الفصل الرابع عشر

نظرية المباريات

ينـاقش هـذا الفـصل مفهـوم نظريـة المباريـات وتطبيقاتهـا في اتخـاذ القـرارات لتحقيـق أكـبر ربـح ممكن وأقل خسارة ممكنة.

الفصل الرابع عشر

14

نظرية المباريات
Game Theory

14.1 مقدمة:

تفيد نظرية المباريات (Game theory) متخذ القرار الذي يواجه عند اتخاذه للقرار في وجود أطراف متنافسة. أي أن نظرية المباريات تفيد في اتخاذ القرارات في المواقف التي تقسم بتعارض المصالح (عند أي مستوى إداري) والتي يتحدد فيها اختيار متخذ القرار البديل بناء على المواقف المحتملة التي يمكن أن يتخذها المنافس الذي له نفس الظروف.

في نظرية المباريات يشار للخصم (Opponent) باللاعب (Player) وكل لاعب له عدة خيارات محدودة وغير محدودة تسمى إستراتيجية (Strategies) . والمخرجات من المباراة يمكن تلخيصها في دوال لعدة استراتيجيات لكل لاعب.

فمثلاً مباراة من لاعبين حيث انتصار أي لاعب وفائدته يقدر بخسارة الطرف الثاني. وتسمى المجموع الصغرى لاعبين متقابلين (Tw0-Person zero-Sum game).

وتتكون أي مباراة من مجموعة من العناصر أهمها ما يلي:

- القوانين والإجراءات التي تحكم المباراة.
- اللاعبون أو متخذي القرارات (المتنافسون).
- إستراتيجية (أو استراتيجيات) كل طرف من أطراف المباراة.
- المعلومات والعوامل والإمكانيات المتاحة لكل طرف قبل وأثناء المباراة.

هذا ويمكن تقسيم المباراة من حيث عدد أطرافها إلى مباريات ثنائية ومباريات غير ثنائية (متعددة الأطراف) مما يمكن تقسيمها من حيث نتيجة المباراة إلى مباريات صفرية وأخرى غير صفرية، ولتوضيح هذا التعريف باستخدام المثال التالي:

مثال 14.1:

لتوضيح المباريات الثنائية الصفرية باعتبار استخدام رمي النقود المعدنية والتي أحد المتنافسين يختار أي وجه، فإذا كان اللاعبين t ، ب يختاران (H) ، (T) على التوالي H (Head) ، T (Tail).

فإن النتيجة إما H ، H أو T ، T فإن اللاعب H يربح ديناراً من اللاعب ب والعكس صحيح.

وفي هذه الحالة توجد استراتيجيان (H ، T) والذي يعطي مصفوفة من نوع 2× 2 ويمكن تمثيلها على النحو الأتي:

		اللاعب B	
		H	T
اللاعب أ	H	1	-1
	T	-1	1

الحل الأمثل (Optimum) لهذا النوع من المباريات يستلزم من كل لاعب ليلعب باستراتيجية صافية (H ، T) أو إستراتيجية مخلوطة.

14.2 الحل الأمثل للمباريات الثنائية ذات المحصلة الصفرية:

(Optimal solution of two - person zero - sum games)

تعمد مواصفات الحل لمسائل اتخاذ القرار على مدى توفر المعلومات عن المشكلة. نظرية المباريات تمثل حل للمسائل التي غالباً ما تكون فيها المعلومات محدودة ومتعارضة وينتج عنها عرض لحل مسألة خصمين محصلة نتائجهما صفر.

ولإثبات حالة أن كل لاعب يرغب في تحقيق أهدافه على حساب الثنائي لابد من نظرية تحقق – الأدنى – الأعظم أو الأعظم والأدنى (Minmax - Maxmin) ولتوضيح هذه الظاهرة تستدل بالمثال التالي:

مثال 14.1:

إذا اعتبرنا المصفوفة التالية والتي تمثل لاعبين A ، B وطريقة حسابات Minmax على النحو الآتي:

اللاعب B

	1	2	3	4	صف الأدنى	
اللاعب A 1	8	2	9	5	2	
2	6	5	7	18	5	الأعظم
3	7	3	-4	10	-4	
عمود الأعظم	8	5	9	18		

الأدنى الأعظم

فعندنا اللاعب يلعب وفق الخطة الأولى فإنه يمكن أن يربح 5 أو 9 ، 2 ، 8 وهذا يعتمد على اختيار خطَ اللاعب B.

ويمكن أن يضمن على الأقل الآتي:

$$\text{Min}\,[\,8\,,2\,,9\,,5\,]$$

على الرغم من الخطة التي يختارها اللاعب B.

وبالمثل إذا لاعب اللاعب A وفق الخطة الثانية فإنه يضمن أن يربح على الأقل الآتي:

$$\text{Min}\,[\,6\,,5\,,7\,,18\,]=5$$

وإذا لاعب اللاعب A وفق الخطة الثالثة فإنه يضمن أن يربح على الأقل التالي.

Min [7 , 3 , -4 , 10] = -4

وهذا يعني أن أقل قيم يمكن أن يربحها اللاعب في الصفوف هي أقل قيم ممكنة.

عليه فإنه اللاعب A سوف يختار الخطة الثانية والتي تحقق له أكبر ربح في أقل قيمة متاحة له. وهذا الربح يمكن أن يختار وفق للآتي:

Min [2 , 5 , -4] = 5

ويسمى اختيار اللاعب A بخطة (Maxmin) أو أقل قيمة في المباراة.

ومن جهة أخرى فإن اللاعب B يسعى لتحقيق أقل خسارة ممكنة فإذا اختار الخطة الأولى فسوف يتحقق أقل خسارة ممكنة على النحو الآتي:

Min [8 , 6 , 7] = 8

ويمكن تطبيق نفس الطريقة بالنسبة إلى باقي الخطط الثلاثة فإن النتيجة لكل الخطط هي:

Min [8 , 5 , 9 , 18] = 5

ويعتبر اختيار اللاعب B يسمى بالخطة (Minmax) أو اكبر قيمة في المباراة.

ووفقاً للنتائج المتحصل عليها بالنسبة للاعب A، واللاعب B نلاحظ أن:

Minmax value = Maximin value

(5) = (5)

ويسمى هذا الحل الأمثل وإذا تلاقى الاثنان عند نقطة واحدة تسمى نقطة التلاقي Szddle point وتكون الاستراتيجية في نقطة واحدة. أي لم توجد نقطة تلاقي تتكون الاستراتيجية في هذه الحالة استراتيجية مختلطة (Mixed).

وبصفة عامة وتحدد قيمة المباراة بشرط تحقيق الشرط التالي:

$$\text{Maximin value} \leq \text{Value of the game} \leq \text{Minimax value}$$

14.3 الخطط المختلطة (Mixed strategies):

في بعض المباريات قد تكون هناك نقطة تلاقي وبالتالي لا تكون هناك استراتيجية مطلقة وتعتبر الاستراتيجية في هذه الحالة استراتيجية مختلطة، أي كل متنافس سوف يختار صف من صفوفه. ولتوضيح الفكرة؛

مثال 14.2:

اللاعب B

		1	2	3	4	صف القيم الصغرى	
اللاعب A	1	5	-10	9	0	-10	
	2	6	7	8	1	1	
	3	8	7	15	2	2	القيم
عمود القيم	4	3	4	-1	4	-1	العظمى
العظمى	8	7	15	4			
				↑			
				أصغر قيمة عظمى			

فإن أصغر قيمة عظمى Minimax) = 4 وهي أكبر من أعظم قيمة صغرى (Maximin = 2.

∴ هذه المباراة لا توجد فيها نقطة تلاقي – كذلك الاستراتيجية المطلقة ليست ذات حل أمثل (Optmal).

وهذا يعني أن اللاعب يمكن أن يحسن من نتيجة باختيار خطط مختلفة. وفي هذه الحالة تعتبر المباراة غير عادلة.

ويمكن معالجة هذه الحالة باستخدام نظرية الاحتمالات. فمثلاً لو فرضنا أن:

$$x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_m$$

و

$$y_1 , y_2 , y_3 , \ldots\ldots , y_m$$

تمثل الصفوف والأعمدة بالنسبة للاعبين A، B والتي تمثل الخطوط المطلقة. عليه:

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1$$

$$x_i , y_i \geq 0 \qquad \text{لكل } (j, i)$$

∴ فإذا كان a_{ij} تمثل (i ، j) دخول إلى المباراة، x_j ، y_i سوف تظهر على شكل المصفوفة التالية:

$$\begin{array}{ccc|cccc}
 & & & & B & & \\
 & & & y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\
\hline
 & & x_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
A & & x_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & x_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}
\end{array}$$

ويحل هذا النوع من المسائل ذات الخطة المختلطة وفقاً لمواصفات المستخدمة في Minimax. ويعتبر الفرق الوحيد هو اختيار x_i للاعب A التي تحقق تعظيم أقل خسارة ممكنة في العمود وأن B تختار بواسطة y_i والتي تحقق تصغير أكبر ربح ممكن في الصف.

ويمكن التعبير عن هذه المفاهيم رياضياً على النحو الآتي:

$$\text{Max}\left\{\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1} x_{i1} \sum_{i=1}^{m} a_{i2} x_i ,\ldots\ldots\ldots\ldots, \sum_{i=1}^{m} a_{in} x_i\right)\right\}$$

حيث اللاعب A يختار x_i $\begin{bmatrix} (x_i \geq 0) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \end{bmatrix}$

واللاعب B يختار y_i $\left(yi \geq \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j = 1 \right)$

$$\text{Min}\left\{ \text{Max}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j, \ldots\ldots\ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_i \right) \right\}$$

فإن:

Minimax Exp. Payoff ≥ Maximin exp. Payoff

فإذا كان x^*I ، y^*I تمثل قيم الحل الأمثل

فإن القيمة المتوقعة للمباراة تساوي:

$$y^* = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j x^* i y^*$$

وتوجد عدة طرق لحل هذه المسألة منها ما يلي:

14.4 طريقة حل مسائل الخطة المختلطة (2 x n) ، (m x 2):

بواسطة الرسم البياني [Graphical solution of (2 x n) (m x 2) Games]

$$\begin{array}{ccc|cccc} & & & & & B & \\ & & & y_1 & y_2 & \ldots\ldots & y_n \\ \hline & & x_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ A & & & & & & \\ & & x_2 = 1 - x_1 & a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \end{array}$$

وبافتراض أن المباراة لا توجد فيها نقطة تلاقي.

وبما أن A لها خطتان والتي تتبع

$$y_2 = 1 - x_1,\ \ x_1 \geq 0\ ,\quad x_2 \geq 0$$

فإن الربح المتوقع والمقابل للخطة المطلقة B يمكن حسابه على النحو الآتي:

خطة B's	الربح المتوقع لـ A's
1	$(a_{11} - a_{21})\ x_1 + a_{21}$
2	$(a_{12} - a_{22})\ x_1 + a_{22}$
⋮	⋮
n	$(a_{1n} - a_{2n})\ x_1 + a_{2n}$

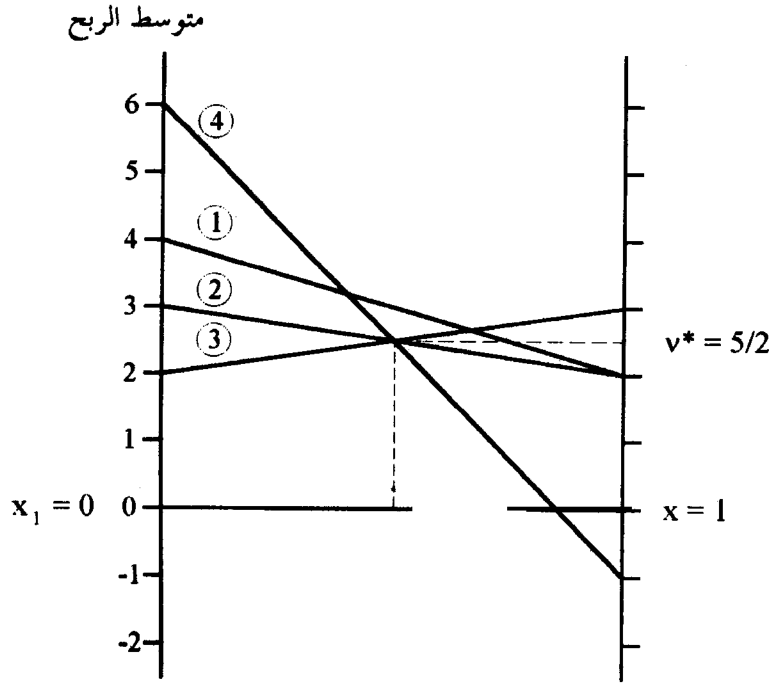
مثال 14.3:

$$\begin{array}{cc|cccc} & & & B & & \\ & & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ A & & & & & \\ & 2 & 4 & 3 & 2 & 2 \end{array}$$

هذه المباراة لا تحتوي على نقطة تلاقي. ومتوقع أن للاعب A سوف يربح اللاعب B مطلقة وفق للآتي:

توقع الربح لـ A	خطة B المطلقة
$-2\ x_1 + 4$	1
$-\ x_1 + 3$	2
$x_1 + 2$	3
$-7x_1 + 6$	4

وهذه المعادلات الخطية موضحة بالشكل (14.1) كدالة في x_1.



شكل (14.1)

حيث نقطة العظمى الصغرى Maximin تحدث عند * وهذه النقطة مقلوبة من تقاطع المعادلات 2 ، 3 ، 4 وأن الخطة المثلي تحقق عند (*)

وقيمة المباراة تعطي:

$$y^* = \begin{cases} -\frac{1}{2}+3 & = 5/2 \\ \frac{1}{2}+2 & = 5/2 \\ -> \left(\frac{1}{2}\right)-6 & = 5/2 \end{cases}$$

ولحساب الخطة المثلي للاعب B تلاحظ أن ثلاث خطوط مرت بالنقطة العظمى الصغرى (Maximin). وهذا يعطي انطباع أن B يمكن أن تخلط 3 خطط. حيث أن أي خطين يعطي إشارة معاكسة بالنسبة لميولهن ومنها يمكن أن تحصل على حلول مشابهة مثلي.

فمثلاً: إذا أخذنا التركيبات (2،3) أو (4، 2) أو (4، 3) يمكن معرفة أن التكونية (2،4) لا تكون حالي مثالي.

أما التكوينية (2،3) تؤدي إلى $= y_1^* \, y_4^*$

وكذلك $y_3 = 1 - y_2$ وأن متوسط ربح اللاعب B والمقابل للاعب A يمكن حسابها على النحو الآتي:

خطة A المطلقة	توقع الربح لـ B
1	$- y_2 + 3$
2	$y_2 + 3$

$\therefore$ y_2 (المقابلة للنقطة الصغرى العظمى (Minimax) يمكن حسابها من المعادلة التالية:

$$y_2^* + 3 = y_2^* + 2$$

وهذا يعطي:

$$y_2^* = \tfrac{1}{2}$$

مع ملاحظة أن

$$y_2 = \tfrac{1}{2}$$

وأن قيمة الربح المتوقعة B تكون 5/2

أما التكوينة الباقية (3،4) يمكن معاملتها بالتشابه كحل أمثل موازي.

مثال 14.4:

إذا أعطيت المصفوفة التالية بمقياس مباراة (2×4).

$$\begin{array}{cc|cc} & & \multicolumn{2}{c}{B} \\ & & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 4 \\ A & 2 & 2 & 3 \\ & 3 & 3 & 2 \\ & 4 & -2 & 6 \end{array}$$

فإن هذه المباراة لا توجد لها نقطة تلاقي (Snddle point).

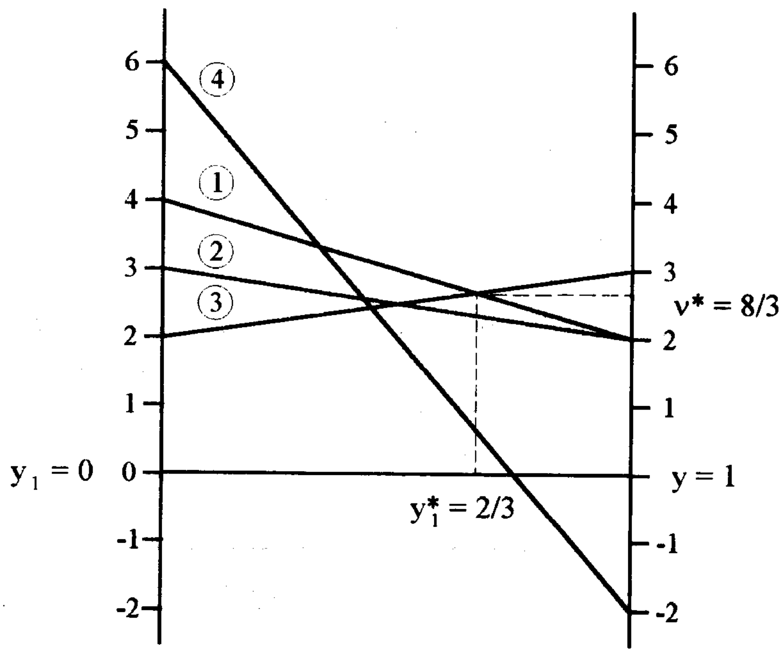
فمثلاً إذا فرضنا y_1 ، y_2 ($= 1 , -y_1$) فإن الخطة B تعتبر خطة مخلطة.

$\therefore$

خطة A المطلقة	الربح المتوقع لـ B
1	$-2x_1 + 4$
2	$-x_1 + 3$
3	$x_1 + 2$
4	$-8x_1 + 6$

فلو طبقا قاعدة الرسم البياني التمثيلي للمعادلات الأربعة فإن نقطة القيم العظمي للصغرى (Minimax point) يمكن حسابها كأقل نقطة للأعلى الغلاف.

فإن قيمة y_1^* يمكن استخلاصها بواسطة نقطة التقاطع للخطوط (1) ، (3) في الشكل (11.2) ويعطي $y_1^* = 2/3$ ، $y^* = 8/3$



شكل (14.2)

حيث أن تقاطع الخطوط عند نقطة العظمى الصغرى مقابل الخطة المطلقة للاعب A (1) & (3). وهذا يعطي:

$$y_4^* = 0 \qquad\qquad y_2^* = 0$$

وبالتسلسل $x_1 = 1 - x_3$ وأن متوسط الربح للاعب A مقابل B للخطة المطلقة الحرة هو:

خطة A المطلقة	الربح المتوقع لـ B
1	$-x_1 + 3$
2	$2\ x_1 + 2$

والنقطة x_1 يمكن حسابها وفق المعادلة التالية:

$$-x_1^* + 3 = 2x_1^* + 2$$

وهذا يعطي

$$x_1^* = \frac{1}{3}$$

وأن الخطة المثلي تكون لـ A على النحو الآتي:

$$x_1^* = \frac{1}{3}$$
$$x_2^* = 0$$
$$x_2^* = \frac{2}{3}$$
$$x_3^* = 0$$
$$V^* = \frac{8}{3}$$

14.5 حل المباريات (Mxn) بواسطة البرمجة الخطية
(Solution of (Mxn) Games by Linear programming)

توجد علاقة قوية ما بين نظرية المباريات والبرمجة الخطية منذ صياغة مسألة tow-person zero - sum games في صورة مسألة برمجة خطية – وأن أي مسألة برمجية خطية يمكن اعتبارها كمسألة مباريات. وفي الحقيقة قام الباحث [G. Dantzing (1963)] بالتطرق إلى نظرية المباريات عند ظهر علم حل المسائل البرمجية الخطية (السمبلكس) في (1947) وكذلك تطرقت نظرية الثنائية في البرمجة الخطية إلى هذه العلاقة أيضاً.

هذا الجزء يوضح حل مسائل المباريات باستخدام البرمجة الخطية وخاصة التي تحتو يمنها على عدد كبير في محتوى المصفوفات والتي تأخذ وقت طويل لحلها. فمثلاً: إذا أشرنا إلى العلاقة التي توضح الخطة المختلطة المثلى:

$$\underset{x_i}{\text{Max}}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i\,,\sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i\,,..........,\sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)\right\}$$

تحت الشروط التالية:

$$x_1 + x_2 + \ldots\ldots\ldots + x_m = 1$$

$$x_1 \geq 0 \qquad\qquad i= 1, 2, \ldots, m$$

هذه المسألة يمكن وضعها وإعادة صياغتها في صورة مسألة برمجة خطية وذلك على النحو الآتي: دع

$$v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_1\ ,\ \sum_{i=1}^{m} a_{i2}x_i\,,..........,\sum_{i=1}^{m} a_{in}x_i\right)$$

فتصبح المسألة:

تعظيم Maximize $z = v$

تحت شروط (S. T)

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i1}x_i \geq v \qquad\qquad j = 1, 2, ..., n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \qquad\qquad x_i \geq 0 \ (\text{لكل } i)$$

v تمثل قيمة المباراة في هذه الحالة.

ويمكن تبسيط مسألة البرمجة بقسمة كل المعادلات (n+1) و (v) وهذا التقسيم صحيح مادام قيمة $v > 0$.

أما إذا كانت قيمة $v > 0$ فإن رمز المعادلة $\begin{pmatrix} < \\ > \end{pmatrix}$ تعكس وفقاً لقواعد البرمجة الخطية.

أما إذا كانت قيمة $v = 0$ فلا تجوز القسمة.

وبصفة عامة إذا كانت قيمة Maximin موجبة هذا يحقق عدم وجود نقطة تلاقي.

∴ إذا فرضنا أن v = 0 فإن قيود مسألة البرمجة الخطية تكون على النحو الآتي:

$$a_{11}\frac{x_1}{V} + a_{21}\frac{x_2}{V} + ... + a_{m1}\frac{x_m}{V} \geq 1$$

$$a_{21}\frac{x_1}{V} + a_{22}\frac{x_2}{V} + ... + a_{m2}\frac{x_m}{V} \geq 1$$

M

$$a_{1n}\frac{x_1}{V} + a_{2n}\frac{x_2}{V} + ... + a_{mn}\frac{x_m}{V} \geq 1$$

$$\frac{x_1}{V} + \frac{x_2}{V} + ... + \frac{x_m}{V} = \frac{1}{V}$$

فإذا قلنا أن $x_1 = x_2 / V \qquad I = 1, 2, ..., m$

فإن:

$$\text{Max} \quad V = \min\frac{1}{V} = \text{Min}[x_1 + ... + x_m]$$

وتصبح المسألة على الشكل الآتي:

$$\text{Minimize} \qquad z = x_1 + x_2 + ... + x_m$$

S, T.

$$a_{11}x_{11}+a_{21}x_2+......+a_{m1}x_m \geq 1$$

$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+......+a_{m2}x_m \geq 1$$

M

$$a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+......+a_{mn}x_m \geq 1$$

$$x_1 , x_2 , ...+ x_m \geq 0$$

أما اللاعب B يمكن أن تعطي العلاقة على النحو الآتي:

$$\underset{y_i}{\mathrm{Max}}\left\{\max n\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i1} y_i , \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_i ,..........., \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_i\right)\right\}$$

S.T.

$$y_1 + y_2 + \ldots\ldots\ldots + y_m = 1$$

$$y_1 \geq 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

ويمكن عرضها بواسطة البرمجة الخطية على النحو الآتي:

تعظيم Maximize $w = \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n$

تحت شروط (S. T)

$$\begin{gathered} a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 + ... + a_{1n}\gamma_n \leq 1 \\ a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 + ... + a_{2n}\gamma_n \leq 1 \\ M \qquad\qquad\qquad M \\ a_{m1}\gamma_1 + a_{2m}\gamma_2 + ... + a_{mn}\gamma_n \leq 1 \\ \gamma_1 , \gamma_2 + ... + \gamma_n \geq 0 \end{gathered}$$

حيث $w = \dfrac{1}{V}$

$$\gamma_1 = \frac{y_i}{V} \qquad j = 1,2,.............,n$$

مع ملاحظة أن اللاعب B يعتبر ثنائي (Dual) للاعب A. وهذا يعني أن الحصول على الأمثل للاعب B يعطي أتوماتيكيا حل أمثل للاعب B.

اللاعب B يجب أن يحمل على أنه مسألة برمجة خطية عادية بطريقة السمبلكس أو اللاعب A يعامل على أن حل مسألة سمبلكس ثنائي. واختيار الحل بأحد الطريقتين يعتمد على عدد القيود أو عدد الخطط.

مثال 14.5:

إذا أعطيت المصفوفة التالية (3×3)

		B 1	B 2	B 3	صفة القيم الصغرى
A	1	3	-1	-3	-3
	2	-3	3	-1	-3
	3	-4	-3	3	-4
عمود القيم الكبرى		3	3	3	

وبما أن القيمة العظمى (3-) فهذا من المستحيل أن تكون قيمة المباراة (-) أو (0).

فإن الثابت k يجب أن يكون على الأقل سالب بالنسبة للقيمة العظمى ويضاف إلى كل عناصر المصفوفة

$$K \geq 3$$

فإذا فرضنا أن $K = 5$ فإن المصفوفة أعلاه تصبح

		B 1	B 2	B 3
A	1	8	4	2
	2	2	8	4
	3	1	2	8

فإن مسألة البرمجة الخطية للاعب B يمكن تعطي بالآتي:

$$\text{Maximize} \quad w = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$$

S. T.

$$\begin{aligned} 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 &\le 1 \\ 2y_1 + 8y_2 + 4y_3 &\le 1 \\ 1y_1 + 2y_2 + 8y_3 &\le 1 \\ y_1 ,\ y_2 ,\ y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

وأن جدول الحل الأمثل على النحو الآتي:

المتغيرات الأساسية	y_1	y_2	y_3	s_1	s_2	s_3	الحل
W	0	0	0	$\frac{5}{49}$	$\frac{11}{196}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{45}{196}$
y_1	1	0	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{-1}{14}$	0	$\frac{1}{14}$
y_2	0	1	0	$\frac{-3}{98}$	$\frac{31}{196}$	$\frac{-1}{14}$	$\frac{11}{196}$
y_3	0	0	$\boxed{1}$	$\frac{-1}{98}$	$\frac{-3}{98}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{49}$

والحل للمسألة الأصلية:

$$v^* = \frac{1}{w} = K = \frac{196}{45} - 5 = \frac{29}{45}$$

$$y_1^* = \frac{y_1}{w} = \frac{1/14}{45/196} = \frac{14}{45}$$

$$y_2^* = \frac{y_2}{w} = \frac{11/196}{45/196} = \frac{11}{45}$$

$$y_3^* = \frac{y_3}{w} = \frac{5/49}{45/196} = \frac{20}{45}$$

وأن الخطة المثالية بالنسبة لـ A يمكن الحصول عليها من الحل الثنائي للمسألة أعلاه والتي يعطي على النحو الآتي:

$$z = w = 45/196$$

$x_1 = 5/49 \qquad x_2 = 11/196 \qquad x_3 = 1/14$

$$x_1^* = \frac{x_1}{z} = \frac{20}{45}$$

$$x_2^* = \frac{x_2}{z} = \frac{11}{45}$$

$$x_3^* = \frac{x_3}{z} = \frac{14}{45}$$

14.6 مسائل:

1- أوجد نقطة التلاقي (Saddle point) وكذلك قيمة المباراة لكل من المباريات الآتية. والربح الذي يحصل عليه اللاعب A.

$$\begin{array}{c|cccc} & & & B & \\ \hline & 4 & -4 & -5 & 6 \\ A & -3 & -4 & -9 & -2 \\ & 6 & 7 & -8 & -9 \\ & 7 & 3 & -9 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & & & B & \\ \hline & 8 & 6 & 2 & 8 \\ A & 8 & 9 & 4 & 5 \\ & 7 & 5 & 3 & 5 \end{array}$$

2- أذكر قيمة المباريات التالية التي لها قيمة أكبر من أو أقل من أو تساوي صفر.

$$\begin{array}{c|cccc} & & & B & \\ \hline & 1 & 9 & 6 & 0 \\ A & 2 & 3 & 8 & 4 \\ & -5 & -2 & 10 & -3 \\ & 7 & 4 & -2 & -5 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & & & B & \\ \hline & 3 & 7 & -1 & 3 \\ A & 4 & 8 & 0 & -6 \\ & 6 & -9 & -2 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & & & B & \\ \hline & -1 & 9 & 6 & 8 \\ A & -2 & 10 & 4 & 6 \\ & 5 & 3 & 0 & 7 \\ & 7 & -2 & 8 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & & B & \\ \hline & 3 & 6 & 1 \\ A & 5 & 2 & 3 \\ & 4 & 2 & -5 \end{array}$$

3- إذا اعتبرنا المباراة التالية:

		B		
		1	2	3
	1	5	50	50
A	2	1	1	0.1
	3	10	1	10

اثبت أن الخطط $\left(\frac{5}{6}, 0, \frac{1}{6}\right)$ بالنسبة للاعب A وأن $\left(0, \frac{5}{54}, \frac{49}{54}\right)$ بالنسبة للاعب B تكون الحل الأمثل. وأوجد قيم هذه المباريات.

4- أوجد حل المباريات التالية بواسطة طريقة الرسم البياني:

أ-

	B			
	1	3	-3	7
A	2	5	4	-6

ب-

	B	
	1	2
A	5	6
	-7	9
	-4	-3
	2	1

ج-

	B		
A	1	2	5
	8	4	7
	-1	5	-6

5- حل المباريات التالية بطريقة البرمجة الخطية:

أ-

	B		
A	-1	1	1
	2	-2	2
	3	3	3

ب-

	B			
A	1	2	-5	3
	-1	4	7	2
	5	-1	1	9