الفصل الثاني عشر

نظرية نظام خطوط الانتظار

يتطرق هذا الفصل إلى موضوعات أساسية مثل ماهية نظرية خطوط الانتظار، ومشكلة نظام خطوط الانتظار، ومواصفات ومكونات هذه الخطوط. كما يتضمن الفصل تطبيقات في الأنماط الرياضية لخطوط الانتظار، بالإضافة إلى مجموعة من المسائل والتمارين التي تفيد في عملية استيعاب القارئ لهذه التقنيات.

الفصل الثاني عشر

12

نظرية نظام خطوط الانتظار

Waiting line theory

12.1 مقدمة:

ظهرت نظرية خطوط الانتظار في 1900 ميلادي بواسطة عالم رياضيات يدعى (A. K. Erlang)، والذي بدأ بدراسة مشكلة تسلسل وتداخل خطوط الهاتف، وبعدها في الحرب العالمية الثانية بدأت تطبيقات عديدة في مجال الصناعة الإنتاجية والخدمية وأصبحت أحدى الأدوات المهمة في العمليات الإدارية.

سوف نتناول في هذا الفصل معلومات مفيدة عن استخدام نظرية نظام الطوابير والقوانين العاملة بها مع الاعتماد على وجود خلفية متوسطة للقارئ على علم الإحصاء لغرض متابعة المعلومات المطلوبة ومعرفة أصولها المبدئية.

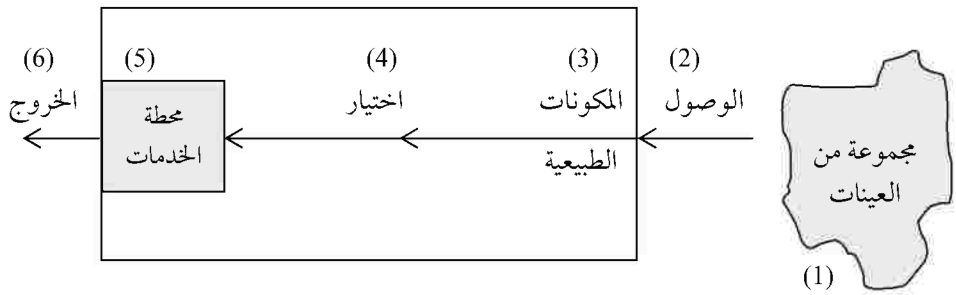
12.2 مشكلة نظام خطوط الانتظار:

تظهر هذه المشكلة عندما يوجد نظام محطة تقديم خدمات متشابه مثال محطات الوقود – حانوت الحلاقة – صالات عرض الأشرطة – طرف في مصرف – أمين خزينة في مؤسسة – تقديم خدمات الهواتف الوطنية والدولية – ... الخ، وعندما يوجد هذا النوع من المحطات فإن المشكلة هي تقديم الخدمات الضرورية في الزمن المناسب وبأقل تكلفة ممكنة من الآلات والمعدات والطاقة البشرية المساهمة في تقديم هذه الخدمات وبأكثر فائدة ممكنة – بالإضافة إلى تفادي فقدان الزبائن وعدم سوء تخطيط الإمكانات بأن تصبح معطلة عندما تكون متوفرة أكثر من اللازم.

فمثال خط تسجيل الطلاب في بداية العام الجامعي في كلية جامعية ما – من المطلوب أن يتم تسجيل الطلاب في وقت محدد تراه الجامعة وذلك بتوفير مكاتب التسجيل أكثر من العدد المتوفر في حالة العمل العادي – وهذا يترتب عليه زيادة تكلفة في ميزانية الكلية وبالتالي يجب أن تكون دراسة هذه الحالة كافية لحل مشكلة التسجيل في الوقت المناسب وبما لا يتعارض مع تحميل الجمعة ميزانية فوق الميزانية المخطط لها.

12.3 مواصفات خطوط الانتظار:

الشكل رقم (12.1) يوضح مكونات ومواصفات خط الانتظار وبالتفصيل في الأشكال التي تتبع هذا الشكل:

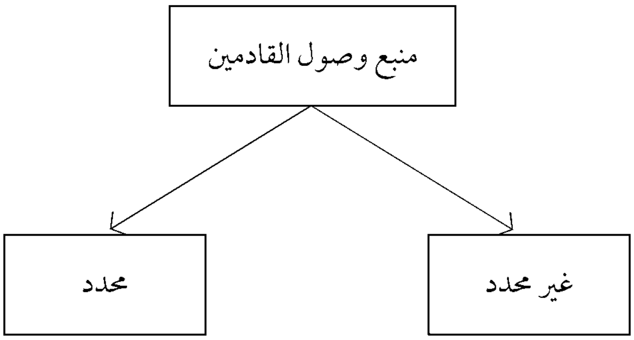


شكل : (12.1) مكونات ومواصفات خط الانتظار

12.3.1 مصدر العينات (Population source)

يقصد بمصدر العينات بمصدر الواصلين في أي نظام لتلقي الخدمات في محطة الخدمات. ومن الممكن أن يكون المصدر ذو أعداد محددة وأحياناً تكون غير محددة (Finite of infinite). فمثلاً عدد الآلات في مصنع ما والتي تنتظر الصيانة أو فريق فهو عدد محدود (Finite).

أما عدد الواصلين إلى حانوت حلاقة يكون غير محدد من الزبائن. عدد السيارات القادمة إلى مدينة طرابلس غير محدد، والأمثلة كثيرة في الحياة، ويمكن تمثيل نوع القادمين في شكل 12.2.



شكل : (12.2) تمثيل نوع القادمين

12.3.2 مواصفات الواصلين (Arrival characteristics):

12.3.3 نمط الواصلين (Pattern Arrival):

يمكن أن تكون طريقة الواصلين بطريقة يمكن التحكم فيها ومعرفة سرعة وصولها وكميات الواصلين إلى مراكز الخدمة أو الخدمات. فمثلاً القادمين إلى حانوت الحلاقة يقل عددهم يوم الجمعة وبطبيعة الحال يزداد العدد في أيام الأسبوع الأخرى. ربما يزداد عدد الزبائن في الموزعات الفردية في أيام تخفيض السلع عنها في الأيام العادية أو يزداد في مناسبات الأعياد الدينية مثال عيد الفطر وعيد الأضحى المباركين عنها في الأيام العادية. خطوط الطيران والخطوط الجوية تزدحم في مواسم العطلة الصيفية عنها في باقي أشهر السنة. وفي مثال هذه الحالات يمكن التحكم في نموذج عدد الواصلين وتوفير الخدمات اللازمة لهم.

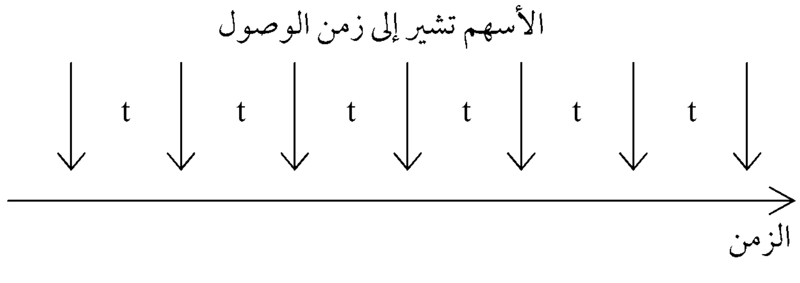
ولا يمكن التحكم أحياناً في عدد القادمين إلى مراكز الخدمة مثال غرف الطوارئ في المستشفيات.

2- حجم العينات الواصلة إلى مراكز الخدمات (Size of arrival unit):

يمكن يكون الواصلين على هيئة مفردة عندما يكون مركز الخدمة واحد والتي يمثل أقل نموذج لأنظمة الانتظار. ومن الممكن أن يكون حجم العينة يصل على أفواج أو دفعات لتلقي الخدمة على هيئة عدة مراكز خدمات في آن واحد، مثال مشاهد بقلم في صالة فرح عامة أو عشاء إلى خمس أشخاص على طاولة واحدة.... الخ.

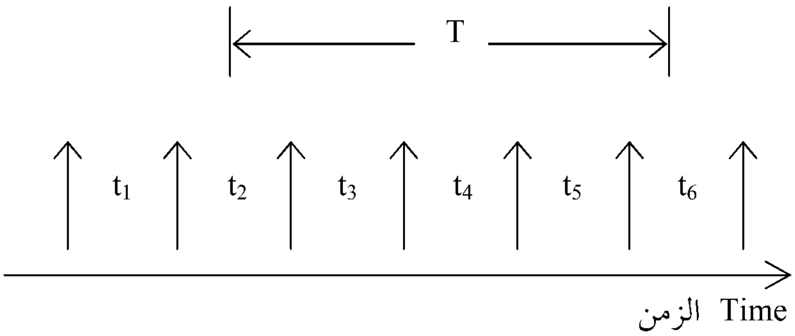
3- توزيع الواصلين (Distribution of arrivals)

يمكن أن يكون طريقة توزيع الواصلين على نظام ثابت وذلك بحجم ثابت في زمن ثابت أي فترات متساوية كما هو موضح بالشكل (12.3).



شكل : (12.3) يوضح وصول العينات بصورة ثابتة وفي زمن ثابت

ويمكن النظر في توزيع الواصلين أما بالنسبة إلى فترات الزمن بين الواصلين أو باحتمال وصول أي حالة وحالة أخرى أو بواسطة زمن معروف (T) ونعمل على كيفية حساب كم عدد الواصلين خلال فترة زمنية محددة كما هو موضح بالشكل (12.4).

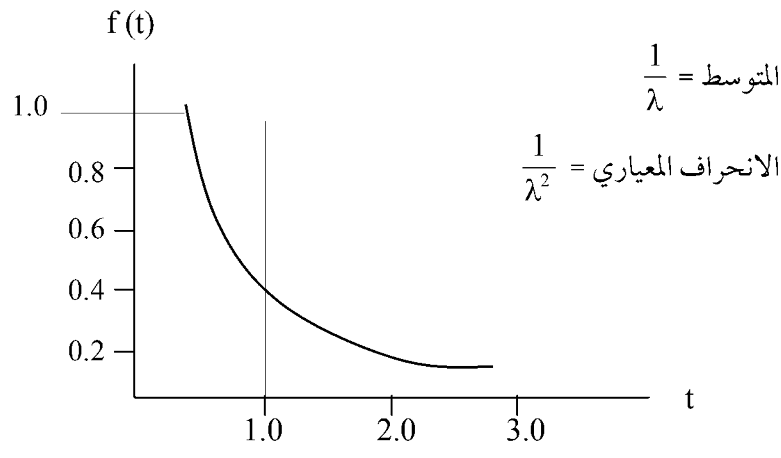


شكل : (12.4) كيفية حساب كم عدد الواصلين خلال فترة زمنية محددة

إذا رسمنا طريقة وصول العينات فنلاحظ أن التوزيع يكون توزيع أسي (Exponential distribution) كما في الشكل (12.5) وله المعادلة الرياضية التالية:

$$f(t) = \lambda\, e^{-\lambda t} \qquad \text{.................................}(12.1)$$

حيث f (t) تمثل احتمال حصول واصلين في الفترة (t)



شكل (12.5) التوزيع الأسي عند λ=1

والجدول التالي يوضح احتمال أن العينة التالية سوف تصل عند الزمن t

	t	F (x)
دقيقة	0	1.0
	1	0.35
	2	0.15
	4	0

أما إذا اهتمينا بعدد الواصلين خلال الفترة T حسب التوزيع المعياري الموضح في الشكل (12.6) ولإيجاد عدد الواصلين n خلال الفترة T ووصولهم عشوائياً فإن التوزيع يخضع لما يسمى بتوزيع يوسان (Passion distribution) والتي يعطي بالمعادلة الرياضية التالية.

$$P_t(n) = \frac{(\lambda Y)e^{n-\lambda T}}{\lambda!} \qquad \text{.................................}(12.2)$$

والمعادلة (12.2) توضح أن احتمال عدد n من الواصلين سوف تقدم لهم خدمات في الفترة الزمنية (T) فمثلاً إذا كان نسبة الواصلين في نظام الطوابير (3) فإن (3 = λ) وترغب في إيجاد احتمال 5 وحدات سوف تصل خلال دقيقة واحدة فإن:

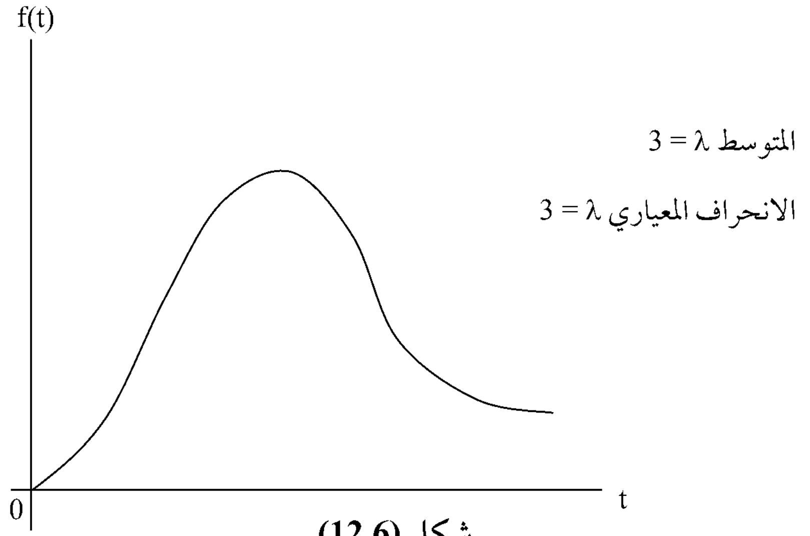
$$(n = 5 \ . \ T = 1), p_{1,5}$$

$$p_{1,5} = \frac{(3\times 1)e^{5-3\times 1}}{5!}$$

$$= \frac{3e^{5-3}}{120} = 2.025e^{3}$$

$$p_{1,5} = 0.0101$$

وهذا يعني أن 10.1٪ فرصة لوصول 5 زبائن في فترة دقيقة واحدة.



شكل (12.6)

وبالمثل يمكن أن يعرف توزيع الأسي السالب وتوزيع بوسان بواسطة الجداول التي تعطي في مرفقات هذا الكتاب.

ويعرف التوزيع العام (توزيع أيرلنق) (Erlang distrbution) على النحو التالي:

$$f(t)=\frac{k\gamma(k\lambda t)^{k-1}e^{k\lambda t}}{(k-1)!}$$

حيث المتوسط = $\frac{1}{\lambda}$ والانحراف المعياري = $\frac{1}{k\lambda^2}$

حيث k أ] رقم موجب صحيح. ويختلف من توزيع إلى آخر k =1 الدرجة الأولى، k =2 الدرجة الثانية ... الخ.

وفقاً لقيمة k كما هو موضح بالشكل (12.7) يكون شكل المنحنى.

4- درجة انتظار الواصلين (Degree of patience)

يقصد بدرجة انتظار الواصلين إلى مركز الخدمة هو الصبر الذي يصاحبهم بانتظار نقطة الخدمة حتى تصبح شاغرة مهما طال زمن الانتظار حتى انتظارهم الطويل في طابور الخدمة يسمى بالصابرين.

ويوجد نوعان من المنتظرين الذين ليس لديهم صبر طويل للانتظار مركز الخدمة. نوع يعمل على دراسة طول خط الانتظار وزحمة مكان تقديم الخدمات وعليه يقرر مغادرة نظام الطوابير. ونوع ينتظر قليل في طابور المنتظرين ثم يغادر.

12.3.4 مواصفات خطوط الانتظار الطبيعية (Physical feature of lines):

1- طول خط الانتظار (Length):

من المعروف من الناحية العملية أن الخط اللامحدود (infinite) يعتبر خط طويل من ناحية سعته الخدمية مثال وقوف السيارات في بوابة في معبر طريق أو انتظار الجمهور لقطع تذكرة دخول إلى مسرح ... الخ.

أما الخطوط المحدودة الطول مثال محطات الوقود، والميناء، ومحطة السيارات ومحطة غسيل السيارات، وطابور الشاحنات في مصنع الأسمنت، ... الخ.

2- عدد خطوط الانتظار (Number of lines):

يقصد بالخط الوحيد مثال خط المرور من طريق عام واحد، أو بوابة دخول إلى مصنع، متجر مواد غذائية، أو أي محطة خدمات مفردة. وفي الغالب توجد خطوط متعددة للانتظار أو الخدمات. مثال محطات الوقود طرفين في مصرف تجاري أو أهلي، تسجيل الطلاب في الجامعة، خدمات الفنادق، خدمات الهاتف، خدمات الموانئ .... الخ والتي توجد فيها أكثر من بوابة، ووفقاً لهذه المواصلات يمكن حساب الزمن المتوقع للانتظار والزمن المتوقع للخدمة، والتكاليف المترتبة على ذلك.

11.3.5 الاختيار في خطوط الانتظار (Selection of waiting line)

اختيار خط الانتظار يتم وفقاً للأولويات الخدمة المقدمة للزبون، والتي تتمثل في عدد الزبائن في خط الانتظار - متوسط زمن الانتظار - مدى تغير زمن الانتظار = كقاعدة الخدمات المقدمة.

ومن ضمن هذه الأولويات الذي يصل أولاً تقدم له الخدمة أولاً (First-com (first-served) (FCFS).

مثال ما يحصل في الأسواق العامة والجمعيات التجارية والزراعية والمطاعم والفنادق ... الخ.

ويمكن أن تعطي الأولويات إلى حالات خاصة من الزبائن مثال المرضي في حالة الطوارئ الزبون التي يحقق ربح أكثر - الزبون الذي طلبيته أكبر - الزبون المعروف التعامل معه بدلا من زبون عمومي - أطول خط انتظار - الزبون الذي له موعد سابق.

12.3.6 مواصفات محطة الخدمة (Service facility):

يمكن أن يكون خط الانتظار مفرداً - أو جماعياً - أو مخلوطاً وفقاً لطبيعة الخدمة. ويعتمد هذا على نوع الخدمة المقدمة والشروط اللازمة لعمل طلبية الخدمة فعلى سبيل المثال:

1- قناة الانتظار المفردة في مستوى واحد (Single channel)

توجد قوانين رياضية مبسطة عند توفر المعلومات عن كيفية الوصول والخدمة، مثال نوع التوزيع المعياري - مثال ذلك (حانوت الحلاقة).

2- قناة الانتظار المفردة في مستويين (Single channel multiphase):

مثال ذلك محطة غسيل سيارات والتي يتمثل في محطة خدمة واحدة بتسلسل. مثال الغسيل، تنظيف الأتربة، التجفيف، التلميع ... الخ آخر العملية الخدمية المطلوبة.

3- عدة قنوات في مستوى واحد (Multichannel single phase):

تتمثل هذه الحالة في طرفين المصارف التجارية - يقومون بنفس الخدمات في خطوط متوازية ومتشابهة وتعتمد السرعة في الخدمات وفقاً للمعاملة المالية وتوفر المعلومات من الزبون وخبرة الموظف الذي يقوم بالخدمة.

4- قنوات مختلفة في مستويات مختلفة (Multichannel multiphase)

هذه الحالة مشابهة إلى الحالة السابقة مع اختلاف أن تقدم بعض الخدمات المختلفة بتسلسل في قناة واحدة. مثال دخول المريض إلى المستشفى والتي تقدم له خدمات مختلفة ومتادلية حتى يصل إلى غرفة الإقامة في المستشفى بعد عدة فحوصات.

5- قنوات مختلطة (Mixed channels)

حيث أن فكرة القنوات المختلطة تعني وصول الزبائن إلى قنوات فردية ومتعددة ويذهبون إلى خدمات فردية ومتسلسلة.

6- معدل تقديم الخدمة (Service rate)

يقصد بمعدل الخدمة هدفين معينين: معدل خدمة ثابتة وهذا يعني أن زمن تقديم الخدمة متساوي وفقاً لمعدل وصول ثابت للزبائن الذين يتلقون الخدمة. وغالباً ما تحصل هذه الحالة عندما تكون الخدمة آلية (أي بواسطة الآلة).

أما معدل الخدمة المتغير فهو يخضع للتوزيع المعياري العام وفقاً لنوع الخدمة تحت توزيع (Erlang) بغض النظر عن قناة خدمة مفردة أو قنوات خدمة متعددة أو متعددة ومتسلسلة.

12.3.7 الخروج (Exit):

إذا أنهى الزبون الخدمة المطلوبة في منظومة خطوط الانتظار في الغالب احتمالان هما:

1- يمكن أن يرجع إلى عينة الوصلين لطلب الخدمة مرة أخرى أو؛
2- يمكن أن يدخل في توقع الاحتمالات الضعيفة لطلب الخدمة مرة أخرى.

ويمكن شرح الحالة الأولى للآلة تحتاج إلى صيانة وقائية دورية والحالة الثانية للآلة تم تطويرها وقدرة تحملها على الاستمرار والرجوع إلى الصيانة الوقائية أصبحت قليلة.

12.4 تطبيقات الأنماط الرياضية لخطوط الانتظار:

يحتوي هذا الجزء من هذا الفصل على أمثلة عديدة توضح كيفية استخدام القوانين الخاصة بنظم خطوط الانتظار والتي سوف تستعرض في الجدول (12.1)، (12.2) ، (12.3) ، (12.4).

1- نمط رقم (1) (Model 1)

مصرف الجماهيرية بطرابلس استحدث طريق لسحب النقود بواسطة طرفين السين داخل صالة المصرف. ومن خلال إدارة المصرف توقعت أن معدل قدوم الزبائن هو 15/ الساعة وأن معدل خدمة الزبون الواحد 3 دقائق وإذا فرضنا أن توزيع الواصلين يخضع لـ (Poission) وأن توزيع الخدمات تخضع لـ (exponential) أحسب المعلومات التالية.

1- كفاءة آلة الصرف.
2- متوسط عدد الزبائن المنتظرين.
3- متوسط عدد الزبائن في منظومة خط الانتظار.
4- متوسط الزمن اللازم للانتظار في خط الانتظار.
5- متوسط الزمن اللازم في منظومة الانتظار بما في ذلك زمن الخدمة.

جدول (12.2)

Infinite queuing notation (infinite)

σ	=	Standard deviation
λ	=	Arrival rate
λ	=	Service rate
$1/\mu$	=	Average service time
$1/\lambda$	=	Average time between arrivals
p	=	Potential utilization of the service facility (defined as λ/μ)
$\bar{n}_t$	=	Average number waiting in line
$\bar{n}_s$	=	Average number in system (including any being served)
$\bar{t}_t$	=	Average time waiting in line
$\bar{t}_s$	=	Average total time in system (including time to be served)
K	=	Kth distribution in the Erlang family of curves
n	=	Number of units in the system
M	=	Number of identical service channels
Q	=	Maximum queue length (sum of waiting space and service space)
P_n	=	Probability of exactly" units in system
P_w	=	Probability of wailing in line

جدول (12.3)

Finite queuing notation (based on Peck and Hazelwood tables)

D	=	Probability that an arrival must wait in line
F	=	Efficiency factor, a measure of the effect of having to wait in line
H	=	Average number of units being serviced
I	=	Population source less those in queuing system (N - n)
L	=	Average number of units in line
M	=	Number of service channels
n	=	Average number of units in queuing system (including the one being served)
N	=	Number of units in population source
p_n	=	Probability of exactly n units in queuing system
T	=	Average time to perform the service
U	=	Average time between customer service requirements
W	=	Average waiting time in line
X	=	Service factor or proportion of service time required

جدول (12.4)

Equations for models in Exhibit 9.8 (see Exhibit 9.9 for explanation of notation)

Model 1

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} & \bar{t}_t = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} & P_n = \left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \\ \bar{n}_s = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda} & \bar{t}_s = \dfrac{I}{\mu-\lambda} & P = \dfrac{\lambda}{\mu} \end{cases}$$

Model 2

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \dfrac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} & \bar{t}_t = \dfrac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} \\ \bar{n}_s = \bar{n}_t \dfrac{\lambda}{\mu} & \bar{t}_s = \bar{t}_t + \dfrac{I}{\mu} \end{cases}$$

Model 3

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 \left[\dfrac{1-Q\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-1}+(Q-1)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^Q}{\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^Q\right)}\right] \\ \bar{n}_s = \dfrac{\lambda}{\mu}\left[\dfrac{1-(Q+1)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^Q+Q\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q-1}}{\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)\left(1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}\right)}\right] \quad P_n = \left[\dfrac{1-\dfrac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{Q+1}}\right]\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n \end{cases}$$

Model 4

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \lambda^2\sigma^2}{2\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)} & \bar{t}_t = \dfrac{\dfrac{\lambda}{\mu^2}+\lambda\sigma^2}{2\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu}\right)} \\ \bar{n}_s = \bar{n}_t \dfrac{\lambda}{\mu} & \bar{t}_s = \bar{t}_t \dfrac{I}{\mu} \end{cases}$$

Model 5

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \dfrac{K+1}{2K}\cdot\dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} & \bar{t}_t = \dfrac{K+1}{2K}\cdot\dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \\ \bar{n}_s = \bar{n}_t + \dfrac{\lambda}{\mu} & \bar{t}_s = \bar{t}_t\dfrac{1}{\lambda} \end{cases}$$

Model 6

$$\begin{cases} \bar{n}_t = \dfrac{\lambda\mu\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^M}{(M+1)!(M\mu-\lambda)^2}P_o & \bar{t}_t = \dfrac{P_o}{\mu MM!\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu M}\right)^2}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^M \\ \bar{n}_s = \bar{n}_t\dfrac{\lambda}{\mu} & \bar{t}_s = \bar{t}_t\dfrac{I}{\mu} \\ P_o = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{n=0}^{M-1}\dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} + \dfrac{\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^M}{M!\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu M}\right)}} & P_M = \left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^M\dfrac{P_o}{M!\left(1-\dfrac{\lambda}{\mu M}\right)} \end{cases}$$

This is a finite queuing situation that is most easily solved by using finite tables. These tables, in turn, require the manipulation of specific terms (see Exhibit 9.9 for notation)

Model 7

$$\begin{cases} X = \dfrac{T}{T+U} \quad H = FNX \quad L = N(1-F) \\ P_n = \dfrac{N!}{(N-n)!}X^nP_o \quad J = NF(1\text{-}X) \\ W = \dfrac{L(T+U)}{N-L} = \dfrac{LT}{H} \quad F = \dfrac{T+U}{T+U+W} \\ n = L+H \end{cases}$$

1- كفاءة آلة الصرف:

$$P = \frac{\lambda}{\mu}$$

حيث:

λ معدل انتظار الزبون

μ معدل خدمة الزبون.

p كفاءة آلة الصرف.

$$P = \frac{15}{20} 75\%$$

2- متوسط عدد الزبائن في خط الانتظار (الجدول 12.2 - 12.3)

$$\bar{n}_L = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{(15)^2}{20(20-15)} = 2.25 \quad \text{زبون}$$

3- عدد الزبائن في المنظومة:

$$\bar{n}_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

$$= \frac{15}{20-15} = 3 \quad \text{زبائن}$$

4- متوسط زمن الانتظار في خط الانتظار:

$$\bar{t}_e = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$= \frac{15}{20(20-15)} = 0.15 \quad \text{ساعة}$$

5- متوسط زمن الانتظار في المنظومة:

$$\bar{t}_s = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{1}{20-15} = 0.2 \quad \text{ساعة}$$

وبما أن المساحة المتاحة في صالة المصرف للانتظار محدودة وحتى يتوفر مستوى جيد من الخدمات المصرفية المتعارف عليها. عليه رأت الإدارة لتأكد من تحقيق هذا الغرض بنسبة لا تقل عن 95٪ من الثقة بمعنى أن عدد الزبائن في المنظومة لا يزيد عن 3 زبائن في لحظة زمن محددة. وبذلك فإن مستوى الخدمات لـ 3 زبائن أقل ما يمكن تحديده على النحو الآتي:

$$P_n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

عند $n = 0$ $\quad P_0 = (1- 15/20)\,(15/20)^0 = 0.250$

عند $n = 1$ $\quad P_1 = (1- 15/20)\,(15/20)^1 = 0.188$

عند $n = 2$ $\quad P_2 = (1- 15/20)\,(15/20)^2 = 0.141$

عند $n = 3$ $\quad P_3 = (1- 15/20)\,(15/20)^3 = 0.106$

المجموع 0.685 أو 68.5٪

وهذا يعني أن احتمال تواجد أكثر من 3 زبائن في النظام يساوي

$(1-0.685) = 31.5\%$

ولتحقيق أن 95٪ لا تزيد عن الزبائن في النظام أكثر من 3

$P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 95\%$

وللتعويض عن هذه الاحتمالات

$$0.95=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{0}+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{1}+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2}+\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{3}$$

$$0.95=\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)+\left[1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{2}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{3}\right]$$

ويمكن حل هذه المعادلة بواسطة وضع قيم فرضية لـ λ و μ حتى يحصل التساوي في طرفي المعادلة.

$$\frac{\lambda}{\mu}=0.5 \qquad 0.95 \overset{?}{=} 0.5\ (1+0.5+0.25+0.125)$$

$$0.95 \neq 0.9675$$

$$\frac{\lambda}{\mu}=0.45 \qquad 0.95 \overset{?}{=} (1-0.45)\ (1+0.45+0.203+0.091)$$

$$\frac{\lambda}{\mu}=0.47 \qquad 0.95 \overset{?}{=} (1-0.47)\ (1+0.47+0.221+0.104)$$

$$0.95 \neq 0.95135$$

وعليه فإن كفاءة استخدام النظام P تساوى 47٪ بحيث تحقق احتمال أن 3 زبائن في النظام يكون نسبة 95٪ ثقة.

$$0.47=\frac{\lambda}{\mu}\Rightarrow \mu=32/\text{ساعة}$$

نمط رقم (2):

شركة مساهمة تقوم بإدارة محطة وقود ومحطة غسيل وتشحيم سيارات خلال عدة مناطق في الجماهيرية الليبية، وتعتزم هذه الشركة في سياساتها الاستشارية أعطاء غسيل مجاني في حالة تعبئة السيارة بالكامل بالوقود. وفي حالة غسل يدفع الزبون 5000

درهم، علما بأن الفائدة الموقعة من تعبئة سيارة بالكامل 7000 درهم وتكلفة غسيل السيارة الواحدة 1000 درهم، وتمتد ساعات العمل بالشركة حوالي 14 ساعة يومياً.

وتحتوي المحطة الواحدة على ثلاث وحدات غسيل. الوحدة الأولى تقوم بغسيل السيارة الواحدة في خمس دقائق ويمكن تأجيرها 12000 درهم في اليوم، والوحدة الثانية تقوم بغسيل السيارة في كل 4 دقائق، ويكلف إيجارها 16000 درهم في اليوم. والوحدة الثالثة تقوم بتغسيل السيارة في كل 3 دقائق، ويكلف إيجارها 22000 درهم في اليوم.

ومن خلال الإحصائيات تبين أن الزبون لا يستطيع أن ينتظر أكثر من 5 دقائق في خط الغسيل. ومتوقع نسبة وصول الزبائن إلى المحطة 10/ ساعة. ما هي المحطة التي يجب اختيارها للإيجار.

الحل:

بناء المعادلات الواردة في الجدول (12.4):

الوحدة رقم (1) $\mu = 12$

$$\bar{t}_L = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} = \frac{10}{2(12)(12-10)} = 0.208\,\text{hr}\ (\text{ساعة})$$

الوحدة رقم (2) $\mu = 15$

$$\bar{t}_L = \frac{10}{2(12)(12-10)} = 0.267\,\text{hr}\ (\text{ساعة})$$

إذا اعتبرنا أن زمن الانتظار كمواصفات قياسية للمفاضلة فإن الوحدة رقم (2) أجدر بالاختيار.

أما الوحدة رقم (1) حيث دقائق 5 = t فإن متوسط طول خط الانتظار للزبائن وذلك بحل المعادلة أعلاه لحساب λ (معدل وصول الزبائن).

$$\bar{t}_L = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)}$$

$$\lambda = \frac{2\bar{t}_L\mu^2}{1+2\bar{t}_L\mu}$$

$$\lambda = \frac{2(1/12)(12)^2}{1+2(1/12)(12)} = 8$$ زبون/ الساعة

وبما أن القيمة التقديرية الأولى لـ $\lambda = 10$/ ساعة وهذا يعني أن المحطة سوف تحضر عدد 2 زبون في الساعة وهو يعزز الإجابة الأولى.

نمط (3):

مصنع أعلاه الحيوانات، يستوعب خط لتعبئة سيارات النقل الخفيفة 4 سيارات بما في ذلك السيارة التي تحت التعبئة. معدل متوسط وصول السيارات إلى المصنع من مختلف جمعيات مربي الحيوانات 40 سيارة في الساعة. ومعدل تعبئة السيارة آلياً 40 سيارة/ ساعة. ومتوسط الربح في العبوة الواحدة ½ د.ل (السعر مدعوم). ويمكن إيجار محطة انتظار السيارة بجانب المصنع بمعدل 5 د.ل/ اليوم، ويعل المصنع على ورديتين بمعدل 14 ساعة يومياً. إذا فرضنا أن توزيع الوصول (Poission) وتوزيع تقديم الخدمة (Exponential). هل تنصح بإيجار المحطة التي داخل المصنع وكم يكون سعته؟

الحل:

بالنظر إلى معادلات نمط (3) في الجدول (12.4).

فإن احتمال أن الإنتاج تحت التعبئة يعطي بالمعادلة التالية:

$$P_n = \left[\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})Q+1} \right] \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n$$

للاحتمال أن لا توجد سيارات نقل خفيف في المنظمة عند q = 4

$$P_n = \left[\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})Q+1} \right] \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^{\circ}$$

$$P_n = \left[\frac{1-\frac{40}{50}}{1-(\frac{40}{50})^5} \right] (1) = 0.298$$

∴ إن عملية التعبئة مثمرة

1 - 0.298 = 0.702 أو 70.2%

وعندما يكون قراج (محطة السيارة واحد مؤجرة) (Q = 4+1)

$$P_n = \left(\frac{0.2}{1-(\frac{40}{50})^6} \right) = 0.271$$

عندما تكون الخدمة بداية (1 - 0.271) = 0.729

أي بزيادة 0.271 - 0.702 = 2.8%

$$0.028(50\frac{\text{سيارة}}{\text{الساعة}} \times 14\frac{\text{ساعة}}{\text{اليوم}} \times \frac{0.5}{\text{السيارة}}) = 9.50L.D$$

عندما يريد تأجير لسيارتين

$$Q = 4 + 2 = 6$$

$$P_0 = \left(\frac{0.2}{1-(\frac{40}{50})^7} \right) = 0.253$$

واحتمال أن مكان التعبئة مشغول

1 - 0.253 = 0747 أو 74.7%

ويمكن أن نلاحظ التغير الذي يحصل وفقاً لزيادة إيجار المحطة.

ويمكن معرفة عدد السيارات في النظام، والتي تشمل الموجودة في الخط وتحت التعبئة بالإضافة إلى تأجير لمكان سيارتين في محطة المصنع.

$$\bar{n}_s = \frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{1-(Q+1)(\frac{\lambda}{\mu})^Q + Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}{(1-\frac{\lambda}{\mu})(1-\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}} \right)$$

$$\bar{n}_s = \frac{40}{50}\left(\frac{1-(6+1)(\frac{40}{50})6 + 6(\frac{40}{50})7}{(1-\frac{40}{50})(1-\frac{40}{50})^{71}} \right)$$

$\bar{n}_s = 2.15$ سيارة

نمط (4):

حلاق يستغرق 15 دقيقة لقص شعر أي زبون. يصل الزبائن إلى دكان الحلاقة على توزيع Poission بمتوسط نسبة الواصلين 2/ الساعة. فإذا فرضنا أن لك موعد

بعد وصولك دكان الحلاقة بعد زمن قدره 30 دقيقة. وأن بعد مكان الموعد التي بعد الحلاقة يستغرق 3 دقائق مشياً. وأن زمن قص الشعر يخضع لتوزيع .Erlang dist حيث k = 3. هل تتوقع أنك تصل موعدك في الوقت المناسب؟

الحل:

إذا علمت أن:

$$\mu = 4 \ , \ \lambda = 2$$

∴ المشكلة هي حساب الزمن المتوقع الذي يقضيه الزبون في المنظمة ($\bar{t}_s$)

$$\bar{t}_s = \frac{k+1}{2k} \cdot \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu}$$

بالتعويض في المعادلة وفق الجدول لنمط (5)

$$\bar{t}_s = \frac{3+1}{2(3)} \cdot \frac{2}{4(4-2)} + \frac{1}{4}$$

$$\bar{t}_s = \frac{5}{12}$$ ساعة , أو 25 دقيقة

وبناء على ذلك من الممكن أن تعمل موعد آخر بعد الحلاقة. لأنك تحتاج إلى 30 دقيقة من بداية الحلاقة إلى وصولك إلى موعدك وأن 30<25

12.5 مسائل:

1- هل يمكن استخدام نظام خطوط الانتظار في إخراج المواقع الصناعية؟

2- ما الفرق ما بين مناة ومرحلة.

3- ما هي الفرضيات والمعطيات التطبيق نموذج رقم (1).

4- متى يجوز استخدام طريقة (FcFs) أعطي أمثلة تطبيقية في الصناعة.

5- هل تتوقع استخدام توزيع الأسي في أنواع الخدمات التالية:
أ - شراء تذاكر خطوط الطيران.
ب- الخروج أو المغادرة من الفندق.
ج- الانتهاء من امتحان الفترة الثانية في مادة دراسية ما.

6- محطة غسيل وتغيير زيوت محركات السيارات، تقدم الخدمات للمواطنين كل يوم، ومعدل وصول الزبائن 3/ الساعة، وتقدم الخدمات بمعدل 15 دقيقة، وتتم الخدمات بواسطة الفنيين لكل سيارة تأتي أولاً ... الخ. فإذا فرضنا أن الوصول يتم وفق توزيع (Poission) وأن الخدمات تتم وفق توزيع (Exponentiol). أحسب:
أ - كفاءة تقديم الخدمات.
ب- عدد السيارة في خط الانتظار.
ج- الزمن اللازم لانتظار السيارة قبل موعد تقديم الخدمة.
د- مجموع الزمن التي تأخذه السيارة في المنظومة (خدمات + انتظار).

7- تشاركية مواد تموينية تقوم بتقديم الخدمات إلى جامعة ما بواسطة الآلات الأتوماتيكية للحصول على المشروبات والفواكه وبعض المرطبات. نظراً لطبيعة المستهلكين (الطلاب) وعدم اهتمامهم بحسن استعمال هذه الآلات والتي تتطلب صيانة دورية للآلات. وجد أن معدل حدوث العطل في الآلات 3/ الساعة. وحيث أن الأعطال تقع تحت التوزيع Poission. وأن تكلفة حصول العطل تساوي 25 ديكار/ الساعة/ الآلة. وأن تكلفة ساعة فني الصيانة 4 د.ل وأن متوسط صيانة الآلات بواسطة فني واحد 5/ الساعة حسب التوزيع (Exp)، وأن العدد اللازم من مشرفي الآلات 2 لكل 7 آلات/ ساعة. وأن مشرفي الآلات 3 لكل 8 الآلات/ الساعة.

ما هو الحد الأدنى من المشرفين (الفنيين) اللازم لصيانة الآلات الدورية يومياً لأقل تكلفة ممكنة؟

8- في الحالات التالية عرف مكونات نظام الانتظار (الزبون) نوع الخدمة، تصميم مكان الخدمة، أهداف الخدمة، عدد فئة الزبائن محدود أو غير محدودة ... الخ).

أ - طابور الزبائن في أحدى الأسواق العامة.

ب- طابور العربات في إشارة المرور.

ج- عيادة خارجية لمعالجة الزبائن.

د- المسافرين على أحدى رحلات الخطوط الجوية.

هـ- مركز استخدام الحاسب الآلي في إحدى الجامعات.

و- طرف أوتوماتيكي يعمل لمدة 24 ساعة.

9- زبون يصل مكان الخدمة تباعاً إلى توزيع Poission بمعدل قدره 2/ الساعة. أوجد:

أ - متوسط عدد الزبائن يصلون في مدة 8 ساعات.

ب- احتمال أن زبون واحد يصل خلال ساعة على الأقل.

10- إذا علمت أن الواصلين في خط خدمة مفردة في منظومة الانتظار يحصل وفقاً إلى توزيع Poission بمتوسط قدره 5/ الساعة. أما توزيع تقديم الخدمة فهو يخضع لتوزيع المنتظم الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} 1/10 & 5 \le x \le 15 \\ 0 & \text{غير ذلك} \end{cases}$$

أحسب ما يلي:

أ - احتمال أن منظمة الانتظار مشغولة.

ب- عدد الزبائن المتوقع في المنظومة.

ج- الزمن المتوقع انتظاره في خط الانتظار.