم عدد الكلمات الثنائية (تستخدم المرتبتين 0 و 1) من الطول 6 التي تبدأ بالمرتبة 1 أو تنتهي بالمرتبتين 00؟

(٢٦) [AMC10B 2012] يقدم أحد المطاعم مع وجبة غداء اليوم نوعاً واحداً من الحلوى يختاره طباخ المطبخ من بين الأنواع: الجاتو، فطيرة التفاح، الآيس كريم، المهلبية على شرط أن يقدم نوعاً واحداً فقط من الحلوى كل يوم من أيام الأسبوع وأن لا يقدم نوعاً واحداً من الحلوى في يومين متتالين وأن يكون نوع الحلوى المقدم يوم الجمعة هو الجاتو. ما عدد الخيارات الممكنة للحلوى على قائمة طعام الأسبوع؟

(٢٧) [AMC10A 2011] كم عدد الأعداد الصحيحة الزوجية بين العددين 200 و 700 بحيث تكون مراتبها مختلفة ومأخوذة من المراتب $1, 2, 5, 7, 8, 9$؟

(٢٨) [AMC10A 2011] لدينا الخماسي $ADBEC$ المبين في الشكل المرفق



لونا كلاً من الرؤوس بلون من 6ألوان متوافرة بحيث يُلوَّن طرفا كل من الأقطار بلونين مختلفين. كم عدد التلوينات الممكنة للخماسي؟

(٢٩) [AMC10A 2010] وزعنا 7 حبات حلوى على ثلاثة أكياس: أحمر وأزرق وأبيض. إذا اشترطنا أن نضع في كل من الكيسين الأحمر والأزرق حبة واحدة على الأقل أما الكيس الأبيض فيمكن أن يكون فارغاً فما عدد الطرق الممكنة لتوزيع حبات الحلوى على الأكياس الثلاثة؟

(٣٠) [AMC10A 2008] ملأنا مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه 10سم بمثلثات متساوية الأضلاع طول ضلع كل منها يساوي 1سم. كم عدد المثلثات الصغيرة التي نحتاج إليها لإنجاز ذلك؟

(٣١) [AHMSE 1998] نقول إن رقم الهاتف المكون من سبعة أرقام $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ مميز إذا كان $d_1d_2d_3 = d_4d_5d_6$ أو $d_1d_2d_3 = d_5d_6d_7$ أو كلاهما حيث $d_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. ما عدد أرقام الهواتف المميزة؟

(٣٢) [AIME 1993] كم عدد الأعداد الصحيحة الزوجية x حيث $4000 \le x < 7000$ والتي جميع مراتبها مختلفة؟

(٣٣) تتكون لوحات السيارات في المملكة من ثلاثة حروف من حروف اللغة العربية (عدد حروفها 28) متبوعة بأربعة أرقام مأخوذة من الأرقام $0,1,2,\ldots,9$. ما عدد اللوحات التي يمكن تكوينها بحيث لا تحتوي على الحرف ج والعدد 0 معاً؟

(٣٤) [PACAT]قطعنا رقعة 6×6من رقعة شطرنج 8×8. بكم طريقة يمكن وضع قطعتي نقود متماثلتين واحدة على مربع أسود والأخرى على مربع أبيض من مربعات الرقعة بشرط أن لا يقعا معاً على الصف أو العمود نفسه؟

(٣٥) [PACAT]كتبنا الأعداد من 1إلى 1000. كم عدد مرات ظهور المرتبة 7 في قائمة هذه الأعداد؟

(٣٦) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 3مراتب التي مجموع مراتبها عدد زوجي؟

(٣٧) أعطيت 1000ريـــال وطلب منك شراء مائة من الأقلام والمساطر والمماحي بكامل المبلغ. إذا كان ثمن القلم الواحد 20ريالاً وثمن المسطرة الواحدة 5ريالات وثمن الممحاة الواحدة ريالاً واحداً فكم عدد الطرق الممكنة لشراء هذه الأغراض؟

(٣٨) كم عدد القواسم الفردية للعدد $7^3 \times 3^4 \times 2^7$؟

(٣٩) كم عدد الأعداد المكونة من 4مراتب و لا تزيد عن 5000والتي مراتبها مأخوذة من المراتب $\{0,1,2,3,4,5\}$؟

(٤٠) [PACAT]لدينا 6صناديق مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$. نريد أن نضع في كل منها كرة خضراء أو كرة حمراء بشرط أن نضع كرة خضراء في صندوق واحد على الأقل وأن الصناديق التي سنضع فيها كرات خضراء يجب أن تكون أرقامها متتالية. ما عدد الطرق الممكنة لعمل ذلك؟

حلول المسائل

(١) كم عدد الأعداد الصحيحة من 17 إلى 311؟

الحل

عدد هذه الأعداد هو $(311-17)+1=295$.

(٢) ما العدد الثالث والخمسون في المتتابعة $86\,,87\,,88\,,\ldots$؟

الحل

إذا فرضنا أن x هو العدد الثالث والخمسون في المتتابعة $86\,,87\,,88\,,\ldots\,,x$ فنحصل بطرح العدد 85 من كل من حدود المتتابعة على المتتابعة

$$1\,,2\,,3\,,\ldots\,,x-85$$

من ذلك نجد أن $x-85=53$. وبهذا فإن $x=85+53=138$.

(٣) لدينا r من الأعداد الصحيحة المتتالية. إذا كان n هو أصغر هذه الأعداد فما أكبر هذه الأعداد؟

الحل

لنفرض أن x هو أكبر هذه الأعداد. عندئذ، لدينا

$$n\,,n+1\,,n+2\,,\ldots\,,x$$

هذه متتابعة من الأعداد المتتالية عدد عناصرها r. بطرح $n-1$ من كل من حدود هذه المتتابعة نحصل على

$$1\,,2\,,3\,,\ldots\,,x-n+1$$

إذن، $x-n+1=r$. وبهذا فإن $x=n+r-1$.

(٤) كم عدد الأعداد الصحيحة x التي تحقق $12<\sqrt{x}<16$؟

الحل

هذا يكافئ إيجاد عدد الأعداد الصحيحة x التي تحقق $256 = 16^2 > x > 12^2 = 144$. عدد هذه الأعداد هو $111 = 1 - (144 - 256)$.

(٥) كم عدد المضاعفات الموجبة للعدد 7 التي أصغر من العدد 200؟

الحل

الأعداد المطلوبة هي $196 , \dots , 21 , 14 , 7$. بقسمة كل حد من حدود المتتابعة على العدد 7 نحصل على المتتابعة $28 , \dots , 3 , 2 , 1$. وبهذا فعدد هذه الأعداد هو 28.

(٦) كم عدد الأعداد الصحيحة n حيث $2000 > n > 500$ والتي هي مضاعفات لكل من العددين 7 و 11 ؟

الحل

لاحظ أن مضاعفات العددين 7 و 11 هي مضاعفات العدد 77. عدد الأعداد التي أصغر من أو تساوي 500 ومضاعفة للعدد 77 يساوي $6 = \left\lfloor \frac{500}{77} \right\rfloor$. وعدد الأعداد التي أصغر من أو تساوي 2000 ومضاعفة للعدد 77 يساوي $25 = \left\lfloor \frac{2000}{77} \right\rfloor$. إذن، عدد الأعداد الصحيحة n حيث $2000 > n > 500$ ومضاعفة للعدد 77 يساوي $19 = 6 - 25$.

(٧) كم عدد الأعداد الصحيحة بين 10 و 500 التي باقي قسمتها على 4 يساوي 3؟

الحل

أولا نلاحظ أنه إذا كان باقي قسمة العدد الصحيح xعلى 4 يساوي 3 فإن باقي قسمة $x-3$على 4 يساوي صفراً، أي أن $x-3$ من مضاعفات 4. لذا، فإننا نطرح 3من جميع الأعداد في القائمة المعطاة وسنحصل على الأعداد من 7إلى 497. أول عدد منها يقبل القسمة على 4هو 8وآخر عدد هو 496. الآن نأخذ جميع مضاعفات 4من القائمة الأخيرة، أي الأعداد بين 8و 496ونقسمها على 4فنحصل على الأعداد المتتالية من 2إلى 124ولكن عدد هذه الأعداد هو نفس العدد المطلوب ويساوي 123وذلك باستخدام مبدأ العد بالتقابل.

(٨) كم عدد المجموعات المكونة من أربعة أعداد صحيحة موجبة متتالية بحيث يكون حاصل ضرب أعدادها أصغر من 100000؟

الحل

بملاحظة أن $16\times17\times18\times19=93024$ وأن $17\times18\times19\times20=116280$.
نجد أن المجموعة $\{16,17,18,19\}$هي أكبر المجموعات التي تحقق المطلوب. ولذا فإن المجموعات التي تحقق المطلوب هي

$$\{1,2,3,4\}\ ,\ \{2,3,4,5\}\ ,\ \ldots\ ,\ \{16,17,18,19\}$$

وعددها 16مجموعة.

(٩) كم عدد المربعات الكاملة بين العددين 313و 160110؟

الحل

بما أن $17^2=289$و $18^2=324$فإن أصغر هذه المربعات هو 18^2. وبما أن $400^2=160000$وأن $401^2=160801$فإن أكبر هذه المربعات هو 401^2. ولذا يكون المطلوب هو عدد الأعداد xحيث $18\le x\le 400$ وهذا العدد هو

$(400-18)+1=383$.

(١٠) بكم طريقة يمكن توزيع الجوائز الأولى والثانية والثالثة على فصل مكون من 25 طالباً؟

الحل

يمكن اختيار أي من طلاب الفصللأخذ الجائزة الأولى وبعد ذلك يمكن إعطاء الجائزة الثانية لأي من ال 24 طالباً المتبقي والجائزة الثالثة لأي من 23 طالباً. إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب يكون عدد الطرق هو

$$25\times 24\times 23=13800.$$

(١١) ما عددالأعدادالصحيحةالزوجية الموجبة المكونة منأربعمراتب(خانات)؟

الحل

هذه الأعداد هي $ABCD$ حيث $A\in\{1,2,3,\ldots,9\}$، $B,C\in\{0,1,2,\ldots,9\}$، $D\in\{0,2,4,6,8\}$. إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب يكون العدد المطلوب هو $9\times 10\times 10\times 5=4500$.

(١٢) كم عدد الأعداد الصحيحة x حيث $1000<x<10000$ التي مراتبها مأخوذة من المراتب 0، 6، 7، 9 ؟

الحل

هذه الأعداد مكونة من أربع مراتب $ABCD$ حيث $A\neq 0$. إذن، عدد خيارات A يساوي 3 وعدد خيارات كل من B، C، D يساوي 4. وبهذا فالعدد المطلوب هو $3\times 4\times 4\times 4=192$.

(١٣) بكم طريقة يمكن ترتيب حروف الكلمة VARIOUSإذا كانت حروف العلة تتناوب مع الحروف الساكنة (حروف العلة باللغة الانجليزية هي (A,E,I,O,U؟

الحل

الكلمة مكونة من 7 حروف، منها 4 حروف علة وهي A,I,O,U وثلاثة حروف ساكنة هي V,R,S. وبما أن عدد حروف العلة أكبر عدداًمن الحروف الساكنة فيجب أن تبدأ وتنتهي الكلمة بحرف علة. إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب عدد الطرق الممكنة لترتيب الحروف هو $144 = 1 \times 1 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 4$.

(١٤) ما عدد التطبيقات الأحادية (المتباينة) $f : A \to B$ حيث $|A| = m$ و $|B| = n$؟

الحل

لاحظ أولاً أنه إذا كان $m > n$ فإنه لا يمكن إيجاد تطبيق أحادي من A إلى B. ولذا فإن العدد المطلوب هو 0. وعندما $m \le n$، لنفرض أن $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. يوجد n من الخيارات لاختيار صورة العنصر a_1. وبما أن التطبيق أحادي فيوجد $n-1$ من الخيارات لصورة a_2. أما صورة العنصر a_3 فعدد خياراتها يساوي $n-2$ وهكذا. إذن، استناداً إلى مبدأ الضرب، عدد التطبيقات الأحادية هو

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-m+1).$$

(١٥) [Aust.MC 1981] يبيع متجر مكعبات خشبية مرقمة بالأرقام $0,1,2,\ldots,9$ لتكوين أرقام المنازل المكونة من ثلاث مراتب فقط. باع المتجر جميع المكعبات و لم يتبق لديه إلا مكعبات مرقمة بالأرقام 4، 7، 8 . ما عدد أرقام المنازل التي يمكن تكوينها من هذه المراتب؟

الحل

أرقام المنازل هي أعداد ABC مكونة من ثلاث مراتب كل منها مأخوذ من المراتب 4، 7، 8. ولذا يوجد 3 خيارات لكل منها. إذن، عدد أرقام المنازل هو $3 \times 3 \times 3 = 27$.

(١٦) [Aust.MC 1981] في أحد الاحتفالات تمت 28 مصافحة بين الحاضرين. كل من الحاضرين صافحجميع الحاضرين الآخرين مرة واحدة فقط. ما عدد الحاضرين في هذا الحفل؟

الحل

لنفرض أن عدد الحاضرين هو n. كل من هؤلاء صافح $n-1$ شخصاً. وبما أن المصافحة تتطلب شخصين فإن عدد المصافحات هو $\dfrac{n(n-1)}{2}$. إذن، $\dfrac{n(n-1)}{2} = 28$. أي أن $n(n-1) = 56$. من ذلك نرى أن

$$n^2 - n - 56 = 0$$
$$(n+7)(n-8) = 0$$

إذن $n = 8$ أو $n = -7$. وبما أن n عدد صحيح موجب فإن $n = 8$.

(١٧) [Aust.MC 1979] في دوري التنس، فقط اللاعب الذي يكسب مباراة سيلعب مباراة أخرى وهكذا إلى أن يتحدد المركز الأول. إذا كان عدد اللاعبين في الدورة هو 128 فما عدد المباريات اللازمة لتحديد المركز الأول؟

الحل

كل من اللاعبين عدا اللاعب الذي سيحصل على المركز الأول يخسر مباراة واحدة فقط. ولذا عدد المباريات يساوي 127.

(١٨) [Aust.MC 1979] استخدمت 852 مرتبة (خانة) لترقيم صفحات كتاب ابتداءً من الصفحة الأولى. ما عدد صفحات الكتاب؟

الحل

لترقيم الصفحات من 1 إلى 9 نحتاج إلى 9 مراتب. لترقيم الصفحات من 10 إلى 99 نحتاج إلى $180 = 2 \times 90$ مرتبة. عدد المراتب المتبقية لترقيم صفحات الكتاب من 100 فصاعداً هو $663 = 9 - 180 - 852$. إذن، عدد الصفحات المرقمة 100 فصاعداً هو $221 = 3 \div 663$ صفحة. وبهذا يكون عدد صفحات الكتاب هو $320 = 221 + 180 + 9$.

(١٩) [Math counts 1985] ما عدد الطرق المختلفة التي يستطيع بها طالب أن يخمن إجابات خمسة أسئلة، الإجابة عن كل منها صائب أو خاطئ؟

الحل

لإجابة كل سؤال من الخمسة أسئلة يوجد خياران. إذن، عدد طرق تخمين إجابات خمسة أسئلة هو $32 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$.

(٢٠) [Math counts 1984] ما عدد قواسم العدد 2^{95} الأكبر من 10^6؟

الحل

سنجد عدد قواسم العدد 2^{95} الأصغر من 10^6 ونطرحها من عدد قواسم العدد 2^{95}. الآن، جميع قواسم العدد 2^{95} هي

$$1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{95}$$

وعددها 96. ولإيجاد عدد القواسم الأصغر من 10^6 نجد أكبر هذه القواسم. بملاحظة أن $2^{10} = 1024 > 10^3$ فإن $10^6 < 2^{20}$. ولكن $10^6 > 2^{19}$.

إذن، قواسم العدد 2^{95} الأصغر من 10^6 هي $1, 2, 2^2, \ldots, 2^{19}$ وعددها 20. وبهذا يكون عدد القواسم التي أكبر من 10^6 هو $96 - 20 = 76$.

(٢١) [Mandelbrot #3] نقول إن العدد متناظر إذا تطابقت قراءته من اليمين إلى اليسار مع قراءته من اليسار إلى اليمين[العدد 3443 متناظر]. ما عدد الأعداد المتناظرة المكونة من 4 مراتب؟

الحل الأول

أفضل طريقة لحل هذه المسألة هو سرد الأعداد المتناظرة. يوجد عشرة أعداد متناظرة تبدأ بالمرتبة 1 وهي

$$1001, 1111, 1221, 1331, 1441, 1551, 1661, 1771, 1881, 1991.$$

وبالمثل، يوجد عشرة أعداد متناظرة تبدأ بكل من المراتب 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9. إذن، عدد الأعداد المتناظرة هو $10 \times 9 = 90$.

الحل الثاني

الأعداد المتناظرة المكونة من 4 مراتب تكون على الصورة $ABBA$ حيث $A \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ و $B \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. وبالتالي نجد من مبدأ الضرب أن عدد

هذه الأعداد يساوي $9 \times 10 = 90$.

(٢٢) [Gauss 2011] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 400 التي يمكن الحصول عليها باستخدام المرتبة 1 أو 2 أو 3 فقط؟

الحل

عدد الأعداد المكونة من خانة واحدة يساوي 3 (1 أو 2 أو 3).

الأعداد المكونة من خانتين هي AB حيث $A, B \in \{1,2,3\}$ وعددها يساوي $3 \times 3 = 9$. الأعداد المكونة من ثلاث خانات هي ABC حيث $A, B, C \in \{1,2,3\}$ وعددها $3 \times 3 \times 3 = 27$. إذن، عدد الأعداد المطلوب هو

$$3 + 9 + 27 = 39$$

وجميع هذه الأعداد أصغر من 400 .

(٢٣) [Gauss 2009] كم عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها كتابة 101 كمجموع عددين صحيحين موجبين بحيث يكون العدد الثاني أكبر من العدد الأول؟

الحل

هذه الأعداد هي $100 + 1$ ، $99 + 2$ ، $98 + 3$ ، $\cdots$ ، $51 + 50$. وعددها 50 .

(٢٤) [Gauss 2009] فصل مكون من 40 طالباً، 18 طالباً يفضلون فطيرة التفاح و 15 طالباً يفضلون فطيرة الكرز و 12 طالباً لا يفضلون أياً منهما. ما عدد طلاب الفصل الذين يفضلون كليهما؟

الحل

لنفرض أن A و B هما مجموعتا الطلاب الذين يفضلون فطيرة التفاح وفطيرة الكرز على التوالي. المطلوب إيجاد $|A \cap B|$. باستخدام مبدأ التضمين والإقصاء لدينا

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

ولكن $|A| = 18$، $|B| = 15$. وبما أن عدد طلاب الفصل هو 40 وأن 12 منهم لا يفضلون أي من الفطيرتين فإن $40 - 12 = 28$ يفضلون على الأقل إحدى الفطيرتين. أي أن $|A \cup B| = 28$. إذن، $28 = 18 + 15 - |A \cap B|$. أي أن $|A \cap B| = 33 - 28 = 5$.

وبهذا يوجد 5 طلاب يفضلون كلا الفطيرتين.

(٢٥) كم عدد الكلمات الثنائية (تستخدم المرتبتين 0 و 1) من الطول 6 التي تبدأ بالمرتبة 1 أو تنتهي بالمرتبتين 00؟

الحل

لنفرض أن N هي مجموعة الكلمات التي تبدأ بالمرتبة 1 وأن M هي مجموعة الكلمات التي تنتهي بالمرتبتين 00. عندئذ، استناداً إلى مبدأ الضرب نجد أن

$$|N| = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$$
$$|M| = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 2^4$$
$$|M \cap N| = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1 = 2^3$$

إذن، المطلوب هو $|M \cup N|$ ويمكن الحصول على هذا العدد باستخدام مبدأ التضمين والإقصاء

$$|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N| = 2^5 + 2^4 - 2^3 = 40.$$

(٢٦) [AMC10B 2012]يقدم أحد المطاعم مع وجبة غداء اليوم نوعاً واحداً من الحلوى يختاره طباخ المطبخ من بين الأنواع: الجاتو، فطيرة التفاح،الآيس كريم، المهلبية على شرط أن يقدم نوعاً واحداً فقط من الحلوى كل يوم من أيام الأسبوع وأن لا يقدم نوعاً واحداً من الحلوى في يومين متتالين وأن يكون نوع الحلوى المقدم يوم الجمعة هو الجاتو. ما عدد الخيارات الممكنة للحلوى على قائمة طعام الأسبوع؟

الحل

بداية يوجد خيار واحد يوم الجمعة وهو الجاتو. ولذا يمكن اختيار نوع حلوى يوم السبت بثلاث طرق (فطيرة التفاح أو الآيس كريم أو المهلبية). أيضاً يمكن اختيار نوع حلوى الأحد من بين ثلاثة أنواع (الجاتو والنوعان اللذان لم يتم اختيارهما يوم السبت) وهكذا لبقية أيام الأسبوع. إذن، عدد الخيارات هو

$$1 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729.$$

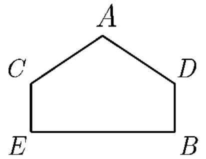
(٢٧) [AMC10A 2011] كم عدد الأعداد الصحيحة الزوجية بين العددين 200و 700بحيث تكون مراتبها مختلفة ومأخوذة من المراتب $1, 2, 5, 7, 8, 9$؟

الحل

مرتبة المئات إما أن تكون 2أو 5(لماذا ؟). إذا كانت مرتبة المئات هي 2فإن مرتبة الآحاد يجب أن تكون 8(لأن العدد زوجي). ولذا يوجد 4خيارات لمرتبة العشرات وهي 1أو 5أو 7أو9. إذن، عدد أعداد هذه الحالة هو $1 \times 4 \times 1 = 4$. أما إذا كانت مرتبة المئات هي 5فيوجد خياران لمرتبة الآحاد هما 2أو 8وبعد اختيار مرتبة الآحاد يتبقى أربعة خيارات لمرتبة العشرات. إذن،

عدد أعداد هذه الحالة هو $8 = 2 \times 4 \times 1$. ويكون العدد الكلي لهذه الأعداد هو $4 + 8 = 12$.

(٢٨) [AMC10A 2011] لدينا الخماسي $ADBEC$ المبين في الشكل المرفق



لونا كلاً من الرؤوس بلون من 6 ألوان متوافرة بحيث يُلوَّن طرفا كل من الأقطار بلونين مختلفين. كم عدد التلوينات الممكنة للخماسي؟

الحل

ندرس الحالات الثلاث الممكنة.

الحالة الأولى: الرأسان C و A لهما اللون نفسه والرأسان A و D لهما لونان مختلفان. في هذه الحالة لون الرأس E يجب أن يكون مختلفاً عن لون كل من الرأسين A و D. ولذا فعدد خيارات A هو 6 وعدد خيارات B هو 5 (أي لون مختلف عن A)، عدد خيارات C هو 1 وعدد خيارات D هو 5 وعدد خيارات E هو 4. ونحصل في هذه الحالة على تلوينات عددها $600 = 4 \times 5 \times 1 \times 5 \times 6$.

الحالة الثانية: لون الرأس C مختلف عن لون الرأس A ولون الرأس D مختلف عن لون الرأس A. في هذه الحالة، عدد خيارات A هو 6 وعدد خيارات B هو 5 وعدد خيارات C هو 4 (لأن A و B يجب أن يكون لهما لونان مختلفان) وعدد خيارات D هو 4 وعدد خيارات E هو 4 أيضاً. ونحصل في هذه الحالة على تلوينات عددها $1920 = 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 6$.

الحالة الثالثة: الرأسان A و C لهما لونان مختلفان والرأسان A و D لهما اللون

نفسه. في هذه الحالة يوجد 6 خيارات للرأس A و 5 خيارات للرأس B و 4 خيارات للرأس C وخيار واحد للرأس D و 5 خيارات للرأس E ونحصل في هذه الحالة على تلوينات عددها $6 \times 5 \times 4 \times 1 \times 5 = 600$.

إذن، عدد التلوينات الممكنة هو $600 + 1920 + 600 = 3120$.

(٢٩) [AMC10A 2010] وزعنا 7 حبات حلوى على ثلاثة أكياس: أحمر وأزرق وأبيض. إذا اشترطنا أن نضع في كل من الكيسين الأحمر والأزرق حبة واحدة على الأقل أما الكيس الأبيض فيمكن أن يكون فارغاً فما عدد الطرق الممكنة لتوزيع حبات الحلوى على الأكياس الثلاثة؟

الحل

نجد أولاً عدد طرق توزيع 7 حبات حلوى على ثلاثة أكياس دون شروط. لكل حبة من حبات الحلوى ثلاثة خيارات. إذن، عدد الطرق الممكنة هو $3^7 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

الآن، لنفرض الآن أن R و B مجموعتا الطرق عندما يكون الكيسان الأحمر والأزرق فارغين على التوالي. سنجد الآن عدد الطرق التي يكون فيها الكيس الأحمر فارغاً أو الكيس الأزرق فارغاً. أي $|R \cup B|$. استناداً إلى مبدأ التضمين والإقصاء هذا العدد هو

$$|R \cup B| = |R| + |B| - |R \cap B| = 2^7 + 2^7 - 1 = 2^8 - 1$$

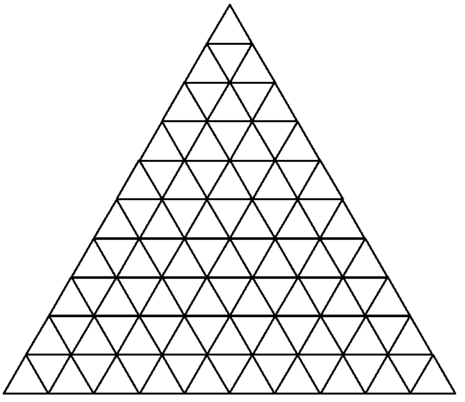
إذن، عدد التوزيعات المطلوبة هو $3^7 - (2^8 - 1) = 2187 - 256 + 1 = 1932$

.

(٣٠) [AMC10A 2008] ملأنا مثلثاً متساوي الأضلاع طول ضلعه 10سم بمثلثات متساوية الأضلاع طول ضلع كل منها يساوي 1سم. كم عدد

المثلثات الصغيرة التي نحتاج إليها لإنجاز ذلك ؟

الحل الأول



من الرسم المرفق عدد المثلثات الصغيرة يساوي

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$$

الحل الثاني

كل من المثلثات الصغيرة يشابه المثلث الكبير. ولهذا فالنسبة بين مساحتيهما تساوي النسبة بين مربعي ضلعيهما. إذن، هذه النسبة هي $\frac{1}{100}=\frac{1^2}{10^2}$.

ومن ثم فعدد المثلثات الصغيرة يساوي 100.

(٣١) [AHMSE 1998] نقول إن رقم الهاتف المكون من سبعة أرقام $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ مميز إذا كان $d_1d_2d_3=d_4d_5d_6$ أو $d_1d_2d_3=d_5d_6d_7$ أو كلاهما حيث $d_i\in\{0,1,2,\ldots,9\}$. ما عدد أرقام الهواتف المميزة؟

الحل

لنفرض أن A هي مجموعة الهواتف حيث $d_1d_2d_3=d_4d_5d_6$ وأن B هي مجموعة الهواتف حيث $d_1d_2d_3=d_5d_6d_7$. إذن، المطلوب هو إيجاد $\left|A\cup B\right|$. ولكن

استناداً إلى مبدأ التضمين والإقصاء نعلم أن

$$\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|$$

الآن، بما أن $d_1d_2d_3 = d_4d_5d_6$ فإن عدد هذه الخيارات هو $10 \times 10 \times 10$ ويوجد 10 خيارات للمرتبة d_7 إذن، $\left|A\right| = 10^4$. وبالمثل، $\left|B\right| = 10^4$. كما أن $\left|A \cap B\right| = 10$ لأن هذه المجموعة تحتوي على الهواتف التي يكون فيها $d_1 = d_2 = \cdots = d_7$. إذن، عدد الهواتف المميزة هو

$$\left|A \cup B\right| = 10^4 + 10^4 - 10 = 19990.$$

(٣٢) [AIME 1993] كم عدد الأعداد الصحيحة الزوجية x حيث $4000 \le x < 7000$ والتي جميع مراتبها مختلفة؟

الحل

هذه الأعداد مكونة من أربع مراتب $ABCD$ حيث $A = 4$ أو $A = 5$ أو $A = 6$.

إذا كانت $A = 4$ فيوجد 4 طرق لاختيار D ($D = 0$ أو $D = 2$ أو $D = 6$ أو $D = 8$) وبعد ذلك يبقى 8 طرق لاختيار B و 7 طرق لاختيار C. إذن، عدد طرق هذه الحالة هو $1 \times 4 \times 8 \times 7$.

إذا كانت $A = 5$ فنجد بصورة مشابهة أن عدد الطرق هو $1 \times 5 \times 8 \times 7$.

وأخيراً إذا كانت $A = 6$ فعدد الطرق هو $1 \times 4 \times 8 \times 7$.

إذن، العدد الكلي للأعداد هو

$$1 \times 4 \times 8 \times 7 + 1 \times 5 \times 8 \times 7 + 1 \times 4 \times 8 \times 7 = 728.$$

(٣٣) تتكون لوحات السيارات في المملكة من ثلاثة حروف من حروف اللغة العربية (عدد حروفها 28) متبوعة بأربعة أرقام مأخوذة من الأرقام $0,1,2,\ldots,9$. ما عدد اللوحات التي يمكن تكوينها بحيث لا تحتوي على الحرف ج والعدد 0 معاً؟

الحل

عدد جميع اللوحات هو $10^4 \times 28^3$.

عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف و لا تحتوي الحرف ج هو 27^3. إذن، عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف وتحتوي الحرف ج هو $28^3 - 27^3$.

وبالمثل، عدد الأعداد المكونة من أربعة مراتب وتحتوي العدد 0 هو $10^4 - 9^4$.

وبهذا يكون عدد اللوحات التي تحتوي الحرف ج والعدد 0 هو $(28^3 - 27^3)(10^4 - 9^4)$. إذن، عدد اللوحات التي لا تحتوي كليهما هو

$$10^4 \times 28^3 - (28^3 - 27^3) \times (10^4 - 9^4) = 211716909 .$$

(٣٤) [PACAT] قطعنا رقعة 6×6 من رقعة شطرنج 8×8 . بكم طريقة يمكن وضع قطعتي نقود متماثلتين واحدة على مربع أسود والأخرى على مربع أبيض من مربعات الرقعة بشرط أن لا يقعا معاً على الصف أو العمود نفسه؟

الحل

لاحظ أن الرقعة 6×6 تتكون من 6 صفوف و 6 أعمدة كل من صفوفها وكل من أعمدتها يتكون من 3 مربعات بيض و 3 مربعات سود وهذه المربعات متناوبة. وبهذا فعدد المربعات ذات اللون الأبيض يساوي عدد المربعات ذات اللون الأسود

وكل منها يساوي 18 مربعاً. الآن، لكل مربع أسود نختاره لوضع قطعة نقود فإننا لا نستطيع وضع القطعة الأخرى على أي مربع أبيض في الصف أو العمود الذي يحويه. وبما أن عدد المربعات البيض في صف هذا المربع هو 3 وكذلك عدد المربعات البيض في عمود هذا المربع هو 3 أيضاًفإننا نستطيع اختيار أي من $18 - 6 = 12$ مربعاً أبيض لنضع عليه قطعة النقود الأخرى لكل مربع أسود نختاره. وبما أن عدد المربعات ذات اللون الأسود هو 18 فيكون العدد المطلوب هو $18 \times 12 = 216$.

(٣٥) [PACAT] كتبنا الأعداد من 1 إلى 1000. كم عدد مرات ظهور المرتبة 7 في قائمة هذه الأعداد؟

الحل

بما أن المرتبة 7 لا تظهر في العدد 1000 فيكون المطلوب هو عدد مرات ظهور المرتبة 7 في قائمة الأعداد من 1 إلى 999. هذه الأعداد على الصورة ABC حيث $A, B, C \in \{0,1,2,\ldots,9\}$. لدينا الحالات الثلاث التالية:

(أ) الأعداد التي تظهر فيها المرتبة 7 مرة واحدة فقط، مثل، 7، 17، 78، 217، 743 وهكذا. أي أن واحدة فقط من المراتب A، B، C تساوي 7 والمرتبتان الأخريان نختارهما من بين المراتب التسع الأخرى بعدد من الطرق يساوي $9 \times 9 = 81$. ولكن يمكن أن تكون المرتبة 7 أياً من المراتب A أو B أو C. إذن، عدد طرق هذه الحالة هو $3 \times 81 = 243$.

(ب) الأعداد التي تظهر فيها المرتبة 7 مرتين. في هذه الحالة مرتبة واحدة من العدد لا تساوي 7 نختارها بعدد من الطرق يساوي 9. وبما أن المرتبة التي لا تساوي 7 يمكن أن تكون A أو B أو C فإن عدد الطرق هو

$27 = 9 \times 3$. ولكن في كل من هذه الأعداد عدد مرات ظهور المرتبة 7 يساوي 2. إذن، عدد مرات ظهور المرتبة 7 في هذه الأعداد هو $2 \times 27 = 54$.

(ت) الأعداد التي تظهر فيها المرتبة 7 ثلاث مرات. هناك عدد واحد فقط هو 777.

إذن العدد الكلي لمرات ظهور المرتبة 7 في قائمة الأعداد من 1 إلى 1000 هو

$$243 + 54 + 3 = 300.$$

(٣٦) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 3 مراتب التي مجموع مراتبها عدد زوجي؟

الحل

العدد الموجب المكون من ثلاث مراتب هو على الصورة ABC حيث $A \neq 0$. إذن، عدد هذه الأعداد هو $900 = 10 \times 10 \times 9$. نصف هذه الأعداد مجموع مراتب كل منها زوجي والنصف الآخر مجموع مراتب كل منها فردي. إذن، العدد المطلوب هو $450 = \frac{900}{2}$.

(٣٧) أعطيت 1000 ريـــال وطلب منك شراء مائة من الأقلام والمساطر والمماحي بكامل المبلغ. إذا كان ثمن القلم الواحد 20 ريالاً وثمن المسطرة الواحدة 5 ريالات وثمن الممحاة الواحدة ريالاً واحداً فكم عدد الطرق الممكنة لشراء هذه الأغراض؟

الحل

لنفرض أن x، y، z هو عدد الأقلام، المساطر، المحايات على التوالي. عندئذ، لدينا

$$20x + 5y + z = 1000 \quad (١)$$

$$x + y + z = 100 \quad (٢)$$

بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نجد أن $19x + 4y = 900$. أي أن

$$y = \frac{900 - 19x}{4} = 225 - \frac{19}{4}x \quad (٣)$$

وبما أن y عدد صحيح يحقق $0 < y < 99$ نجد بالتعويض في المعادلة (٣) أن

$$0 < 225 - \frac{19}{4}x < 99$$

$$-225 < -\frac{19}{4}x < 99 - 225$$

$$-225 < -\frac{19}{4}x < -126$$

$$\frac{126 \times 4}{19} < x < \frac{4 \times 225}{19}$$

$$26.53 < x < 47.36$$

لاحظ أن x عدد صحيح مضاعف للعدد 4 (من المعادلة ٣). ولذا فقيم x هي 28 ، 32 ، 36 ، 40 ، 44 .

إذا كان $x = 28$ أو $x = 32$ فإن $x + y > 100$ وهذا مستحيل. أما القيم الثلاثة الأخرى فإنها تعطي الحلول

$$x = 36 ،\ y = 54 ،\ z = 10$$

$$x = 40 ،\ y = 35 ،\ z = 25$$

$$x = 44 ،\ y = 16 ،\ z = 40$$

وبهذا يكون عدد الحلول الممكنة هو 3 .

(٣٨) كم عدد القواسم الفردية للعدد $2^7 \times 3^4 \times 7^3$؟

الحل

لاحظ أن قواسم العدد هي على الصورة $2^a \times 3^b \times 7^c$ حيث $a \in \{0,1,2,\ldots,7\}$، $b \in \{0,1,2,3,4\}$، $c \in \{0,1,2,3\}$. ولكي يكون القاسم فردياً فإن $a = 0$. إذن، عدد القواسم الفردية هو $1 \times 5 \times 4 = 20$.

(٣٩) كم عدد الأعداد المكونة من 4 مراتب و لا تزيد عن 5000 والتي مراتبها مأخوذة من المراتب $\{0,1,2,3,4,5\}$؟

الحل

أكبر هذه الأعداد هو 5000 وهو العدد الوحيد الذي مرتبة آلافه هي 5. إذن، باقي الأعداد هي على الصورة $ABCD$ حيث $A \neq 0,5$، وكل من B و C و D تأخذ القيم من 0 إلى 5. إذن، عدد هذه الأعداد هو $4 \times 6 \times 6 \times 6 = 864$. وبإضافة العدد 5000 نجد أن العدد المطلوب هو 865.

(٤٠) [PACAT] لدينا 6 صناديق مرقمة بالأرقام $1,2,3,4,5,6$. نريد أن نضع في كل منها كرة خضراء أو كرة حمراء بشرط أن نضع كرة خضراء في صندوق واحد على الأقل وأن الصناديق التي سنضع فيها كرات خضراء يجب أن تكون أرقامها متتالية. ما عدد الطرق الممكنة لعمل ذلك؟

الحل

ندرس الست حالات الممكنة لوضع الكرات الخضراء والتي تحدد لنا الطرق الممكنة

(أ) صندوق واحد فقط يحتوي كرة خضراء. في هذه الحالة عدد الطرق هو 6 (أي من الصناديق الستة).

(ب) صندوقان يحتوي كل منهما كرة خضراء. في هذه الحالة لدينا خمسة خيارات لوضع كرتين خضراوين هي $(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,6)$.

(ت) 3 صناديق يحتوي كل منها كرة خضراء. في هذه الحالة لدينا 4 خيارات لوضع ثلاث كرات خضراء هي $(1,2,3),(2,3,4),(3,4,5),(4,5,6)$.

(ث) 4 صناديق يحتوي كل منها كرة خضراء. في هذه الحالة لدينا 3 خيارات لوضع أربع كرات خضراء هي $(1,2,3,4),(2,3,4,5),(3,4,5,6)$.

(ج) 5 صناديق يحتوي كل منها كرة خضراء. في هذه الحالة لدينا خياران لوضع خمس كرات خضراء هما $(1,2,3,4,5),(2,3,4,5,6)$.

(ح) 6 صناديق يحتوي كل منها كرة خضراء. في هذه لدينا خيار واحد هو $(1,2,3,4,5,6)$.

إذن، عدد الطرق هو $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$.

مسائل غير محلولة

(١) عدد حدود المتتالية $60, 70, 80, \ldots, 540$ يساوي

(أ) 47 (ب) 48 (ج) 49 (د) 50

(٢) كم عدد الأعداد الصحيحة بين العددين 29و 817 التي باقي قسمتها على 7 يساوي 3؟

(أ) 111 (ب) 112 (ج) 113 (د) 114

(٣) كم عدد المكعبات الكاملة بين العددين 33و 27710؟

(أ) 26 (ب) 27 (ج) 28 (د) 29

(٤) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 1000وجميع مراتبها مختلفة؟

(أ) 738 (ب) 758 (ج) 770 (د) 775

(٥) كم عدد الأعداد المكونة من ثلاث مراتب بحيث تكون جميع مراتبها زوجية مختلفة؟

(أ) 40 (ب) 45 (ج) 47 (د) 48

(٦) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي لا تزيد عن 1000والتي لا تقبل القسمة على 2 و لا تقبل القسمة على 3؟

(أ) 333 (ب) 666 (ج) 777 (د) 888

(٧) كم عدد الأعداد الصحيحة x، $1 \leq x \leq 1100$ حيث x مربع كامل أو مكعب كامل؟

(أ) 25 (ب) 30 (ج) 33 (د) 39

(٨) ما عدد الأعداد المكونة من مرتبتين بحيث يكون مجموع المرتبتين عدداً فردياً؟

(أ) 30 (ب) 40 (ج) 45 (د) 50

(٩) كم عدد المجموعات الجزئية من المجموعة $\{1,2,3,\ldots,10\}$ التي تحتوي على عدد فردي واحد فقط؟

(أ) 150 (ب) 160 (ج) 170 (د) 180

(١٠) [Aust.MC 1987] استخدمنا 642 مرتبة (خانة) لترقيم صفحات كتاب. ما عدد صفحات الكتاب ؟

(أ) 250 (ب) 251 (ج) 252 (د) 253

(١١) [Aust.MC 1992] كم عدد الأعداد الزوجية المكونة من 4 مراتب مأخوذة من المراتب 1، 2, 3، 5؟

(أ) 2 (ب) 6 (ج) 12 (د) 18

(١٢) [Aust.MC 1995] أردنا وضع خمس بيضات مختلفة الألوان في وعاءين بحيث يحتوي الوعاء الواحد على بيضة واحدة على الأقل. ما عدد الطرق الممكنة لإنجاز ذلك ؟

(أ) 24 (ب) 28 (ج) 30 (د) 32

(١٣) [Aust.MC 1998] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 900 والتي هي مضاعفات للعدد 7 ومرتبة آحادها هي 2؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 13 (د) 17

(١٤) [Aust.MC 1998] ما عدد الأعداد الصحيحة الأكبر من 4000 والتي مراتبها مختلفة مأخوذة من المراتب 2، 3، 4، 5، 6؟

(أ) 72 (ب) 120 (ج) 144 (د) 192

(١٥) [Aust.MC 1997] لدينا 25 بطاقة مكتوب على كل منها عدد فردي

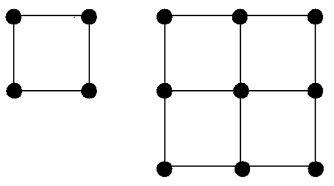
مختلف من بين الأعداد الفردية من 1إلى 49 . بدأنا بأخذ البطاقة المكتوب عليها العدد 5 . كل من الخطوات بعد ذلك تكون بأخذ البطاقة المكتوب عليها أكبر قاسم فردي للعدد $x - 99$حيث xهو العدد المكتوب على البطاقة المأخوذة بالخطوة السابقة. بعد الانتهاء، كم عدد البطاقات المتبقية؟

(أ) 5 (ب) 8 (ج) 12 (د) 18

(١٦) [Aust.MC 1998] عدد لاعبي كرة المضرب في أحد النوادي يساوي 16 لاعباً. أثناء التدريب قسمهم المدرب إلى مجموعتين متساويتين. كل لاعب يلعب مع كل من لاعبي مجموعته ومع كل من لاعبي المجموعة الثانية ثم يعود ويلعب مع كل من لاعبي مجموعته. كم عدد المباريات التي لعبها لاعبو النادي؟

(أ) 168 (ب) 176 (ج) 352 (د) 462

(١٧) [Aust.MC 1997] كونا مربعاً طول ضلعه 1من أربعة أعواد كبريت ومربعاً طول ضلعه 2مكوناً من أربع مربعات طول ضلع كل منها 1 باستخدام 12عوداً من الكبريت كما هو مبين في الشكل المرفق.



كم عوداً من الكبريت نحتاج إليه لتكوين مربع طول ضلعه 20مقسم إلى مربعات وحدة؟

(أ) 800 (ب) 820 (ج) 840 (د) 860

(١٨) [Aust.MC 1998] بكم طريقة يمكنك صعود درج مكون من 10درجات

بحيث تصعد في كل خطوة إما درجة واحدة أو ثلاث درجات ؟

(أ) 15 (ب) 20 (ج) 24 (د) 28

(١٩) [AMC10B 2007] ليكن n هو أصغر عدد صحيح موجب يقبل القسمة على كل من العددين 4 و 9 ومراتبه مأخوذة من المرتبتين 4 و 9 بحيث تظهر كل منهما مرة واحدة على الأقل. ما المراتب الأربع الأولى (الآحاد والعشرات والمئات والآلاف) من العدد n؟

(أ) 4494 (ب) 4944 (ج) 9444 (د) 9944

(٢٠) [AMC10A 2007] عينت شركة سياحية دليلين لمجموعة سياح عددها 6. إذا كان على كل سائح أن يختار أحد الدليلين على شرط أن يكون مع كل من الدليلين سائح واحد على الأقل فما عدد الطرق الممكنة لتوزيع السياح على الدليلين؟

(أ) 56 (ب) 58 (ج) 60 (د) 62

(٢١) [AMC10A 2006] تتكون لوحات السيارات في دولة سيكينا من 4 مراتب مأخوذة من المراتب 0 إلى 9 وحرفان مأخوذان من الحروف A إلى Z (عددها 26). كم عدد اللوحات الممكنة إذا اشترطت شرطة الدولة أن يظهر الحرفان واحداً بجانب الآخر؟

(أ) $10^4 \times 26^2$ (ب) $6 \times 10^4 \times 26^2$

(ج) $5 \times 10^4 \times 26^2$ (د) $5 \times 10^3 \times 26^3$

(٢٢) [AMC10A 2006] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من أربع مراتب وواحدة من مراتبها على الأقل هي 2 أو 3 ؟

(أ) 2439 (ب) 3584 (ج) 4904 (د) 5416

(٢٣) [AMC10B 2005] كم عدد الأعداد الصحيحة بين 1و 2005التي تكون مضاعفات للعدد 4أو 3ولكنها ليست مضاعفات للعدد 12؟

(أ) 668 (ب) 835 (ج) 1002 (د) 1169

(٢٤) [AMC10A 2005] كم عدد الأعداد الصحيحةالموجبة nالتي تحقق $(130n)^{50} > n^{100} > 2^{200}$؟

(أ) 125 (ب) 126 (ج) 130 (د) 132

(٢٥) [AMC10A 2005] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من ثلاث مراتب بحيث تكون مرتبة عشراتها تساوي متوسط مرتبتي الآحاد والمئات ؟

(أ) 45 (ب) 46 (ج) 50 (د) 54

(٢٦) [AMC10A 2005] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة nبحيث يقبل العدد $6n$القسمة على المجموع $1 + 2 + 3 + \cdots + n$؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

(٢٧) [AMC10A 2005] لتكن Sهي المجموعة المكونة من أول 2005مضاعفاً موجباً للعدد 4ولتكن Tهي المجموعة المكونة من أول 2005مضاعفاً موجباً للعدد 6. ما عدد الأعداد المشتركة بين المجموعتين؟

(أ) 166 (ب) 333 (ج) 668 (د) 1001

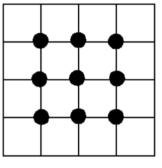
(٢٨) [Gauss 2006] وصل 8أصدقاء إلى المطعم لتناول وجبة العشاء. وصافح كل منهم الأصدقاء السبعة الآخرين. بعد ذلك وصل صديق تاسع إلى المطعم وصافح بعض الأصدقاء الموجودين. إذا كان عدد المصافحات التي تمت هو 32فكم شخصاً صافح الصديق التاسع؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 7

(٢٩) [Gauss 2005] جرى استفتاء على 50 طالباً لمعرفة اللعبة المفضلة لديهم وكانت نتيجة الاستفتاء أن 33 منهم يفضلون كرة القدم و 24 منهم يفضلون كرة السلة و 8 لا يفضلون أياً من الكرتين. كم عدد الطلاب من بين الطلاب الذين جرى عليهم الاستفتاء يفضلون كرة القدم وكرة السلة معاً ؟

(أ) 1 (ب) 7 (ج) 9 (د) 15

(٣٠) [Pascal 2010] الشكل المرفق يبين نقاط التقاطع الداخلية لمربع طول ضلعه 4 مقسم إلى مربعات وحدة. ما عدد التقاطعات الداخلية لمربع طول ضلعه 12؟



(أ) 100 (ب) 121 (ج) 144 (د) 148

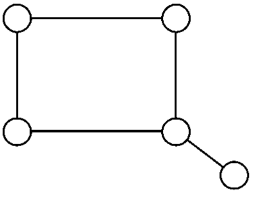
(٣١) [Pascal 2009] مجموع حدود المتتابعة التزايدية $3 < 4 < 5 < 8 < 9$ يساوي 29. كم عدد المتتابعات التزايدية التي عدد حدودها 5 ومجموع حدودها 33 المكونة من أعداد صحيحة موجبة كل منها ذو مرتبة واحدة؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٣٢) [Pascal 2008] نقول إن العدد المكون من ثلاث مراتب عدد عمودي إذا كان مجموع مرتبتي المئات والعشرات يساوي مرتبة الآحاد، مثلاً العدد 145 عدد عمودي. ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة العمودية والمكونة من ثلاث مراتب؟

(أ) 35 (ب) 45 (ج) 50 (د) 55

(٣٣) [Pascal 2008] الشكل المرفق يبين خمس دوائر في المستوى. نريد تلوين كل من هذه الدوائر باللون الأحمر أو الأزرق أو الأخضر بحيث تأخذ الدائرتان المتجاورتان لونين مختلفين. كم عدد التلوينات الممكنة ؟



(أ) 24 (ب) 36 (ج) 48 (د) 60

(٣٤) [AMC10A 2004] يمكن لأحمد إضافة كاتشب أو مايونيز أو طماطم أو خردل أو خس أو مخلل أو جبن أو بصل عند شرائه فطيرة هامبرجر من الحجم الصغير أو الوسط أو الكبير. ما عدد الطرق المختلفة التي يمكن لأحمد أن يختار بها فطيرة الهامبرجر؟

(أ) 256 (ب) 512 (ج) 768 (د) 1024

(٣٥) [AMC10B 2003] عند وصول المتقدمين لمسابقة AMC إلى مدينة نبراسكا لتقديم الاختبار لاحظ المدرب أن المدينة قد غيرت أرقام لوحات السيارات حيث كانت أرقام لوحات السيارات السابقة للمدينة مكونة من حرف مأخوذ من حروف الإنجليزية يتبعه عدد مكون من أربع مراتب. أما اللوحات الحالية فمكونة من ثلاثة حروف متبوعة بعدد مكون من ثلاث مراتب. بكم مضاعفاً زاد عدد اللوحات الجديدة الممكنة عن القديمة؟

(أ) $\frac{26}{10}$ (ب) $\frac{26^2}{10}$ (ج) $\frac{26^3}{10^3}$ (د) $\frac{26^3}{10^2}$

(٣٦) موظف كسول وضع 10رسائل مختلفة في صناديق بريد عشرة أشخاص عشوائياً. ما عدد الطرق الممكنة ليكون شخص واحد على الأقل وجد الرسالة الخطأ في صندوق بريده؟

(أ) 3628799 (ب) 3628800 (ج) 3628880 (د) 4814400

(٣٧) [PACAT] نريد حفظ 5 كتب رياضيات متشابهة، 6 كتب فيزياء متشابهة، 3 كتب كيمياء متشابهة في ملفات على سطح شاشة حاسب آلي. كم عدد الملفات اللازمة لذلك بشرط أن تحتوي الملفات على كتاب رياضيات وكتاب فيزياء على الأقل؟

(أ) 240 (ب) 6144 (ج) 16384 (د) 15624

(٣٨) [PACAT] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من 5مراتب وتقبل القسمة على 3بحيث مراتبها مأخوذة من المجموعة $\{0,1,2,3,4,5\}$ بدون تكرار المراتب؟

(أ) 96 (ب) 120 (ج) 216 (د) 625

(٣٩) [PACAT]تحلقت مجموعة من الأطفال حول دائرة، كل منهم في مكان مختلف. يقوم كل زوج من الأطفال غير المتجاورين برمي كرة على بعضهما البعض لمدة ثلاث دقائق وهكذا لمدة ساعة. ما عدد الأطفال؟

(أ) 6 (ب) 7 (ج) 8 (د) 9

(٤٠) ذهب محمود للتسوق واشترى بمبلغ 107ريالات وعندما أراد دفع ثمن المشتريات وجد أن محفظته تحتوي على عملات من الفئات 1ريـــال، 10 ريـــال، 50ريـــال فقط. بكم طريقة يمكن أن يدفع محمود ثمن مشترياته؟

(أ) 17 (ب) 18 (ج) 19 (د) 20

إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ج	(٢) ج	(٣) ب	(٤) أ	(٥) د
(٦) أ	(٧) د	(٨) ج	(٩) ب	(١٠) أ
(١١) ب	(١٢) ج	(١٣) ج	(١٤) د	(١٥) د
(١٦) ب	(١٧) ج	(١٨) د	(١٩) ب	(٢٠) د
(٢١) ج	(٢٢) د	(٢٣) ب	(٢٤) أ	(٢٥) أ
(٢٦) ب	(٢٧) ج	(٢٨) أ	(٢٩) د	(٣٠) ب
(٣١) أ	(٣٢) ب	(٣٣) ب	(٣٤) ج	(٣٥) ب
(٣٦) أ	(٣٧) د	(٣٨) ج	(٣٩) ج	(٤٠) ب