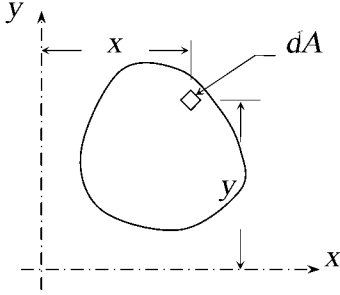


الباب السادس

عزم القصور الذاتي

يعرف عزم القصور الذاتي أحياناً بالعزم الثاني للمساحة. وهو من الخواص المهمة للمساحات ومقاطع الأشكال الهندسية التي ترتبط بمقدار مقاومة المقاطع المختلفة لعزوم اللف والفتل ذات العلاقة بجساءة العناصر الإنشائية.



شكل (1-6)

1-6- عزم القصور الذاتي:

يعرّف عزم القصور الذاتي حول المحاور الأساسية x & y شكل (1-6) بالتالي:

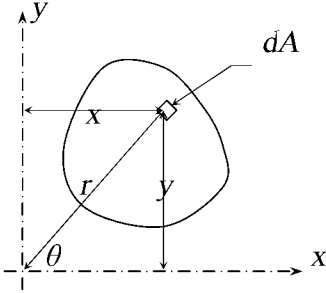
$$I_x = \int y^2 dA \quad \dots\dots\dots (1-6)$$

$$I_y = \int x^2 dA \quad \dots\dots\dots (2-6)$$

وهما كمية مقياسية موجبة وأكبر من الصفر.

2-6- عزم القصور الذاتي القطبي:

يعرّف عزم القصور الذاتي القطبي شكل (2-6) كما يلي:



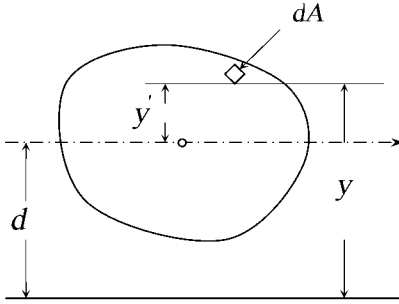
شكل (2-6)

$$\begin{aligned} J_o &= \int r^2 dA \\ &= \int (x^2 + y^2) dA \\ &= \int y^2 dA + \int x^2 dA \\ &= I_x + I_y \quad \dots\dots\dots (3-6) \end{aligned}$$

3-6- نظرية المحاور المتوازية أو ترحيل المحاور:

من التعريف لعزم القصور الذاتي

ينتج من شكل (3-6) أن:



$$\begin{aligned} I_{AA} &= \int y^2 dA \\ &= \int (d + y')^2 dA \\ &= \int d^2 dA + \int y'^2 dA + \int 2dy' dA \\ &= d^2 \int dA + \int y'^2 dA + 2d \int y' dA \end{aligned}$$

شكل (3-6)

الحد الأول يكافئ المساحة الكلية مضروباً في مربع البعد d بين المحورين المتوازيين.

الحد الثاني يكافئ عزم القصور الذاتي حول المحور x' المار بمركز الثقل.

الحد الثالث يكافئ العزم الأول للمساحة حول المحور المار بمركز الثقل فهو يساوى الصفر.

أي أن:

$$I_{AA} = I_{x'} + d^2 A \quad \dots\dots\dots(4-6)$$

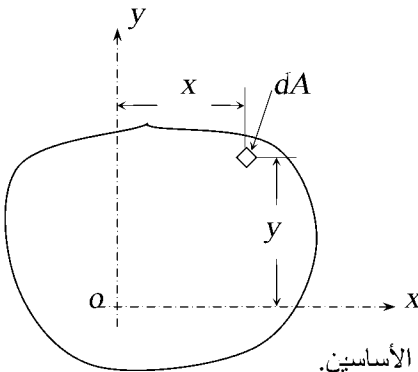
وعليه فعزم القصور الذاتي حول أي محور يكافئ عزم القصور الذاتي حول المحور المار بمركز ثقل المساحة والموازي للمحور المطلوب مضافاً إليه حاصل ضرب المساحة ومربع المسافة بين هذين المحورين المتوازيين.

3-6-1- عزم القصور الذاتي للأشكال المركبة:

يتم حساب عزم القصور الذاتي لشكل مركب بتقسيم هذا الشكل إلى أشكال هندسية بسيطة ويؤخذ مجموع عزم القصور الذاتي الجبري لها. ويراعى عند حساب المجموع الجبري لها مراعاة إشارة الفتحات فتؤخذ سالبة الإشارة.

4-6- عزم القصور الذاتي الضربي:

يعرف عزم القصور الذاتي الضربي للمساحة شكل (4-6) بأنه يساوى



$$I_{xy} = \int xy dA \quad \dots\dots\dots(4-6)$$

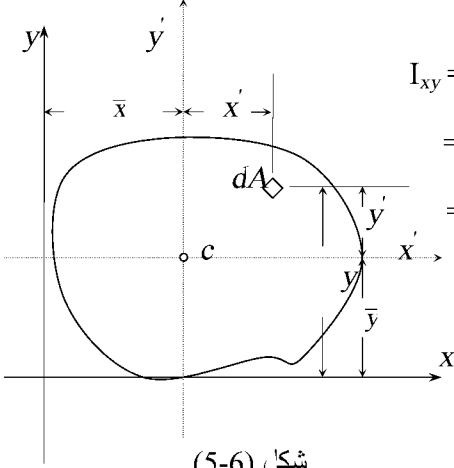
ويتم بتكامل عنصر من المساحة حول المحورين الأساسيين.

شكل (4-6)

ويلاحظ أنه في حالة أن أحد المحورين أو كليهما يمران
بمركز الثقل فعزم القصور الذاتي الضربي ينعدم.

5-6- ترحيل المحاور أو المحاور المتوازية لعزم القصور الضربي:

من تعريف عزم القصور الذاتي الضربي لدينا



$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int xy dA \\ &= \int (\bar{x} + x')(\bar{y} + y') dA \\ &= \int x' y' dA + \bar{y} \int x' dA + \bar{x} \int y' dA + \bar{x} \bar{y} \int dA \end{aligned}$$

الحد الأول يساوي عزم القصور الضربي

حول المحورين x' & y' المارّين بمركز

ثقل المساحة شكل (5-6).

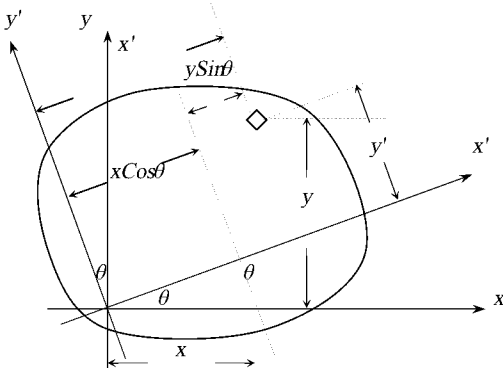
الحدّين الثاني والثالث يساويان عزمي المساحة حول محورين يمران بمركز ثقل المساحة
وبالتالي فهما يساويان صفراً.

الحد الرابع يساوى المساحة مضروبة في بعدي مركز الثقل عن المحورين الموازيين. وعليه فإنّ

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A \dots \dots \dots (5-6)$$

6-6- المحاور الأساسية وعزوم القصور الذاتي الأساسية:

نفرض أن عزوم القصور الذاتي هي:



$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA \\ I_y &= \int x^2 dA \\ I_{xy} &= \int xy dA \end{aligned} \quad (6-6)$$

وأن المحورين x' & y' دارا حول

شكل (6-6)

المحورين x & y بزاوية مقدارها θ
شكل (6-6).

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta\end{aligned}$$

من المعادلة الأولى نحصل على

$$\begin{aligned}I_{x'} &= \int y'^2 dA = \int (y \cos \theta - x \sin \theta)^2 dA \\&= \cos^2 \theta \int y^2 dA - 2 \sin \theta \cos \theta \int xy dA + \sin^2 \theta \int x^2 dA \dots\dots (7-6) \\&= I_x \cos^2 \theta - 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \sin^2 \theta\end{aligned}$$

وبالمثل

$$\begin{aligned}I_{y'} &= I_x \sin^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \cos^2 \theta \dots\dots\dots (8-6) \\I_{x'y'} &= \sin^2 \theta + 2I_{xy} \sin \theta \cos \theta + I_y \cos^2 \theta \dots\dots\dots (9-6)\end{aligned}$$

وحيث أن:

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \quad \& \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \quad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

المعادلات (7-6) & (8-6), (9-6) يمكن كتابتها على النحو التالي:

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \dots\dots\dots (10-6)$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta + I_{xy} \sin 2\theta \dots\dots\dots (11-6)$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\theta + I_{xy} \cos 2\theta \dots\dots\dots (12-6)$$

لاحظ أن إضافة المعادلة (10-6) إلى المعادلة (11-6) ينتج عنه أن

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \dots\dots\dots (13-6)$$

وهذا متوقع لأن كلا من الطرفين يساوى عزم القصور الذاتي القطبي J_o .

المعادلتان (10-6) ، (12-6) تعبران عن محيط دائرة. حيث ينتج عن التعويض لأي قيمة للزاوية θ أن نحصل على نقطة M تتحرك على محيط دائرة عندما يؤخذ $I_{x'}$ كمحور أفقي و $I_{x'y'}$ كمحور رأسي كما يلي:

من المعادلة (10-6) ينتج أن:

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\theta - I_{xy} \sin 2\theta \right)^2$$

$$= \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta - I_{xy} (I_x - I_y) \sin 2\theta \cos 2\theta + I_{xy}^2 \sin^2 2\theta \dots\dots (14-6)$$

من المعادلة (12-6) ينتج أن:

$$I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta + I_{xy} (I_x - I_y) \sin 2\theta \cos 2\theta + I_{xy}^2 \cos^2 2\theta \dots\dots (15-6)$$

بجمع المعادلتين (14-6) ، (15-6) ينتج أن:

$$\left(I_{x'} - \frac{I_x + I_y}{2} \right)^2 + I_{x'y'}^2 = \left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 (1) + I_{xy}^2 \dots\dots\dots (16-6)$$

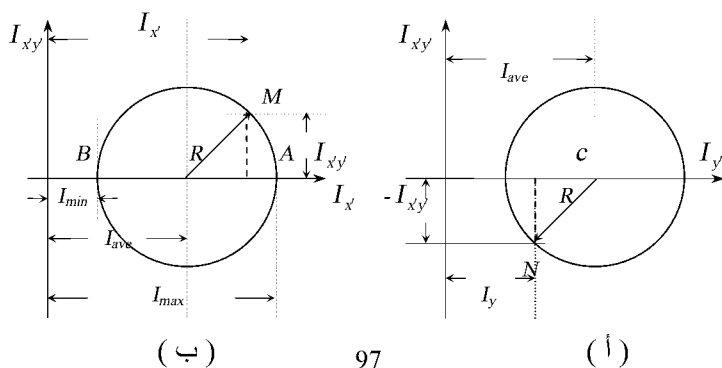
بوضع

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \quad \& \quad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2} \right)^2 + I_{xy}^2} \dots\dots\dots (17-6)$$

معادلة (15-6) تؤول إلى:

$$(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2 \dots\dots\dots (18-6)$$

وهي معادلة دائرة نصف قطرها R ومركزها نقطة C المنطبقة على المحور الأفقي وبُعدها يساوي I_{ave} شكل (7-6).



المعادلتان (11-6) ، (12-6) تعبران عن نفس الدائرة. ويلاحظ أنه نتيجة لتماثل للدائرة حول المحور الأفقي يمكن الوصول إلى نفس النتيجة إذا تم رسم محيط الدائرة بالنقطة N التي إحداثياتها I_y' الأفقية، $-I_{x'y'}$ الرأسية شكل (7-6- ب).

النقطة A تمثل القيمة القصوى لعزم القصور الذاتي $I_{x'}$ والنقطة B تمثل قيمته الصغرى. في حين أن كلا النقطتين تكون عندهما قيمة $I_{x'y'}$ تساوى صفراً. وعليه فالقيم التي يمكن أن تأخذها الزاوية θ_m التي تتناظر النقطتين A, B يمكن الحصول عليها بوضع قيمة $I_{x'y'} = 0$ في المعادلة (12-6) حيث ينتج أن:

$$\tan 2\theta_m = - \frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} \quad \dots\dots\dots (19-6)$$

ويمكن الوصول إلى نفس النتيجة بتفاضل المعادلة (10-6) بالنسبة إلى الزاوية θ وتسوية نتيجة التفاضل بالصفر.

$$\frac{dI_{x'}}{d\theta} = 0$$

تحدد المعادلة (19-6) قيمتين للزاوية $2\theta_m$ الفرق بينهما 180 درجة وعليه سيكون هناك قيمتان للزاوية θ_m الفرق بينهما 90 درجة. تتناظر أحدهما النقطة A شكل (7-6-أ) ودوران المحور حول نقطة الأصل حيث هذه النقطة تمثل القيمة القصوى لعزم القصور الذاتي للمساحة. أما القيمة الثانية فتناظر النقطة B والمحور العمودي المار بنقطة الأصل وتمثل القيمة الصغرى لعزم القصور الذاتي للمساحة. وهذان المحوران المتعامدان على بعضيهما يسميان المحاور الأساسية للمساحة حول نقطة الأصل O ، والقيم المناظرة لهما عزمي القصور الذاتي الأساسي I_{max} , I_{min} أو العزمين الأقصى والأدنى للمساحة حول النقطة O . لاحظ أن عزم القصور الذاتي الضربي ينعدم ويساوى الصفر عند الحصول على القيم الصغرى والكبرى لعزم القصور الذاتي.

$$I_{max} = I_{ave} + R \quad \& \quad I_{min} = I_{ave} - R \quad \dots\dots\dots (20-6)$$

من المعادلة (17-6) نحصل على:

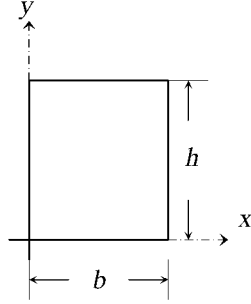
$$I_{max, min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad \dots\dots\dots (21-5)$$

وبالمشاهدة يمكن تمييز المحورين الأقصى والأدنى، أو بالتعويض في المعادلة (10-6) عن أحد قيم الزاوية θ .

عندما يكون للمساحة محور تماثل ، أو أكثر ، فالمحور المار بمركز الثقل يكون محور أساسي. وليس بالضرورة أن يكون المحور الأساسي محور تماثل.

أمثلة

مثال 1-6:



شكل (8-6)

أوجد عزم المساحة الثاني

للمستطيل المجاور الذي قاعدته b وارتفاعه h حول المحورين الملامسين لضلعيه المتعامدين شكل (8-6).

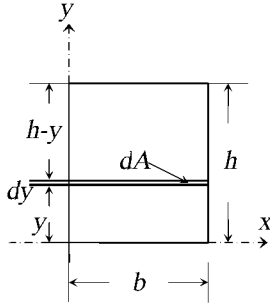
الحل:

من التعريف لعزم القصور الذاتي نجد

أن هذا العزم حول المحور الأفقي

شكل (9-6) يساوي:

$$I_x = \int y^2 dA$$



شكل (9-6)

باستخدام شريحة أفقية حيث

$$dA = b dy$$

وإحداثيات مركز الثقل لهذه الشريحة هي

$$y_e = y \quad \& \quad x_e = \frac{b}{2}$$

$$\therefore I_x = \int_0^h y^2 b dy = b \frac{y^3}{3} \Big|_0^h = \frac{bh^3}{3}$$

وبالمثل باستخدام شريحة رأسية يمكن إثبات أن

$$I_y = \int x^2 dA = \frac{hb^3}{3}$$

ويلاحظ أن الشريحة اختيرت بحيث كانت جميع النقاط بها على أبعاد متساوية من

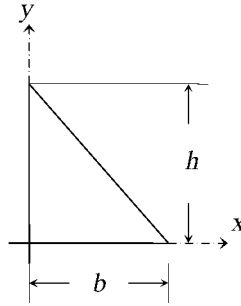
المحور أو الضلع المراد حساب عزم القصور الذاتي حوله أي أن الشريحة موازية له. ويمكن

تطبيق النتيجة التي تم الحصول عليها لحساب I_x لحساب I_y بإجراء عملية تكامل لعزم القصور الذاتي للشريحة كما يلي:

$$dI_y = \frac{b^3 dx}{3} \Rightarrow I_y = \frac{b^3}{3} \int_0^h dx = \frac{hb^3}{3}$$

وتستذكر بالقول أن عزم القصور الذاتي لمستطيل وما في حكمه حول المحور المنطبق على الحافة يساوي الموازي في المقطوع تكعيب على 3.

مثال 2-6:



شكل (10-6)

أوجد عزم المساحة الثاني

للمثلث المجاور الذي قاعدته b وارتفاعه h حول المحورين المتلامسين لضلعيه المتعامدين شكل (10-6).

الحل:

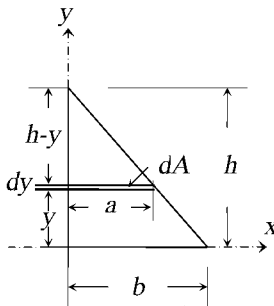
من التعريف لعزم القصور الذاتي

نجد أن هذا العزم حول المحور

الأفقي يساوي شكل (11-6):

$$I_x = \int y^2 dA$$

باستخدام شريحة أفقية نجد أن:



شكل (11-6)

$$dA = a dy$$

$$\frac{a}{b} = \frac{h-y}{h} \Rightarrow a = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$\therefore dA = \frac{b}{h}(h-y) dy$$

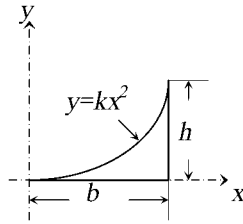
$$\begin{aligned}\therefore I_x &= \int_0^h y^2 \frac{b}{h} (h-y) dy = \frac{b}{h} \left(h \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^h \\ &= \frac{b}{h} \left(\frac{h}{3} h^3 - \frac{1}{4} h^4 \right) - 0 = \frac{bh^4}{12h} (4-3) = \frac{bh^3}{12}\end{aligned}$$

وبالمثل باستخدام شريحة رأسية نجد أن:

$$I_y = \frac{hb^3}{12}$$

مثال 3-6:

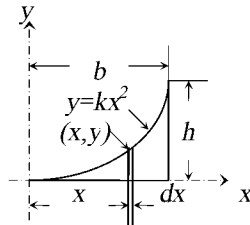
للقطع المخروطي المجاور أوجد
عزم القصور الذاتي حول المحورين
الأساسيين x و y شكل (12-6).



شكل (12-6)

الحل:

باستخدام شريحة رأسية وأنتائج التي سبق
الحصول عليها شكل (13-6) نجد أن:



شكل (13-6)

$$dA = y dx$$

$$dI_x = \frac{dx \cdot y^3}{3}$$

$$I_x = \int_0^b dI_x$$

من الشروط الحدودية نجد أن:

$$@ \quad x = b, \quad y = h$$

$$\therefore k = \frac{y}{x^2} = \frac{h}{b^2} \Rightarrow$$

$$y = \frac{h}{b^2} x^2 \Rightarrow dI_x = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{b^2} x^2 \right)^3 dx$$

$$\therefore I_x = \int_0^b dI_x = \frac{h^3}{3b^6} \int_0^b x^6 dx = \frac{h^3}{3b^6} * \frac{x^7}{7} \Big|_0^b$$

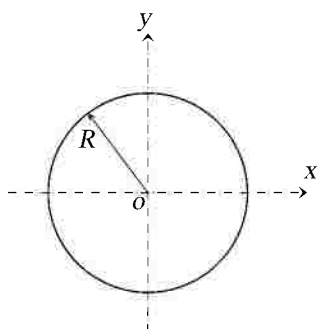
$$I_x = \frac{h^3 b^7}{21b^6} = \frac{bh^3}{21}$$

باستخدام نفس الشريحة نجد أن:

$$dI_y = x^2 dA = x^2 y dA = x^2 \frac{h}{b^2} x^2 dx$$

$$= \frac{h}{b^2} x^4 dx$$

$$I_y = \int_0^b dI_y = \frac{h}{b^2} \int_0^b x^4 dx = \frac{h}{b^2} * \frac{x^5}{5} \Big|_0^b = \frac{hb^5}{5b^2} = \frac{hb^3}{5}$$



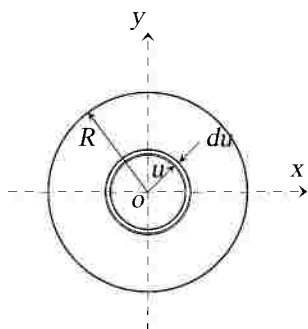
شكل (14-6)

مثال 4-6:

أوجد عزم القصور الذاتي القطبي للدائرة المجاورة ومن ثم عزم القصور الذاتي حول أقطارها شكل (14-6).

الحل:

باستخدام شريحة دائرية شكل (15-6) وتعريف عزم القصور الذاتي القطبي نجد أن:



شكل (15-6)

$$J_o = \int r^2 dA = \int dJ_o$$

$$dA = 2\pi u du$$

$$dJ_o = u^2 dA$$

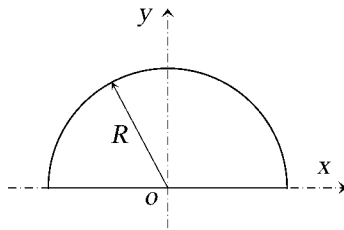
$$\therefore J_o = \int u^2 dA$$

$$\therefore J_o = \int_0^R u^2 * 2\pi u du$$

$$= 2\pi \frac{u^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{2}$$

وحيث أن عزم القصور الذاتي القطبي يكافئ مجموع عزمي القصور الذاتي حول المحورين السينيين x و y ونتيجة لتمثيل الدائرة نجد أن:

$$J_o = I_x + I_y \quad \Rightarrow \quad I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}$$



شكل (16-6)

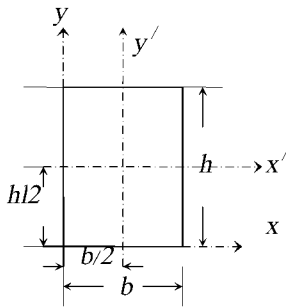
ومن التماثل للدائرة يمكن القول أن عزم القصور الذاتي لنصف الدائرة حول القطر شكل (16-6) يكافئ

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

مثال 5-6:

أوجد العزم الثاني للمساحة

للمستطيل المجاور الذي قاعدته b وارتفاعه h حول المحورين المتعامدين المارّين بمركز الثقل شكل (17-6).



شكل (17-6)

الحل:

بتطبيق نظرية المحاور المتوازية

والنتيجة التي تم الوصول إليها في

المثال 1-7-6 نجد أن:

$$I_x = I_{x'} + Ad^2 \quad \Rightarrow \quad I_{x'} = I_x - Ad^2$$

$$\begin{aligned}\therefore I_{x'} &= \frac{bh^3}{3} - bh\left(\frac{h}{2}\right)^2 \\ &= \frac{bh^3}{3} - \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{12}\end{aligned}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$I_{y'} = \frac{hb^3}{12}$$

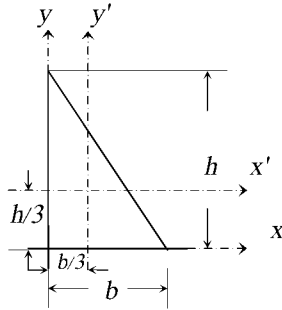
مثال 6-6:

أوجد عزم القصور الذاتي

للمثلث المجاور الذي قاعدته b

وارتفاعه h حول المحورين المتعامدين

المارين بمركز الثقل شكل (18-6).



شكل (18-6)

الحل:

بتطبيق نظرية المحاور المتوازية

والنتيجة التي تم الوصول إليها في

المثال 2-7-6 نجد أن:

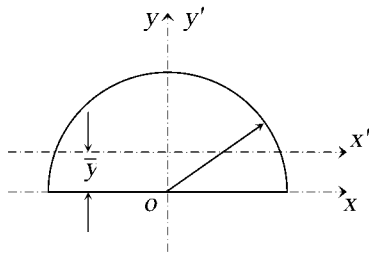
$$I_x = I_{x'} + Ad^2 \quad \Rightarrow \quad I_{x'} = I_x - Ad^2$$

$$\begin{aligned}\therefore I_{x'} &= \frac{bh^3}{12} - \frac{bh}{2}\left(\frac{h}{3}\right)^2 \\ &= \frac{bh^3}{12} - \frac{bh^3}{18} = \frac{bh^3}{36}\end{aligned}$$

وبالمثل يمكن إثبات أن

$$I_{y'} = \frac{hb^3}{36}$$

مثال 6-7:



شكل (19-6)

أوجد عزم القصور الذاتي لنصف الدائرة التي نصف قطرها R حول المحورين السينيين x' و y' المارين بمركز ثقل نصف الدائرة شكل (19-6).

الحل:

سبق أثبات أن مركز الثقل يقع على بعد يساوي

$$\bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

وأن عزم القصور الذاتي يساوي

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{8}$$

$$I_x = I_{x'} + Ad^2 \Rightarrow I_{x'} = I_x - Ad^2$$

$$\therefore I_{x'} = \frac{\pi R^4}{8} - \frac{\pi R^2}{2} * \left(\frac{4R}{3\pi} \right)^2$$

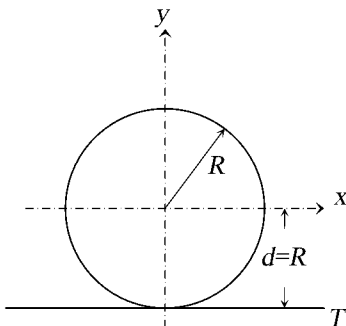
$$= \frac{\pi R^4}{8} - \frac{16R^4}{18\pi^2}$$

$$= \frac{R^4}{72\pi^2} (9\pi^3 - 64)$$

ومن تماثل نصف الدائرة حول المحور الرأسي y فإن مركز الثقل يقع على هذا المحور وأن عزم القصور الذاتي حول هذا المحور يساوي:

$$I_y = I_{y'} = \frac{\pi R^4}{8}$$

مثال 6-8:



شكل (20-6)

أوجد عزم القصور الذاتي حول المماس للدائرة التي نصف قطرها R .

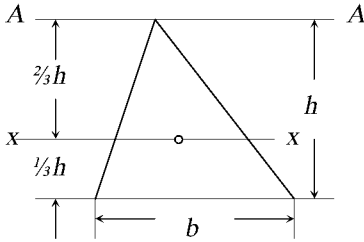
الحل:

من تطبيق نظرية المحاور المتوازية نجد أن
عزم القصور الذاتي حول المماس للدائرة
يساوى شكل (6-20).

$$\begin{aligned} I_T &= I_x + Ad^2 \\ &= \frac{1}{4}\pi R^4 + \pi R^2 R^2 \\ &= \frac{5}{4}\pi R^4 \end{aligned}$$

مثال 6-9:

أوجد عزم القصور الذاتي
حول محور يمر رأس المثلث
ويوازي قاعدته.



شكل (6-21)

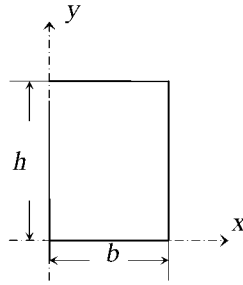
الحل:

من تطبيق نظرية المحاور المتوازية
نجد أن عزم القصور الذاتي حول
محور (A-A) يمر برأس المثلث
ويوازي قاعدته شكل (6-21)
يساوى

$$\begin{aligned} I_{AA} &= I_x + Ad^2 \\ &= \frac{bh^3}{36} + \frac{1}{2}bh * \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \\ &= \frac{bh^3}{36} + \frac{4bh^3}{18} = \frac{bh^3}{4} \end{aligned}$$

مثال 10-6:

أوجد عزم القصور الذاتي
الضربي للمستطيل المجاور
شكل (22-6).

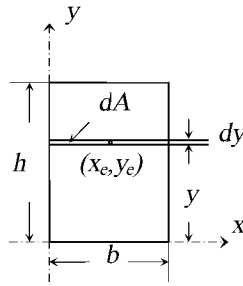


شكل (22-6)

الحل:

باستخدام شريحة أفقية شكل (23-6)

نجد أن:



شكل (23-6)

$$dA = b \, dy \quad \&$$

$$y_e = y \quad \& \quad x_e = \frac{b}{2}$$

من التعريف لعزم القصور الضربي نجد أن:

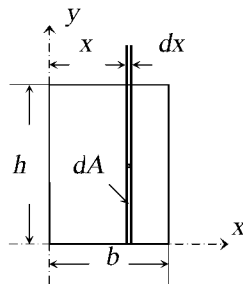
$$I_{xy} = \int x_e y_e dA$$

$$\therefore I_{xy} = \int_0^h \frac{b}{2} y * b \, dy = \frac{b^2}{2} \int_0^h y \, dy$$

$$\therefore I_{xy} = \frac{b^2}{2} * \frac{y^2}{2} \Big|_0^h = \frac{b^2 h^2}{4}$$

وإذا استخدمت شريحة رأسية شكل (24-6)

نجد أن:



شكل (24-6)

$$dA = h \, dx \quad \&$$

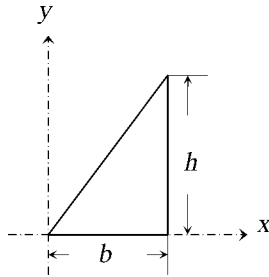
$$y_e = \frac{h}{2} \quad \& \quad x_e = x$$

$$\therefore I_{xy} = \int_0^b \frac{h}{2} x * h \, dx$$

$$I_{xy} = \frac{h^2}{2} \int_0^b x dx = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^b = \frac{b^2 h^2}{4}$$

مثال 11-6:

أوجد عزم القصور الذاتي لأضربى للمثلث المبين بالشكل (25-6).



شكل (25-6)

الحل:

معادلة وتر المثلث هي

$$ص = م س + ج$$

حيث م ميل المستقيم ، ج الجزء المقطوع من محور الصادات أو

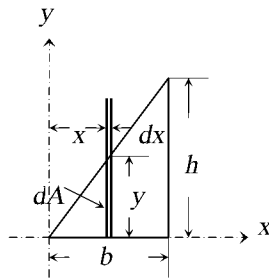
$$y = mx + c$$

ففي هذه الحالة

$$m = \frac{h}{b} \quad \& \quad c = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{h}{b} x$$

باستخدام شريحة رأسية شكل (26-6)

نجد أن:



شكل (26-6)

$$dA = y dx$$

$$y_e = \frac{y}{2} \quad \& \quad x_e = x$$

$$I_{xy} = \int x_e y_e dA$$

$$= \int_0^b x \frac{y}{2} * y dx$$

$$= \int_0^b \frac{x}{2} * y^2 dx = \int_0^b \frac{x}{2} * \frac{h^2}{b^2} x^2 dx$$

$$= \frac{h^2}{2b^2} * \frac{x^4}{4} \Big|_0^b = \frac{b^2 h^2}{8}$$

وإذا استخدمت شريحة أفقية شكل

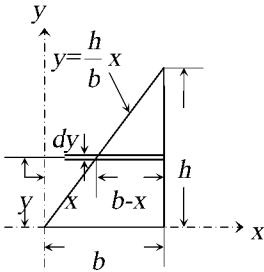
(27-6) نحصل على:

$$dA = (b-x)dy = \left(b - \frac{b}{h}y\right)dy$$

$$x_e = x + \frac{b-x}{2} = \frac{x+b}{2}$$

$$\& \quad y_e = y$$

شكل (27-6)



$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int x_e y_e dA = \int_0^h \frac{x+b}{2} * y * \left(b - \frac{b}{h}y\right) dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^h \left(\frac{b}{h}y + b\right) \left(b - \frac{b}{h}y\right) y dy = \frac{1}{2} \int_0^h \left(b^2 - \frac{b^2}{h^2}y^2\right) y dy \\ &= \frac{1}{2} \left(b^2 \frac{y^2}{2} - \frac{b^2}{h^2} * \frac{y^4}{4}\right) \Big|_0^h = \frac{1}{2} \left(b^2 \frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{h^2} * \frac{h^4}{4}\right) \\ &= \frac{b^2 h^2}{8} \end{aligned}$$

والنتيجة واحدة باستخدام شريحة رأسية أو أفقية.

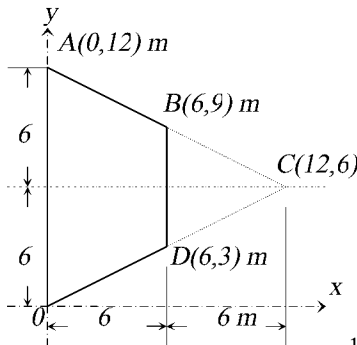
مثال 12-7-6:

أوجد عزم القصور الذاتي لشبه

المنحرف $ABDO$ شكل (28-6)

المجاور I_x و I_y وكذلك عزم

القصور الذاتي الضربي I_{xy} .



شكل (28-6)

الحل:

معادلة المستقيم بدلالة الميل هي:

$$y = mx + c$$

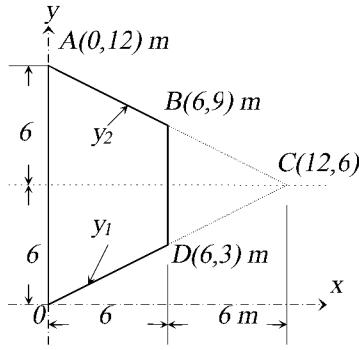
حيث m تساوي ميل المستقيم

ويساوي ظل الزاوية بين المستقيم

ومحور السينات، و c تساوي الجزء

المقطوع من محور الصادات من

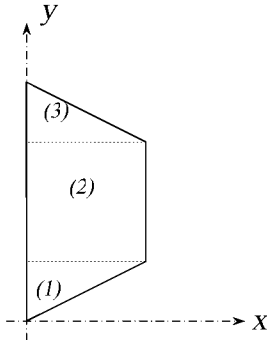
شكل (29-6) نجد أن:



شكل (29-6)

$$y_1 = \frac{1}{2} x \quad \& \quad y_2 = 12 - \frac{1}{2} x$$

باستخدام الأشكال الهندسية شكل (30-6):



شكل (30-6)

$$I_{x1} = I_x + Ad^2$$

$$= \frac{6 * 3^3}{36} + \frac{6 * 3}{2} * 2^2 = 40.5 m^4$$

$$I_{x2} = \frac{6 * 6^3}{12} + 6 * 6 * 6^2 = 1404 m^4$$

$$I_{x3} = \frac{6 * 3^3}{36} + \frac{6 * 3}{2} * 10^2 = 904.5 m^4$$

$$I_{x \text{ Total}} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$= 40.5 + 1404 + 904.5 = 2349 m^4$$

$$I_{y1} = I_y + Ad^2$$

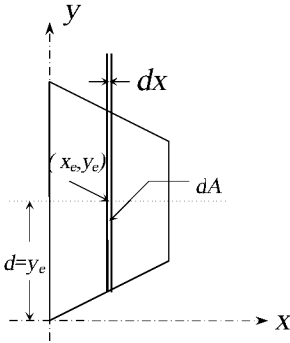
$$= \frac{3 * 6^3}{36} + \frac{6 + 3}{2} * 2^2 = 54 m^4$$

$$I_{y2} = \frac{6 * 6^3}{12} + 6 * 6 * 3^2 = 432 \text{ m}^4$$

$$I_{y3} = \frac{3 * 6^3}{36} + \frac{6 * 3}{2} * 2^2 = 54 \text{ m}^4$$

$$I_{x \text{ Total}} = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3}$$

$$I_{y \text{ Total}} = 54 + 432 + 54 = 540 \text{ m}^4$$



بطريقة التكامل:

باستخدام شريحة رأسية نجد أن:

$$dA = (y_2 - y_1)dx, \quad x_e = x$$

$$\text{شكل (31-6)} \quad \& \quad y_e = \frac{y_2 + y_1}{2} = \frac{12 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{2} = 6$$

$$dI_x = \bar{I}_x + A y_e^2 = \frac{(y_2 - y_1)^3}{12} dx + (y_2 - y_1) dx * \left(\frac{y_2 + y_1}{2} \right)^2$$

$$= \frac{\left(12 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right)^3}{12} dx + \left(12 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) dx * \left(\frac{12 - \frac{x}{2} + \frac{x}{2}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{(12 - x)^3}{12} dx + (12 - x) dx * 6^2$$

$$= \left(-\frac{x^3}{12} + 3x^2 - 72x + 576 \right) dx$$

$$\therefore I_x = \int dI_x = \int_0^6 \left(-\frac{x^3}{12} + 3x^2 - 72x + 576 \right) dx$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4 \cdot 12} + \frac{3x^3}{3} - \frac{72x^2}{2} + 576x \right]_0^6 = 2349 \text{ m}^4$$

$$\begin{aligned}
I_y &= \int x_c^2 dA = \int_0^6 x^2 (y_2 - y_1) dx \\
&= \int_0^6 x^2 \left(12 - \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \right) dx = \int_0^6 (12x^2 - x^3) dx \\
&= \left| \frac{12x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right|_0^6 = \frac{12 \cdot 6^3}{3} - \frac{6^4}{4} = 540 \text{ m}^4 \\
I_{xy} &= \sum I_{xy} = I_{xy1} + I_{xy2} + I_{xy3} \\
&= \sum \left(-\frac{b^2 h^2}{72} + A \bar{x} \bar{y} \right) \\
&= \left\{ -\frac{6^2 \cdot 3^2}{72} + \frac{6 \cdot 3}{2} \cdot 2 \cdot 2 \right\} + \{0 + 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 6\} + \left\{ -\frac{6^2 \cdot 3^2}{72} + \frac{6 \cdot 3}{2} \cdot 2 \cdot 10 \right\} \\
&= \{-4.5 + 36\} + \{648\} + \{-4.5 + 180\} = 855 \text{ m}^4 \\
I_{xy} &= \int x_c y_c dA = \int_0^6 x \cdot 6 \cdot (12 - x) dx \\
&= \int_0^6 (72x - 6x^2) dx = \left| 72 \frac{x^2}{2} - 6 \frac{x^3}{3} \right|_0^6 = 864 \text{ m}^4
\end{aligned}$$

مثال 6-13:

إذا كانت

$$I_{xx} = 10000 \text{ cm}^4, I_{yy} = 4000 \text{ cm}^4 \text{ \& } I_{xy} = -4000 \text{ cm}^4$$

فأوجد:

- 1- أقصى وأدنى عزم قصور ذاتي I_{max} , I_{min} وزاوية ميلهما θ_m .
- 2- عزم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} \& I_{uv} حول المحاور (u, v) التي دارت بزاوية مقدارها 45 درجة.

الحل:

للتسهيل نفرض أن:

$$A = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2}, \quad B = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \quad \& \quad C = I_{xy}$$

لذلك:

$$R = \sqrt{B^2 + C^2}, \quad I_{max} = A + R, \quad I_{min} = A - R \quad \& \quad \tan 2\theta_m = -\frac{C}{B}$$

$$\therefore A = \frac{10000 + 4000}{2} = 7000 \text{ cm}^4$$

$$B = \frac{10000 - 4000}{2} = 3000 \text{ cm}^4$$

$$C = -4000 \text{ cm}^4$$

$$R = \sqrt{(3000)^2 + (-4000)^2} = 5000 \text{ cm}^4$$

$$I_{max} = 7000 + 5000 = 12000 \text{ cm}^4$$

$$I_{min} = 7000 - 5000 = 2000 \text{ cm}^4$$

$$\tan 2\theta_m = -\frac{-4000}{3000} = 1.333$$

$$\therefore 2\theta_m = \tan^{-1}(1.333) = 53.13^\circ \Rightarrow \theta_m = 26.56^\circ$$

$$\begin{aligned} I_{uu} &= A + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta \\ &= 7000 + 3000 \cos 90^\circ - (-4000) \sin 90^\circ \\ &= 7000 + 0 + 4000 = 11000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{vv} &= A - B \cos 2\theta + C \sin 2\theta \\ &= 7000 - 3000 \cos 90^\circ + (-4000) \sin 90^\circ \\ &= 7000 - 4000 = 3000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{uv} &= B \sin 2\theta + C \cos 2\theta = 3000 \sin 90^\circ + (-4000) \cos 90^\circ \\ &= 3000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

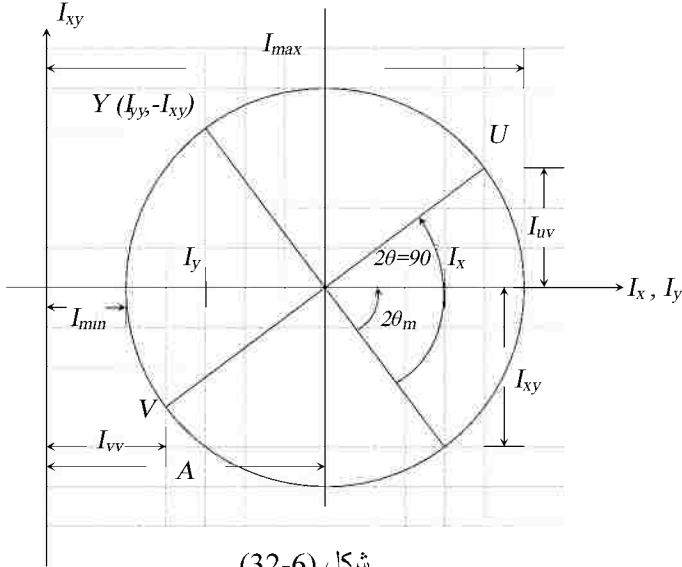
بأستخدام دائرة مور نجد أن:

مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية بالرسم تمثل 1000 cm^4

من الرسم شكل (32-6) نستنتج أن:

$$\begin{aligned} 1- \quad I_{max} &= 12 \times 1000 = 12000 \text{ cm}^4 \\ I_{min} &= 2 \times 1000 = 2000 \text{ cm}^4 \\ \theta_m &\approx 26.5^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2- \quad I_{uu} &= 11 \times 1000 = 11000 \text{ cm}^4 \\ I_{vv} &= 3 \times 1000 = 3000 \text{ cm}^4 \\ I_{uv} &= 3 \times 1000 = 3000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



شكل (32-6)

مثال 14-6:

إذا كانت $I_{xx} = 8 \text{ m}^4$, $I_{yy} = 2 \text{ m}^4$ & $I_{xy} = -4 \text{ m}^4$

فأوجد:

1- أقصى وأدنى عزم قصور ذاتي I_{max} , I_{min} وزاوية ميلهما θ_m .

2- عزم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u,v) التي دارت بزاوية مقدارها 45 درجة.

الحل:

$$A = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{8 + 2}{2} = 5 \text{ m}^4$$

$$B = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} = \frac{8 - 2}{2} = 3 \text{ m}^4$$

$$C = I_{xy} = -4 \text{ m}^4$$

$$R = \sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5 \text{ m}^4$$

$$I_{max} = A + R = 5 + 5 = 10 \text{ m}^2$$

$$I_{min} = A - R = 5 - 5 = 0$$

$$\tan 2\theta_m = -\frac{C}{B} = -\frac{-4}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$2\theta_m = 53.13^\circ \Rightarrow \theta_m = 26.56^\circ$$

$$\begin{aligned} I_{uu} &= A + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta \\ &= 5 + 3 \cos 90^\circ - (-4) \sin 90^\circ \\ &= 5 + 0 + 4 = 9 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{vv} &= A - B \cos 2\theta + C \sin 2\theta \\ &= 5 - 3 \cos 90^\circ + (-4) \sin 90^\circ \\ &= 5 - 4 = 1 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{uv} &= B \sin 2\theta + C \cos 2\theta = 3 \sin 90^\circ + (-4) \cos 90^\circ \\ &= 3 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

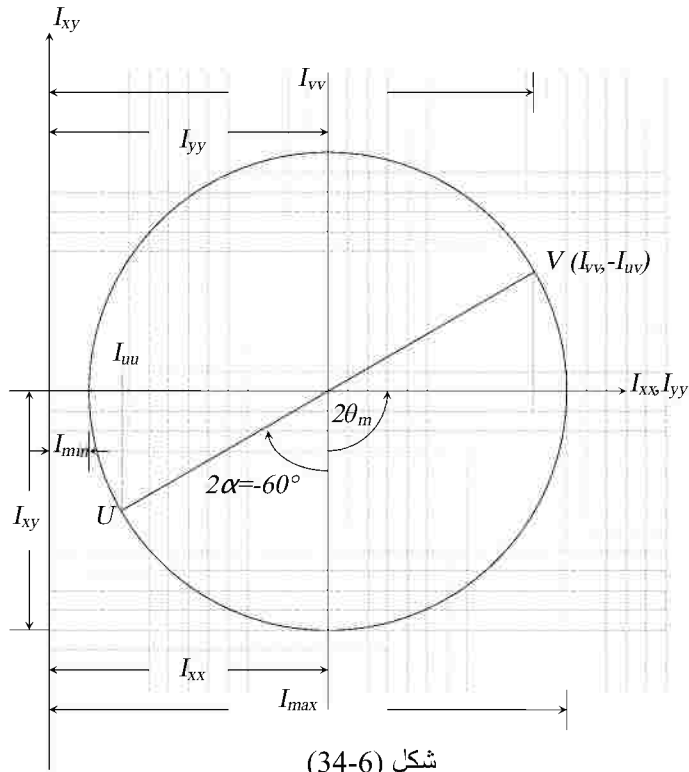
باستخدام دائرة مور شكل (6-33) نجد أن:

الحل:

مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية في الرسم تمثل $1 \times 10^4 \text{ cm}^4$
من الرسم شكل (34-6) نستنتج أن:

$$\begin{aligned} 1- \quad I_{\max} &= 26 \times 10^4 \text{ cm}^4 \\ I_{\min} &= 2 \times 10^4 \text{ cm}^4 \\ \theta_m &\approx 45^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2- \quad I_{uu} &= 3.6 \times 10^4 \text{ cm}^4 \\ I_{vv} &= 24.4 \times 10^4 \text{ cm}^4 \\ I_{uv} &= -6 \times 10^4 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$



تحقيق الحل بالحسابات:

$$A = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{14 + 14}{2} * 10^4 = 14 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$B = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} = 0$$

$$C = I_{xy} = -12 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$R = \sqrt{B^2 + C^2} = 12 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_{max} = A + R = 14 \times 10^4 + 12 \times 10^4 = 26 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_{min} = A - R = 14 \times 10^4 - 12 \times 10^4 = 2 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\tan 2\theta_m = -\frac{C}{B} = \infty \Rightarrow$$

$$2\theta_m = 90^\circ \Rightarrow \theta_m = 45^\circ$$

$$\begin{aligned} I_{uu} &= A + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta \\ &= 14 \times 10^4 - (-12 \times 10^4) \sin(-60^\circ) \\ &= 14 \times 10^4 - 10.39 \times 10^4 = 3.61 \times 10^4 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{vv} &= A - B \cos 2\theta + C \sin 2\theta \\ &= 14 \times 10^4 + (-12 \times 10^4) \sin(-60^\circ) \\ &= 14 \times 10^4 + 10.39 \times 10^4 = 24.39 \times 10^4 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{uv} &= B \sin 2\theta + C \cos 2\theta = (-12 \times 10^4) \cos(-60^\circ) \\ &= -6 \times 10^4 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

لاحظ أن إشارة الزاوية موجبة إذا كانت في اتجاه عكس عقارب الساعة (CCW) وتكون سالبة إذا كانت في اتجاه عقارب الساعة (CW).

مثال 6-16:

إذا كانت عزوم القصور الذاتي لشكل ما هي:

$$I_{xx} = 11 \text{ m}^4, \quad I_{yy} = 5 \text{ m}^4 \quad \& \quad I_{xy} = 4 \text{ m}^4$$

فأوجد:

أقصى وأدنى عزم قصور ذاتي (I_{max} , I_{min}) وزاوية ميل المحاور الرئيسية. وإذا دارت المحاور (x , y) إلى (u , v) بزاوية قدرها ($\theta=45^\circ$) فأوجد I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} بالحساب وتأكد من النتائج باستخدام دائرة مور.

الحل:

$$A = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{11 + 5}{2} = 8 \text{ m}^4$$

$$B = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} = \frac{11 - 5}{2} = 3 \text{ m}^4$$

$$C = I_{xy} = 4 \text{ m}^4$$

$$R = \sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{(3)^2 + (4)^2} = 5 \text{ m}^4$$

$$I_{max} = A + R = 8 + 5 = 13 \text{ m}^2$$

$$I_{min} = A - R = 8 - 5 = 3 \text{ m}^4$$

$$\tan 2\theta_m = -\frac{C}{B} = -\frac{4}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$2\theta_m = -53.13^\circ \Rightarrow \theta_m = -26.56^\circ$$

$$\begin{aligned} I_{uu} &= A + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta \\ &= 8 + 3 \cos 90^\circ - 4 \sin 90^\circ \\ &= 8 + 0 - 4 = 4 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{vv} &= A - B \cos 2\theta + C \sin 2\theta \\ &= 8 - 3 \cos 90^\circ + 4 \sin 90^\circ = 8 + 4 = 12 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

$$I_{uv} = B \sin 2\theta + C \cos 2\theta$$

$$= 3 \sin 90^\circ + 4 \cos 90^\circ = 3 \text{ m}^4$$

تحقيق باستخدام دائرة مور شكل (35-6):

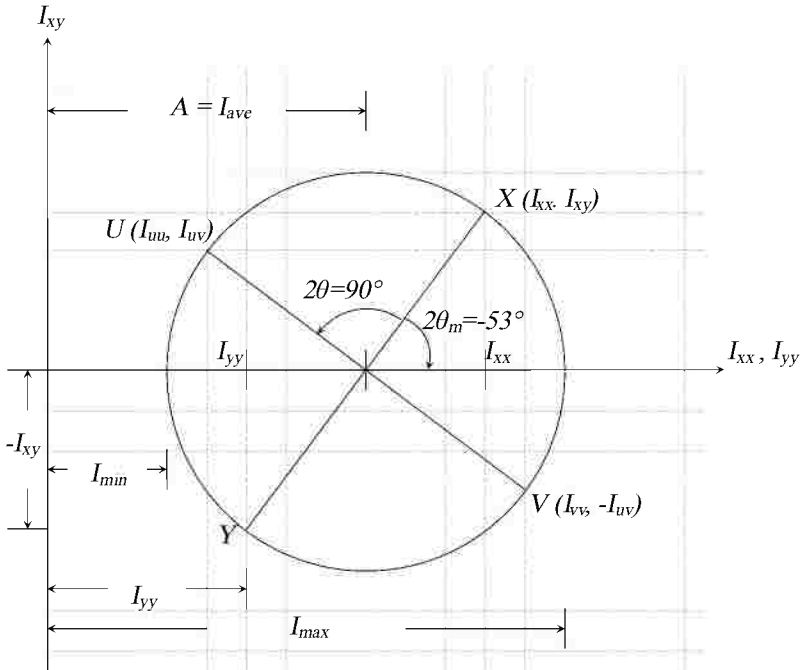
مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية تمثل 1 m^4 .

من الرسم نستنتج أن:

$$I_{\max} = 13 \text{ m}^4, \quad I_{\min} = 3 \text{ m}^4$$

$$\tan(2\theta_m) \approx -53^\circ, \quad \theta_m \approx -26.5^\circ$$

$$I_{uu} = 4 \text{ m}^4, \quad I_{vv} = 12 \text{ m}^4 \quad \& \quad I_{uv} = 3 \text{ m}^4$$



شكل (35-6)

مثال 6-17:

إذا كانت $I_{xx} = 4000 \text{ cm}^4$, $I_{yy} = 800 \text{ cm}^4$ & $I_{xy} = 1200 \text{ cm}^4$

فأوجد:

- 1- أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m باستخدام دائرة مور.
- 2- عزوم القصور الذاتي I_{uv} & I_{vv} , I_{uu} حول المحاور (u, v) التي دارت بزوايا قدرها $(\alpha = 45^\circ)$.

الحل:

مقياس الرسم:

مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية تمثل 400 cm^4 .

من الرسم شكل (6-36) نجد أن:

$$I_{max} = 11 \times 400 = 4400 \text{ cm}^4$$

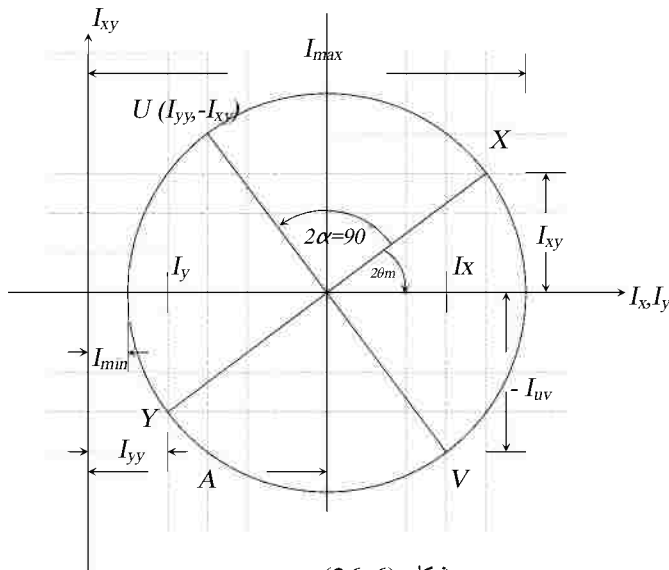
$$I_{min} = 1 \times 400 = 400 \text{ cm}^4$$

$$2\theta_m \approx -37^\circ \quad \Rightarrow \quad \theta_m = -18.5^\circ$$

$$I_{uu} = 3 \times 400 = 1200 \text{ cm}^4$$

$$I_{vv} = 9 \times 400 = 3600 \text{ cm}^4$$

$$I_{uv} = 4 \times 400 = 1600 \text{ cm}^4$$



شکل (6-36)

مثال 18-6:

إذا كانت $I_{xx} = 60000 \text{ cm}^4$, $I_{yy} = 10000 \text{ cm}^4$ & $I_{xy} = 0$

فأوجد:

- 1- أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم θ_m باستخدام دائرة مور.
- 2- عزوم القصور الذاتي I_{uu} , I_{vv} & I_{uv} حول المحاور (u , v) التي دارت بزاوية α بحيث كان $(\tan 2\alpha = 3/4)$

الحل:

في هذا المثال يجب ملاحظة أن القيم المعطاة لعزوم القصور الذاتي الأساسية حيث أن قيمة العزم الضربي تساوي صفر.

مقياس الرسم: نفرض أن كل وحدة طولية تمثل 5000 cm^4 .

من الرسم شكل (37-6) نجد أن:

$$I_{max} = 12 \times 5000 = 60000 \text{ cm}^4$$

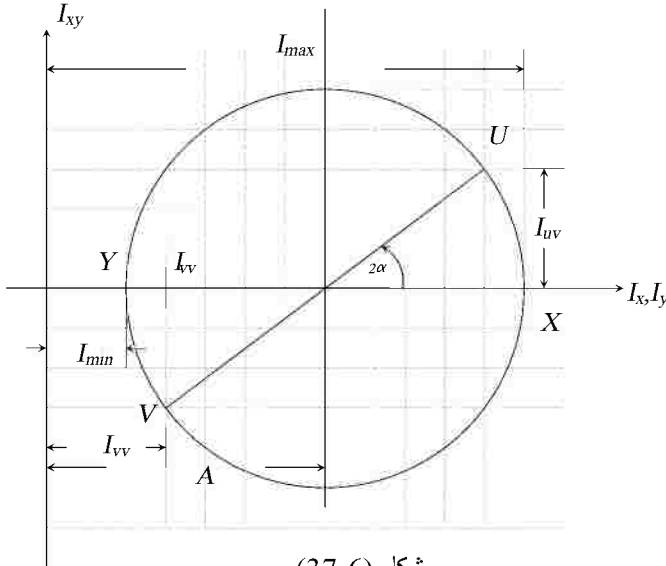
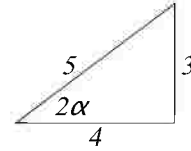
$$I_{min} = 2 \times 5000 = 10000 \text{ cm}^4$$

$$\theta_m = 0$$

$$I_{uu} = 11 \times 5000 = 55000 \text{ cm}^4$$

$$I_{vv} = 3 \times 5000 = 15000 \text{ cm}^4$$

$$I_{uv} = 3 \times 5000 = 15000 \text{ cm}^4$$



شكل (37-6)
122

التحقيق الحسابي للحل:

$$A = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{60000 + 10000}{2} = 35000 \text{ cm}^4$$

$$B = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} = \frac{60000 - 10000}{2} = 25000 \text{ cm}^4$$

$$C = I_{xy} = 0$$

$$R = \sqrt{B^2 + C^2} = 25000 \text{ cm}^4$$

$$I_{max} = A + R = 35000 + 25000 = 60000 \text{ cm}^4 = I_{xx}$$

$$I_{min} = A - R = 35000 - 25000 = 10000 \text{ cm}^4 = I_{yy}$$

$$\tan 2\theta_m = -\frac{C}{B} = 0 \Rightarrow 2\theta_m = 0 \Rightarrow \theta_m = 0$$

$$\begin{aligned} I_{uu} &= A + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta \\ &= 350000 + 25000\left(\frac{4}{5}\right) = 55000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{vv} &= A - B \cos 2\theta + C \sin 2\theta \\ &= 350000 - 25000\left(\frac{4}{5}\right) = 15000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$I_{uv} = B \sin 2\theta + C \cos 2\theta = 25000\left(\frac{3}{5}\right) = 15000 \text{ cm}^4$$

~~~~~

### مثال 19-6:

إذا كانت  $I_{xx} = 12000 \text{ cm}^4$ ,  $I_{yy} = 4000 \text{ cm}^4$  &  $I_{xy} = -3000 \text{ cm}^4$

فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم  $\theta_m$  باستخدام دائرة مور.

2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$  ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور  $(u, v)$  التي دارت  
بزاوية  $(\alpha=45^\circ)$ .

الحل:

$$1000 \text{ cm}^4 \equiv I \text{ مقياس الرسم}$$

من الرسم شكل (38-6) نجد أن:

$$I_{max} = 13 \times 1000 = 13000 \text{ cm}^4$$

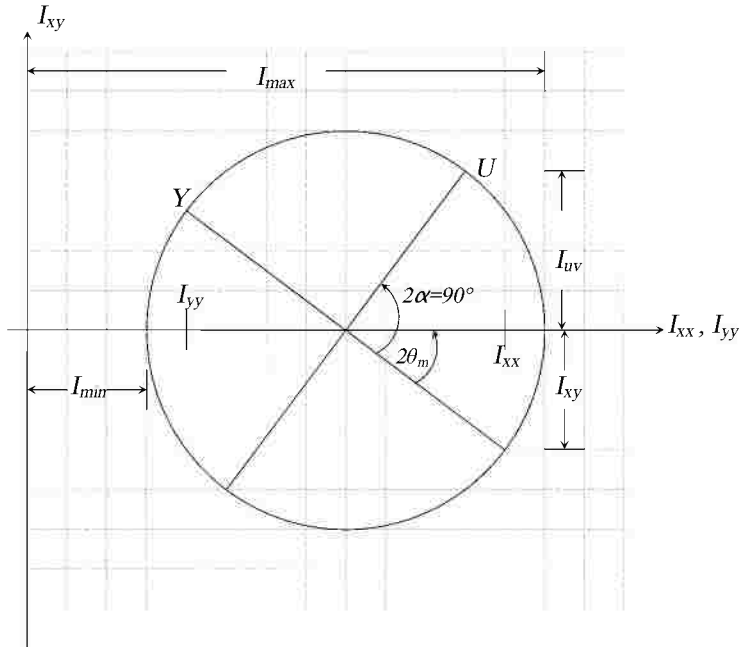
$$I_{min} = 3 \times 1000 = 3000 \text{ cm}^4$$

$$2\theta_m = 37^\circ \Rightarrow \theta_m = 18.5^\circ$$

$$I_{uu} = 11 \times 1000 = 11000 \text{ cm}^4$$

$$I_{vv} = 5 \times 1000 = 5000 \text{ cm}^4$$

$$I_{uv} = 4 \times 1000 = 4000 \text{ cm}^4$$



شكل (38-6)

تحقيق الحل حسابيا:

$$A = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} = \frac{12000 + 4000}{2} = 8000 \text{ cm}^4$$

$$B = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} = \frac{12000 - 4000}{2} = 4000 \text{ cm}^4$$

$$C = I_{xy} = -3000 \text{ cm}^4$$

$$R = \sqrt{B^2 + C^2} = \sqrt{(4000)^2 + (-3000)^2} = 5000 \text{ cm}^4$$

$$I_{max} = A + R = 8000 + 5000 = 13000 \text{ cm}^4$$

$$I_{min} = A - R = 8000 - 5000 = 3000 \text{ cm}^4$$

$$\tan 2\theta_m = \frac{C}{B} = -\frac{3000}{4000} = -\frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$2\theta_m = 37^\circ \Rightarrow \theta_m = 18.5^\circ$$

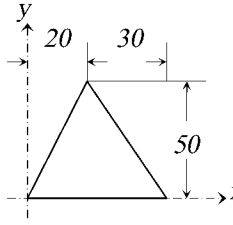
$$\begin{aligned} I_{uu} &= A + B \cos 2\theta - C \sin 2\theta \\ &= 8000 + 4000 \cos 90^\circ - 3000 \sin 90^\circ \\ &= 8000 + 0 + 3000 = 11000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{vv} &= A - B \cos 2\theta + C \sin 2\theta \\ &= 8000 - 4000 \cos 90^\circ - 3000 \sin 90^\circ \\ &= 8000 - 3000 = 5000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

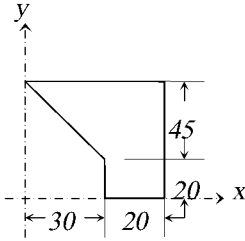
$$\begin{aligned} I_{uv} &= B \sin 2\theta + C \cos 2\theta = 4000 \sin 90^\circ - 3000 \cos 90^\circ \\ &= 4000 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

## تمارين

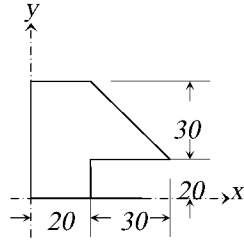
1-6 للشكل (39-6) إلى شكل (50-6) التالية أوجد العزم الثاني للمساحة وكذلك العزم الثاني  
الضربي حول المحاور المارة بمركز الثقل  $\bar{I}_{xx}, \bar{I}_{yy}$  و  $\bar{I}_{xy}$  والمحاور  $(x, y)$   $I_{xx}, I_{yy}$  و  $I_{xy}$ .



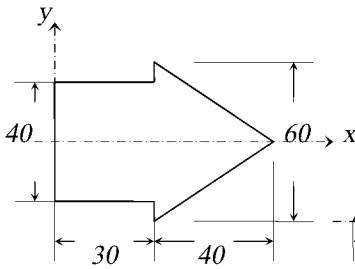
شكل (39-6)



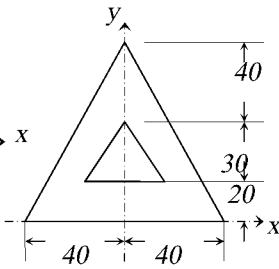
شكل (40-6)



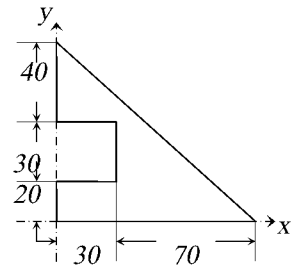
شكل (41-6)



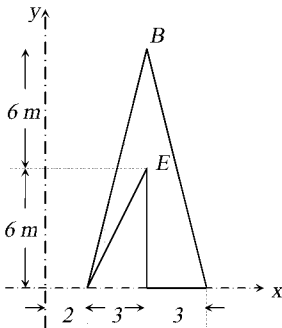
شكل (42-6)



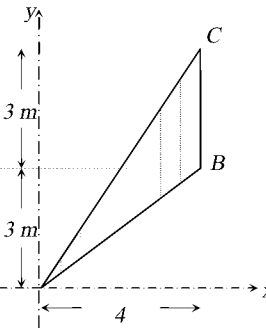
شكل (43-6)



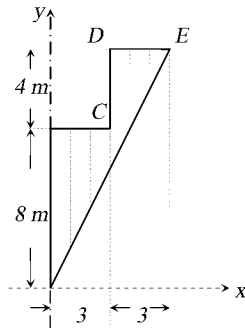
شكل (44-6)



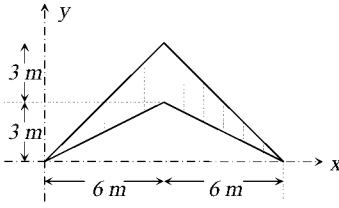
شكل (45-6)



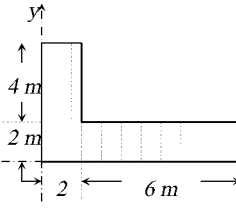
شكل (46-6)



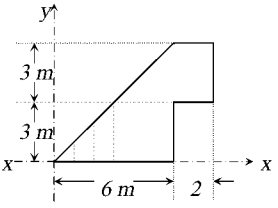
شكل (47-6)



شكل (50-6)



شكل (49-6)



شكل (48-6)

2-6 إذا كانت  $I_{xx} = 12 m^4$ ,  $I_{yy} = 4 m^4$  &  $I_{xy} = -3 m^4$  فأوجد:

- 1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم  $\theta_m$  باستخدام دائرة مور.
- 2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$ ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u$ ,  $v$ ) التي دارت بزاوية  $(\alpha=45^\circ)$ .
- 3 - تأكد من الحل حسابيا.

3-6 إذا كانت  $I_{xx} = I_{yy} = 14 \times 10^4 cm^4$  &  $I_{xy} = -12 \times 10^4 cm^4$  فأوجد بيانيا وتحليليا:

- 1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم  $\theta_m$ .
- 2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$ ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u$ ,  $v$ ) التي دارت بزاوية  $(\alpha=-30^\circ)$ .

4-6 إذا كانت  $I_{xx} = 11 m^4$ ,  $I_{yy} = 5 m^4$  &  $I_{xy} = 4 m^4$  فأوجد:

- 1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم  $\theta_m$  باستخدام دائرة مور.
- 2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$ ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u$ ,  $v$ ) التي دارت بزاوية  $(\alpha=45^\circ)$ .
- 3 - تأكد من الحل حسابيا.

5-6 إذا كانت  $I_{xx} = 100 m^4$ ,  $I_{yy} = 100 m^4$  &  $I_{xy} = 50 m^4$  فأوجد:

- 1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم  $\theta_m$  باستخدام دائرة مور.

2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$  ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u$  ,  $v$ ) التى دارت بزاوية بحيث كانت  $\alpha = \frac{1}{2} \tan^{-1}(\frac{4}{3})$ .

3 - تأكد من الحل حسابيا.

**6-6** إذا كانت  $I_{xx} = 90 \text{ m}^4$  ,  $I_{yy} = 30 \text{ m}^4$  &  $I_{xy} = -40 \text{ m}^4$  فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم  $\theta_m$ .

2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$  ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u$  ,  $v$ ) التى دارت بزاوية قدرها  $\theta = 45^\circ$ .

3 - تأكد من الحل حسابيا بعد الحل باستخدام دائرة مور.

**7-6** إذا كانت  $I_{xx} = 12 \text{ m}^4$  ,  $I_{yy} = 4 \text{ m}^4$  &  $I_{xy} = -3 \text{ m}^4$  فأوجد:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم  $\theta_m$ .

2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$  ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u$  ,  $v$ ) التى دارت بزاوية قدرها  $\theta = 45^\circ$ .

3 - تأكد من الحل حسابيا بعد الحل باستخدام دائرة مور.

**8-6** شكل هندسي فيه  $I_{xx} = 11 \text{ m}^4$  ,  $I_{yy} = I_{xy} = 3 \text{ m}^4$  فأوجد تحليليا وبيانيا:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميل المحاور  $\theta_m$ .

2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$  ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u$  ,  $v$ ) التى دارت بزاوية قدرها  $\theta = 45^\circ$  حول المحور  $xx$ .

**9-6** إذا كانت  $I_{xx} = 14 \times 10^4 \text{ cm}^4$  ,  $I_{yy} = 6 \times 10^4 \text{ cm}^4$  &  $I_{xy} = -5 \times 10^4 \text{ cm}^4$  فأوجد بيانيا وتحليليا:

1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم  $\theta_m$ .

2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$  ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u$  ,  $v$ ) التى دارت بزاوية  $(\alpha = -30^\circ)$ .

**10-6** شكل هندسي فيه  $I_{xx} = I_{yy} = 10 \text{ m}^4$  &  $I_{xy} = 5 \text{ m}^4$  فأوجد:

- 1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم  $\theta_m$ .
- 2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$ ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u$ ,  $v$ ) التي دارت بزاوية قدرها  $\theta = 45^\circ$ .
- 3 - تأكد من الحل حسابيا بعد الحل باستخدام دائرة مور.

**11-6** إذا كانت  $I_{xx} = 11 \text{ m}^4$ ,  $I_{yy} = 3 \text{ m}^4$  &  $I_{xy} = -3 \text{ m}^4$  فأوجد:

- 1 - أقصى وأدنى قصور ذاتي وكذلك زاوية ميلهم  $\theta_m$  باستخدام دائرة مور.
- 2 - عزوم القصور الذاتي  $I_{uu}$ ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u$ ,  $v$ ) التي دارت بزاوية ( $\alpha=45^\circ$ ).
- 3 - تأكد من الحل حسابيا.

**12-8-6** إذا كانت  $I_{xx} = 1000 \text{ cm}^4$ ,  $I_{yy} = 400 \text{ cm}^4$  &  $I_{xy} = -400 \text{ cm}^4$  فأوجد:

- 1 - أقصى وأدنى عزم قصور ذاتي  $I_{max}$ ,  $I_{min}$  وزاوية ميلهما  $\theta_m$ .
- 2 - عزم القصور الذاتي  $I_{uu}$ ,  $I_{vv}$  &  $I_{uv}$  حول المحاور ( $u, v$ ) التي دارت بزاوية مقدارها  $45^\circ$ .