الفصل الثالث

معاملات ذات الحدين
Binomial Coefficients

قدمنا في الفصل الثاني عدد طرق اختيار k من العناصر من مجموعة مكونة من n من العناصر حيث $k \leq n$ ووجدنا أن هذا العدد هو

$$C\left(n,k\right) = \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}$$

يسمى $C\left(n,k\right)$ معامل ذات حدين. يلعب هذا الحد دوراً مهماً في نظرية التركيبات وله العديد من الخصائص التي نقدم بعضاً منها في هذا الفصل ونبرهن معظم هذه الخصائص ببراهين جبرية وأخرى تركيبية، وغالباً يتم الحصول على البرهان التركيبي بإيجاد العدد المطلوب بطريقتين مختلفتين.

متطابقة باسكال [Pascal's Identity]

إذا كان n و k عددين صحيحين موجبين حيث $k \leq n$ فإن

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

برهان جبري:

$$\begin{aligned} C(n,k-1)+C(n,k) &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= n!\left[\frac{1}{(k-1)!(n-k+1)!}+\frac{1}{k!(n-k)!}\right] \\ &= n!\left[\frac{k+n-k+1}{k!(n-k+1)!}\right] \\ &= \frac{n!(n+1)}{k!(n-k+1)!} \\ &= \frac{(n+1!)}{k!(n-k+1)!} \\ &= C(n+1,k) \end{aligned}$$

برهان تركيبي: لنفرض أن A مجموعة عدد عناصرها $n+1$ ولنفرض أن $a \in A$ وأن $B = A-\{a\}$. عدد المجموعات الجزئية من A التي تحتوي k من العناصر هو $C(n+1,k)$. ومن ناحية أخرى, أي مجموعة من A عدد عناصرها k إما أن تحتوي a مع $k-1$ من العناصر الأخرى (هذه العناصر تنتمي إلى B) أو أنها تحتوي على k من عناصر B ولا تحتوي a.

وبما أن $C(n,k-1)$ هو عدد المجموعات الجزئية من B التي تتكون من $k-1$ من العناصر فإن عدد المجموعات الجزئية من A التي عدد عناصرها k وتحتوي a هو $C(n,k-1)$ وإن عدد المجموعات الجزئية من A التي عدد عناصرها k ولا تحتوي a هو $C(n,k)$. إذن, استناداً إلى مبدأ الجمع نجد أن $C(n+1,k) = C(n,k-1)+C(n,k)$.

مثلث باسكال [Pascal's Triangle]

يمكن استخدام متطابقة باسكال لترتيب معاملات ذات الحدين على شكل مثلث يعرف بمثلث باسكال حيث أعداد الصف n من هذا المثلث هي معاملات ذات الحدين $C(n,k)$ لكل $k = 0,1,\ldots,n$. الشكل التالي يبين الصفوف الثمانية الأولى من هذا المثلث

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & C(0,0)= 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

لاحظ أن متطابقة باسكال تبين أنه عند جمع عددين متتاليين من صف واحد من صفوف المثلث نحصل على العدد الواقع بين هذين العددين في الصف الذي يليه. على سبيل المثال, $C(5,3) + C(5,4) = 10 + 5 = 15 = C(6,4)$.

مبرهنة ذات الحدين [The Binomial Theorem]

تسمى صيغة مجموع حدين, مثل $x + y$, $3x - y$, $x^2 + 2y$, $x - \dfrac{1}{x^2}$ صيغة ذات حدين. تقدم لنا مبرهنة ذات الحدين طريقة لحساب معاملات مفكوك $(x+y)^n$ حيث n عدد صحيح موجب كالتالي:

إذا كان x و y متغيرين وكان n عدداً صحيحاً موجباً فإن

$$\begin{aligned}(x+y)^n &= C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)x^{n-2}y^2 \\ &+ \cdots + C(n,n-1)xy^{n-1} + C(n,n)y^n\end{aligned}$$

برهان تركيبي: عند فك المقدار $(x+y)^n$ فإن الحدود التي تظهر في المفكوك تأخذ الصورة $Mx^{n-j}y^j$ حيث $j = 0,1,2,\ldots,n$ والعدد M هو عدد مرات ظهور الحد $x^{n-j}y^j$ في هذا المفكوك. لحساب M لاحظ أنه للحصول على الحد $x^{n-j}y^j$ يجباختيار عدد $n-j$ من المتغير x من بين n من المجاميع (حيث العدد j هو عدد مرات ظهور y في هذا الحد). إذن, المعامل M هو عدد طرق اختيار $n-j$ عنصراً من n من العناصر وهذا العدد هو $C(n,n-j) = C(n,j)$.

مثال(١) جد مفكوك المقدار $(3x-2)^6$.

الحل

$$\begin{aligned}(3x-2)^6 &= C(6,0)(3x)^6 + C(6,1)(3x)^5(-2)^1 + C(6,2)(3x)^4(-2)^2 \\ &+ C(6,3)(3x)^3(-2)^3 + C(6,4)(3x)^2(-2)^4 \\ &+ C(6,5)(3x)^1(-2)^5 + C(6,6)(-2)^6 \\ &= 729x^6 - 2916x^5 + 4860x^4 - 4320x^3 \\ &+ 2160x^2 - 576x + 64\end{aligned}$$

◇

مثال (٢) ما معامل x^3 في مفكوك $(x+2x^2)^2(1-2x)^5$؟

الحل

باستخدام مفكوك ذات الحدين نجد أن

$$\begin{aligned}(1-2x)^5 &= C(5,0)(1)^5 + C(5,1)1^4(-2x)^1 + C(5,2)1^3(-2x)^2 \\ &\quad + C(5,3)1^2(-2x)^3 + C(5,4)1(-2x)^4 + C(5,5)(-2x)^5 \\ &= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5\end{aligned}$$

أيضاً, $(x+2x^2)^2 = x^2 + 4x^3 + 4x^4$. الآن, نحصل على الحد x^3 في مفكوك $(x+2x^2)^2(1-2x)^5$ بجمع الحدود $-10x^3$, $4x^3$. أي أن $-10x^3 + 4x^3 = -6x^3$. ويكون معامل x^3 في المفكوك هو -6. ◇

ملحوظة

لاحظ أن عدد حدود مفكوك $(x+y)^n$ هو $n+1$ وأن الحد العام هو

$$T_{k+1} = C(n,k)x^{n-k}y^k$$

مثال(٣) جد الحد السابع في مفكوك $\left(3x - \dfrac{4}{x^2}\right)^{14}$.

الحل

الحد العام هو $T_{k+1} = C(14,k)(3x)^{14-k}\left(\dfrac{-4}{x^2}\right)^k$.

لإيجاد الحد السابع نضع $k = 6$ فنجد أن

$$T_7 = C(14,6)(3x)^8\left(\frac{-4}{x^2}\right)^6 = 3^8 \times 4^6 \times C(14,6)x^{-4}.$$ ◇

مثل (٤) جد معامل x^6 في مفكوك $\left(x^2 + \dfrac{4}{x}\right)^{12}$.

الحل

الحد العام هو

$$T_{k+1} = C(12,k)(x^2)^{12-k}\left(\frac{4}{x}\right)^k = C(12,k) \times 4^k \times x^{24-3k}.$$

ولإيجاد معامل x^6 نجد k الذي يحقق $24-3k=6$. أي أن $k=6$. إذن, $T_7 = C(12,6)\times 4^6 \times x^6$ ويكون المعامل هو $C(12,6)\times 4^6 = 3784704$. ◇

مجموع صفوف مثلث باسكال [Row – Sum of Pascal Triangle]

من الممكن كتابة عناصر مثلث باسكال على شكل صفوف وأعمدة على النحو التالي:

n	$C(n,0)$	$C(n,1)$	$C(n,2)$	$C(n,3)$	$C(n,4)$	$C(n,5)$	$C(n,6)$	$C(n,7)$	$C(n,8)$	مجموع الصفوف
0	1									1
1	1	1								2
2	1	2	1							4
3	1	3	3	1						8
4	1	4	6	4	1					16
5	1	5	10	10	5	1				32
6	1	6	15	20	15	6	1			64
7	1	7	21	35	35	21	7	1		128
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

وبالنظر إلى الجدول نجد أن مجموع كل من صفوف المثلث هي $2^0, 2^1, 2^2, 2^4$ وهكذا. من ذلك لدينا المتطابقة التالية لمجموع كل من صفوف مثلث باسكال:

إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فإن $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$.

برهان تركيبي: الطرف الأيمن هو عدد جميع المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصرها n. ومن ناحية أخرى, عدد عناصر كل من هذه المجموعات الجزئية هو إما 0 أو 1 أو 2 أو $\cdots n$ من العناصر. عدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على صفر من العناصر هو $C(n,0)$ وعدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على عنصر واحد هو $C(n,1)$ وعدد المجموعات الجزئية التي تحتوي على عنصرين هو $C(n,2)$

وهكذا. إذن, $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)$ هو عدد جميع المجموعات الجزئية من مجموعة عدد عناصرها n. وبهذا يكون

$$\sum_{k=0}^{n} C(n,k) = 2^n$$

برهان جبري: باستخدام مبرهنة ذات الحدين لإيجاد مفكوك $2^n = (1+1)^n$ نجد

$$\begin{aligned} 2^n &= C(n,0)1^n \times 1^0 + C(n,1) \times 1^{n-1} \times 1^1 + \cdots + C(n,n) \times 1^0 \times 1^n \\ &= C(n,0) + C(n,1) + \cdots + C(n,n) = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) \end{aligned}$$

مجموع أعمدة مثلث باسكال[Column-Sum of Pascal Triangle]

بالنظر إلى مثلث باسكال (كصفوف وأعمدة) نجد على سبيل المثال, أن مجموع أعداد العمود الثاني من الصف 0 إلى الصف 6 هو

$$1+3+6+10+15 = 35$$

وهذا المجموع هو العدد الواقع في الصف السابع والعمود الثالث. بصورة عامة لدينا المتطابقة التالية لمجموع عناصر أعمدة مثلث باسكال والتي يمكن برهانها بطريقة الاستقراء الرياضي على عدد الصفوف n، ولهذا لن نقدم برهاناً لها:

مجموع عناصر عمود r من أعمدة مثلث باسكال من الصف 0 إلى الصف n يساوي العدد الواقع في الصف $n+1$ والعمود $r+1$. أي أن

$$\sum_{k=0}^{n} C(k,r) = C(n+1,r+1).$$

مجموع أقطار مثلث باسكال[Diagonal-Sum of Pascal Triangle]

يمكن النظر إلى العديد من أقطار مثلث باسكال. نقدم هنا متطابقة لأحد هذه الأقطار.

القطر الجنوبي الشرقي [Southeast Diagonal]

القطر الجنوبي الشرقي لمثلث باسكال هو القطر الذي يبدأ من العنصر العلوي الأيسر والمتجه إلى العنصر السفلي الأيمن. إذا نظرنا إلى مثلث باسكال نرى أن مجموع عناصر القطر الجنوبي الشرقي من الصف الثالث $(n = 2)$والعمود الأول $(k = 0)$إلى الصف السابع والعمود الخامس هو

n	$C(n,0)$	$C(n,1)$	$C(n,2)$	$C(n,3)$	$C(n,4)$
2	1				
3		3			
4			6		
5				10	
6					15
7					35

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$$

وهذا المجموعهو العدد الواقع في الصف الثامن $(n = 7)$والعمود الخامس $(k = 4)$. وبصورة عامة لدينا المتطابقة التالية:

مجموع أول $n + 1$عنصراً من عناصر القطر الجنوبي الشرقي من الصف rوالعمود 0في مثلث باسكال يساوي العدد الواقع في الصف $r + n + 1$والعمود n(العدد الواقع مباشرة أسفل العدد الأخير في القطر). أي أن

$$\sum_{k=0}^{n} C(r+k,k) = C(r+n+1,n).$$

برهان جبري: يمكن برهان هذه المتطابقة باستخدام خاصيتي التماثل ومجموع

أعمدة مثلث باسكال.فمن خاصية التماثل لدينا

$$C(r+k,k) = C(r+k,r+k-k) = C(r+k,r)$$

ولذا فإن $\sum_{k=0}^{n} C(r+k,k) = \sum_{k=0}^{n} C(r+k,r)$.

ولكن من متطابقة مجموع الأعمدة لدينا $\sum_{k=0}^{n} C(r+k,r) = C(r+n+1,r)$.

ومن خاصية التماثل مرة أخرى لدينا $C(r+n+1,r) = C(r+n+1,n)$.

وبالتالي نحصل على المتطابقة المطلوبة $\sum_{k=0}^{n} C(r+k,k) = C(r+n+1,n)$.

نقدم مزيداً من متطابقات معاملات ذات الحدين المشهورة.

متطابقةڤـــاندرموند [Vandermond`s Identity]

إذا كانت m , n , r أعداداً صحيحة غير سالبة بحث $r \leq m+n$ فإن

$$C(m+n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$$

برهان تركيبي: لنفرض أن A و B مجموعتان منفصلتان حيث $|A| = m$ و $|B| = n$. عندئذ, عدد طرق اختيار r عنصراًمن عناصر $A \cup B$ هو $C(m+n,r)$.

ومن ناحية أخرى, يمكن اختيار r من عناصر $A \cup B$ على النحو التالي:

نختار k من عناصر B و $r-k$ من عناصر A حيث $0 \leq k \leq r$. عدد طرق هذا الاختيار هو $C(n,k)C(m,r-k)$. إذن, عدد طرق اختيار r من عناصر $A \cup B$

هو $\sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$. وذلك هو مجموع عدد طرق الاختيار لحالات عدد ما k . وبهذا يكون $C(m+n,r) = \sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$.

برهان جبري: لاحظ أن $C(m+n,r)$ هو معامل x^r في مفكوك $(1+x)^{m+n}$ وأن معامل $\sum_{k=0}^{r} C(m,r-k)C(n,k)$ هو معامل x^r في مفكوك $(x+1)^m(1+x)^n$. وبما أن $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n$ فإننا نحصل على المطلوب.

متطابقة الامتصاص [Absorption Identity]

إذا كان $0 \le k \le n$ فإن $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$.

برهان تركيبي: لنفرض أننا نريد اختيار لجنة مكونة من k شخصاً من مجموعة أشخاص عددهم n ونعين لها رئيساً.يمكن اختيار اللجنة بعدد من الطرق يساوي $C(n,k)$.وبعد ذلك نختار رئيساً من بين أعضاء اللجنة وعددهم k بعدد من الطرق يساوي k . إذن, عدد اللجان الممكنة هو $kC(n,k)$.

أو يمكن اختيار رئيس اللجنة أولاًبعدد من الطرق يساوي n ومن ثم نختار $k-1$ عضواً من بين $n-1$ شخصاً بعدد من الطرق يساوي $C(n-1,k-1)$. إذن, $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$.

برهان جبري:

$$kC(n,k) = \frac{k \times n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(k-1)!(n-k)!}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = nC(n-1,k-1)$$

متطابقة مضرب الهوكي[Hockey Stick Identity]

إذا كان k و n عددين صحيحين حيث $0 \le k \le n$ فإن

$$C(k,k) + C(k+1,k) + \cdots + C(n,k) = C(n+1,k+1)$$

برهان تركيبي: الطرف الأيمن هو عدد طرق اختيار $k+1$ من أعداد المجموعة $A = \{1,2,3,\ldots,n+1\}$. سنبرهن الآن أن الطرف الأيسر هو أيضاً عدد طرق اختيار $k+1$ من أعداد المجموعة حسباختيار أصغر هذه الأعداد.

عدد اختيار $k+1$ من أعداد A بحيث يكون 1 هو أصغر هذه الأعداد هو عدد اختيار k من الأعداد من المجموعة $\{2,3,\ldots,n+1\}$ وهذا يساوي $C(n,k)$.

عدد اختيار $k+1$ من أعداد A بحيث يكون 2 هو أصغر هذه الأعداد هو عدد اختيار k من الأعداد من المجموعة $\{3,4,\ldots,n+1\}$ وهذا يساوي $C(n-1,k)$.

وهكذا. لاحظ أن $C(k,k)$ هو عدد اختيار $k+1$ من أعداد A بحيث يكون $n-k$ هو أصغر هذه الأعداد. الآن, استناداً إلى مبدأ الجمع يكون الطرف الأيسر هو عدد طرق اختيار $k+1$ من أعداد المجموعة A ومن ثم فهو يساوي الطرف الأيمن.

برهان جبري: من متطابقة باسكال نعلم أن

$$C(n+1,k) = C(n,k-1) + C(n,k)$$

أي أن

$$C(n,k-1) = C(n+1,k) - C(n,k)$$

من ذلك نرى أن الطرف الأيسر يساوي

$$\begin{aligned} &C(k,k) + C(k+2,k+1) - C(k+1,k+1) \\ &\quad + C(k+3,k+1) - C(k+2,k+1) + \cdots \\ &\quad + C(n+1,k+1) - C(n,k+1) \\ &= C(n+1,k+1) \end{aligned}$$

ملحوظة

جاءت تسمية هذه المتطابقة من أنه لو تتبعنا أعداد المجموع في الطرف الأيسر وناتج المجموع في الطرف الأيمن على مثلث باسكال لوجدنا أن هذه الأعداد تكون شكلاً يشبه مضرب لعبة الهوكي.

مسائل محلولة

(١) جد الحد التاسع في مفكوك $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{21}$.

(٢) جد معامل x^{12} في مفكوك $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{12}$.

(٣) جد الحد الثابت في مفكوك $\left(x + \dfrac{2}{x^2}\right)^{15}$.

(٤) جد الحد الأوسط في مفكوك $\left(2x^2 - \dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

(٥) جد معامل x^5 في مفكوك $(x-2)(x^2+1)^8$.

(٦) إذا كان $(1+rx)^n = 1 - 12x + 60x^2 - \cdots$ فجد القيمتين n و r.

(٧) أثبت أن

$$C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - C(n,3) + \cdots + (-1)^n C(n,n) = 0$$

(٨) احسب قيمة $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^k$.

(٩) أثبت أن $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}$.

(١٠) ما قيمة المقدار $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)C(n,k)$؟

(١١) مامعامل $x^3y^5z^4$ في مفكوك $(x+y+z)^{12}$؟

(١٢) أثبت أن

$$\begin{aligned}2\times 1\times C(n,2) + 3\times 2\times C(n,3) + 4\times 3\times C(n,4) + \\ \cdots + n(n-1)C(n,n) = n\big(n-1\big)2^{n-2}\end{aligned}$$

(١٣) [AIME 1986] إذا كتبنا كثيرة الحدود

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$$

على الصورة $a_0+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_{16}y^{16}+a_{17}y^{17}$ حيث $y=x+1$, a_i أعداد ثابتة فما قيمة a_2 ؟

(١٤) [AIME 1991] باستخدام مبرهنة ذات الحدين لفك المقدار $(1+0.2)^{1000}$ نجد أن

$$\begin{aligned}(1+0.2)^{1000} &= C(1000,0)(0.2)^0+C(1000,0.2)^1\\ &+C(1000,2)(0.2)^2+\cdots+C(1000,1000)(0.2)^{1000}\\ &= A_0+A_1+A_2+\cdots+A_{1000}\end{aligned}$$

حيث $A_k=C(1000,k)(0.2)^k$, $k=0,1,\cdots,1000$. ما قيمة k التي تجعل A_k أكبر ما يمكن ؟

(١٥) [AIME 1993] لتكن $P_0(x)=x^3+313x^2-77x-8$ ولتكن $P_n(x)=P_{n-1}(x-n)$ لكل $n\geq 1$.

مامعامل x في كثيرة الحدود $P_{20}(x)$ ؟

(١٦) [AIME 1996] جد أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يحتوي المفكوك $(xy-3x-7y-21)^n$ على 1996 حداً مختلفاً على الأقل.

(١٧) [AIME 2000 II] لنفرض أن

$$\frac{1}{2!\times 17!}+\frac{1}{3!\times 16!}+\frac{1}{4!\times 15!}+\frac{1}{6!\times 13!}+\frac{1}{7!\times 12!}+\frac{1}{8!\times 11!}+\frac{1}{9!\times 10!}=\frac{n}{1!\times 18!}$$

ماأكبر عدد صحيح أصغر من $\frac{n}{100}$ ؟

(١٨) [MAΘ 1992] ما قيمة $\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{i} C(i,k)$ ؟

(١٩) [MAΘ 1992] جد قيمة المجموع

$$44C(45,0) + 43C(45,1) + 42C(45,2) + \cdots + 0C(45,44) - C(45,45)$$

(٢٠) جد مجموع معاملات حدود المفكوك $(2a - b + 3c - 5d)^{10}$.

(٢١) إذا كان n عدداً زوجياً فأثبت أن

$$C(n,1) + 3C(n,3) + 5C(n,5) + \cdots + (n-1)C(n,n-1) = n2^{n-2}$$

(٢٢) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,k-1) = C(2n,n-1)$.

(٢٣) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} k^2C(n,k) = n(n+1)2^{n-2}$.

(٢٤) [AIME 1992] ماالصف من صفوف مثلث باسكال الذي يحتوي على ثلاثة أعداد متتالية النسبة بينها $3 : 4 : 5$؟

(٢٥) جد قيمة $\dfrac{\sum_{i=k}^{n} iC(i-1,k-1)}{C(n,k)}$.

(٢٦) أثبت أن $\sum_{i=0}^{k} C(n,i)C(n-i,k-i) = 2^kC(n,k)$.

(٢٧) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,n-k+1) = C(2n,n+1)$.

(٢٨) جد قيمة $\sum_{k=1}^{20} C(20,k)C(20,k-1)$ [إرشاد: استخدم المسألة (٢٧)].

(٢٩) جد قيمة $\sum_{k=0}^{20} C(50,k)C(50-k,20-k)$.

(٣٠) إذا كان $\frac{4}{5} = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{C(n,k)}{C(n,k)+C(n,k+1)}\right]^3$ فما قيمة n ؟

حلول المسائل

(١) جد الحد التاسع في مفكوك $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{21}$.

الحل

الحد العام في المفكوك هو $T_{k+1} = C(21,k)(2x^2)^{21-k}\left(\frac{-1}{x}\right)^k$.

ولإيجاد الحد التاسع نضع $k = 8$ فنجد أن

$$T_9 = C(21,8)(2x^2)^{13}\left(\frac{-1}{x}\right)^8 = 2^{13}C(21,8)x^{26}\times x^{-8} = 2^{13}C(21,8)x^{18}.$$

(٢) جد معامل x^{12} في مفكوك $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{12}$.

الحل

الحد العام في المفكوك هو

$$T_{k+1} = C(12,k)(2x^2)^{12-k}\left(\frac{-1}{x}\right)^k = (-1)^k C(12,k)\times 2^{12-k}x^{24-3k}.$$

ولذا فإن $24 - 3k = 12$. أي أن $k = 4$. إذن, معامل x^{12} هو

$$T_5 = C(12,4)\times 2^8 = 126720.$$

(٣) جد الحد الثابت في مفكوك $\left(x + \frac{2}{x^2}\right)^{15}$.

الحل

الحد العام في المفكوك هو

$$T_{k+1} = C(15,k)x^{15-k}\left(\frac{2}{x^2}\right)^k = C(15,k)\times 2^k x^{15-3k}.$$

لإيجاد الحد الثابت نضع $15 - 3k = 0$. أي أن $k = 5$. إذن, الحد الثابت هو

$T_6 = C(15,5) \times 2^5 = 96096$.

(٤) جد الحد الأوسط في مفكوك $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$.

الحل

عدد الحدود في المفكوك يساوي 11. لذا فإن الحد الأوسط هو الحد السادس. أي

أن $k = 5$. ويكون $T_6 = C(10,5)(2x^2)^5\left(\frac{-1}{x}\right)^5 = -8064x^5$.

(٥) جد معامل x^5 في مفكوك $(x-2)(x^2+1)^8$.

الحل

$$(x+2)(x^2+1)^8 = x(x^2+1)^8 + 2(x^2+1)^8$$

ولذا فإن الحد الذي يحتوي على x^5 هو مجموع الحد الذي يحتوي x^4 والحد الذي يحتوي x^5 فيالمفكوكين. الآن, $T_{k+1} = C(8,k)(x^2)^k = C(8,k)x^{2k}$. وبوضع $2k = 4$ نجد أن $k = 2$. وبما أن $2k \neq 5$ فنرى عدم وجود حد يحتوي x^5 في المفكوك $2(x^2+1)^8$. إذن, الحد الذي يحتوي x^5 هو فقط T_3 في مفكوك $x(x^2+1)^8$. أي أن هذا الحد هو $C(8,2)x^4 \times x = 28x^5$ ومعامله هو 28 .

(٦) إذا كان $(1+rx)^n = 1 - 12x + 60x^2 - \cdots$ فجد القيمتين n و r .

الحل

من مفكوك ذات الحدين لدينا

$$(1+rx)^n = 1 + nrx + \frac{n(n-1)}{2}r^2x^2 + \cdots$$

وبمقارنة معاملات كثيرتي الحدود نجد أن

$$nr = -12 \qquad (١)$$

$$\frac{n(n-1)}{2}r^2 = 60 \qquad (٢)$$

بإيجاد قيمة r من المعادلة الأولى والتعويض عنها في المعادلة الثانية نجد أن

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{2} \times \frac{144}{n^2} &= 60 \\ 72(n-1) &= 60n \\ 72n - 72 &= 60n \\ 12n &= 72 \\ n &= 6 \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن $r = \dfrac{-12}{n} = -2$. إذن, $n = 6$ و $r = -2$.

(٧) أثبت أن

$$C(n,0) - C(n,1) + C(n,2) - C(n,3) + \cdots + (-1)^n C(n,n) = 0$$

الحل

باستخدام مفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$ عندما يكون $x = 1$ و $y = -1$ نجد أن

$$0 = (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k) 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n,k) .$$

(٨) احسب قيمة $\sum_{k=0}^{n} C(n,k) 2^k$.

الحل

لاحظ أن

$$.\ 3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)1^{n-k}2^k = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)2^k$$

(٩) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}$.

حل جبري:

من متطابقة الامتصاص لدينا $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$ ولذا فإن المجموع يساوي

$$nC(n-1,0) + nC(n-1,1) + nC(n-1,2) + \cdots + nC(n-1,n-1)$$
$$= n[C(n-1,0) + C(n-1,1) + \cdots + C(n-1,n-1)]$$
$$= n(1+1)^{n-1} = n2^{n-1}$$

حل تركيبي:

لنفرض أننا نريد اختيار لجنة ومن ثم نعين رئيساً لها من بين أشخاص عددهم n .يمكن اختيار الرئيس أولاً بعدد من الطرق يساوي n ومن ثم نختار اللجنة من بين $n-1$ من الأشخاص بعدد من الطرق يساوي 2^{n-1} (أي شخص إما أن يكون عضواً في اللجنة أو لا يكون). وبهذا فعدد الطرق هو $n2^{n-1}$.

ومن ناحية أخرى, عدد طرق اختيار لجنة مكونة من k عضواً من بين n شخصاً يساوي $C(n,k)$. بعد اختيار اللجنة يمكن اختيار رئيس لها بعدد من الطرق يساوي k . إذن, عدد طرق اختيار لجنة مكونة من k عضواً ومن ثم اختيار رئيس لها يساوي $kC(n,k)$. وبهذا يكون عدد اختيار جميع اللجان ورئيس لكل منها هو $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k)$.إذن, $\sum_{k=1}^{n} kC(n,k) = n2^{n-1}$.

(١٠) ما قيمة المقدار $\sum_{k=0}^{n} (k+1)C(n,k)$ ؟

الحل

لاحظ أن

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)C(n,k) = \sum_{k=0}^{n}C(n,k) + \sum_{k=1}^{n}kC(n,k) = 2^n + n2^{n-1}.$$

وذلك استناداً إلى متطابقة مجموع صفوف مثلث باسكال والمسألة(٩).

(١١) مامعامل $x^3y^5z^4$ في مفكوك $(x+y+z)^{12}$؟

الحل

بوضع $a = x + y$ نبحث أولاً عن الحد الذي يحتوي z^4 في مفكوك $(a+z)^{12}$ وهو $C(12,4)a^8z^4$. الآن, الحد الذي يحتوي x^3y^5 في مفكوك $a^8 = (x+y)^8$ هو $C(8,5)x^3y^5$. إذن، معامل $x^3y^5z^4$ هو

$$C(12,4)\times C(8,5) = \frac{12!}{3!\times 4!\times 5!}.$$

(١٢) أثبت أن

$$2\times 1\times C(n,2) + 3\times 2\times C(n,3) + 4\times 3\times C(n,4) + \cdots + n(n-1)C(n,n) = n\big(n-1\big)2^{n-2}$$

الحل

بتطبيق المتطابقة $kC(n,k) = nC(n-1,k-1)$ مرتين نجد أن

$$\begin{aligned}
2\times 1\times C(n,2) &= nC(n-1,1) = n(n-1)C(n-2,0)\\
3\times 2\times C(n,3) &= 2nC(n-1,2) = n(n-1)C(n-2,1)\\
4\times 3\times C(n,4) &= 3nC(n-1,3) = n(n-1)C(n-2,2)\\
&\vdots\\
n(n-1)C(n,n) &= n(n-1)C(n-1,n-1) = n(n-1)C(n-2,n-2)
\end{aligned}$$

من ذلك نرى أن الطرف الأيسر من المتطابقة يساوي

$$n(n-1)[C(n-2,0)+C(n-2,1)+\cdots+C(n-2,n-2)]$$
$$=n(n-1)2^{n-2}$$

(١٣) [AIME 1991] باستخدام مبرهنة ذات الحدين لفك المقدار $(1+0.2)^{1000}$ نجد أن

$$\begin{aligned}(1+0.2)^{1000} &= C(1000,0)(0.2)^0+C(1000,0.2)^1\\ &\quad +C(1000,2)(0.2)^2+\cdots+C(1000,1000)(0.2)^{1000}\\ &= A_0+A_1+A_2+\cdots+A_{1000}\end{aligned}$$

حيث $A_k=C(1000,k)(0.2)^k$, $k=0,1,\cdots,1000$.

ما قيمة k التي تجعل A_k أكبر ما يمكن ؟

الحل

لاحظ أننا إذا وجدنا أكبر قيمة للعدد k التي تجعل A_k أكبر ما يمكن فإن جميع القيم بعد A_k تكون أصغر من A_k . إذن, نريد إيجاد أكبر قيمة تحقق

$$\left(\frac{1}{5}\right)^k C(1000,k)>\left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}C(1000,k+1)$$
$$\frac{1000!}{k!(1000-k)!}>\frac{1000!}{5(k+1)!(1000-k-1)!}$$
$$\frac{1}{k!(1000-k)(1000-k-1)!}>\frac{1}{5(k+1)k!(1000-k-1)!}$$
$$\frac{1}{1000-k}>\frac{1}{5(k+1)}$$
$$5k+5>1000-k$$
$$k>165.8$$

وبما أن k عدد صحيح فنجد أن أكبر قيمة للعدد k تحقق المطلوب هي 166 .

(١٤) [AIME 1986] إذا كتبنا كثيرة الحدود

$$1-x+x^2-x^3+\cdots+x^{16}-x^{17}$$

على الصورة $a_0 + a_1y + a_2y^2 + \cdots + a_{16}y^{16} + a_{17}y^{17}$
حيث $y = x + 1$, a_i أعداد ثابتة فما قيمة a_2؟

الحل

بما أن $x = y - 1$ فإن.

$$\begin{aligned} &1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + x^{16} - x^{17} \\ &\quad = 1 - (y-1) + (y-1)^2 - (y-1)^3 + \cdots - (y-1)^{17} \\ &\quad = 1 + (1-y) + (1-y)^2 + (1-y)^3 + \cdots + (1-y)^{17} \end{aligned}$$

وبهذايكون المطلوب إيجاد معامل y^2 لكل من هذه الحدود ثم جمع هذه المعاملات.

استناداً إلى مبرهنة ذات الحدين نجد أن مجموع هذه المعاملات هو

$$C(2,2) + C(3,2) + \cdots + C(17,2)$$

واستناداً إلى متطابقة مضرب الهوكي نجد أن هذا العدد يساوي

$$C(18,3) = \frac{18!}{3! \times 15!} = 816 .$$

(١٥) [AIME 1996] جد أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يحتوي المفكوك $(xy - 3x + 7y - 21)^n$ على 1996 حداً مختلفاً على الأقل.

الحل

لاحظ أولاً أن

$$xy - 3x + 7y - 21 = x(y-3) + 7(y-3) = (y-3)(x+7)$$

من ذلك يكون

$$\left(xy - 3x + 7y - 21\right)^n = (y-3)^n(x+7)^n$$

كل من مفكوكي $(y-3)^n$ و $(x+7)^n$ يحتوي على $n+1$ من الحدودالمختلفة. ومن ثم فحاصل ضربهما يحتوي على $(n+1)^2$ من الحدود. جميع هذه الحدود

مختلفة ما عدا الحدين الثابتين. ولذا يكون المطلوب هو إيجاد أصغرعدد صحيح موجب n يحقق $1996 \geq 1 - (n+1)^2$. أي $1997 \geq (n+1)^2$. أصغر مربع بعد 1997 هو $45^2 = 2005$. إذن, $45 = n + 1$. وبهذا يكون $n = 44$.

(١٦) [AIME 1993] لتكن $P_0(x) = x^3 + 313x^2 - 77x - 8$ ولتكن $P_n(x) = P_{n-1}(x-n)$ لكل $n \geq 1$. ما قيمة معامل x في كثيرة الحدود $P_{20}(x)$ ؟

الحل

لاحظ أولاً أن

$$\begin{aligned} P_{20}(x) &= P_{19}(x-20) \\ &= P_{18}\big(x-(20+19)\big) \\ &= P_{17}\big(x-(20+19+18)\big) \\ &\vdots \\ &= P_0\big(x-(20+19+18+\cdots+2+1)\big) \end{aligned}$$

ولكن $210 = \frac{20 \times 21}{2} = 20 + 19 + 18 + \cdots + 2 + 1$. إذن, $P_{20}(X) = P_0(X - 210)$. أي أن

$$P_{20}(x) = (x-210)^3 + 313(x-210)^2 - 77(x-210) - 8$$

باستخدام مبرهنة ذات الحدين لدينا:

معامل x في مفكوك $(x-210)^3$ يساوي $C(3,1)(210)^2 = 132300$. معامل x في مفكوك $313(x-210)^2$ يساوي $-131460 = -313C(2,1) \times 210$.

معامل x في المقدار $-77(x-210)$ هو -77.

إذن, معامل x في $P_{20}(x)$ يساوي $763 = 132300 - 131460 - 77$.

(١٧) [AIME 2000 II] لنفرض أن

$$\frac{1}{2!\times 17!}+\frac{1}{3!\times 16!}+\frac{1}{4!\times 15!}+\frac{1}{6!\times 13!}+\frac{1}{7!\times 12!}+\frac{1}{8!\times 11!}+\frac{1}{9!\times 10!}=\frac{N}{1!\times 18!}$$

ماأكبر عدد صحيح أصغر من $\frac{N}{100}$؟

الحل

بضرب طرفي المعادلة بالعدد $19!$ نحصل على

$$C(19,2)+C(19,3)+\cdots+C(19,8)+C(19,9)=19N$$

وبما أن $\sum_{n=0}^{19} C(19,n)=2^{19}$ وأن $C(19,n)=C(19,19-n)$ نجد أن

$\sum_{n=0}^{9} C(19,n)=\frac{2^{19}}{2}=2^{18}$. إذن,

$$19N=2^{18}-C(19,1)-C(19,0)=2^{18}-19-1=262124 .$$

وبهذا فإن $N=\frac{262124}{19}=13796$ وإن $\frac{N}{100}=137.96$. وبهذا يكون 137 هو أكبر عدد صحيح أصغر من $\frac{N}{100}$.

(١٨) [MAΘ 1992] ما قيمة $\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{i} C(i,k)$؟

الحل

لاحظ أولاً أن

$$\sum_{k=1}^{i} C(i,k)=C(i,1)+C(i,2)+\cdots+C(i,i)=2^{i}-1 .$$

إذن,

$$.\sum_{i=1}^{10}\sum_{k=1}^{i}C(i,k)=\sum_{i=1}^{10}(2^i-1)=2046-10=2036$$

(١٩) [MAΘ 1992] جد قيمة المجموع

$$44C(45,0)+43C(45,1)+42C(45,2)+\cdots+0C(45,44)-C(45,45)$$

الحل

لاحظ أولاً أن

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k-1)C(n,k)=\sum_{k=0}^{n}(n-k)C(n,k)-\sum_{k=0}^{n}C(n,k)$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(n-k)C(n,n-k)-2^n=\sum_{j=0}^{n}jC(n,j)-2^n \quad (\text{بوضع } j=n-k)$$
$$=n2^{n-1}-2^n$$

الآن, بوضع $n=45$ نجد أن $n2^{n-1}-2^n=45\times 2^{44}-2^{45}=43\times 2^{44}$.

(٢٠) جد مجموع معاملات حدود المفكوك $(2a-b+3c-5d)^{10}$.

الحل

لاحظ أن كل حد من حدود المفكوك هو عبارة عن حاصل ضرب عدد ببعض قوى a, b, c, d. ولإيجاد كل من معاملات هذه الحدود نضع $a=b=c=d=1$. وبهذا تكون الصيغة التي نحصل عليها هي مجموع المعاملات.أي أن مجموع المعاملات هو $1=(-1)^{10}=(2-1+3-5)^{10}$.

(٢١) إذا كان n عدداً زوجياً فأثبت أن

$$C(n,1)+3C(n,3)+5C(n,5)+\cdots+(n-1)C(n,n-1)=n2^{n-2}$$

الحل

لنفرض أن

$$S = C(n,1) + 3C(n,3) + 5C(n,5) + \cdots + (n-1)C(n,n-1)$$

باستخدام المتطابقة $C(n,k) = C(n,n-k)$ نجد أن

$$S = (n-1)C(n,1) + (n-3)C(n,3) + \cdots + 1C(n,1)$$

بالجمع نجد أن

$$2S = n[C(n,1) + C(n,3) + \cdots + C(n,n-1)]$$

وبما أن

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + C(n,3) + \cdots + C(n,n) = 2^n$$

فإننا نجد أن

$$C(n,1) + C(n,3) + \cdots + C(n,n-1) = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$$

إذن, $2S = n2^{n-1}$. وبهذا يكون $S = n2^{n-2}$:

لاحظ أيضاً أن حل هذه المسألة يثبت أيضاًالمتطابقة:

$$2C(n,2) + 4C(n,4) + 6(n,6) + \cdots + nC(n,n) = n2^{n-2}$$

عندما يكون n زوجياً.

(٢٢) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,k-1) = C(2n,n-1)$.

الحل

باستخدام المتطابقة $C(n,k) = C(n,n-k)$ يكون المطلوب إثبات أن

$$\sum_{k=1}^{n} C(n,n-k)C(n,k-1) = C(2n,n-1)$$

نقدم برهاناً تركيبياً لهذه المتطابقة.

عدد طرق اختيار لجنة مكونة من $n-1$ عضواً من بين n من الأطباء و n من المرضين يساوي $C(2n,n-1)$. ومن ناحية أخرى يمكن تكوين هذه اللجنة باختيار $n-k$ طبيباً و $k-1$ ممرضاً بعدد من الطرق $C(n,n-k)C(n,k-1)$ حيث $k=1,\cdots,n$. وبالجمع نجد أن هذا هو عدد طرق اختيار $n-1$ عضواً من بين $2n$ شخصاً وهو الطرف الأيمن.

(٢٣) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} k^2C(n,k) = n(n+1)2^{n-2}$.

الحل

$$\sum_{k=1}^{n} k^2C(n,k) = \sum_{k=0}^{n} k^2C(n,k)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (k^2-k)C(n,k) + \sum_{k=0}^{n} kC(n,k)$$
$$= \sum_{k=2}^{n-2} \frac{n(n-1)}{k(k-1)}(k^2-k)C(n-2,k-2) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n}{k} \times kC(n-1,k-1)$$
$$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n-2} C(n-2,k-2) + n\sum_{k=1}^{n-1} C(n-1,k-1)$$
$$= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$$

(٢٤) [AIME 1992] ماالصف من صفوف مثلث باسكال الذي يحتوي على ثلاثة أعداد متتالية النسبة بينها $3:4:5$ ؟

الحل

لنفرض أن رقم الصف الذي يحقق الشرط هو n . لاحظ أن أعداد صف مثلث

باسكال هي $C(n,0), C(n,1), C(n,2), \cdots, C(n,n)$.

لنفرض إذن, أن الثلاثة أعداد المتتالية هي $C(n,k)$, $C(n,k+1)$, $C(n,k+2)$.

من ذلك نرى أن:

$$\frac{3}{4} = \frac{C(n,k)}{C(n,k+1)} \quad \text{و} \quad \frac{4}{5} = \frac{C(n,k+1)}{C(n,k+2)}.$$

أي أن:

$$\frac{3}{4} = \frac{k+1}{n-k} \quad \text{أو} \quad \frac{4}{5} = \frac{k+2}{n-k-1}.$$

وبحل هاتين المعادلتين نجد أن $n = 62$ و $k = 26$. وبهذا يكون الصف هو الصف 62 والأعداد هي $C(62,26)$, $C(62,27)$, $C(62,28)$.

(٢٥) جد قيمة $\dfrac{\sum_{i=k}^{n} iC(i-1,k-1)}{C(n,k)}$.

الحل

لاحظ أولاً استناداً إلى متطابقة الامتصاص

$iC(i-1,k-1) = kC(i,k)$. ومن ذلك نجد أن

$$\sum_{i=k}^{n} \frac{iC(i-1,k-1)}{C(n,k)} = \frac{i = \sum_{i=k}^{n} kC(i,k)}{C(n,k)}$$

ولكن باستخدام متطابقة مضرب الهوكي لدينا $\sum_{i=k}^{n} C(i,k) = C(n+1,k+1)$.

إذن, $\dfrac{k(n+1)}{(k+1)} = \dfrac{kC(n+1,k+1)}{C(n,k)} = \dfrac{\sum_{i=k}^{n} kC(i,k)}{C(n,k)}$.

(٢٦) أثبت أن $\sum_{i=0}^{k} C(n,i)C(n-i,k-i) = 2^k C(n,k)$.

الحل

الطرف الأيمن هو عدد طرق اختيار k كرة من بين n من الكرات ومن ثم تلوين كل من هذه الكرات بأحد اللونين الأبيض أو الأصفر. ومن ناحية أخرى يمكن إنجاز ذلك باختيار i من الكرات وتلوينها باللون الأبيض بعدد من الطرق يساوي $C(n,i)$ ومن ثم اختيار $k-i$ من الكرات من $n-i$ كرة وتلوينها باللون الأصفر بعدد من الطرق $C(n-i,k-i)$. إذن, عدد طرق اختيار k كرة من بين n كرة وتلوينها باللون الأبيض أو الأصفر يساوي $\sum_{i=0}^{k} C(n,i)C(n-i,k-i)$ وهذا هو الطرف الأيسر من المتطابقة.

(٢٧) أثبت أن $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,n-k+1) = C(2n,n+1)$.

الحل

لاحظ أن الطرف الأيمن هو عدد طرق اختيار $n+1$ عنصراً من مجموعة مكونة من $2n$ عنصراً. ويمكن إنجاز ذلك بتقسيم $2n$ إلى مجموعتين عدد عناصر كل منها يساوي n . ومن ثم فإن $C(n,k)$ هو عدد طرق اختيار k عنصراً من n عنصراًوأن $C(n,n-k+1)$ هو عدد طرق اختيار باقي العناصر (عددها $n-k+1$) من n عنصراً. ولذا فعدد اختيار $n+1$ عنصراً من $2n$ من العناصر هو أيضاً $\sum_{k=1}^{n} C(n,k)C(n,n-k+1)$ وهو الطرف الأيسر من المتطابقة.

لاحظ أيضاً أنه يمكن الحصول على هذه المتطابقة من متطابقة ڤـــاندرموند بوضع

$m=n$ و $r=n+1$

(٢٨) جد قيمة $\sum_{k=1}^{20} C(20,k)C(20,k-1)$ [إرشاد: استخدم المسألة (٢٧)].

الحل

بما أن $C(20,k-1)=C(20,20-k+1)$ فنجد باستخدام المسألة (٢٧):

$$\sum_{k=1}^{20} C(20,k)C(20,k-1)=\sum_{k=1}^{20} C(20,k)C(20,20-k+1)=C(40,21).$$

(٢٩) جد قيمة $\sum_{k=0}^{20} C(50,k)C(50-k,20-k)$.

الحل

لاحظ أولاً أن

$C(n,m)C(m,k)=C(n,k)C(n-k,m-k)$ لكل أعداد صحيحة غير سالبة $k\le m\le n$ (أثبت ذلك). ولذا فإن

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{20} C(50,k)C(50-k,20-k) &= \sum_{k=0}^{20} C(50,20)C(20,k)\\ &= C(50,20)\sum_{k=0}^{20} C(20,k)=C(50,2)\times 2^{20}\end{aligned}$$

(٣٠) إذا كان $\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{C(n,k)}{C(n,k)+C(n,k+1)}\right]^3=\frac{4}{5}$ فما قيمة n؟

الحل

لاحظ أولاً أن $C(n,k)+C(n,k+1)=C(n+1,k+1)$. ولذا فإن

$$\frac{C(n,k)}{C(n,k)+C(n,k+1)} = \frac{C(n,k)}{C(n+1,k+1)} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}}$$

$$= \frac{n!(k+1)!}{k!(n+1)!} = \frac{k+1}{n+1}$$

من ذلك نجد أن

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{C(n,k)}{C(n,k)+C(n,k+1)}\right]^3 = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k+1}{n+1}\right)^3 = \frac{1}{(n+1)^3}\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)^3$$

$$= \frac{1}{(n+1)^3}[1^3+2^3+\cdots+n^3] = \frac{1}{(n+1)^3}\times\frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n^2}{4(n+1)}$$

إذن,

$$\frac{n^2}{4(n+1)} = \frac{4}{5}$$

$$5n^2-16n-16 = 0$$

$$(5n+4)(n-4) = 0$$

وبما أن n عدد صحيح فنجد أن $n = 4$.

مسائل غير محلولة

(١) ما الحد الرابع في مفكوك $\left(x^2+\frac{5}{x}\right)^9$؟

(أ) $7500x^4$ (ب) $9500x^9$ (ج) $10500x^9$ (د) $12500x^3$

(٢) ما معامل x^3 في مفكوك $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$؟

(أ) -4320 (ب) -5200 (ج) 6320 (د) 7200

(٣) ما الحد الثابت في مفكوك $\left(3x-\frac{2}{x^2}\right)^{15}$؟

(أ) $-2^5\times 3^{10}C(16,5)$ (ب) $-2^6\times 3^9C(16,6)$

(ج) $-2^7\times 3^8C(16,7)$ (د) $-2^8\times 3^5C(16,8)$

(٤) ما معامل الحد $\frac{1}{x}$ في مفكوك $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^{10}$؟

(أ) -780 (ب) -820 (ج) -920 (د) -960

(٥) ما معامل x^6 في مفكوك $(2-x)(3x+1)^9$؟

(أ) 81854 (ب) 91854 (ج) 92800 (د) 94850

(٦) إذا كان معامل x^3 في مفكوك $\left(2x+\frac{1}{rx^2}\right)^9$ يساوي 288 فما مجموع القيم الممكنة للعدد r؟

(أ) -4 (ب) 0 (ج) 4 (د) 8

(٧) ما مجموع معاملات مفكوك $(x^3+2x^2+3x-7)^{100}$؟

(أ) -7 (ب) -2 (ج) -1 (د) 1

(٨) إذا كان $(1+rx)^n = 1 - 4x + \frac{15}{2}x^2 + \cdots$ فما قيمة $r+n$؟

(أ) 64 (ب) 63 (ج) $\frac{65}{4}$ (د) $\frac{63}{4}$

(٩) إذا كان الحد الثابت في مفكوك $\left(x^3 + \frac{r}{x^2}\right)^8$ يساوي الحد الثابت في مفكوك $\left(x^3 + \frac{r}{x^3}\right)^4$ فما مجموع القيم الممكنة للعد r؟

(أ) $\frac{12}{35}$ (ب) 0 (ج) $\frac{35}{12}$ (د) $\frac{6}{35}$

(١٠) إذا كان معامل الحد T_{2k+4} يساوي معامل الحد T_{k-2} في مفكوك $(1+x)^{18}$ فما قيمة k؟

(أ) 3 (ب) 6 (ج) 9 (د) 12

(١١) [AHSME 1950] ما عدد الحدود في مفكوك $[(a+3b)^2(a-3b)^2]^{15}$؟

(أ) 15 (ب) 30 (ج) 31 (د) 32

(١٢) ما قيمة $2C(n,2) + n^2$؟

(أ) $C(2n,2)$ (ب) $C(n+2,2)$ (ج) $C(4n,4)$ (د) $C(4n,2)$

(١٣) ما قيمة $\frac{1}{2}C(2n+2,n+1) - C(2n,n)$؟

(أ) $C(2n,n+2)$ (ب) $C(2n,n)$

(ج) $C(2n,n+1)$ (د) $C(n+1,n)$

(١٤) ما قيمة المجموع $\sum_{k=3}^{n} C(k,3)$؟

(أ) $C(n+2,5)$ (ب) $C(n+2,4)$

(ج) $C(n+1,4)$ (د) $C(n+1,5)$

(١٥) ما معامل x^8 في مفكوك $(x^3+x^2+1)^{12}$؟

(أ) 1100 (ب) 1135 (ج) 1155 (د) 1165

(١٦) ما قيمة المجموع $C(k,0)+C(k+1,1)+\cdots+C(n,n-k)$؟

(أ) $C(n+1,n-k)$ (ب) $C(n,n-k)$

(ج) $C(n+2,n-k)$ (د) $C(n+1,n-k-1)$

(١٧) ما قيمة المجموع $C(m,0)+C(m+1,1)+\cdots+C(m+j,j)$؟

(أ) $C(m+j+1,j)$ (ب) $C(m+j,j)$

(ج) $C(m+j,j+1)$ (د) $C(m+j+2,j)$

(١٨) ما قيمة المجموع $C(7,0)+5C(7,1)+5^2C(7,2)+\cdots+5^7C(7,7)$؟

(أ) 5^7 (ب) 6^7 (ج) 7^6 (د) 7^7

(١٩) ما قيمة المجموع $C(2n+1,0)+C(2n+1,1)+\cdots+C(2n+1,n)$؟

(أ) 4^n+2 (ب) 4^n+n (ج) 4^n+1 (د) 4^n

(٢٠) ما قيمة المجموع $[C(n,0)]^2+[C(n,1)]^2+\cdots+[C(n,n)]^2$؟

(أ) $[C(n,n-1)]^2$ (ب) $C(n^2,n)$ (ج) 1 (د) $C(2n,n)$

(٢١) ماقيمة المجموع $\sum_{k=0}^{20} C(41,k)$؟

(أ) 2^{20} (ب) 2^{21} (ج) 2^{40} (د) 2^{41}

(٢٢) قيمة المجموع $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ تساوي

(أ) $3!C(n+3,3)$ (ب) $3!C(n+3,4)$

(ج) $6!C(n+3,3)$ (د) $3!C(n+1,4)$

(٢٣) ما قيمة المجموع

$C(25,8)C(15,0)+C(25,7)C(15,1)+\cdots+C(25,0)C(15,8)$ ؟

(أ) $C(40,8)$ (ب) $C(40,7)$ (ج) $C(41,8)$ (د) $C(41,7)$

(٢٤) ما قيمة المجموع $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C(n,i)C(n-i,k-i)$ ؟

(أ) 0 (ب) 2^n (ج) 2^{n-1} (د) 2^{n-2}

(٢٥) إذا كان $2 \le k \le n$ فإن المقدار

$C(n,k)+2C(n,k-1)+C(n,k-2)$ يساوي:

(أ) $C(n+1,k)$ (ب) $C(3n,k)$

(ج) $C(n+2,k)$ (د) $C(n+2,k-1)$

(٢٦) ما قيمة المجموع $[C(n,1)]^2+2[C(n,2)]^2+\cdots+n[C(n,n)]^2$ ؟

(أ) $nC(2n,n)$ (ب) $n^2C(2n,n)$

(ج) $\frac{n}{3}C(2n,n)$ (د) $\frac{n}{2}C(2n,n)$

(٢٧) لكل عدد صحيح موجب n , المقدار $C(3n,n)$ يقبل القسمة على:

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7

(٢٨) [MAΘ 1991] معامل الحد الخالي من y في مفكوك $(xy-2y^{-3})^{16}$ يساوي

(أ) $8C(16,4)$ (ب) $16C(16,4)$ (ج) $8C(16,6)$ (د) $16C(16,6)$

(٢٩) [AIME 2000 I] إذا كان a و b أوليين نسبياً وكان معامل x^2 يساوي معامل x^3 في مفكوك $(ax+b)^{2000}$ فإن $a+b$ يساوي:

(أ) 667 (ب) 668 (ج) 669 (د) 670

(٣٠) [AIME 2001 I]إذا كانت جميع جذور المعادلة

$$x^{2001} + \left(\frac{1}{2} - x\right)^{2001} = 0$$ هي جذور بسيطة فما مجموعها ؟

(أ) 450 (ب) 480 (ج) 500 (د) 520

إجابات المسائل غير المحلولة

(١) ج	(٢) أ	(٣) أ	(٤) د	(٥) ب
(٦) ب	(٧) د	(٨) د	(٩) ب	(١٠) ب
(١١) ج	(١٢) أ	(١٣) ج	(١٤) ج	(١٥) ج
(١٦) أ	(١٧) أ	(١٨) ب	(١٩) د	(٢٠) د
(٢١) ج	(٢٢) ب	(٢٣) أ	(٢٤) أ	(٢٥) ج
(٢٦) د	(٢٧) ب	(٢٨) ب	(٢٩) أ	(٣٠) ج