الفصل الثاني

الأعداد الأولية والمبرهنة الأساسية في الحساب
Primes and The Fundamental Theorem of Arithmetic

عرفنا العدد الأولي p في الفصل الأول على أنه عدد صحيح أكبر من 1 وله قاسمان بالضبط هما 1 و p . وإذا كان العــدد الصحيح غير أولي وأكــبر مــن 1 فنقــول إنه عــدد مؤلف *(composite number)* . أي أن n عــدد مؤلــف إذا استطعنا كتابة n على الصورة $n = ab$ حيث $1 < a, b < n$.

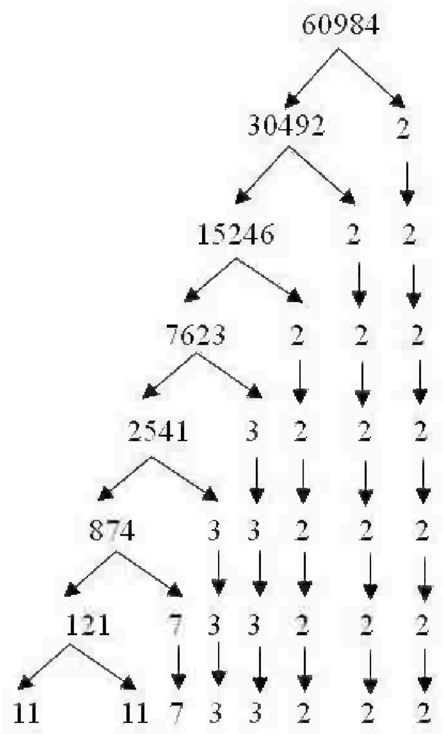
نقدم الآن بعض الحقائق المهمة التي تتعلق بالأعداد الأولية.

(١) إحدى أهم الحقائق هي المبرهنة الأساسية في الحساب التي تنص على: يمكن كتابة أي عدد صحيح أكبر من 1 بطريقة وحيدة ، كحاصل ضرب قــوى أعداد أولية مختلفة.

مثال (**١**) اكتب العدد 60984 كحاصل ضرب قوى أعداد أولية.

الحل

إحدى الطرق المستخدمة لإيجاد القواسم الأولية هي شجرة القواسم الــتي تُستخدم فيها اختبارات القسمة على الأعداد الأولية الصغيرة التي قدمناها في الفصل الأول



إذن، $60984 = 2^3 \times 3^2 \times 7 \times 11^2$. ◆

أما الحقيقة الثانية فهي:

(٢) عدد الأعداد الأولية غير منته. أي أن مجموعة الأعداد الأولية هي:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, ...$$

لاحظ أن جميع الأعداد الأولية فردية ما عدا العدد الأولي 2 .

يمكن استخدام الحقيقة التالية كاختبار لأولية العدد.

(٣) إذا كان n عدداً مؤلفاً فإنه يوجد له قاسم أولي p حيث $p \le \sqrt{n}$.

يمكن إعادة نص الحقيقة (٣) على النحو التالي:

(٣)* إذا كان $n > 1$ عدداً صحيحاً بحيث لا يوجد له أي قاسم أولي أصغر من أو يساوي $\sqrt{n}$ فإن n يجب أن يكون عدداً أولياً.

تستخدم الحقيقة (٣) (أو (٣)*) كأحد اختبارات العدد الأولي بحيث يمكن تنفيذ هذا الاختبار بقسمة العدد n على جميع الأعداد الأولية التي لا تزيد عن $\sqrt{n}$ فإن لم يكن أي منها قاسماً للعدد n فإننا نستنتج أن n عدد أولي.

مثال (٢) هل العدد 103 أولي؟

الحل

لاحظ أن $\sqrt{103} < 11$. ولذا فإننا نقوم بإختبار قابلية قسمة العدد 103 على الأعداد الأولية $2, 3, 5, 7$ وذلك بالاستعانة باختبارات القسمة المقدمة في الفصل الأول لنجد أن العدد 103 لا يقبل القسمة على أي منها. بذلك يكون 103 عدداً أولياً. ◆

يمكن الإستعانة أيضاً بالحقيقة (٣) لإيجاد جميع الأعداد الأولية التي لا تزيد عن عدد معطى n . وتدعى هذه الطريقة بمرشحة اراتوسثيتس *(The Sieve cf Eratosthenes)* ويتم تنفيذها على النحو التالي:

لإيجاد الأعداد الأولية التي لا تزيد عن 100 نقوم بكتابة الأعداد من 2 إلى 100. بما أن 2 عدد أولي فإننا نضع دائرة حوله ونقوم بشطب جميع مضاعفاته (الأعداد الزوجية) . بعد ذلك نضع دائرة حول العدد 3 ونقوم بشطب كل ثالث عدد بعد ذلك (مضاعفات العدد 3) . نتقل بعد ذلك بوضع دائرة حول العدد 5 ونشطب مضاعفاته ثم نضع دائرة حول العدد 7 ونشطب مضاعفاته . نتوقف هنا

لأننا قمنا بشطب جميع مضاعفات الأعداد الأولية $2,3,5,7$ التي أصغر من $\sqrt{100}$ ويتبقى لدينا قائمة الأعداد الأولية التي لا تزيد عن 100 وهي:

2	3	5	7	11
13	17	19	23	29
31	37	41	43	47
53	59	61	57	71
73	79	83	89	97

يمكن استخدام تحليل العدد إلى قوى عوامله الأولية لمعرفة فيما إذا كان العدد مربعاً كاملاً لأن قوى العوامل الأولية في المربع الكامل يجب أن تكون زوجية.

مثال (٣) هل العدد 676 مربع كامل.

الحل

بتحليل العدد إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$$676 = 2^2 \times 13^2$$

وبما أن العددين الأوليين 2 و 13 يظهران بقوى زوجية فإن 676 مربع كامل. أي أن $676 = (2\times 13)^2 = 26^2$. ◆

أيضاً يمكن استخدام تحليل الأعداد لإيجاد القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.

مثال (٤) جد القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للأعداد 36، 48، 60 .

الحل

بتحليل كل من الأعداد إلى قوى عوامله الأولية نرى أن

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$48 = 2^4 \times 3$$

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

وبهذا يكون $\gcd(36, 48, 60) = 2^2 \times 3 = 6$

$.\, lcm\,(36, 48, 60) = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$ ◆

مثال (٥) ما مجموع القواسم الأولية المختلفة للعدد 13068؟

الحل

بتحليل العدد إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$$13068 = 2^2 \times 3^3 \times 11^2$$

وبهذا فإن قواسمه الأولية هي 2 ، 3 ، 11 ومجموعها هو $2+3+11=16$. ◆

مثال (٦) [*British JMC* 1999] ما مجموع الأعداد الأولية التي لا تزيد عن 25؟

الحل

الأعداد الأولية التي لا تزيد عن 25 هي $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23$ ومجموعها

$.\, 2+3+5+7+11+13+17+19+23=100$ ◆

مثال (٧) العدد 701 عدد أولي . ما أول عدد أولي يلي هذا العدد؟

الحل

الأعداد 702، 703، 704 ، 705 ، 706 ، 707 ، 708 أعداد مؤلفة لأن 702 ، 704 ، 706 ، 708 أعداد زوجية والعدد 703 يقبل القسمة على 19 والعدد 705 يقبل القسمة على 5 والعدد 707 يقبل القسمة على 7. العدد 709 عدد أولي لأن $\sqrt{709} < 27$ والعدد 709 لا يقبل القسمة على أي من الأعداد الأولية $2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23$. إذن، 709 هو أول عدد أولي يلي العدد 703. ◆

مثال (٨) يمكن استخدام المراتب 2 ، 5 ، 7 لتكوين ستة أعداد مختلفة يتكون كل منها من ثلاث مراتب (لا يسمح بتكرار المراتب) . كم عدد الأعداد الأولية من بين هذه الأعداد ؟

الحل

الأعداد الستة هي 275 ، 257 ، 527 ، 572 ، 725 ، 752 .

كل من 275 و 725 يقبل القسمة على 5 وكل من 572 و 752 زوجي. والعدد $527 = 17 \times 31$. ولذا فهو عدد مؤلف. أما العدد 257 فهو أولي لأن $\sqrt{257} < 17$ والعدد 257 لا يقبل القسمة على أي من الأعداد الأولية $2, 3, 5, 7, 11, 13$. إذن، العدد الأولي الوحيد هو 257 . ◆

مثـــــال (٩) [BritishSMC 2001] يـــــنص حـــــدس جولـــــدباخ (*Goldbach's Conjecture*) والذي لم يتم إثباته أو نفيه، على أنه يمكن كتابة أي عدد زوجي أكبر من 2 كمجموع عددين أوليين. ولكن هـــذا لـــيس صـــحيحاً للأعداد الفردية. أي من الأعداد الفردية التالية لا يمكن كتابته كمجموع عـــددين أوليين: 13 ، 33 ، 43 ، 53 ، 73 ؟

الحل

$$13 = 2 + 11$$
$$33 = 2 + 31$$
$$43 = 2 + 41$$
$$73 = 2 + 71$$

ولكن لا يمكن كتابة 53 كمجموع عددين أوليين لأن أحدهما يجـــب أن يكـــون العدد الأولي الزوجي الوحيد 2 (لأن 53 فـــردي) . وبهـــذا يجـــب أن يكـــون $53 = 2 + 51$. ولكن 51 ليس أولياً. ◆

مثال (١٠) [Aust.MC 1989] إذا كان m و n عددين صحيحين مـــوجبين فجد أصغر قيمة للعدد m بحيث يكون $2940m = n^2$.

الحل

بما أن $2940 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7^2$ فإن أصغر عدد صحيح m يجعل $2940m$ مربعاً كاملاً هو $3 \times 5 = 15$. ◆

مثال (١١) جد قيمة العدد P بحيث تكون جميع الأعداد P ، $P+2$ ، $P+4$ أولية.

الحل

بقسمة العدد P على 3 نجد أن $P = 3k$ أو $P = 3k + 1$ أو $P = 3k + 2$ (لماذا؟) . إذا كان $P = 3k$ و P أولي فإن $P = 3$.

إذا كان $P = 3k + 1$ فإن $P + 2 = 3k + 1 + 2 = 3(k + 1)$ وهذا مستحيل لأن $P + 2$ أولي.

إذا كان $P = 3k + 2$ فإن $P + 4 = 3k + 2 + 4 = 3(k + 2)$ وهذا أيضاً مستحيل لأن $P + 4$ أولي. إذن، قيمة P الوحيدة هي 3. ◆

الأعداد الزوجية والفردية [*Even And Odd Numbers*]

إذا استخدمنا خوارزمية القسمة، لقسمة العدد الصحيح n على العدد 2 فيكون باقي القسمة هو 0 أو 1. أي أن $n = 2k$ أو $n = 2k + 1$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

تسمى الأعداد الصحيحة التي على الصورة $2k$ أعداداً زوجية والأعداد الصحيحة التي على الصورة $2k + 1$ أعداداً فردية. من ذلك نرى أن الأعداد الصحيحة تقسم إلى مجموعتين إحداهما مجموعة الأعداد الزوجية والأخرى مجموعة الأعداد الفردية.

مع أن مفهوم الأعداد الزوجية والأعداد الفردية هو مفهوم بسيط إلا أنه يلعب دوراً مهماً في مسائل نظرية الأعداد عموماً ومسائل المسابقات على وجه الخصوص، ولهذا يكون من المهم معرفة بعض خصائص هذه الأعداد.

نسرد بعض هذه الخصائص هنا والتي من السهل التحقق من صوابها.

(١) مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي.

(٢)مجموع عددين زوجيين هو عدد زوجي.

(٣)مجموع عدد زوجي مع عدد فردي هو عدد فردي.

(٤)حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد فردي.

(٥) يكون حاصل ضرب عددين زوجياً إذا وفقط إذا كان أحدهما على الأقل زوجياً.

مثال (١٢) إذا كانت $1, 2, 3, \ldots, n$ أعداداً صحيحة فأثبت أن

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

الحل

لنفرض أن $S=1+2+3+\ldots+(n-1)+n$ (١)

بكتابة S على الصورة

$$S=n+(n-1)+\ldots+2+1 \qquad (٢)$$

وجمع (١) و (٢) نجد أن

$$2S=(1+n)+(2+n-1)+(3+n-2)+\ldots+(n-1+2)+(n+1)$$
$$2S=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)$$
$$2S=n(n+1)$$

إذن، $S=\dfrac{n(n+1)}{2}$. ◆

مثال (١٣) جد مجموع أول n من الأعداد الصحيحة الزوجية.

الحل

لاحظ أن المطلوب هو إيجاد $2+4+6+...+2n$

الآن ، $2+4+6+...+2n = 2(1+2+3+ ... +n)$

$$= 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= n(n+1)$$ ◆

مثال (١٤) أثبت أن $1+3+5+ ... +(2n-1) = n^2$ حيث $n \geq 1$ عدد صحيح.

الحل

لاحظ أولاً أن

$$1+2+3+4+...+(2n-1)+2n$$
$$=[1+3+ ... +(2n-1)]+[2+4+6+ ... +2n]$$
$$=[1+3+ ... +(2n-1)]+2[1+2+3+ ... +n]$$

إذن،

$$\frac{2n(2n+1)}{2} = [1+3+...+(2n-1)]+2\frac{n(n+1)}{2}$$

من ذلك نرى أن

$$1+3+ ... +(2n-1) = 2n^2+n-n^2-n = n^2.$$ ◆

مثال (١٥) إذا كان مجموع خمسة أعداد فردية متتالية يساوي 105 فما أكبر هذه الأعداد ؟

الحل

نفرض أن الأعداد الخمسة الفردية المتتالية هي $2k+1, 2k+3, 2k+5, 2k+7, 2k+9$. الآن

$$(2k+1)+(2k+3)+(2k+5)+(2k+7)+(2k+9)=105$$
$$10k+25=105$$
$$10k=80$$
$$k=8$$

إذن، أكبر الأعداد هو $2k+9=16+9=25$. ◆

مثال (١٦) لكل عدد صحيح $n \geq 1$ أثبت أن 2^n هو حاصل جمع عددين فرديين متتاليين.

الحل

لاحظ أن

$$2^n = 2\times 2^{n-1} = 2^{n-1}+2^{n-1} = (2^{n-1}-1)+(2^{n-1}+1)$$

وكل من $2^{n-1}-1$ و $2^{n-1}+1$ هو عدد فردي. ◆

مثال (١٧) إذا كان العدد الأكبر من بين عددين فرديين متتاليين يساوي ثلاثة أمثال العدد الأصغر فما مجموع العددين؟

الحل

نفرض أن العددين هما $2k+1$ و $2k+3$. عندئذ ،

$$2k+3=3(2k+1)$$
$$2k+3=6k+3$$

$$4k = 0$$
$$k = 0$$

ويكون العددان هما 1 و 3 . مجموعهما يساوي 4 . ◆

القواسم الموجبة [*Positive Divisors*]

لإيجاد جميع القواسم الموجبة للعدد 12 نقوم بتحليل العدد إلى عوامله الأولية فنجد $12 = 2^2 \times 3$

الآن، قواسم العدد 12 يجب أن تكون على الصورة

$2^a \times 3^b$ حيث $a = 0, 1, 2$ ، $b = 0, 1$.

ومن ذلك نرى أن هذه القواسم هي

$2^0 \times 3^0 = 1$ ، $2^0 \times 3^1 = 3$ ، $2^1 \times 3^0 = 2$ ، $2^1 \times 3^1 = 6$ ، $2^2 \times 3^0 = 4$ ،
$2^2 \times 3^1 = 12$. عدد هذه القواسم يساوي 6 .

وبصورة عامة إذا أردنا إيجاد عدد القواسم الموجبة للعدد

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_t^{k_t}$$

حيث p_i أعداد أولية مختلفة و k_i أعداد صحيحة موجبة فنجد أن هـذا العدد هو

$$(k_1 + 1)(k_2 + 1) \ldots (k_t + 1)$$

مثال (١٨) جد عدد القواسم الموجبة للعدد 420.

الحل

بتحليل العدد إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$$420 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$$

ولذا فإن عدد قواسمه الموجبة هي

$$(2+1)\,(1+1)\,(1+1)\,(1+1) = 24 \,.$$

مثال (١٩) ما أصغر عدد صحيح موجب عدد قواسمه الموجبة يساوي 8 ؟

الحل

بما أن $8 = 1\times 8 = 2\times 4 = 2\times 2\times 2$ فإن العدد الصحيح الموجب الذي عدد قواسمه 8 يجب أن يكون على إحدى الصور:

$$p^7 \text{ أو } p^3q \text{ أو } pqr$$

حيث p ، q ، r أعداد أولية مختلفة. أصغر هذه الأعداد هو $24 = 2^3\times 3$.

مثال (٢٠) ما عدد القواسم الموجبة الفردية للعدد 420.

الحل

بتحليل العديد 420 نجد أن $420 = 2^2\times 3^1\times 5^1\times 7^1$.

وبملاحظة أن أي قاسم فردي لا يمكن أن يحتوي العدد 2 في تحليله نرى أن عـــدد القواسم الفردية هو $(1+1)(1+1)(1+1) = 8$.

مثال (٢١) جد عدد القواسم الزوجية الموجبة للعدد 420 .

الحل

أفضل طريقة لحل هذا المثال هو إيجاد عدد القواسم الموجبة وعدد القواســـم الفردية وطرحهما لنحصل على عدد القواسم الزوجية . وجدنا في المثال (١٩) أن

عدد القواسم هو 24 ووجدنا في المثال (٢٠) أن عدد القواسم الفردية هو 8 .
إذن، عدد القواسم الزوجية هو $24-8=16$. ◆

مجموع القواسم [*Sum of Divisors*]

من الممكن إيجاد مجموع قواسم العدد 12 الموجبة بكتابة هذه القواسم ثم جمعها على النحو التالي:

$$1+2+3+4+6+12=28$$

والطريقة الأفضل لإنجاز ذلك هو استخدام تحليل العدد إلى قوى عوامله الأولية.

$$12=2^2\times 3$$

عندئذ، مجموع قواسم 12 الموجبة هي

$$\begin{aligned}(2^0+2^1+2^2)(3^0+3^1)&=(1+2+4)(1+3)\\&=7\times 4=28\end{aligned}$$

وبصورة عامة إذا كان

$$n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ \dots\ p_t^{k_t}$$

هو تحليل n إلى قوى عوامله الأولية المختلفة فإن مجموع قواسمه هو

$(1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{k_1})\,(1+p_2+p_2^2+\dots+p_2^{k_2})\dots(1+p_t+p_t^2+\dots+p_t^{k_t})$.

مثال (٢٢)

جد مجموع قواسم العدد 252 الموجبة .

الحل

بتحليل العدد نجد أن $252 = 2^2 \times 3^2 \times 7$. وبهذا فإن مجموع قواسم 252 الموجبة هو

$$(1+2+2^2)(1+3+3^2)(1+7) = 7\times 13\times 8 = 728$$ ◆

مثال (٢٣) جد عدد ومجموع قواسم العدد $6!$.

الحل

$$\begin{aligned} 6! &= 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 \\ &= 2^4\times 3^2\times 5 \end{aligned}$$

إذن، عدد القواسم هو $(4+1)(2+1)(1+1) = 5\times 3\times 2 = 30$

ومجموعها هو

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)(1+3+3^2)(1+5) = 31\times 13\times 6 = 2418 .$$ ◆

مسائل محلولة

(١) ما عدد القواسم الموجبة الزوجية للعدد 880 ؟

(أ) 4 (ب) 8 (ج) 12 (د) 16

(٢) [$MA\Theta$ 2007] ما هو أصغر قاسم أولي للمجموع $3^{2007}+35^{1000}$؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7

(٣) إذا كان n مضاعفاً للعدد 5 وعدد قواسمه الموجبة يساوي 11 فما عدد القواسم الموجبة للعدد $4n$ ؟

(أ) 11 (ب) 22 (ج) 33 (د) 44

(٤) ما أكبر قاسم أولي للعدد $25!+27!$ ؟

(أ) 17 (ب) 19 (ج) 31 (د) 37

(٥) [$MAC10A$ 2005] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تجعل $6n$ يقبل القسمة على العدد $1+2+\ldots+n$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٦) ما أكبر عدد صحيح n بحيث يقبل العدد $12!$ القسمة على العدد n^3؟

(أ) $2^3\times 3$ (ب) $2^3\times 3^2$ (ج) $2^4\times 3$ (د) $2^4\times 3^2$

(٧) ما أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يقبل العدد $n!$ القسمة على العدد 5^8؟

(أ) 31 (ب) 35 (ج) 37 (د) 40

(٨) [$MAC10A$ 2005] ما عدد المكعبات الموجبة التي تقسم العدد $3!\times 5!\times 7!$ ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(٩) [$MA\Theta$ 2005] إذا كان $a^2+b^2=c^2$ حيث a ، b ، c أعداد صحيحة موجبة فأي من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون عدد القواسم الموجبة للعدد $(c+b)(c-b)$ ؟

(أ) 17 (ب) 21 (ج) 29 (د) 36

(١٠) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n الأقل من 50 والتي عدد قواسمها الموجبة يساوي 4 ؟

(أ) 7 (ب) 9 (ج) 13 (د) 15

(١١) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n الأصغر من 80 وعدد قواسمها الموجبة يساوي 9 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 9

(١٢) نقول إن العددين p و $p+2$ توأمين أوليين إذا كان كل منهما عدداً أولياً. ما حاصل ضرب جميع التوائم الأولية بين 19 و 40 ؟

(أ) 437 (ب) 621 (ج) 713 (د) 899

(١٣) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تجعل العدد 27 يقبل القسمة على $2n+1$ ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

(١٤) [$AMC10B$ 2002] جميع الأعداد الصحيحة الموجبة A ، B ، $A-B$ ، $A+B$ هي أعداد أولية . مجموع هذه الأعداد الأربعة هو :

(أ) عدد زوجي (ب) عدد يقبل القسمة على 3

(ج) عدد يقبل القسمة على 7 (د) عدد أولي

(١٥) [$Aust.MC$ 1997] لاحظ أن بواقي قسمة العدد 119 على الأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 هي على التوالي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 . ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث مراتب وتتمتع بهذه الخاصية ؟

(أ) 1 (ب) 3 (ج) 7 (د) 14

(١٦) [$AMC10B$ 2002] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تجعل العدد n^2-3n+2 أولياً؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 30

(١٧) [$AMC10A$ 2003] لنفرض أن n هو أكبر عدد صحيح يكتب كحاصل ضرب ثلاث أعداد أولية مختلفة d ، e ، $10d+e$ حيث e و d مرتبتان عشريتان . ما مجموع مراتب n؟

(أ) 15 (ب) 17 (ج) 18 (د) 21

(١٨) ما عدد القيم الصحيحة الموجبة n التي أكبر من 4 بحيث يكون $9+2^{n-4}$ مربعاً كاملاً ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(١٩) ما عدد الأعداد الأولية p التي تجعل العدد $17p+1$ مربعاً كاملاً ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٢٠) ما العدد الأولي p من بين الأعداد الأولية التالية التي تجعل عدد القواسم الموجبة للعدد p^2+11 يساوي 6؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7

(٢١) [$AMC10A$ 2000] اخترنا عددان أوليان مختلفان p و q بين 4 و 18 . ما القيمة الممكنة للمقدار $pq-(p+q)$ من القيم التالية ؟

(أ) 21 (ب) 60 (ج) 119 (د) 231

(٢٢) إذا كان عدد القواسم الموجبة للعدد n هو 9 فما مجموع جميع القيم الممكنة لعدد القواسم الموجبة للعدد n^2؟

(أ) 17 (ب) 25 (ج) 42 (د) 48

(٢٣) [$MA\Theta$ 2009] العدد 32639 حاصل ضرب عددين أوليين أحدهما يساوي تقريباً ضعف الآخر . ما مجموعهما؟

(أ) 356 (ب) 378 (ج) 381 (د) 384

(٢٤) [$Aust.MC$ 2000] إذا كان باقي قسمة 2000 على العدد N يساوي 5 فما عدد القيم المختلفة الممكنة للعدد N؟

(أ) 6 (ب) 8 (ج) 13 (د) 16

(٢٥) [$MA\Theta$ 2011] إذا كان a_n هو عدد القواسم الموجبة للعدد n فما قيمة $a_1+a_2+\ldots+a_{10}$ ؟

(أ) 23 (ب) 25 (ج) 27 (د) 29

(٢٦) إذا كان m و n عددين صحيحين موجبين يحققان $mn=40$ و $2m+3n=31$ فما قيمة المجموع $m+n$ ؟

(أ) 5 (ب) 8 (ج) 12 (د) 13

(٢٧) ما أكبر عدد صحيح k بحيث يقبل العدد $12!$ القسمة على 3^k؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

(٢٨) [Aust.MC 1994] عدد القواسم الموجبة للعدد N يساوي 6. حاصل ضرب خمسة من هذه القواسم يساوي 648 . أي من الأعداد التالية هو القاسم السادس للعدد N؟

(أ) 4 (ب) 9 (ج) 12 (د) 16

(٢٩) [British SMC 2002] إذا كان $2002 = x \times y \times z \times w$ حيث كل من x ، y ، z ، w عدد أولي فما قيمة $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$؟

(أ) 66 (ب) 203 (ج) 285 (د) 343

(٣٠) [British SMC 1999] يوجد عدد أولي واحد فقط من بين الأعداد التالية. ما هو؟

(أ) $1000^2 + 111^2$ (ب) $5555^2 + 6666^2$

(ج) $2000^2 - 999^2$ (د) $1001^2 + 1002^2$

(٣١) [Aust.MC 1975] عدد الأزواج المرتبة (p,q) حيث p و q عددان أوليان مختلفان يحققان $p \mid (q^2 - q)$ و $q \mid (p^2 + p)$ هو

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٣٢) [Aust.MC 1984] ما أصغر عدد صحيح موجب بحيث يكون حاصل ضربه بالعدد 504 مربعاً كاملاً ؟

(أ) 2 (ب) 6 (ج) 7 (د) 14

(٣٣) [Aust.MC 1981] بكم طريقة يمكن كتابة العدد 24 كمجموع عددين أوليين ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٣٤) [British IMC 2006] ما العدد المؤلف من بين الأعداد التالية ؟

(أ) 2^2-1 (ب) 2^3-1 (ج) 2^5-1 (د) 2^6-1

(٣٥) [British IMC 1999] لأي من الخيارات التالية يكون حاصل الضرب $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\ldots(1+\frac{1}{n})$ عدداً صحيحاً ؟

(أ) n فردي (ب) n زوجي

(ج) n يقبل القسمة على 3 (د) دائماً.

(٣٦) [British JMC 1998] مجموع القواسم الأولية المختلفة للعدد 1998 هو

(أ) 42 (ب) 43 (ج) 116 (د) 1001

(٣٧) [AHSME 1998] لنفرض أننا كتبنا العدد 1998 كحاصل ضرب عددين صحيحين موجبين بحيث يكون الفرق بينهما أصغر ما يمكن. ما الفرق؟

(أ) 8 (ب) 15 (ج) 17 (د) 47

(٣٨) [AHSME 1990] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 50 ولكل منها عدد فردي من القواسم الموجبة ؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

(٣٩) [British IMC 2000] ما عدد الأصفار في بداية العدد $3^4\times4^5\times5^6$؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 8

حلول المسائل

(١) ما عدد القواسم الموجبة الزوجية للعدد 880 ؟

(أ) 4 (ب) 8 (ج) 12 (د) 16

الحل

الإجابة هي (د) : بتحليل العدد 880 إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$$880 = 2^4 \times 5 \times 11$$

الآن، عدد القواسم الموجبة هو

$$(4+1)(1+1)(1+1) = 5 \times 2 \times 2 = 20$$

لاحظ أن القواسم الفردية لا تحتوي على قوى العدد 2. ولذا فعددها هو

. $(1+1)\,(1+1) = 2 \times 2 = 4$

إذن ، عدد القواسم الزوجية للعدد 880 هو $20 - 4 = 16$.

(٢) [$MA\Theta$ 2007] ما أصغر قاسم أولي للمجموع $3^{2007} + 35^{1000}$؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7

الحل

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن 3^{2007} عدداً فردياً لأنه حاصل ضرب أعداد فردية. أيضاً، العدد 35^{1000} عدد فردي. ولذا فالمجموع $3^{2007} + 35^{1000}$ هو عدد زوجي. ومن ثم فالعدد الأولي 2 يقسم العدد وهو أصغر الأعداد الأولية.

(٣) إذا كان n مضاعفاً للعدد 5 وعدد قواسمه الموجبة يساوي 11 فما عدد القواسم الموجبة للعدد $4n$ ؟

(أ) 11 (ب) 22 (ج) 33 (د) 44

الحل

الإجابة هي (ج) : بما أن العدد n مضاعف للعدد 5 وعدد قواسمه الموجبة يساوي 11 فإن $n = 5^{10}$. عندئذن $4n = 2^2 \times 5^{10}$. وبهذا فعدد قواسم $4n$ هو $33 = 3\times 11 = (2+1)(10+1)$.

(٤) ما أكبر قاسم أولي للعدد $25!+27!$ ؟

(أ) 17 (ب) 19 (ج) 31 (د) 37

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$\begin{aligned} 25!+27! &= 25!\,(1+26\times 27) \\ &= 25!\times 703 \\ &= 25!\times 19\times 37 \end{aligned}$$

ومن ذلك نجد أن أكبر القواسم الأولية هو 37 .

(٥) [$MAC10A$ 2005] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تجعل $6n$ يقبل القسمة على العدد $1+2+\ldots+n$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أولاً أن

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

ولذا فإن $\frac{12}{n+1}=\frac{6n}{\frac{n(n+1)}{2}}$ عدد صحيح. وبهذا فإن 12 يقبل القسمة على $n+1$. إذن، القيم الممكنة للعدد $n+1$ هي $1,2,3,4,6,12$. وتكون القيم الممكنة للعدد n هي $0,1,2,3,5,11$. ولكن 0 غير موجب. إذن، عدد القيم يساوي 5 .

(٦) ما أكبر عدد صحيح n بحيث يقبل العدد $12!$ القسمة على العدد n^3؟
(أ) $2^3\times 3$ (ب) $2^3\times 3^2$ (ج) $2^4\times 3$ (د) $2^4\times 3^2$

الحل

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن

$$12!=12\times11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2$$

$$=2^{10}\times3^5\times5^2\times7\times11$$

الآن، $(2^3\times3)^3=2^9\times3^3$ يقسم العدد $12!$. ومن ذلك نرى أن $n=2^3\times3$ هو العدد المنشود.

(٧) ما أصغر عدد صحيح موجب n بحيث يقبل العدد $n!$ القسمة على العدد 5^8؟
(أ) 31 (ب) 35 (ج) 37 (د) 40

الحل

الإجابة هي (ب) : أفضل طريقة لحل هذه المسألة هو كتابة مضاعفات العدد 5 لإستنتاج العدد n. هذه المضاعفات هي

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, 35$$

كل من هذه الأعداد يساهم بقوة واحدة للعدد 5 ما عدا 25 فهو يساهم بقوتين. ولذا نجد أن $35!$ يقبل القسمة على 5^8 وأن $n = 35$ هو أصغر هذه الأعداد.

(٨) [$MAC10A$ 2005] ما عدد المكعبات الموجبة التي تقسم العدد $3!\times 5!\times 7!$ ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن تحليل العدد

$$3!\times 5!\times 7! = 2^8\times 3^4\times 5^2\times 7^1$$

المكعبات التي تقسم العدد $3!\times 5!\times 7!$ يجب أن تكون على الصورة

$$2^a\times 3^b\times 5^c\times 7^d$$

حيث كل من a ، b ، c ، d مضاعف للعدد 3 وحيث $a \le 8$ ، $b \le 4$ ، $c \le 2$ ، $d \le 1$. من ذلك نرى أن $a \in \{0, 3, 6\}$ ، $b \in \{0, 3\}$ ، $c \in \{0\}$ ، $d \in \{0\}$. وبهذا فعدد المكعبات القواسم للعدد $3!\times 5!\times 7!$ هو

$$3\times 2\times 1\times 1 = 6 .$$

(٩) $[MA\Theta\ \ 2005]$ إذا كان $a^2+b^2=c^2$ حيث a ، b ، c أعداد صحيحة موجبة فأي من الأعداد التالية لا يمكن أن يكون عدد القواسم الموجبة للعدد $(c+b)(c-b)$ ؟

(أ) 17 (ب) 21 (ج) 29 (د) 36

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن

$$(c+b)(c-b)=c^2-b^2=a^2$$

مربع كامل. ولذا فعدد قواسمه يجب أن يكون فردياً. العدد الزوجي الوحيد بين الأعداد هو 36 وتكون الإجابة هي (د).

(١٠) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n الأقل من 50 والتي عدد قواسمها الموجبة يساوي 4 ؟

(أ) 7 (ب) 9 (ج) 13 (د) 15

الحل

الإجابة هي (د) : لنفرض أن تحليل للعدد n هو $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_t^{\alpha_t}$ حيث p_i أعداد أولية مختلفة. وبما أن $4=1\times 4=2\times 2$ فنرى أن $n=p_1^3$ أو أن $n=p_1p_2$. القيم المختلفة للعدد n الأصغر من 50 هي

$$2^3=8,\ 3^3=27,\ 2\times 3=6$$
$$2\times 5=10,\ 2\times 7=14,\ 2\times 11=22$$
$$2\times 13=26,\ 2\times 17=34,\ 2\times 19=38$$

$$2\times 23=46,\ 3\times 5=15,$$
$$3\times 7=21,\ 3\times 11=33,\ 3\times 13=39$$
$$5\times 7=35$$

عدد هذه الأعداد يساوي 15.

(١١) ما هو عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n الأصغر من 80 وعدد قواسمها الموجبة يساوي 9 ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 9

الحل

الإجابة هي (أ) : بما أن $9=3\times 3=1\times 9$ فالعدد n الذي عدد قواسمه 9 يجب أن يكون على الصورة $n=p^8$ أو $n=p^2q^2$ حيث p و q عددان أوليان.

وبما أن $2^8>80$ فلا توجد أعداد من هذا النوع . والعدد الوحيد الأصغر من 80 الذي على الصورة p^2q^2 هو $n=2^2\times 3^2=36$. إذن، الإجابة هي (أ).

(١٢) نقول إن العددين p و $p+2$ توأمان أوليان إذا كان كل منهما عدداً أولياً. ما هو حاصل ضرب جميع التوائم الأولية بين 19 و 40 ؟

(أ) 437 (ب) 621 (ج) 713 (د) 899

الحل

الإجابة هي (د) : الأعداد الأولية بين 19 و 40 هي 19 ، 23 ، 29، 31 ، 37 والتوأمان الوحيدان هما 29 و 31 وحاصل ضربهما هو $29\times 31=899$.

(١٣) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تجعل العدد 27 يقبل القسمة على $2n+1$ ؟

(أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د) 6

الحل

الإجابة هي (أ) : لاحظ أن $2n+1$ عدد فردي. ولذا فالقيم المختلفة التي تجعل $\frac{27}{2n+1}$ عدداً صحيحاً هي القيم الفردية $2n+1 \in \{1, 3, 9, 27\}$. أي أن $n \in \{0, 1, 4, 13\}$. ولكن $n = 0$ غير موجب. إذن، $n \in \{1, 4, 13\}$.

(١٤) [$AMC10B$ 2002] جميع الأعداد الصحيحة الموجبة A، B، $A-B$، $A+B$ هي أعداد أولية . مجموع هذه الأعداد الأربعة هو :

(أ) عدد زوجي (ب) عدد يقبل القسمة على 3

(ج) عدد يقبل القسمة على 7 (د) عدد أولي

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أولاً أن العددين $A-B$ و $A+B$ إما أنهما زوجيان معاً أو فرديان معاً وبما أنهما أوليان وأن العدد الأولي الزوجي الوحيد هو 2 فإنهما يجب أن يكونا فرديين. إذن، A فردي و B زوجي (أو A زوجي و B فردي). الآن $2 < A - B < A < A + B$. وبما أن A أولي فهو فردي. إذن، B زوجي.

وبهذا يكون $B = 2$ (العدد الأولي الزوجي الوحيد) . الآن، $A-2$ ، A ، $A+2$ ثلاثة أعداد أولية متتالية. إذن، $A-2=3$ ، $A=5$، $A+2=7$.
وبهذا مجموع الأعداد الأربعة هو $2+3+5+7=17$.
وهذا عدد أولي.

(١٥) [*Aust.MC* 1997] لاحظ أن بواقي قسمة العدد 119 على الأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 هي على التوالي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 . ما عدد الأعداد المكونة من ثلاث مراتب وتتمتع بهذه الخاصية ؟   (أ) 1 (ب) 3 (ج) 7 (د) 14

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن أي عدد يتمتع بهذه الخاصية هو عدد يزيد عن 119 بمضاعفات المضاعف المشترك الأصغر للأعداد 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6
ولكن $lcm(2,3,4,5,)=2^2\times3\times5=60$.
إذن، الأعداد ذات الثلاث مراتب هي $119, 179, 239, ...\ 959$ وعددها يساوي 14 .

(١٦) [*AMC*10*B* 2002] كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تجعل العدد n^2-3n+2 أولياً ؟   (أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 30

الحل

الإجابة هي (أ) : بما أن

$$n^2 - 3n + 2 = (n-2)(n-1)$$

عدد أولي فإن أحد العددين $n-2$ أو $n-1$ أولي والآخر يساوي 1. إذا كان $n-1=1$ فإن $n-2=0$ ونجد أن $(n-2)(n-1)=0\times 1=0$ وهذا ليس عدداً أولياً . أما إذا كان $n-2=1$ فإن $n-1=2$ ونحصل على العدد الأولي $(n-2)(n-1)=1\times 2=2$.

إذن، القيمة الوحيدة للعدد n هي 3 وتكون الإجابة هي (أ).

(١٧) [$AMC10A$ 2003] لنفرض أن n هو أكبر عدد صحيح يكتب كحاصل ضرب ثلاث أعداد أولية مختلفة d ، e ، $10d+e$ حيث e و d مرتبتان عشريتان . ما مجموع مراتب n؟

(أ) 15 (ب) 17 (ج) 18 (د) 21

الحل

الإجابة هي (ب) : بما أن e هو مرتبة أحاد العدد $10d+e$ وأن e عدد أولي فإن $e\in\{3, 7\}$. أيضاً d مرتبة العشرات وهو أولي أيضاً. ولذا فإن $d\in\{2, 3, 5, 7\}$. من ذلك نجد أن

$$10d+e\in\{23, 27, 33, 37, 53, 57, 73, 77\}$$

ولكن $10d+e$ عدداً أولياً. إذن، $10d+e\in\{23, 37, 53, 73\}$

الآن، أكبر قيمة للعدد n يمكن تكوينه باستخدام ثلاث أعداد أولية مختلفة من هذه الأعداد هو $n = 7\times5\times73 = 2555$.

مجموع المراتب هو $2+5+5+5=17$.

(١٨) ما عدد القيم الصحيحة الموجبة n التي أكبر من 4 بحيث يكون $9+2^{n-4}$ مربعاً كاملاً ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

الحل

الإجابة هي (أ) : لنفرض أن $9+2^{n-4} = m^2$ حيث m عدد صحيح.

عندئذ، $2^{n-4} = m^2 - 9 = (m-3)(m+3)$.

وبهذا فإن كل من $m-3$ و $m+3$ يجب أن يكون قوة للعدد 2 وهذا يتحقق فقط عندما يكون $m=5$.

من ذلك نجد أن $2^{n-4} = 16 = 2^4$. ومنه فإن $n-4=4$. أي أن $n=8$.

(١٩) ما عدد الأعداد الأولية p التي تجعل العدد $17p+1$ مربعاً كاملاً ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

الحل

الإجابة هي (ب) : لنفرض أن $17p+1 = m^2$ حيث m عدد صحيح.

عندئذ، $17p = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$. من ذلك نجد أن

($m+1=p$ و $m-1=17$) أو أن ($m-1=p$ و $m+1=17$).

إذا كان $m+1=p$ و $m-1=17$ فنجد أن $p=19$. وإذا كان $m-1=p$ و $m+1=17$ فنجد أن $p=15$ وهذا عدد غير أولي. إذن القيمة الوحيدة هي $p=19$.

(٢٠) ما العدد الأولي p من بين الأعداد الأولية التالية التي تجعل عدد القواسم الموجبة للعدد p^2+11 يساوي 6؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 7

الحل

الاجابة هي (ب) : بتجريب هذه الأعداد نجد أن

$2^2+11=15=3\times5$ وعدد قواسمه يساوي 4 .

$3^2+11=20=2^2\times5$ وعدد قواسمه يساوي 6 . $5^2+11=36=2^2\times3^2$ وعدد قواسمه يساوي 9 . $7^2+11=60=2^2\times3\times5$ وعدد قواسمه يساوي 12 . إذن، الإجابة هي (ب).

(٢١) [$AMC10A$ 2000] اخترنا عددين أوليين مختلفين p و q بين 4 و 18 . ما القيمة الممكنة للمقدار $pq-(p+q)$ من القيم التالية ؟

(أ) 21 (ب) 60 (ج) 119 (د) 231

الحل

الإجابة هي (ج) : لنفرض أن $k=pq-(p+q)$ عندئذ،

$$k+1=pq-p-q+1=(p-1)(q-1)$$

وبما أن p و q فرديان فإن كل من $p-1$ و $q-1$ زوجي. وبهذا فإن $(p-1)(q-1)=k+1$ عدد زوجي. القيم الممكنة لكل من $p-1$ و $q-1$ هي $4,6,10,12,16$ وبهذا نرى أن القيم الممكنة للعدد $k+1$ هي:

$$24, 40, 48, 60, 64, 72, 96, 120, 160, 192$$

ومن ثم فقيم k هي:

$$23, 39, 47, 59, 63, 71, 95, 119, 159, 191$$

والعدد المطلوب هو 119 .

حل آخر: بما أن p و q فرديان فإن pq فردي و $p+q$ زوجي. من ذلك يكون $pq-(p+q)$ عدداً فردياً. وبهذا يكون الخيار (ب) غير ممكن. أعلى قيمتين للعددين p و q هما 13 و 17 . وبما أن $13\times17-(13+17)=191$ فالخيار (د) غير ممكن.

أصغر قيمتين للعددين p و q هما 5 و 7 . وبما أن $5\times7-(5+7)=23$ فالخيار (أ) غير ممكن . إذن، الخيار الوحيد الممكن هو الخيار (ج).

(٢٢) إذا كان عدد القواسم الموجبة للعدد n هو 9 فما مجموع جميع القيم الممكنة لعدد القواسم الموجبة للعدد n^2؟

(أ) 17 (ب) 25 (ج) 42 (د) 48

الحل

الإجابة هي (ج): لاحظ أن العدد n يجب أن يكون على الصورة p^8 أو p^2q^2 حيث p و q عددان أوليان. إذن ،

$n^2 = p^{16}$ أو $n^2 = p^4q^4$. ومن ثم يكون عدد قواسم n^2 هو 17 أو 25 .
مجموعهما هو $25 + 17 = 42$.

(٢٣) [$MA\Theta$ 2009] العدد 32639 حاصل ضرب عددين أوليين أحدهما يساوي تقريباً ضعف الآخر . ما مجموعهما؟

(أ) 356 (ب) 378 (ج) 381 (د) 384

الحل

الإجابة هي (د) : لاحـــظ أن $16320 \approx \frac{32639}{2}$ وأن $128 \approx \sqrt{16320}$.
أقرب عـــدد أولي للعـــدد 128 هـــو 127 . الآن، العـــدد الثـــاني هـــو $257 = \frac{32639}{127}$ ويكون $127 + 257 = 384$.

(٢٤) [$Aust.MC$ 2000] إذا كان باقي قسمة 2000 على العدد N يســـاوي 5 فما عدد القيم المختلفة الممكنة للعدد N؟

(أ) 6 (ب) 8 (ج) 13 (د) 16

الحل

الإجابة هي (ج) : بما أن باقي قسمة 2000 على العدد N يساوي 5 فإن N يقسم $2000 - 5 = 1995 = 3 \times 5 \times 7 \times 19$ وأن $N > 5$. الآن عـــدد قواسم 1995 هو 16 ولكن القواسم 1 ، 3 ، 5 غير ممكنة لأن $N > 5$.
وبهذا يكون عدد قيم N المختلفة هو 13.

(٢٥) $[MA\Theta\ \ 2011]$ إذا كان a_n هو عدد القواسم الموجبة للعدد n فما قيمة $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$ ؟

أ) 23 ب) 25 ج) 27 د) 29

الحل

الإجابة هي (ج): المجموع

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} = 1+2+2+3+2+4+2+4+3+4 = 27$.

(٢٦) إذا كان m و n عددين صحيحين موجبين يحققان $mn = 40$ و $2m + 3n = 31$ فما قيمة المجموع $m + n$ ؟

أ) 5 ب) 8 ج) 12 د) 13

الحل

الإجابة هي (د) : بما أن $mn = 40$ فإن $n = \dfrac{40}{m}$. وبالتعويض في المعادلة الثانية نجد أن

$$2m + 3\left(\frac{40}{m}\right) = 31$$
$$2m^2 - 31m + 120 = 0$$
$$(2m - 15)(m - 8) = 0$$

إذن، $m = 8$ أو $m = \dfrac{15}{2}$. وبما أن m عدد صحيح فإن $m = 8$. ويكون $n = 5$. المجموع $m + n = 8 + 5 = 13$.

(٢٧) ما أكبر عدد صحيح k بحيث يقبل العدد $12!$ القسمة على 3^k؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 5

الحل

الإجابة هي (د) : بتحليل $12!$ إلى عوامله الأولية نجد أن

$$12! = 12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2$$
$$= 2^{10}\times 3^5\times 5^2\times 7\times 11$$

ولذا فإن $k = 5$.

حل آخر: في مفكوك $12!$ يوجد 3 مضاعفات للعدد 3 كل منها يساهم بقوة واحدة، إضافة إلى العدد 9 الذي يساهم بقوتين للعدد 3 . إذن، أكبر قوة للعدد 3 هي $5 = 2 + 3$.

(٢٨) [*Aust.MC* 1994] عدد القواسم الموجبة للعدد N يساوي 6 . حاصل ضرب خمسة من هذه القواسم يساوي 648 . أي من الأعداد التالية هو القاسم السادس للعدد N؟

(أ) 4 (ب) 9 (ج) 12 (د) 16

الحل

الإجابة هي (ب) : بما أن $6 = 1\times 6 = 2\times 3$ فإن $N = p^5$ أو أن $N = pq^2$ حيث p و q عددان أوليان.

إذا كان $N = p^5$ فقواسمه هي $1, p, p^2, p^3, p^4, p^5$ وحاصل ضرب خمسةمنها يجب أن يكون على الصورة p^k .

ولكن $648 = 2^3 \times 3^4$ ليس على الصورة p^k . إذن، $N = pq^2$ وقواسمه هي $1, p, q, q^2, pq, pq^2$ وحاصل ضرب هذه القواسم هو p^3q^6 . ولكن حاصل ضرب خمسة منها هو $2^3 \times 3^4$. إذن، $p = 2$ و $q = 3$ والقاسم السادس هو $3^2 = 9$.

(٢٩) [*British SMC* 2002] إذا كان $2002 = x \times y \times z \times w$ حيث كل من x ، y ، z ، w عدد أولي فما قيمة $x^2 + y^2 + z^2 + w^2$؟

(أ) 66 (ب) 203 (ج) 285 (د) 343

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أن $2002 = 2 \times 7 \times 11 \times 13$. عندئذ،

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 2^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 = 343$$

(٣٠) [*British SMC* 1999] يوجد عدد أولي واحد فقط من بين الأعداد التالية. ما هو؟

(أ) $1000^2 + 111^2$ (ب) $5555^2 + 6666^2$

(ج) $2000^2 - 999^2$ (د) $1001^2 + 1002^2$

الحل

الإجابة هي (أ): العدد (ب) هو $30858025 + 44435556 = 75293581$ وبما أن $0 = (7+2+3+8) - (5+9+5+1)$ والعدد 0 يقبل القسمة على 11 فإن العدد (ب) يقبل القسمة على 11 . العدد (ج) هو فرق بين مربعين

$$2000^2 - 999^2 = (2000-999)(2000+999) = (1001) \times 2999$$

ولذا فهو مؤلف. أما العدد (د) فهو مؤلف لأن مرتبة أحاده هي $1 + 4 = 5$. ولذا فهو يقبل القسمة على 5 . إذن، العدد الأولى هو (أ) .

(٣١) [Aust.MC 1975] عدد الأزواج المرتبة (p,q) حيث p و q عددان أوليان مختلفان يحققان $p\,|\,(q^2-q)$ و $q\,|\,(p^2+p)$ هو

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

الحل

الإجابة هي (أ): بما أن $p\,|\,q(q-1)$ و p و q أوليان نسبياً فإن $p\,|\,(q-1)$ وبهذا فإن $p \le q-1$. أيضاً $q\,|\,p(p+1)$. ومنه فإن $q\,|\,(p+1)$ ومن ثم فإن $q \le p+1$. أي أن $p \ge q-1$. إذن $p = q-1$. ولكن العددين الأوليين الوحيدين المتتاليين هما 2 و 3 . إذن، $p = 2$ و $q = 3$ ونحصل على الزوج الوحيد $(2, 3)$.

(٣٢) [Aust.MC 1984] ما أصغر عدد صحيح موجب بحيث يكون حاصل ضربه بالعدد 504 مربعاً كاملاً ؟

(أ) 2 (ب) 6 (ج) 7 (د) 14

الحل

الإجابة هي (د) : لاحظ أولاً أن $504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$.

أصغر عدد n يجعل $2^3 \times 3^2 \times 7 \times n$ مربعاً كاملاً هو $n = 2 \times 7 = 14$.

(٣٣) [Aust.MC 1981] بكم طريقة يمكن كتابة العدد 24 كمجموع عددين أوليين ؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

الحل

الاجابة هي (ج) : الأعداد الأولية التي أصغر من 24 هي:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. ومن ذلك نجد أن

$$24 = 5+19 = 7+17 = 11+13$$

إذن ، عدد الطرق يساوي 3 .

(٣٤) [*British IMC* 2006] ما العدد المؤلف من بين الأعداد التالية ؟
(أ) 2^2-1 (ب) 2^3-1 (ج) 2^5-1 (د) 2^6-1

الحل

(٣٤) الإجابة هي (د): لاحظ أن:

$2^2-1=3$ عدد أولي

$2^3-1=7$ عدد أولي

$2^5-1=31$ عدد أولي

$2^6-1=63=7\times 9$ عدد مؤلف.

(٣٥) [*British IMC* 1999] لأي من الخيارات التالية يكون حاصل الضرب $(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{4})\dots(1+\frac{1}{n})$ عدداً صحيحاً ؟
(أ) n فردي (ب) n زوجي
(ج) n يقبل القسمة على 3 (د) دائماً.

الحل

الإجابة هي (أ) : حاصل الضرب هو

$$\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\frac{6}{5}\times\ \dots\ \times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2}$$

وهذا عدد صحيح إذا كان n فردياً.

(٣٦) [*British JMC* 1998] مجموع القواسم الأولية المختلفة للعدد 1998 هو

(أ) 42 (ب) 43 (ج) 116 (د) 1001

الحل

الإجابة هي (أ) : بتحليل العدد 1998 إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$$1998=2\times 999=2\times 3^2\times 111=2\times 3^3\times 37$$

إذن قواسمه الأولية هي 2 ، 3 ، 37 ومجموعها هو $2+3+37=42$.

(٣٧) [*AHSME* 1998] لنفرض أننا كتبنا العدد 1998 كحاصل ضرب عددين صحيحين موجبين بحيث يكون الفرق بينهما أصغر ما يمكن. ما هذا الفرق؟

(أ) 8 (ب) 15 (ج) 17 (د) 47

الحل

الإجابة هي (ج) : بتحليل العدد 1998 إلى قوى عوامله الأولية نجد أن

$1998 = 2\times 3^3 \times 37$ عدد قواسم العدد 1998 يساوي $2\times 4\times 2 = 16$.
وإذا أردنا كتابته كحاصل ضرب عددين فيمكن انجاز ذلك بعدد من الطرق هو $\frac{16}{2} = 8$. وبهذا يكون لدينا حواصل الضرب التالية:
1×1998 ، 2×999 ، 3×666 ، 6×333 ، 9×222 ، 18×111 ، 37×54 ، 27×74.
الآن ، نحصل على فرق أصغر ما يمكن إذا كان القاسمان قريبين من بعضهما (أي أنهما قريبان من $\sqrt{1998} \approx 45$). وبهذا فإن الفرق الأصغر هو $54 - 37 = 17$.

(٣٨) [*AHSME* 1990] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة التي أصغر من 50 ولكل منها عدد فردي من القواسم الموجبة ؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 7 (د) 9

الحل

الإجابة هي (ج) : الاعداد التي عدد قواسمها الموجبة عدد فردي يجب أن تكون مربعات كاملة. والمربعات الكاملة التي أصغر من 50 هي:
$1^2 = 1$ ، $2^2 = 4$ ، $3^2 = 9$ ، $4^2 = 16$ ، $5^2 = 25$ ، $6^2 = 36$ ، $7^2 = 49$ وعددها 7.

(٣٩) [*British IMC* 2000] ما عدد الأصفار في بداية العدد $5^6\times 4^5\times 3^4$؟

(أ) 4 (ب) 5 (ج) 6 (د) 8

الحل

الإجابة هي (ج) : لاحظ أن

$$\begin{aligned}3^4\times4^5\times5^6 &= 3^4\times2^{10}\times5^6\\ &= 3^4\times2^4\times2^6\times5^6\\ &= 3^4\times2^4\times10^6\\ &= 81\times16\times10^6\\ &= 1296\times10^6\end{aligned}$$

ويكون عدد الأصفار في بداية العدد هو 6 .

مسائل غير محلولة

(١) ما العدد المؤلف من بين الأعداد التالية ؟

(أ) 2^3-1 (ب) 2^5-1 (ج) 2^7-1 (د) $2^{11}-1$

(٢) نقول إن الأعداد p ، $p+2$ ، $p+4$ ثلاثيات أولية إذا كانت جميعها أعداداً أولية. ما هو عدد الثلاثيات الأولية بين العددين 25 و 75 ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٣) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 100 وعدد قواسمها الموجبة يساوي 10؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 5

(٤) [$MA\Theta$ 2002] ما عدد القواسم الموجبة الزوجية للعدد !9 ؟

(أ) 20 (ب) 100 (ج) 140 (د) 160

(٥) [$MA\Theta$ 2002] ما هو أصغر عدد أولي يقسم المجموع $3^{15}+5^{17}$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 5 (د) 11

(٦) [$Aust.MC$ 1984] أكبر قوة k بحيث يقبل العدد !50 القسمة على 2^k هي:

(أ) 25 (ب) 42 (ج) 47 (د) 50

(٧) لنفرض أن n عدد صحيح موجب وأن $A=n^2-n+1$ و $B=n^2+n+1$. العبارة الصائبة من بين العبارات التالية هي:

(أ) A و B عددان فرديان (ب) A و B عددان زوجيان.

(ج) A عدد فردي و B عدد زوجي (د) A عدد زوجي و B عدد فردي

(٨) إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً فما أصغر عدد أولي يقسم العدد $3^{2^n}+1$ ؟

(أ) 2　　(ب) 3　　(ج) 5　　(د) 7

(٩) [$MA\Theta$ 2003] إذا كانت a ، b ، c ، d أعداداً أولية مختلفة فما عدد القواسم الموجبة للعدد $lcm(a^4b^3c^2d, a^7b^5c^3d, a^5b^4c^3d^2)$ ؟

(أ) 120　　(ب) 210　　(ج) 576　　(د) 1080

(١٠) ما عدد الأعداد الأولية p التي تجعل كل من $4p^2+1$ و $6p^2+1$ عدداً أولياً ؟

(أ) 0　　(ب) 1　　(ج) 2　　(د) 3

(١١) [$Cayley$ 2009] ما أصغر عدد أولي يمكن كتابته كمجموع ثلاث أعداد مؤلفة مختلفة ؟

(أ) 11　　(ب) 13　　(ج) 17　　(د) 19

(١٢) [$Fermat$ 2011] ما العدد من بين الأعداد التالية الذي يجب أن يكون زوجياً ؟

(أ) المتوسط الحسابي لعددين زوجيين .

(ب)المتوسط الحسابي لعددين أوليين.

(ج) المتوسط الحسابي لمربعين كاملين .

(د) المتوسط الحسابي لعددين كل منهما مضاعف للعدد 4 .

(١٣) ما قيمة $\gcd(8!, 800)$ ؟

(أ) 140　　(ب) 150　　(ج) 160　　(د) 180

(١٤) ما ناتج قسمة مجموع قواسم العدد $2^2\times3\times5$ الموجبة على عدد قواسمه الموجبة ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 13 (د) 14

(١٥) إذا كان عدد القواسم الموجبة للعدد n يساوي 5 فما عدد القواسم الموجبة للعدد n^3 ؟

(أ) 5 (ب) 12 (ج) 13 (د) 15

(١٦) ما عدد القواسم الموجبة للعدد 10000 التي هي مربعات كاملة ؟

(أ) 6 (ب) 9 (ج) 12 (د) 15

(١٧) ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأصغر من 150 والتي لها عدد فردي من القواسم الموجبة ؟

(أ) 8 (ب) 9 (ج) 10 (د) 12

(١٨) [*Cayley* 1998] إذا كان العدد $2^3\times5^9\times7^{b+4}$ مكعباً حيث a و b عددان صحيحان موجبان فما أصغر قيمة للمجموع $a+b$ ؟

(أ) 2 (ب) 5 (ج) 6 (د) 8

(١٩) ما مجموع مراتب أصغر عدد صحيح موجب عدد قواسمه الموجبة يساوي 14؟

(أ) 8 (ب) 10 (ج) 12 (د) 14

(٢٠) إذا كان n عدداً صحيحاً وكان $M=n(n+1)(n+2)(n+3)$ مربعاً كاملاً فإن M يساوي

(أ) 0 (ب) 2 (ج) 4 (د) 9

[إرشاد: أثبت أولاً أن $M+1$ مربع كامل].

(٢١) [Fermat 2008] إذا كان m عدداً فردياً وكان n عدداً زوجياً فأي من الأعداد التالية يجب أن يكون فردياً ؟

(أ) $2m+3n$ (ب) $3n+2m$ (ج) $4n+m$ (د) mn

(٢٢) [AMC10B, 2005] ما عدد الأعداد الصحيحة الموجبة n التي لا تزيد عن 24 بحيث يقبل العدد $n!$ القسمة على $1+2+\ldots+n$؟

(أ) 16 (ب) 18 (ج) 20 (د) 22

(٢٣) [AMC10 2004] أي من الأعداد التالية هو مربع كامل؟

(أ) $98!\times 99!$ (ب) $98!\times 100!$ (ج) $99!\times 100!$ (د) $99!\times 101!$

(٢٤) [AMC10B 2003] ما أكبر قاسم للعدد $(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)(n+9)$ من بين الأعداد التالية وذلك لكل عدد صحيح موجب زوجي n؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 11 (د) 15

(٢٥) ما أصغر عدد صحيح موجب عدد قواسمه الموجبة يساوي 6 ؟

(أ) 10 (ب) 12 (ج) 48 (د) 64

(٢٦) [$MA\Theta$ 2007] إذا كان n هو أصغر عدد صحيح موجب يجعل $7056n$ مكعباً كاملاً فما مجموع مراتب n ؟

(أ) 3 (ب) 9 (ج) 12 (د) 15

(٢٧) [AMC10B 2003] مجموع خمسة أعداد صحيحة موجبة متتالية زوجية يقل عن مجموع أول ثمانية أعداد صحيحة موجبة متتالية فردية بمقدار 4. ما أصغر الأعداد الزوجية ؟

(أ) 6 (ب) 8 (ج) 10 (د) 12

(٢٨) [$AMC10A$ 2002] استخدمنا كل من المراتب 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 9 مرة واحدة فقط لتكوين أربع أعداد أولية كل منها مكون من مرتبتين. ما مجموع الأعداد الأولية الأربعة ؟

(أ) 150 (ب) 160 (ج) 170 (د) 190

(٢٩) [$MA\Theta$ 2009] إذا كان n هو أكبر عـــدد صحيح موجب مجموع قواسمه الموجبة يساوي 38 فما مجموع مراتب n؟

(أ) 9 (ب) 10 (ج) 11 (د) 12

(٣٠) [$MA\Theta$ 2011] نقول إن العدد الصحيح $n > 1$ عدد تام إذا كان مجمـــوع قواسمه الموجبة يساوي $2n$. إذا كان A و B هما أصغر عددين تامين فما عدد القواسم الموجبة للعدد $A + B$ ؟

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 4 (د) 6

(٣١) نقول إن العدد الصحيح $n > 1$ عدد ناقص إذا كان مجموع قواسمه الموجبة أصغر من $2n$. ما أصغر الأعداد الناقصة من بين الأعداد التالية ؟

(أ) 12 (ب) 14 (ج) 21 (د) 28

(٣٢) ليكن d هو القاسم المشترك الأكبر للعـــددين 341 و 217 . مـــا عـــدد القواسم الموجبة للعدد $d + 4$؟

(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٣٣) [$Aust.MC$ 1998] ما أكبر قاسم للعدد 72^3 ولا يساويه؟

(أ) $2^5 \times 3^5$ (ب) $2^6 \times 3^6$ (ج) $2^8 \times 3^6$ (د) $2^9 \times 3^5$

(٣٤) [*Aust. MC* 1993] ما القواسم الأولية المختلفة للعدد 10^4-1؟

(أ) 1 (ب) 2 (ج) 3 (د) 4

(٣٥) [*Aust. MC* 1987] مجموع القواسم الزوجية الموجبة للعدد 32 هو

(أ) 60 (ب) 62 (ج) 63 (د) 72

(٣٦) [*Aust, MC* 1979] إذا كان n عدد صحيحاً، فما العدد الفردي من بين الأعداد التالية ؟

(أ) $3n$ (ب) $2n+1$ (ج) n^2 (د) n^3

(٣٧) [*British SMC* 2003] العام 2003 عدد أولي. ما عدد المربعات الكاملة التي تقسم العدد 2003^{2003} ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 44 (د) 1002

(٣٨) [*British SMC* 2001] ما العدد n من بين الأعداد التالية الذي يجعل العبارة التالية خاطئة "إذا كان n عدداً أولياً فإن n^2+2 عدد أولي"؟

(أ) 3 (ب) 5 (ج) 6 (د) 9

(٣٩) [*British JMC* 2005] عدد الأعداد التي تحتوي على ثلاث مراتب والتي يمكن تكوينها من المراتب 1 ، 3 ، 5 هو 6 . ما عدد الأعداد الأولية من بين هذه الأعداد ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٤٠) [*British JMC* 1998] ما عدد الأعداد الأولية المكونة من ثلاث مراتب بحيث يكون مجموع مراتبها يساوي 25 ؟

(أ) 1 (ب) 4 (ج) 6 (د) 8

(٤١) حاصل ضرب قواسم العدد 12 الموجبة ما عدا العدد 12 يساوي 12^2 لأن هذه القواسم هي 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 وأن $1\times2\times3\times4\times6=144=12^2$.

كم عدد من بين الأعداد 14 ، 15 ، 18 ، 20 يحقق هذه الخاصية ؟

(أ) 0 (ب) 1 (ج) 2 (د) 3

(٤٢) ما العدد من بين الأعداد التالية الذي مجموع قواسمه الموجبة مربع كامل ؟

(أ) 3^2 (ب) 5^2 (ج) 6^2 (د) 9^2

(٤٣) مجموع القواسم الموجبة لعدد واحد فقط من بين الأعداد التالية مربع كامل. ما قيمة هذا العدد ؟

(أ) 2^3 (ب) 3^3 (ج) 5^3 (د) 7^3

(٤٤) [*British IMC* 2001] لاحظ أن العـــدد $2001=3\times23\times29$. أي مـــن الأعداد التالية هو حاصل ضرب ثلاثة أعداد أولية مختلفة ؟

(أ) 45 (ب) 60 (ج) 91 (د) 105

(٤٥) ما مجموع مراتب أصغر عدد صحيح موجب عدد قواسمه الموجبة يســـاوي 12؟

(أ) 6 (ب) 9 (ج) 14 (د) 15

إجابات المسائل غير المحلولة

رقم السؤال	الإجابة	رقم السؤال	الإجابة	رقم السؤال	الإجابة	رقم السؤال	الإجابة
١	د	٢	أ	٣	ب	٤	ج
٥	أ	٦	ج	٧	أ	٨	أ
٩	ج	١٠	ب	١١	د	١٢	د
١٣	ج	١٤	د	١٥	ج	١٦	ب
١٧	د	١٨	ب	١٩	ج	٢٠	أ
٢١	ج	٢٢	أ	٢٣	ج	٢٤	د
٢٥	ب	٢٦	ج	٢٧	ب	٢٨	د
٢٩	ب	٣٠	ج	٣١	ب	٣٢	ب
٣٣	ج	٣٤	ج	٣٥	ب	٣٦	ب
٣٧	د	٣٨	ب	٣٩	أ	٤٠	أ
٤١	ج	٤٢	د	٤٣	د	٤٤	د
٤٥	أ						

المراجع

[١] البركاتي، سلطان سعود ، مبادىء أساسية لأولمبياد الرياضيات ، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى ١٤٣٢هـ (٢٠١١م).

[٢] الجوعي، عبدالله محمد ، مسائل تحضيرية لأولمبياد الرياضيات ، مطابع الحميضي، الطبعة الأولى، ١٤٣١هـ (٢٠١٠م).

[٣] سمحان، معروف عبدالرحمن و أبو عمه، عبدالرحمن محمد سليمان والذكير، فوزي أحمد ، قاموس العلوم الرياضية، النشر العلمي والمطابع، منشورات جامعة الملك سعود ، ١٤٢٢هـ (٢٠٠١م) .

[٤] سمحان، معروف عبدالرحمن والسنوسي ، صالح عبدالله ، استراتيجيات حلول المسائل (مترجم) ، تحت الطبع.

[٥] سمحان، معروف عبدالرحمن و الذكير ، فوزي أحمد ، نظرية الأعداد وتطبيقاتها، دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣١هـ (٢٠١٠م) .

[٦] سمحان، معروف عبدالرحمن وأندريكا، دورين والذكير، فوزي أحمد ، رياضيات الأولمبياد – الجبر – الجزء الأول ، دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣٢هـ (٢٠١١م).

[٧] سمحان، معروف عبدالرحمن وأندريكا، دورين والذكير، فوزي أحمد ، رياضيات الأولمبياد – نظرية الأعداد – الجزء الأول – دار الخريجي للنشر والتوزيع ١٤٣٢هـ (٢٠١١م) .

[8] Atkins, WJ, Edwards JD, King DJ, O'Halloran PJ, and Taylor PJ, Austrailian Mathematics Competition Book 1 (1978- 1984), AMT Publishing 2004.

[9] Atkins WJ, Munro JE, and Taylor PJ, Australian Mathematics Competion (1992 – 1998), AMT Publishing 2009.

[10] Atkins WJ, Taylor PJ, Australian Mathematics Competion (1999 – 2005), AMT Publishing 2007 .

[11] Batterson J, Competition Math For Middle School, AoPS Inc., 2011.

[12] Canadian Mathematics Competitions, Past Contest Problems With Solutions, Gauss (Grade 7), Gauss (Grade 8) , Pascal (Grade 9), Cayley (Grade 10), and Fermat (Grade 11) (1997 – 2012) .

[13] Lehoczky Sandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving, Volume 1 : The Basics, 7th Edition, AoPS Inc. 2006

[14] Lehoczky Sandor, and Rusczyk Richard, The Art of Problem Solving, Volume 2: And beyond, 7th Edition, AoPS Inc. 2006

[15] Mu Alpha Theta (MAθ), A Great Collection of High School Problems and Solution From Past Contest (1995 – 2011).

[16] O'Halloran PJ, Pollard GH, and Taylor PJ, Australian Mathematics Competition Book 2 (1985 – 1991l), AMT Publishing 2003.

[17] The UK Mathematics Trust, Ten Years of Mathematical Challenges (1997 – 2006) , The University of Leeds, Leeds LS2 9JT , 2010.

كشاف الموضوعات
Subject Index

Sum of divisors	٩٢	مجموع القواسم
Digit	٣	مرتبة (خانة)
The units digit	٢٠	مرتبة آحاد العدد
Least common multiple	١٣	المضاعف المشترك الأصغر