الباب الثالث

تحليل المنشآت

يتكون أي منشأ من عناصر أو أعضاء عدة. فمثلا المبنى يتكون عادة من كمرات وأعمدة وأرضيات وأسقف وغيرها. أو الهيكل المفصلي أو الجمالون الذي يتكون من عناصر مختلفة منها الوصلات والأعضاء والكمرات والمفاصل وغيرها. هذه الأعضاء متصلة ومثبتة ببعضها بطريقة تسمح لها أن تؤدى الغرض الذي استعملت من أجله في المنشأ بحيث يكون هذا المنشأ صالحا لتحمل الأوزان التي ستكون عليه من قبل المستعملين له إلى جانب الأحمال الناتجة عن أوزان العناصر المثبتة به والتي تسمى عادة بالأحمال الميتة. ومن الأهمية بمكان معرفة الطريقة التي تعمل بها هذه الأعضاء المختلفة لنقل الأحمال على المنشأ من عنصر إلى آخر إلى أن تصل إلى نقاط التثبيت أو نقاط الارتكاز أو الأساسات حيث تسمى قوى مقاومة الأحمال المؤثرة عليها بردود الأفعال بهذه النقاط للارتكاز.

1-3 نقاط التثبيت أو الركائز في المستوى:

من أساسيات الاستاتيكا دراسة الشروط الكافية واللازمة لاتزان الإنشاءات الهندسية تحت تأثير القوى المعرضة لها. وليكون أي جسم في حالة اتزان فانه يجب أن تتعادل جميع القوى المؤثرة عليه بحيث لا يحدث للجسم حركة أو انتقال. وكذلك أن تتعادل جميع العزوم المؤثرة عليه بحيث لا يحدث للجسم أي احتمال للدوران. ولكي يكون الجسم متزنا يلزم أن يكون النظام المكافئ للقوى المؤثرة عليه مكافئة للصفر. ويتلخص اتزان الجسم بتحقيق الشرط التالي:

$$\boldsymbol{R} = \Sigma \boldsymbol{F} = 0 \qquad \& \qquad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{0} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1\text{-}3)$$

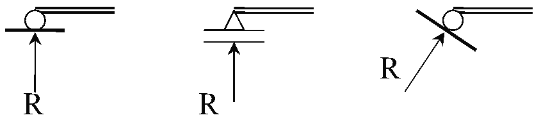
ففي المستوى يختزل هذا الشرط إلى ثلاثة معادلات فقط تعبّر عن اتزان القوى في الاتجاهين الأفقي والراسي إضافة إلى اتزان الجسم حتى لا يحدث له دوران. ونلخص هذه الشروط بمعادلات الاتزان الثلاثة التالية:

$$\Sigma F_x = 0, \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \& \qquad \Sigma M = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2\text{-}3)$$

وتطبيق معادلات الاتزان هذه على جسم يتم بتحديد جميع القوى المؤثرة عليه بدقة تامة على البياني الحر للجسم. هذه القوى على البياني للجسم الحر تشمل جميع القوى المؤثرة الخارجية وكذلك ردود الفعل الناتجة عنها عند نقاط التثبيت أو الركائز. ويجب ملاحظة أنواع الركائز ومقدرتها على مقاومة الأحمال التي يمكنها مقاومتها إن كانت مانعة لحركة الجسم أي أنها قوت رد فعل محورية أو مانعة لدوران الجسم أي أنها قوة عزوم.

3-1-1 المفصل المتحرك على مستوى أملس:

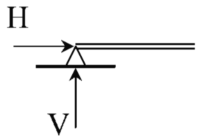
يكون ردّ الفعل للمفصل المتحرك على مستوى أملس دائما عموديّاً على المستوى الأملس شكل (3-1).



شكل (3-1)

3-1-2 المفصل الثابت:

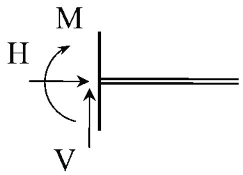
يكون للمفصل الثابت ردّا فعل.
أحدهما أفقي والآخر رأسي شكل (3-2).



شكل (3-2)

3-1-3 الكرسي الثابت:

يكون للكرسي الثابت ثلاثة ردود أفعال.
ردّ فعل أفقي وآخر رأسي وعزم
شكل (3-3).



شكل (3-3)

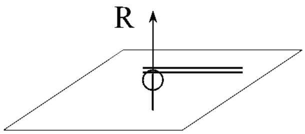
3-2 نقاط التثبيت أو الكراسي في الفراغ:

في الفراغ يتزن الجسم إذا تحقق الشرط في المعالة (3-1) بتحقيق الاتزان للقوى في اتجاه المحاور الأساسية الثلاثة وكذلك اتزان العزوم حول هذه المحاور الثلاثة. وهذا يتم بتحقيق المعادلات الستة التالية:

$$\Sigma F_x = 0 , \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \& \qquad \Sigma F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = 0 , \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \& \qquad \Sigma M_z = 0 \qquad (3\text{-}3)$$

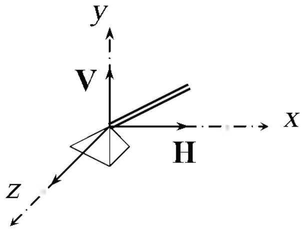
3-2-1 المفصل المتحرك على مستوى أملس:



شكل (3-4)

يكون ردّ الفعل للمفصل المتحرك على مستوى أملس دائما عموديّا على المستوى الأملس شكل (3-4).

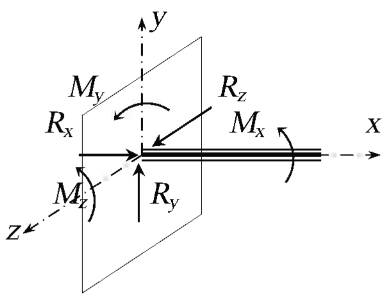
3-2-2 المفصل الثابت:



شكل (3-5)

يكون للمفصل الثابت ثلاثة ردود أفعال كل ردّ فعل منها في اتجاه احد المحاور الأساسية شكل (3-5).

3-2-3 الكرسي الثابت:



شكل (3-6)

يكون للكرسي أو نقطة التثبيت الثابتة ستة ردود فعل، ثلاثة قوى كل منها في اتجاه أحد المحاور الأساسية، وثلاثة عزوم كل منها حول أحد المحاور الأساسية شكل (3-6).

3-3 الاتزان:

إذا تعرض جسم إلى مجموعة من القوى فيمكن استبدال هذه القوى بمحصلتها كما في المعادلة (3-1).

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F} = R_x i + R_y j + R_z k$$

$R_x , R_y \& R_z$ هي المقادير المقياسية لمركبات المحصلة، ويمكن التعبير عن هذه المركبات بمجموع مركبات القوى حسب المعادلة (3-3).

$$R_x = \sum F_x , \quad R_y = \sum F_y \quad \& \quad R_z = \sum F_z \qquad (3\text{-}3)$$

أما $R_x\, i , R_y\, j \& R_z\, k$ فهي المركبات المتجهة للمحصلة.

1-3-3 اتزان نقطة مادية أو جسيم في الفراغ:

يكون الجسيم، والذي يعرّف بأنه من الصغر إلى درجة أنه يمكن تمثيله بنقطة، متزنا إذا تحقق شرط المجموع الجبري للقوى المؤثرة على الجسيم بأن يكون صفرا. هذا الشرط يمليه القانون الأول لنيوتن كما توضحه المعادلة (3-4). أي أن:

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F} = R_x\, i + R_y\, j + R_z\, k = 0$$
$$= \sum F_x\, i + \sum F_y\, j + \sum F_z\, k = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4\text{-}3)$$

وهذا الشرط يتحقق إذا كان كل من:

$$\sum F_x = 0\,, \quad \sum F_y = 0 \quad \& \quad \sum F_z = 0$$

وهو ما يعرف بطريقة فصل المتغيرات، وينتج ذلك بتساوى معاملات وحدات المتجهات في طرفي المعادلة حيث الطرف الأيمن يساوى صفرًا.

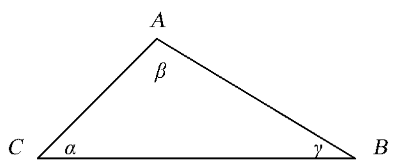
في حالة اتزان جسيم في المستوى فشرط الاتزان يختزل إلى المعادلة (3-5) فقط:

$$\sum F_x = 0 \quad \& \quad \sum F_y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5\text{-}3)$$

1-1-3-3 مثلث القوى:

إذا أثرت على نقطة مادية أو (جسيم) ثلاث قوى في المستوى شكل (3-7) فيمكن إثبات أن هذه القوى في حالة اتزان وأن محصلتها تؤول إلى الصفر إذا كوّنت مثلثا مقفلا. وفي هذه الحالة يمكن الاستعانة بتطبيق قاعدة تحليل المثلث التي تنص على أن النسبة بين طول كل ضلع مقسوما على جيب الزاوية المقابلة له في المثلث تساوي مقدارا ثابتا كما بالمعادلة (3-6) وتسمّى أحيانا بقاعدة الجيوب. أي أن:

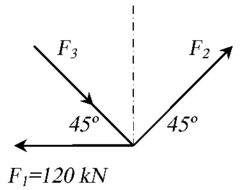
$$\frac{AB}{Sin\alpha} = \frac{BC}{Sin\beta} = \frac{AC}{Sin\gamma} \ldots\ldots\ldots(6\text{-}3)$$



شكل (3-7)

مثال3-1-:

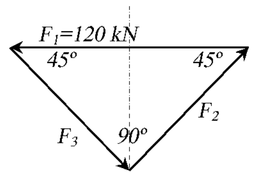
إذا كانت القوى F_1, F_2 & F_3 شكل (3-8) في حالة اتزان فأوجد مقدار كل من F_2 & F_3 باستخدام قاعدة الجيوب.



شكل (3-8)

الحل:

باستخدام قاعدة الجيوب نجد أن القوى الثلاثة في اتجاه دوري واحد شكل (3-9).
وبالتالي فمحصلتها تساوي صفر.
وعليه نجد أن:



شكل (3-9)

$$\frac{120}{Sin90} = \frac{F_2}{Sin45} = \frac{F_3}{Sin45}$$

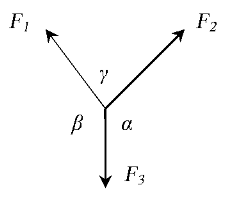
$$\therefore \quad F_2 = F_3 = 120 \cdot \frac{Sin45}{Sin90}$$

$$= 60\sqrt{2} \quad = 84.853\ kN$$

3-3-1-2 قاعدة لامى:

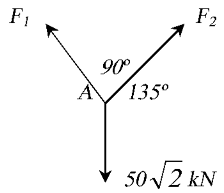
تنص هذه القاعدة على أن النسبة بين القوة وجيب الزاوية المناظرة لها ثابتة إذا تلاقت ثلاث قوى عند نقطة كما في شكل (3-10) وكانت محصلتها تساوى صفرا. أي أن:

$$\frac{F_1}{Sin\alpha} = \frac{F_2}{Sin\beta} = \frac{F_3}{Sin\gamma} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7\text{-}3)$$



شكل (3-10)

مثال 3-2:



باستخدام قاعدة لامى احسب مقدار القوّتين F_1 & F_2 للقوى المتزنة المتلاقية عند A شكل (3-11).

شكل (3-11)

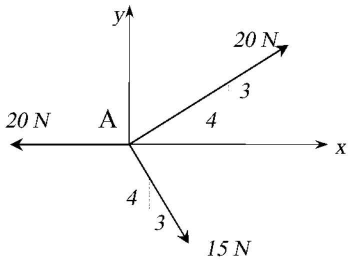
الحل:

$$\frac{F_1}{Sin135} = \frac{F_2}{Sin135} = \frac{50\sqrt{2}}{Sin90}$$

$$F_1 = F_2 = \quad 50\sqrt{2}\,\frac{Sin135}{Sin90} = 50\ kN$$

مثال 3-3:

احسب مقدار واتجاه المحصلة للقوى الموضحة في شكل (3-12) المؤثرة على النقطة A تحليليا وبالرسم.



الحل:

بالتحليل نحصل على:

شكل (3-12)

المركبة الرأسية	المركبة الأفقية	المقدار N	القوة
12 +	16 +	20	F_1
0	20 -	20	F_2
12 -	9 +	15	F_3
0	5 +	$\sum$	

$$R_x = \sum F_x = 5\ N \quad \& \quad R_y = \sum F_y = o \quad \Rightarrow$$

ومنه نجد أن المحصلة في اتجاه المحور السيني x وتساوي

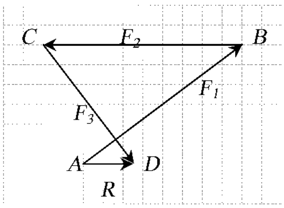
$$R = 5\ N$$

أما بالرسم فتتبع الخطوات التالية:

1- يختار مقياس رسم مناسب، وليكن في هذا المثال 1 : 2.

2- نبدأ من نقطة ولتكن A ونرسم القوة F_1 مقدارا واتجاها إلى النقطة B.

2- نستمر في رسم القوى واحدة بعد الأخرى في اتجاه دوري واحد حتى آخر قوة ونصل إلى النقطة D في هذا المثال.



شكل (3-13)

4- نصل نقطة البداية A بنقطة النهاية D يكون المستقيم AD معبرا عن المحصلة مقدارا واتجاها شكل (3-13).

5- بضرب مقدار طول المستقيم AD في مقياس الرسم نحصل على مقدار المحصلة.

وعليه:

$$R = 2.5 \times 2 = 5\ N$$

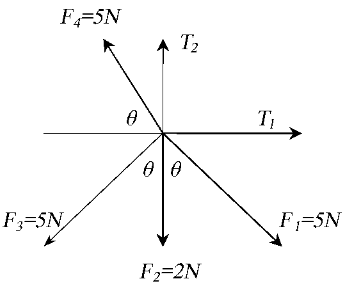
في اتجاه المحور السيني x.

مثال 3-4:

نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى

$$F_1 = 5N,\ F_2 = 2N,\ F_3 = 5N,\ F_4 = 5N$$

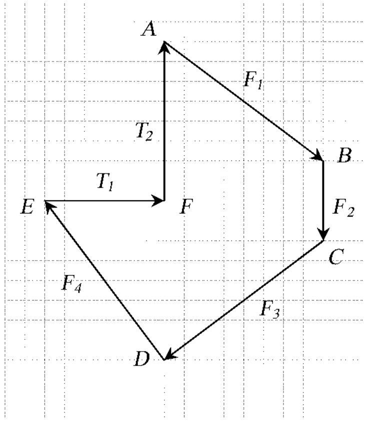
إضافة إلى $T_1\ \&\ T_2$ شكل (3-14). فإذا كان $Sin\,\theta = 4/5$ أوجد مقدار كل من $T_1\ \&\ T_2$ تحليليا وبيانيا.



شكل (3-14)

الحل:

أولا: بيانيا (بالرسم):



شكل (3-15)

1- يختار مقياس رسم مناسب، وليكن في هذا المثال 2 : 1.

2- نبدأ من نقطة ولتكن A ونرسم القوة F_1 مقدارا واتجاها إلى النقطة B شكل (3-15).

3- نستمر في رسم القوى واحدة بعد الأخرى في اتجاه دوري واحد حتى آخر قوة ونصل إلى النقطة E في هذا المثال.

4- من النقطة E نرسم خطا أفقيًا يمثل اتّجاه القوة T_1.

5- على هذا الخط نسقط عمودا من النقطةA يمثل اتّجاه القوة T_2. حيث يتقاطعا في نقطة F.

6- المستقيم EF يمثل القوة T_1 مقدارا واتجاها في حين أن المستقيم FA يمثل القوة T_2 مقدارا واتجاها. ويقفل المضلّع بجميع القوى في اتجاه دوري واحد حيث المحصلة تساوي صفرا.

7- بضرب طول المستقيمين FA ، EF في مقياس الرسم نحصل على مقدار كل منهما. وعليه:

$$T_1 = 6 \times ½ = 3N$$ في اتجاه المحور السيني x

و $$T_2 = 8 \times ½ = 4\,N$$ في اتجاه المحور الصادي y.

ثانيا: بالتحليل (بالحساب):

من المعطيات حيث أن $Sin\,\theta = \frac{4}{5}$ نجد أن $Cos\,\theta = \frac{3}{5}$

القوة	المقدار N	المركبة الرأسية	المركبة الأفقية
F_1	5	$-F_1 Cos\theta = -3$	$F_1 Sin\,\theta = 4$
F_2	2	$-F_2 = -2$	0
F_3	5	$-F_3 Cos\theta = -3$	$-F_1 Sin\,\theta = -4$
F_4	5	$F_4 Sin\,\theta = 4$	$-- F_4 Cos\theta = -3$
T_1	T_1	0	T_1
T_2	T_2	T_2	0
	$\sum$	$T_2 - 4$	$T_1 - 3$

من الاتزان في الاتجاه الأفقي نحصل على:

$$\sum F_x = T_1 - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = 3\ N$$

ومن الاتزان في الاتجاه الرأسي نحصل على:

$$\sum F_y = T_2 - 4 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_2 = 4\ N$$

النتائج متطابقة مع الحل البياني.

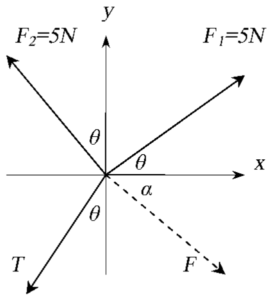
مثال3-5:

باستخدام الرسم، أوجد

مقدار T & α التي تجعل F

أقل ما يمكن شكل (3-16) علما بأن:

$Tan\,\theta = ¾$

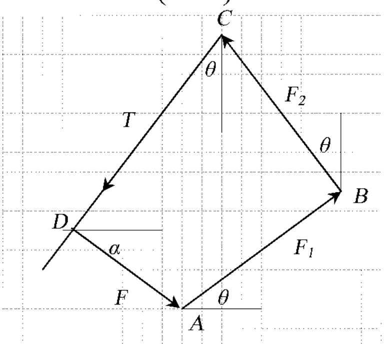


شكل (3-16)

الحل:

1- يختار مقياس رسم مناسب، وليكن في هذا المثال 2 : 1.

2- نبدأ من نقطة ولتكن A ونرسم القوة F_1 مقدارا واتجاها إلى النقطة B شكل (3-17).

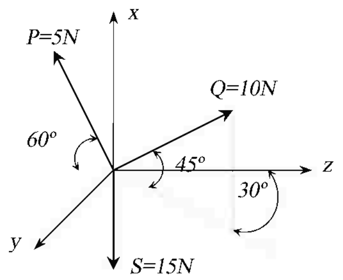


شكل (3-17)

3- من النقطة B نرسم القوة F_2 مقدارا
واتجاها حيث تميل على الرأسي بمقدار
الزاوية θ وتصل إلى النقطة C.
4- من النقطة C نرسم خطا يميل على
الرأسي بمقدار الزاوية θ يمثل اتّجاه القوة T.
5- على هذا الخط نسقط عمودا من النقطة A حيث يتقاطعا في نقطة D.
6- نصل CD فيكون ممثلا للقوة T اتجاها ومقدارا بعد ضربه في مقياس الرسم.
7- نصل DA فيكون ممثلا للقوة F اتجاها ومقدارا بعد ضربه في مقياس الرسم.
8- الزاوية المطلوبة α تساوي الزاوية θ لأن CD، AD متعامدان.
وعليه:

$$T = 12.4 \times ½ = 6.2\ N, \quad F = 6.6 \times ½ = 3.3\ N \quad \& \quad \alpha = Tan^{-1}(3/4)$$

مثال 3-6:
في الشكل المجاور، O نقطة تؤثر
عليها القوى الموضحة شكل (3-18).
والمطلوب:
1- اكتب المتجهات $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}\ \&\ \boldsymbol{Q}$.
2- أوجد مقدار واتجاه المحصلة.



شكل (3-18)

الحل:

$$P_x = 5\ Sin\ 60^o = 2.5\sqrt{3}\ N$$
$$P_y = 0$$
$$P_z = -\ 5\ Cos\ 60^o = -\ 2.5\ N$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{P} = 2.5\sqrt{3}\, i - 2.5\, k$$
$$\boldsymbol{S} = -\ 15i$$

$$Q_x = 10 \, Sin \, 45^o \qquad = 5\sqrt{2} \, N,$$

$$Q_y = 10 \, Cos \, 45^o * Sin \, 30^o \qquad = 2.5\sqrt{2} \; N$$

$$Q_z = 10 \, Cos \, 45^o * Cos \, 30^o \qquad = 2.5 \; \sqrt{6} \; N$$

$$\therefore \quad \mathbf{Q} = 5\sqrt{2}\, i + 2.5\sqrt{2}\, j + 2.5 \; \sqrt{6} \; k$$

$$\mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{S} + \mathbf{Q}$$

$$= (\; 2.5\sqrt{3} - 15 + 5\sqrt{2} \;)i + (2.5\sqrt{2}\,)j + (-2.5 + 2.5 \; \sqrt{6} \;)k$$

$$= - 3.6i + 3.54j + 3.62k$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{\left(-3.6^2\right) + \left(3.54\right)^2 + \left(3.62\right)^2}$$

$$= 6.21 \, N$$ وهو مقدار المحصلة

$$\lambda_R = \frac{\bar{R}}{R} = -\frac{3.6}{6.21}i + \frac{3.54}{6.21}j + \frac{3.62}{6.21}k \qquad = - 0.58i + 0.57j + 0.583k$$

$$= Cos \; \theta_x i + Cos \; \theta_y j + Cos \; \theta_z \, k$$ وهو وحدة المتجهات للمحصلة

$$\therefore \quad \theta_x = Cos^{-1} \, (-0.58 \,) = 125.45^\circ \quad , \qquad \theta_y = Cos^{-1}(0.57) = 55.25^\circ$$

$$\& \quad \theta_z = Cos^{-1}(0.583) = 54.34^\circ$$

وهي زوايا ميل المحصلة.

مثال 3-7:

في الشكل (3-19) المبيّن إذا كان الشد في الخيطين $EB \; \& \; EA$ معطى كالتالي:

$$\mathbf{T_{EA}} = - 4j - 3k$$

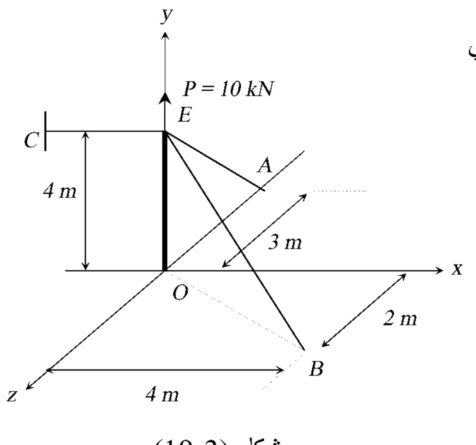
$$\mathbf{T_{EB}} = 6i - 6j + 3k$$

أوجد:

1- مقدار الشد في الخيط EC.

2- مقدار محصلة الشد في الخيطين $EB \; \& \; EA$.

3- مركبة الشد $\mathbf{T_{EB}}$ على الخط OB.



شكل (3-19)

O=(0,0,0)

C=(-1,4,0)

E=(0,4,0)

A= (0,0,-3)

B= (4,0,2)

OB= (4-0)i + (0-0)j + (2-0)k= 4i+2k

الحل:

1- وحدات المتجهات هي:

$$\lambda_{EC} = -\, i \qquad \lambda_{OB} = \frac{OB}{|OB|} = \frac{4i + 2k}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\,2i + k\,) \;\&\; \qquad \lambda_P = j$$

من اتزان نقطة E نحصل على:

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F} = \boldsymbol{T_{EA}} + \boldsymbol{T_{EB}} + \boldsymbol{T_{EC}} + \boldsymbol{P} = 0$$

$$= (\,-4j - 3k\,) + (\,6i - 4j + 3k\,) - T_{EC}i + 10j$$

من تسوية المعاملات نجد أن:

$$i \quad \Rightarrow \quad 6 - T_{EC} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{EC} = 6\ kN$$

$$j \quad \Rightarrow \quad -4 - 6 + 10 = 0 \quad \text{صح}$$

$$k \quad \Rightarrow \quad -3 + 3 = 0 \quad \text{صح}$$

2- محصلة الشد في الخيطين $EB\ \&\ EA$:

$$\boldsymbol{R'} = \boldsymbol{T_{EA}} + \boldsymbol{T_{EB}} = 6i - 10j$$

$$\therefore \qquad R' = \sqrt{6^2 + (-10)^2} \approx 11.662\ kN$$

3- مسقط الشد $\boldsymbol{T_{EB}}$ على الخط OB:

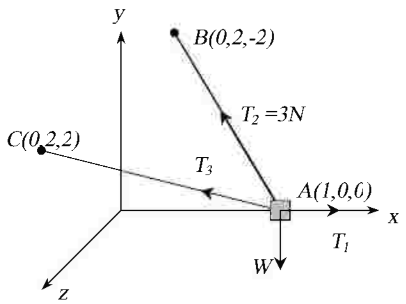
$$= \boldsymbol{T_{EB}} \cdot \lambda_{OB}$$

$$= (\,6i - 4j + 3k\,) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(\,2i + k\,)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(12+3) \qquad = 3\sqrt{5}\,kN$$

مثال 3-8:

أوجد وزن الجسم W الموضوع عند النقطة A شكل (3-20) وكذلك الشد في الخيطين T_1 & T_3 إذا علم أن الشد في الخيط AB يساوي $T_2 = 3\ N$.



شكل (3-20)

الحل:

النقطة A متزنة تحت تأثير الشد في الخيوط الثلاثة وكذلك الوزن. هذه القوى يعبّر عنها كمتجهات بضربها في وحدة المتجهات.

$$\therefore \qquad \lambda_1 = i \qquad , \qquad \lambda_2 = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$$

$$= \frac{-i+2j-2k}{\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(-2)^2}}$$

$$= 1/3\ (-i+2j-2k)$$

$$\lambda_3 = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$= \frac{-i+2j+2k}{3} \qquad \& \qquad \lambda_4 = -j$$

$$\mathbf{T_1} = T_1\,\lambda_1, \quad \mathbf{T_2} = T_2\,\lambda_2, \quad \mathbf{T_3} = T_3\,\lambda_3 \quad \& \quad \mathbf{W} = W\lambda_4$$

$$\therefore \qquad \mathbf{R} = \sum \mathbf{F} = \mathbf{T_1} + \mathbf{T_2} + \mathbf{T_3} + \mathbf{W}$$

$$= T_1 i + \frac{T_2}{3}(-i+2j-2k) + \frac{T_3}{3}(-i+2j+2k) - Wj = 0$$

من تسوية المعاملات نحصل على:

$$i \Rightarrow \quad T_1 - \frac{T_2}{3} - \frac{T_3}{3} = T_1 - 1 - \frac{T_3}{3} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$j \Rightarrow \quad \frac{2T_2}{3} + \frac{2T_3}{3} - W = 2 + \frac{2T_3}{3} - W = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

$$k \Rightarrow \quad -\frac{2T_2}{3} + \frac{2T_3}{3} = -2 + \frac{2T_3}{3} = 0 \Rightarrow \quad T_3 = 3\ N$$

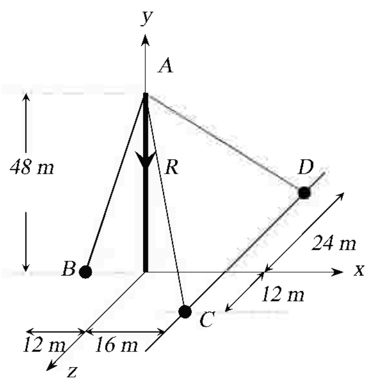
بالتعويض في المعادلات (2) ثم (1) نحصل على:

$$W = 2 + 2 = 4N \quad \&$$

$$T_1 = 1 + 1 = 2\ N$$

مثال3-9:

عمود مثبّت رأسيا بواسطة ثلاثة حبال $AB, AC \& AD$ كما هو موضّح بالشكل (3-21). فإذا كانت قوة الشد في الخيط $AC=28\ N$ أحسب قوة الشد في الخيطين $AB \& AD$ بحيث تكون محصلة القوى الثلاثة المؤثرة عند A في الاتجاه الرأسي وأوجد مقدارها.



شكل (3-21)

الحل:

إحداثيات النقاط المختلفة هي:

$$A(0,48,0), \quad B(-12,0,0), \quad C(16,0,12) \quad \& \quad D(16,0,-24)$$

وحدات المتجهات هي:

$$\lambda_{AB} = \frac{12(-i-4j)}{12\sqrt{(-1)^2+(-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-i-4j)$$

$$\lambda_{AC} = \frac{4(4i-12j+3k)}{4\sqrt{4^2+(-12)^2+3^2}} = \frac{1}{13}(4i-12j+3k)$$

$$\lambda_{AD} = \frac{8(2i-6j-3k)}{8\sqrt{2^2+(-6)^2+(-3)^2}} = \frac{1}{7}(2i-6j-3k)$$

$$\& \qquad \lambda_R = -j$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{T_{AB}} + \mathbf{T_{AC}} + \mathbf{T_{AD}} = T_{AB}\lambda_{AB} + T_{AC}\lambda_{AC} + T_{AD}\lambda_{AD}$$

$$= T_{AB} * \frac{1}{\sqrt{17}}(-i-4j) + 28 * \frac{1}{13}(4i-12j+3k) + T_{AD} * \frac{1}{7}(2i-6j-3k)$$

$$= -Rj$$

من تساوى المعاملات نحصل على:

$$i \Rightarrow \quad -\frac{T_{AB}}{\sqrt{17}} + \frac{112}{13} + \frac{2T_{AD}}{7} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$j \Rightarrow \quad -\frac{4T_{AB}}{\sqrt{17}} - \frac{336}{13} - \frac{6T_{AD}}{7} = -R \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

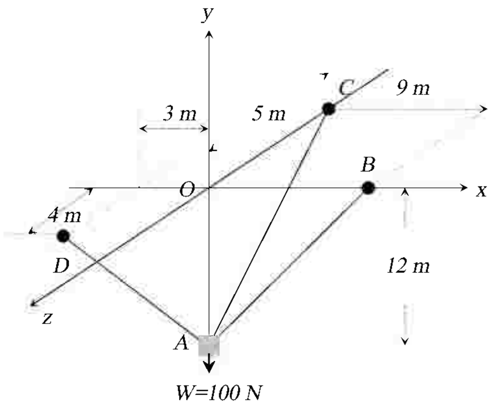
$$k \Rightarrow \quad \frac{84}{13} - \frac{3T_{AD}}{7} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{AD} = \frac{7(84)}{3(13)} \approx 15.08\ N$$

بالتعويض في المعادلات (1) ثم (2) نحصل على:

$$T_{AB} = \frac{1176}{91}\sqrt{17} \approx 53.28\ N \qquad \& \qquad R = \frac{8232}{91} = 90.46\ N$$

مثال3-10:

ثقل وزنه $100\ N$ محمول بواسطة ثلاثة أسلاك $AB,\ AC\ \&\ AD$ كما هو موضّح بالشكل (3-22). أحسب الشد في الأسلاك الثلاثة.



شكل (3-22)

الحل:

إحداثيات النقاط المختلفة هي:

$$A(0,-12,0),\quad B(9,0,0),\quad C(0,0,-5)\quad \&\quad D(-3,0,4)$$

وحدات المتجهات هي:

$$\lambda_{AB} = \frac{(9i+12j)}{\sqrt{9^2+12^2}} = \frac{1}{5}(3i+4j)$$

$$\lambda_{AC} = \frac{(12j-5k)}{\sqrt{12^2+(-5)^2}} = \frac{1}{13}(12j-5k)$$

$$\lambda_{AD} = \frac{(-3i+12j+4k)}{\sqrt{(-3)^2+12^2+4^2}} = \frac{1}{13}(-3i+12j+4k)$$

$$\&\qquad \lambda_W = -j$$

نقطة A متزنة تحت تأثير الوزن $100\ N$ والشد في الأسلاك ألثلاثة وبالتالي فمحصلة هذه القوى تساوى الصفر.

$$\therefore\quad \mathbf{R} = \mathbf{T_{AB}} + \mathbf{T_{AC}} + \mathbf{T_{AD}} + \mathbf{W}$$

$$\mathbf{R} = T_{AB}\lambda_{AB} + T_{AC}\lambda_{AC} + T_{AD}\lambda_{AD} + W\lambda_W$$

$$= T_{AB} * \frac{1}{5}(3i+4j) + T_{AC} * \frac{1}{13}(12j-5k)$$

$$+ T_{AD} * \frac{1}{13}(-3i+12j+4k) - 100j$$

من تساوى المعاملات نحصل على:

$$i \Rightarrow \quad \frac{3}{5}T_{AB} - \frac{3}{13}T_{AD} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$j \Rightarrow \quad \frac{4}{5}T_{AB} + \frac{12}{13}T_{AC} + \frac{12}{13}T_{AD} - 100 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$k \Rightarrow \quad -\frac{5}{13}T_{AC} + \frac{4}{13}T_{AD} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$\therefore \quad T_{AC} = \frac{4}{5}T_{AD} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$T_{AB} = \frac{5}{13}T_{AD} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

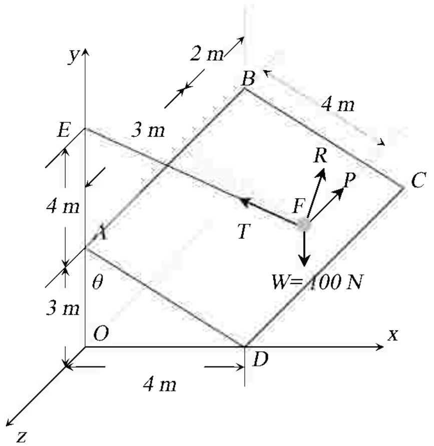
بالتعويض في المعادلات (2) ثم (4) ثم (5) على التوالي نحصل على:

$$T_{AD} = \frac{1625}{32} = 50.78\ N \quad , \quad T_{AC} = \frac{325}{8} = 40.63\ N$$

$$\& \qquad T_{AB} = \frac{625}{32} = 19.53\ N$$

مثال3-11:

جسم موضوع عند النقطة F في المستوى المائل$ABCD$ وفي حالة اتزان تحت تأثير القوة P التي تعمل في اتجاه المحور z، والقوة R العاملة في الاتجاه العمودي على المستوى المائل$ABCD$ والسلك الواصل بين النقطتين F & E شكل (3-23). أوجد مقدار كل من القوى P, R & T_{FE} علما بأن وزن الجسم$100N$.



شكل (3-23)

الحل:

إحداثيات النقاط المختلفة هي:

$$A(0,3,0)^m \quad C(4,0,-5)^m, \quad D(4,0,0)^m, \quad E(0,7,0)^m$$

أما إحداثيات النقطة F فهي:

$$4\ Sin\,\theta = 4*4/5 = 3.2, \qquad 3 - 4\ Cos\theta = 3 - 4*3/5 = 0.6 \quad \& \qquad -3$$

$$\therefore \qquad F(3.2,0.6,-3)^m$$

وحدات المتجهات هي:

$$\lambda_{FE} = \frac{-3.2i + 7j + 3k}{\sqrt{(-3.2)^2 + 7^2 + 3^2}} = -0.3874i + 0.8475j + 0.3632k$$

$$\lambda_W = -j \qquad\qquad \lambda_P = -k$$

ولحساب متجه الوحدة λ_R فان ذلك يتم بضرب المتجهين $\mathbf{AD} \times \mathbf{DC}$ حيث يكون الناتج متجه عمودي على المستوى $ABCD$ ثم قسمة الناتج على قيمته.

$$\mathbf{AD} \times \mathbf{DC} = (4i - 3j) \times (-5k) = 20j + 15i = 15i + 20j$$

$$\therefore \qquad \lambda_R = \frac{15i + 20j}{\sqrt{15^2 + 20^2}} = \frac{1}{5}(3i + 4j)$$

من الاتزان للنقطة F نحصل على:

$$\mathbf{R} + \mathbf{P} + \mathbf{T_{FE}} + \mathbf{W} = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$R\,\lambda_R + P\,\lambda_P + T_{FE}\,\lambda_{FE} + W\,\lambda_W = 0$$

$$R*\frac{1}{5}(3i+4j) + P*(-k) + T_{FE}*(-0.3874i + 0.8475j + 0.3632k) + W*(-j) = 0$$

من تساوى المعاملات ينتج أن:

$$i \Rightarrow \quad \frac{3R}{5} - 0.3874\,T_{FE} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$

$$j \Rightarrow \quad \frac{4R}{5} + 0.8475\,T_{FE} - 100 = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2)$$

$$k \Rightarrow \quad -P + 0.3632\,T_{FE} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (3)$$

بالتعويض في المعادلات (1) ، (2) نستنتج قيمة R & T_{FE} ثم من المعادلة (3) نحصل على قيمة P.

$$\therefore \quad T_{FE} = 73.31\ N, \quad R = 47.334\ N \quad \& \quad P = 26.626\ N$$

2-3-3 اتزان جسم في الفراغ.

عندما يكون جسم تحت تأثير عزم ازدواج فإن محصلة قوّتى الازدواج تساوى صفراً. وعليه فشرط الاتزان لجسم في الفراغ يستلزم أن تكون محصلة العزوم مساوية للصفر كذلك.

$$\boldsymbol{R} = \sum \boldsymbol{F} = 0 \qquad \& \qquad \boldsymbol{M} = \sum r \times \boldsymbol{F} + \sum \boldsymbol{m} = 0$$

حيث $\boldsymbol{m}$ تمثل أي عزوم مؤثرة على الجسم. وهذان الشرطان يمثلان ستة معادلات هي:

كقوى $\qquad \sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \& \quad \sum F_z = 0$

وكعزوم $\qquad \sum M_x = 0, \quad \sum M_y = 0 \quad \& \quad \sum M_z = 0$

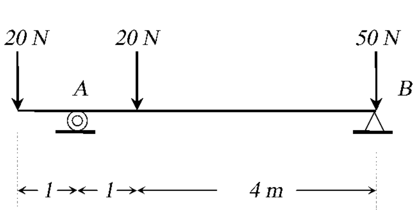
في حالة اتزان جسم في المستوى، هذه المعادلات الستة تختزل إلى ثلاثة فقط هي:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad \& \quad \sum M = 0$$

ومعلوم أن العزم في المستوى $y\,x$ يؤثر حول المحور z ولذلك يختصر في كتابته دون الإشارة إلى هذا المحور.

مثال3-12:

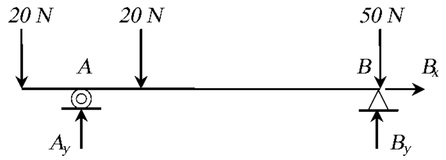
أوجد ردود الأفعال عند الركائز للكمرة المجاورة شكل (3-24).



شكل (3-24)

الحل:

تتلخص خطوات الحل لمثل هذه المسائل في الآتي:



شكل (3-25)

1- تحلل القوى المائلة إن وجدت إلى مركبات أفقية ورأسية.

2- تحلل ردود الفعل عند المستوى المائل فقط إلى مركبتين احداهما أفقية والأخرى رأسية. والمركبتين بدلالة ردّ الفعل، أي أن هناك مجهول واحد.

3- حسب نوع نقطة الارتكاز نفرض اتجاهات ردود الأفعال شكل (3-25).

4- من معادلات الاتزان نحسب قيم ردود الأفعال هذه ونغير الاتجاه إذا كانت الإجابة سالبة.

5- يمكن التحقق من صحة الإجابة بتطبيق معادلة العزوم حول نقطة غير التي أخذت لحساب أحد ردود الفعل المجهولة.

من تطبيق معادلة الاتزان في الاتجاه الأفقي لهذا المثال نجد أن:

$$\sum F_x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_x = 0$$

من تطبيق معادلة العزوم حول نقطة التثبيت B مع فرض أن العزوم في اتجاه عقارب الساعة للحل موجبة نحصل على:

$$\circlearrowright \sum M \,@\, B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad A_y\,(5) - 20\,(6) - 20\,(4) = 0$$

$$\therefore \qquad A_y = 40\,N \quad \uparrow$$

من تطبيق معادلة الاتزان في الاتجاه الرأسي نجد أن:

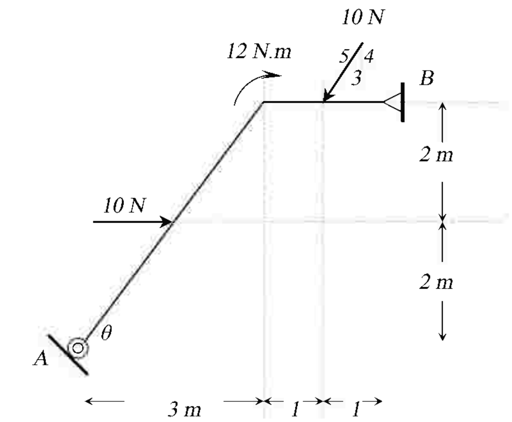
$$\sum F_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad -20 + 40 - 20 - 50 + B_y = 0$$

$$\Rightarrow \qquad B_y = 50\,N \qquad \uparrow$$

يجب الاهتمام بأن الجواب يظهر المقدار والتمييز والاتجاه. يمكن التحقق من الإجابة بأخذ العزوم حول نقطة A وتحقيق أن مجموعها الجبري يساوى الصفر.

مثال3-13:

أوجد ردود الأفعال عند نقاط الإرتكاز A & B شكل (3-26).

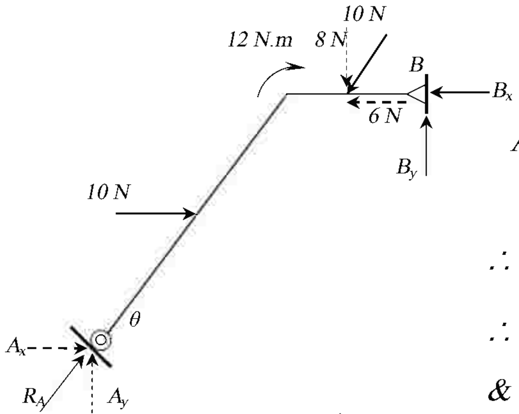


شكل (3-26)

الحل:

بتحليل القوة $10\ N$ المائلة إلى مركبتين نجد أن المركبة الرأسية تساوي $8\ N$ والمركبة الأفقية تساوي $6\ N$ وكذلك رد الفعل عند المفصل A العمودي على المستوى الأملس فالمركبة الأفقية تساوي $A_x=R_A \cos\theta$ والمركبة الرأسية تساوي $A_y=R_A \sin\theta$ شكل (3-27).

حيث $\sin\theta=4/5$ & $\cos\theta=3/5$.



شكل (3-27)

مخطط الجسم الحر

$$\circlearrowright \sum M @ B = 0 \Rightarrow$$

$$A_y(5)-A_x(4)-10(2 + 12 - 8(1) = 0$$

$$4/5R_A(5)-3/5R_A(4 - 20 + 12 - 8 = 0$$

$$\therefore \quad R_A = 10\ N \quad \nearrow$$

$$\therefore \quad A_x = 10 * 3/5 = 6\ N \rightarrow$$

$$\& \quad A_y = 10 * 4/5 = 8\ N \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 + 10 - 6 - B_x = 0$$

$$\therefore \quad B_x = 10\ N \leftarrow$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 - 8 + B_y = 0$$

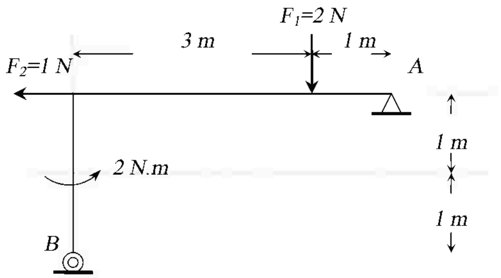
$$\therefore \quad B_y = 0$$

تحقيق:

$$\circlearrowleft \sum M @ A = 10(2) + 12 + 8(4) - 6(4) - 10(4) = 0$$ صح

مثال3-14:

أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت $A \& B$ للمنشأ الموضح بالشكل (3-28).



شكل (3-28)

الحل:

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow$$

$$A_x - 1 = 0$$

$$\therefore \quad A_x = 1\ N \rightarrow$$

$$\circlearrowleft \sum M @ A = 0 \quad \Rightarrow \quad B_y(4) - 2 - 2(1) = 0$$

$$\therefore \quad B_y = 1\ N \quad \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x - 1 = 0$$

$$\therefore \quad A_x = 1\ N \quad \rightarrow$$

تحقيق:

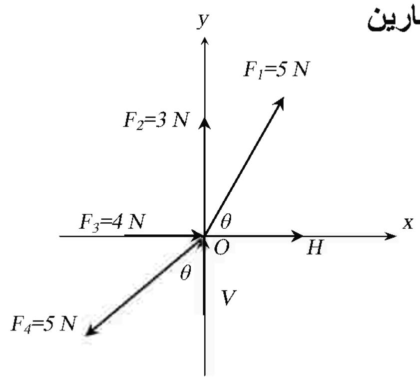
$$\circlearrowleft \sum M @ A = - 2 - 1(2) + 2(3) - 1(4) + 1(2) = 0$$ صح

تمارين

1-3 O نقطة مادية متزنة تحت تأثير القوى F_1, F_2, F_3, F_4 شكل (3-29). $V \& H$

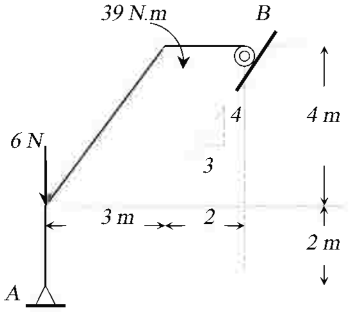
أوجد باستخدام الرسم مقدار كل من $V \& H$.

تأكد من النتائج بالتحليل.



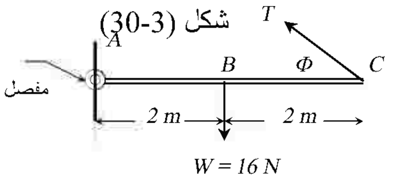
شكل (3-29)

2-3 أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت $A \& B$ شكل (3-30).



شكل (3-30)

3-3 قضيب طوله $4\ m$ ووزنه $16\ N$ يؤثر في المنتصف، ومثبّت بمفصل عند A، ولكي يتزن القضيب ثبت بخيط عند C يميل بزاوية Φ شكل (3-31) فإذا كان أقصى شدّ في الخيط $10\ N$



شكل (3-31)

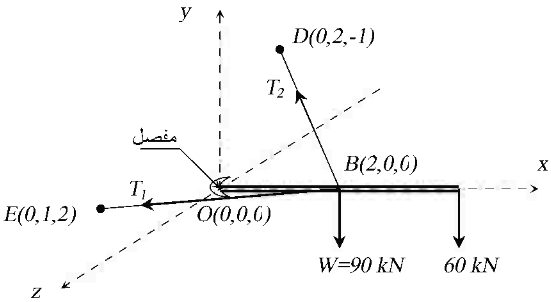
أوجد:

1- أقل قوة شد للاتزان.

2- أقل زاوية ميل لازمة للاتزان.

3- ردود الفعل عند المفصل A في حالة أقل زاوية ميل للخيط.

4-3 قضيب وزنه $90\ kN$ مثبت بمفصل عند طرفه O ومربوط بخيطين عند منتصفه B، وعند نهايته C علق ثقل مقداره $60\ kN$ شكل (3-32).



شكل (3-32)

أوجد:

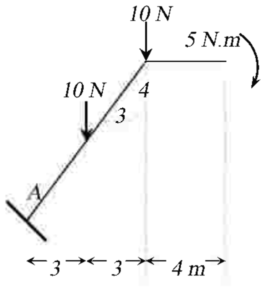
1- مقدار الشد في الخيطين $BE \& BD$.

2- الزاوية بين الخيطين $BE \& BD$.

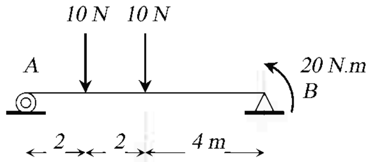
3- عزم القوة $60\ kN$ حول النقطة B.

4- ردود الفعل عند المفصل O.

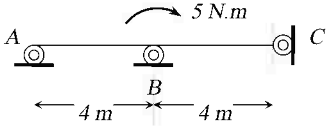
5-3 إلى **12-3** للأشكال (3-33) إلى (3-40) أوجد ردود الفعل عند نقاط التثبيت للمنشآت الآتية:



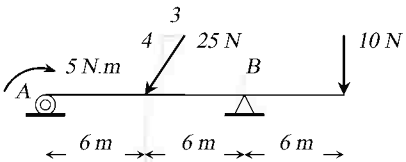
شكل (3-33)



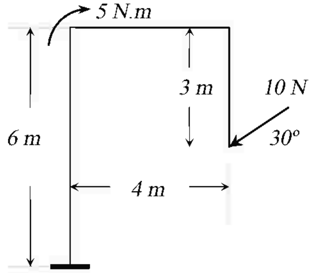
شكل (3-34)



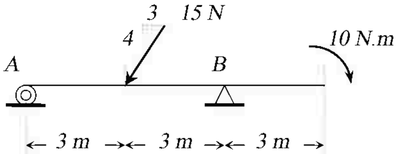
شكل (3-35)



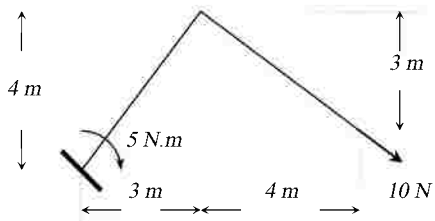
شكل (3-36)



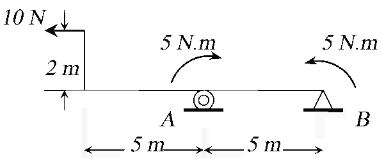
شكل (3-37)



شكل (3-38)

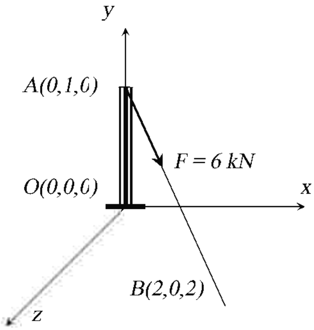


شكل (3-39)



شكل (3-40)

13-3 قضيب مثبت عند O بدعامة تمنع الحركة والدوران في جميع الاتجاهات شكل (3-41).
تؤثر عليه قوة مقدارها $6\ kN$ عند A وفي اتجاه AB.



شكل (3-41)

أوجد:

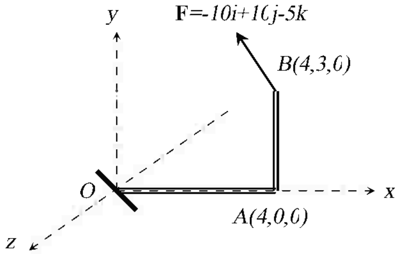
1- العزوم عند O.

2- القوة المكافئة $\boldsymbol{R}$ & $\boldsymbol{M}$.

3- الزاوية بين $\boldsymbol{R}$ & $\boldsymbol{M}$ ومسقط $\boldsymbol{M}$ على $\boldsymbol{R}$ ($\boldsymbol{M_R}$).

4- ردود الفعل عند الكرسي O.

14-3 قضيب OAB مثبت عند النقطة O يؤثر عليه القوة $\boldsymbol{F}$ عند النقطة B شكل (3-42). أوجد:



شكل (3-42)

1- متجه الوحدة λ_{BO} ومتجه الوحدة للقوة $\boldsymbol{F}$(λ_F).

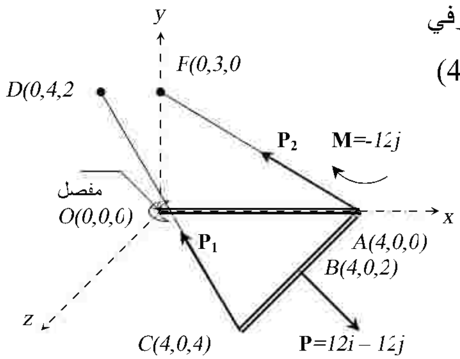
2- عزم القوة $\boldsymbol{F}$ حول نقطة O.

3- الزاوية بين $\boldsymbol{F}$ & $\boldsymbol{BO}$.

4- زوايا ميل القوة $\boldsymbol{F}$. (θ_x, θ_y & θ_z)

5- ردود الفعل عند نقطة التثبيت.

15-3 قضيب OAC مثبت بمفصل عند O وفي حالة اتزان. تؤثر عليه القوة شكل (3-43) $\boldsymbol{P} = 12i - 12j$ عند $B(4,0,2)$ والقوتين $\boldsymbol{P_1}$ تؤثر في اتجاه CD حيث $C(4,0,04)$, $D(0,4,2)$ و $\boldsymbol{P_2}$ تؤثر في اتجاه AF حيث $A(4,0,0)$ $F(0,3,0)$ وعزم مركز $\boldsymbol{M} = -12j$ حيث جميع القوى بالنيوتن والأبعاد



شكل (3-42)

بالمتر. أوجد:

1- المتجهات **AF, CD & CA**

والزاوية DCA.

2- أكتب معادلة العزوم حول O بدلالة **P_1 & P_2**.

3- أوجد **P_1 & P_2** واستخدم العزم حول الخط OY (M_{OY}) للتأكد من صحة النتائج.

4- أوجد رد الفعل عند O في اتجاه Z فقط.

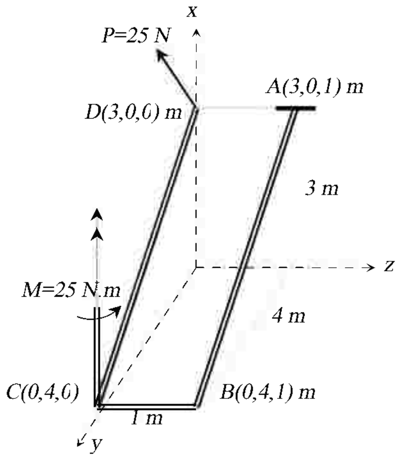
16-3 قضيب على شكل حرف U مثبت عند A بحيث لا يمكنه الحركة ولا الدوران في جميع الجهات شكل (3-43). يؤثر عليه عند C عزم قيمته $25\ N.m$ وعند D قوة عمودية على المستوى $ABCD$ قيمتها $25\ N$.

أوجد:

1- الزاوية بين CD & CB.

2- عزم القوة P حول A.

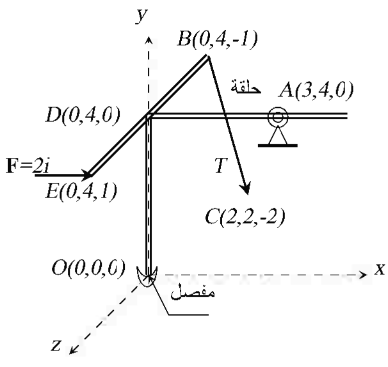
3- ردود الفعل عند A.



شكل (3-43)

17-3 الهيكل الموضح بالشكل مثبت بالمفصل O الذي يسمح بالدوران في جميع الاتجاهات ويمنع الحركة في اتجاه المحاور الرئيسية x, y & z ومثبت بالحلقة في $A(3,4,0)$ التي تسمح بالدوران في جميع الاتجاهات وتمنع الحركة في اتجاه y & z شكل (3-44).

تؤثر القوة $\boldsymbol{F} = 2i$ عند النقطة $E(0,4,1)$ وللاتزان مسك بالخيط BC.



شكل (3-44)

أوجد :

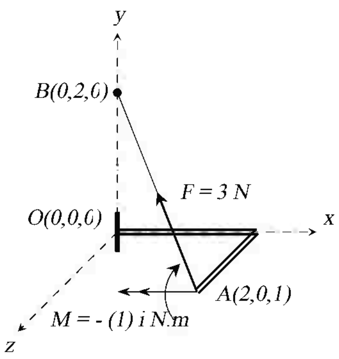
1- عزم القوة $\boldsymbol{F}$ حول نقطة O.

2- الشد في الخيط BC باستخدام العزم حول المحور OA.

3- أوجد ردود الفعل عند A باستخدام العزم حول O.

4- أوجد ردود الفعل عند O باستخدام بقية شروط الاتزان.

18-3 قضيب OA المثبت عند O بعامة ثابتة وتؤثر عليه القوة $F = 3\ N$ عـ A وفي اتجاه AB وعزم $M_A = -(1)i\ N.m$ يؤثر عند A شكل (3-45).



شكل (3-45)

أوجد:

1- عزم القوة F عند O.

2- $\boldsymbol{M_o}$ & $\boldsymbol{R}$ والزاوية بينهما.

3- ردود الفعل عند الدعامة الثابتة O.

4- زوايا ميل $\boldsymbol{AB}$.