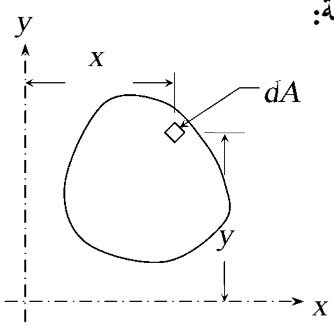
الباب الخامس

مراكز ثقل المساحات

يقصد بمركز الثقل لأي مساحة أنه لو قدّر لهذه المساحة أن تعمل من خلال نقطة لكانت هذه النقطة هي مركز الثقل. وتحسب إحداثيات مركز الثقل لأي مساحة بتطبيق مفهوم العزوم على المساحات كمتشابهات للقوى.

1-5 العزم الأول للمساحة حول محاور المستوى الأساسية:



شكل (1-5)

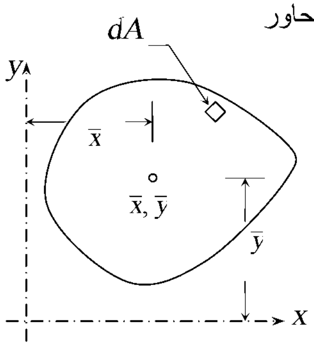
يعرّف مقدار العزم الأول للمساحة حول المحاور الأساسية x & y شكل (1-5) بناتج ضرب المساحة وبعد مركز المساحة عن المحور الأساسي كما توضحه المعادلتين (1-5) & (2-5) التاليتين:

$$Q_x = \int y dA \text{ ....(1-5)}$$

$$Q_y = \int x dA \text{ ....(2-5)}$$

2-5 مركز الثقل للمساحة:

سبق تعريف مركز المساحة بأنه النقطة التي تعمل من خلالها المساحة لأي شكل هندسي شكل (2-5). وبتطبيق معادلتي عزم المساحة حول المحاور الأساسية (1-5) & (2-5)



شكل (2-5)

$$Q_x = \int y dA = A\bar{y} \quad \&$$

$$Q_y = \int x dA = A\,\bar{x}$$

نحصل على بعدي مركز الثقل للمساحة عن المحاور الأساسية وهما:

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int x dA}{\int dA} \quad \& \quad \bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

لاحظ أن العزم الأول للمساحة حول محور يمر بمركز الثقل يؤول إلى الصفر.

3-5- مركز الثقل لشكل مركب:

عندما يكون هناك شكل مركب يتكون من عدة أشكال أساسية يقسّم الشكل إلى أشكال بسيطة ويؤخذ المجموع الجبري لمساحات الأجزاء المختلفة وكذلك عزوم هذه الأجزاء وبقسمتها على بعضها يحسب أبعاد مركز الثقل.

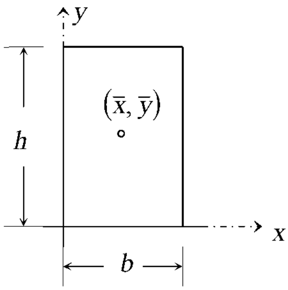
$$\bar{x} = \frac{\sum Q_y}{\sum A} = \frac{\sum \int x dA}{\sum \int dA} \qquad (3\text{-}5)$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Q_x}{\sum A} = \frac{\sum \int y dA}{\sum \int dA} \qquad (4\text{-}5)$$

أمثلة

مثال5-1:

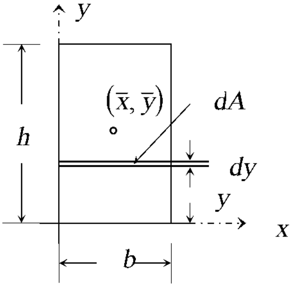
باستخدام التكامل أوجد مساحة المستطيل الذي قاعدته b وارتفاعه h وكذلك أوجد إحداثيات مركز ثقله$(\bar{x}, \bar{y})$ شكل (5-3).



شكل (5-3)

الحل:

باستخدام شريحة أفقية شكل (5-4) نجد أن:



شكل (5-4)

$$dA = b\,dy$$

$$A = \int dA = \int_0^h b\,dy$$

$$= by\Big|_0^h = b\,(h-0)$$

$$= bh$$

أي أن مساحة المستطيل تساوي الطول مضروبا في العرض.

أما عزم المساحة الأول حول المحور y فيساوي:

$$Q_x = \int y dA = \int_0^h ybdy$$

$$= b\frac{y^2}{2}\Big|_0^h$$

$$= \frac{b}{2}\left(h^2 - 0\right) \qquad = \frac{bh^2}{2}$$

بعد مركز الثقل عن المحور السيني x يساوي:

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y dA}{\int dA}$$

$$= \quad \frac{bh^2}{2} \times \frac{1}{bh} \qquad = \frac{h}{2}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن بعد مركز الثقل عن المحور الصادي y يساوي:

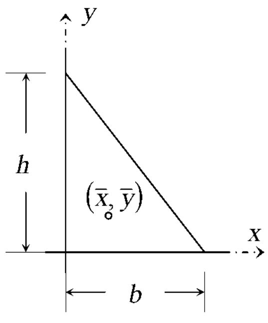
$$\bar{x} = \frac{b}{2}$$

مثال5-2:

باستخدام التكامل أوجد مساحة المثلث

الذي قاعدته b وارتفاعه h وكذلك أوجد

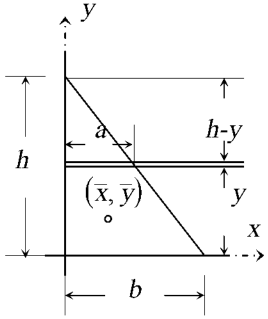
إحداثيات مركز ثقله$(\bar{x}, \bar{y})$ شكل (5-5).



شكل (5-5)

الحل:

باستخدام شريحة أفقية شكل (5-6) نجد



شكل (5-6)

أنه من تشابه المثلثين نحصل على:

$$\frac{a}{b} = \frac{h-y}{h} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$dA = a\,dy = \frac{b}{h}(h-y)\,dy$$

$$A = \int dA = \int_0^h \frac{b}{h}(h-y)dy$$

$$= \frac{b}{h}\left(hy - \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^h$$

$$= \frac{b}{h}\left\{h(h-0) - \frac{1}{2}(h^2-0)\right\}$$

$$= \frac{b}{h}\left(h^2 - \frac{h^2}{2}\right) = \frac{b}{h} \times \frac{h^2}{2}$$

$$= \frac{bh}{2}$$

أي أن مساحة المثلث تساوي نصف القاعدة مضروبا في الارتفاع. أما عزم المساحة الأول حول المحور x فيساوي:

$$Q_x = \int y dA = \int_0^h \frac{b}{h}\left(hy - y^2\right)dy$$

$$Q_x = \frac{b}{h}\left\{h\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right\}\Bigg|_0^h = \frac{b}{h}\left\{\frac{h}{2}\left(h^2-0\right) - \frac{1}{3}\left(h^3-0\right)\right\}$$

$$= \frac{b}{h}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{bh^3}{6h}(3-2) = \frac{bh^2}{6}$$

بعد مركز الثقل عن المحور السيني x يساوي:

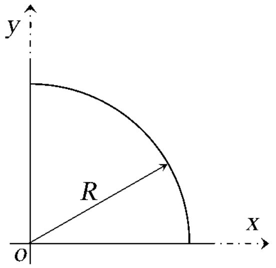
$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{bh^2}{6} \times \frac{2}{bh} = \frac{h}{3}$$

أي أن مركز الثقل في المثلث يبعد مسافة تساوي ثلث ارتفاع المثلث. وبالمثل يمكن إثبات أن بعد مركز الثقل عن المحور الصادي y يساوي:

$$\bar{x} = \frac{b}{3}$$

مثال 5-3:

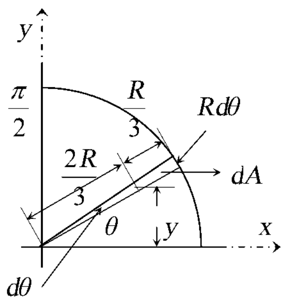
باستخدام التكامل أوجد مساحة ربع الدائرة (ومن ثم مساحة الدائرة) وإحداثيات مركز الثقل $(\bar{x}, \bar{y})$ شكل (5-7).



شكل (5-7)

الحل:

باستخدام قطعة دائرية كشريحة على بعد زاوية مركزية θ وزاويتها المركزية $d\theta$ ينتج أن هذه الشريحة تكافئ مثلث لصغرها شكل (5-8). وعليه:



شكل (5-8)

$$dA = ½\, Rd\theta * R$$

$$= ½\, R^2 d\theta$$

$$A = \int dA = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} R^2 d\theta$$

$$= \frac{R^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{R^2}{2} \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi R^2}{4}$$

ومنه نجد أن مساحة الدائرة تساوي (πR^2) حيث π النسبة التقريبية المعربة (ط $\simeq$ 3.141).

أما عزم المساحة الأول حول المحور x يساوي:

$$Q_x = \int y dA = ⅔\, R\, Sin\theta * ½\, R^2 d\theta$$

$$= \tfrac{1}{3}R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} Sin\theta d\theta \qquad = \tfrac{1}{3}R^3 \left(-Cos\theta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \tfrac{1}{3}R^3 \{ -0 + 1 \} \qquad = \tfrac{1}{3}R^3$$

بعد مركز الثقل عن المحور السيني x يساوي:

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y dA}{\int dA} \qquad = \tfrac{1}{3}R^3 * \frac{4}{\pi R^2} \qquad = \frac{4R}{3\pi}$$

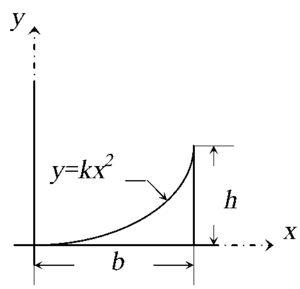
وبالمثل يمكن إثبات أن الاحداثي السيني لمركز الثقل يساوي

$$\bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$$

أي أن ربع الدائرة شكل متماثل حول محور ينصف زاوية ربع الدائرة المركزية وبالتالي يتساوى بعدي أي نقطة تقع على هذا المحور عن المحورين الأساسيين x ، y.

مثال 5-4:

باستخدام التكامل أوجد المساحة الواقعة بين المحور x والقطع المخروطي وإحداثيات مركز ثقله شكل (5-9).



شكل (5-9)

الحل:

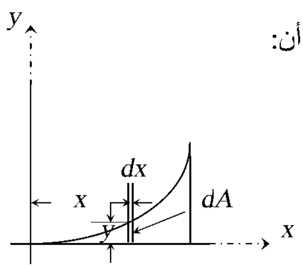
من الشروط الحدودية شكل (5-10) نجد أن:

$$@ \;\; x = b \qquad \Rightarrow \qquad y = h$$

وعليه فقيمة ثابت التقوس k يساوى

$$k = \frac{y}{x^2} = \frac{h}{b^2}$$

$$\therefore \qquad y = \frac{h}{b^2}\, x^2$$



شكل (5-10)

باستخدام شريحة رأسية على بعد x من المحور الرأسي y نحصل على:

$$dA = y\,dx = \frac{h}{b^2}\,x^2\,dx$$

$$A = \int dA = \int_0^b \frac{h}{b^2}\,x^2 dx$$

$$= \frac{h}{b^2} \cdot \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^b = \frac{hb}{3}$$

أي أن المساحة الواقعة بين المحور x القطع المخروطي من الدرجة الثانية تساوي ثلث القاعدة مضروبا في الارتفاع وأن الجزء المكمل للمساحة الواقعة بين المحور y ونفس القطع المخروطي تساوى ثلثي القاعدة مضروبا في الارتفاع. أما عزم المساحة الأول حول المحور الأفقي x فيساوى:

$$Q_x = \int y_e dA$$

حيث y_e هو بعد مركز ثقل الشريحة عن المحور الأفقي x ($= \frac{y}{2}$) وبعده عن المحور الرأسي y هو x_e ($x =$).

$$Q_x = \int y_e dA = \int_0^b \frac{h}{2b^2}\,x^2 * \frac{h}{b^2}\,x^2 dx$$

$$Q_x = \frac{h^2}{2b^4}\int_0^b x^4 dx = \frac{h^2}{2b^4}\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^b$$

$$= \frac{h^2}{10b^4} * b^5 = \frac{h^2 b}{10}$$

بعد مركز الثقل عن المحور الأفقي x يساوي:

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int y dA}{\int dA} = \frac{h^2 b}{10} * \frac{3}{hb} = \frac{3}{10}hb$$

أما عزم المساحة الأول حول المحور الرأسي y فيساوى

$$Q_y = \int x_e dA = \int_0^h x * \frac{h}{b^2}\,x^2 dx = \frac{h}{b^2}\int_0^h x^3 dx$$

$$Q_y = \frac{h}{b^2} * \frac{x^4}{4}\Big|_0^h = \frac{hb^2}{4}$$

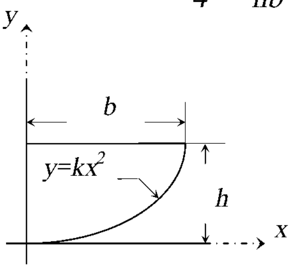
بعد مركز الثقل عن المحور الرأسي y يساوي

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int x dA}{\int dA}$$

$$= \frac{hb^2}{4} * \frac{3}{hb} = \frac{3b}{4}$$

مثال5-5:

باستخدام التكامل أوجد مساحة القطع المخروطي المجاور وإحداثيات مركز ثقله شكل (5-11).



شكل (5-11)

الحل:

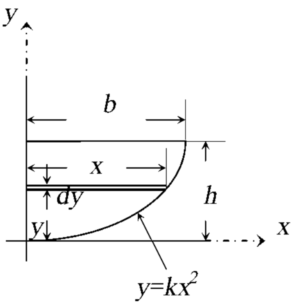
من الشروط الحدودية شكل (5-12) نجد أن:

$$@ \ x = b \Rightarrow y = h$$

وعليه فقيمة ثابت التقوس k يساوى

$$k = \frac{y}{x^2} = \frac{h}{b^2}$$

$$\therefore \quad y = \frac{h}{b^2} x^2$$



شكل (5-12)

باستخدام شريحة أفقية على بعد y من المحور الأفقي x نحصل على:

$$x_e = \tfrac{1}{2}x \qquad \& \qquad y_e = y$$

$$dA = x\,dy = \left(\frac{b^2}{h} y\right)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$A = \frac{b}{h^{1/2}}\int_0^h y^{1/2}dy = \frac{b}{h^{1/2}}\frac{y^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^h$$

$$= \frac{2}{3}*\frac{b}{h^{1/2}}*h^{3/2} = ⅔\ bh$$

وهذا يؤكد النتيجة المتوقعة من المثال السابق.

$$Q_x = \int y_e dA = \int y\left(\frac{b^2}{h}y\right)^{1/2}dy = \frac{b}{h^{1/2}}\int_0^h y^{3/2}dy$$

$$Q_x = \frac{b}{h^{1/2}}\frac{y^{5/2}}{5/2}\Bigg|_0^h = \frac{2}{5}*\frac{b}{h^{1/2}}h^{5/2} = \frac{2}{5}bh^2$$

$$\bar{y} = \frac{Q_x}{A} = \frac{\int ydA}{\int dA} = \frac{2bh^2}{5}*\frac{3}{2bh} = \frac{3}{5}h$$

$$Q_y = \int x_e dA = \int_0^h 1/2\left(\frac{b^2}{h}y\right)^{1/2}\left(\frac{b^2}{h}y\right)^{1/2}dy$$

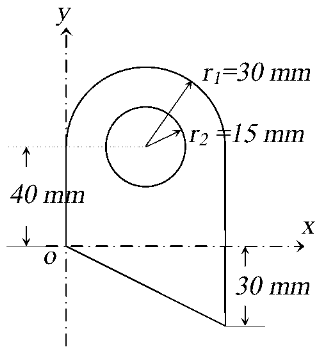
$$= \frac{1}{2}\frac{b^2}{h}\int_0^h ydy = \frac{1}{2}\frac{b^2}{h}*\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^h$$

$$= \frac{1}{4}\frac{b^2}{h}*h^2 = \frac{1}{4}b^2h$$

$$\bar{x} = \frac{Q_y}{A} = \frac{\int xdA}{\int dA} = \frac{1}{4}b^2h*\frac{3}{2bh} = \frac{3}{8}b$$

مثال 5-6:

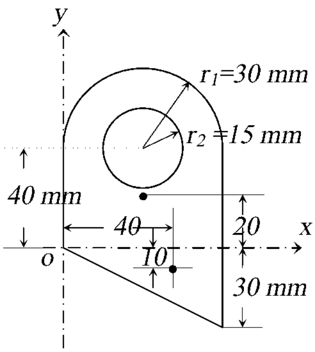
أوجد إحداثيات مركز الثقل للشكل المجاور الذي يمثل صفيحة بداخلها فتحة دائرية شكل (5-13).



شكل (5-13)

الحل:

يتكون شكل الصفيحة من مجموع كل من المستطيل والمثلث ونصف الدائرة مطروحا منه الدائرة الصغرى. الجدول التالي يوضح البيانات اللازمة لحساب مركز ثقل الشكل الكلي ويلاحظ أن ألإحداثي الرأسي للمثلث أخذ سالبا لوقوعه في الاتجاه السالب للمحور الرأسي شكل (5-14).



شكل (5-14)

$$\frac{4r_1}{3\pi} = \frac{4\times 30}{3\pi} = 12.73 \quad \Rightarrow$$

$$\bar{y} = 12.73+40 = 52.73 \text{ mm}$$

$Q_y=A\bar{x}$ ملم^3	$Q_x= A\,\bar{y}$ ملم^3	$\bar{y}$ ملم	$\bar{x}$ ملم	المساحة ملم^2	الجزء
72000	48000	20	30	2400 = (60)(40)	المستطيل
42411,6	74545,46	52,73	30	$1413,72=^2(30)(\pi)½$	نصف الدائرة الكبرى
21205,8 -	28274,4 -	40	30	$706,86 - =^2(15)\pi$ -	الدائرة الصغرى
36000	9000 -	10 -	40	900 = (30)(60)½	المثلث
129205,8	85271,06			4006,86	المجموع $\sum$

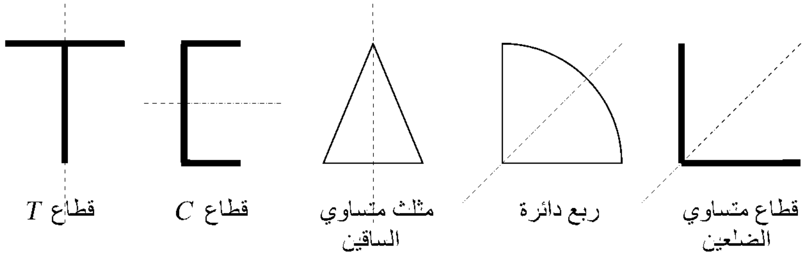
إحداثيات مركز الثقل هي:

$$\bar{x} = \frac{\sum Q_y}{\sum A} = \frac{\sum \int x dA}{\sum \int dA} = \frac{129205.8}{4006.86} = 32.25 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum Q_x}{\sum A} = \frac{\sum \int y dA}{\sum \int dA} = \frac{85271.06}{4006.86} = 21.28 \text{ mm}$$

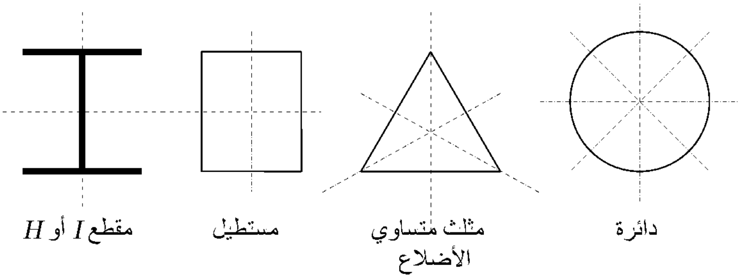
ملاحظات مهمة:

1- إذا كان للشكل محور تماثل فان مركز الثقل يقع على هذا الحور. الأشكال التالية نماذج لوجود محور تماثل واحد شكل (15-5).



شكل (15-5)

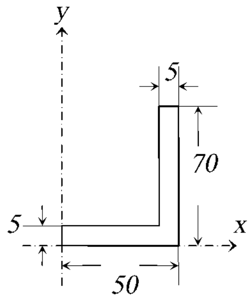
2- إذا كان للشكل أكثر من محور تماثل فان نقطة تقاطع هذه المحاور هي مركز الثقل. الأشكال التالية نماذج لوجود محوري تماثل أو أكثر.



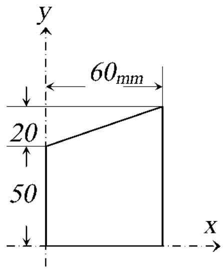
شكل (16-5)

تمارين

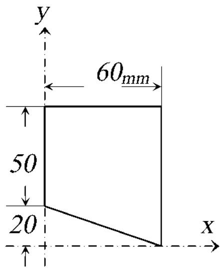
أوجد إحداثيات مراكز الثقل للمساحات التالية:



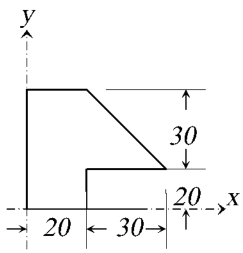
شكل (5-17)



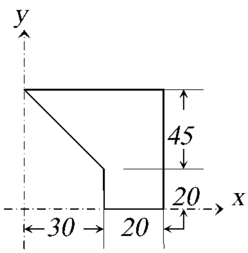
شكل (5-18)



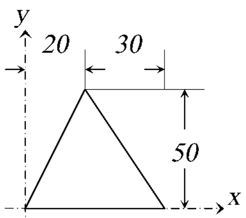
شكل (5-19)



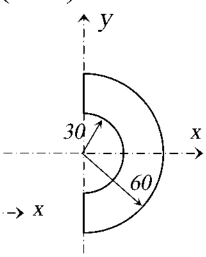
شكل (5-20)



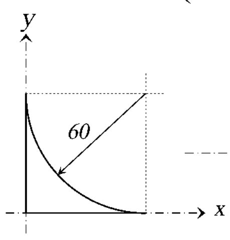
شكل (5-12)



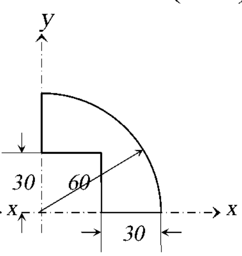
شكل (5-22)



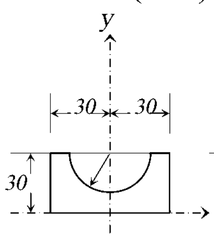
شكل (5-23)



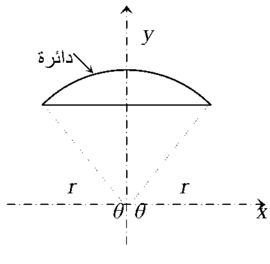
شكل (5-24)



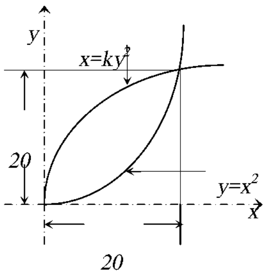
شكل (5-25)



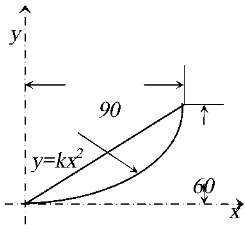
شكل (5-26)



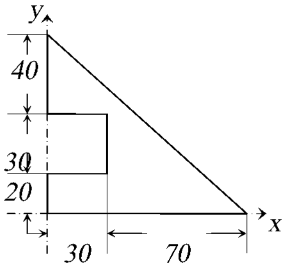
شكل (5-27)



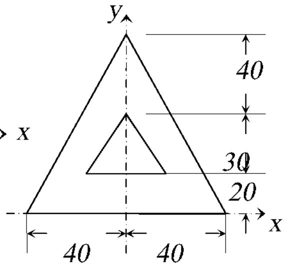
شكل (5-28)



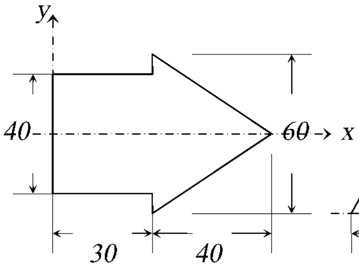
شكل (5-29)



شكل (5-30)



شكل (5-31)



شكل (5-32)