الفصل الخامس

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس

يتناول هذا الفصل بشيء من التفصيل المدعم بالأمثلة التطبيقية، الخطوات الأساسية لطريقة السمبلكس، مع تقديم نبذة موجزة عن أهمية هذه الطريقة العلمية في حل الكثير من مسائل البرمجة الخطية.

الفصل الخامس

5

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس
Simplex Method

5.1 مقدمة:

إن النظرية الأساسية لحل البرمجة الخطية هي نظرية السمبلكس. وتعتمد هذه النظرية على نظرية نقاط التقاطع (Extreme point theory) وتعتمد فكرة السمبلكس على خلفية واسعة من الجبر الخطي ومن المعروف أنه إذا وجد حل لمسألة البرمجة الخطية فإن المساحة التي تكونها معادلات القيود لابد أن تكون دالة مقعرة (Convex function).

لذلك من المفيد استخدام طريقة السمبلكس في تحديد عدد نقط التقاطع التي أحياناً تكون كبيرة جداً في البحث عن الحل الأمثل.

وعلى سبيل المثال فإن مسالة تحتوي على 20 متغير و 10 قيود يمكن أن يكون لها 48.756 نقطة تقاطع وفقاً للقاعدة:

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

عليه يمكن تلخيص الخطوات الأساسية لطريقة السمبلكس على النحو التالي:

1- البحث أو تحديد نقاط التقاطع بين القيود (النقط الركنة لمنطقة الحل).

2- حساب طريقة الحركة من نقطة لأخرى لتحسين مستوى الحل أو بالأحرى مستوى قيمة دالة الهدف.

3- الاستمرار في النقطة الثانية حتى الوصول إلى الحل الأمثل أو لا حل.

وتتميز هذه الطريقة بقدرتها على التعامل مع عدد كبير من المتغيرات وباعتمادها على جبر المصفوفات بدلاً من الجبر العادي كما يؤدي التتابع في أسلوب الحل إلى الوصول لنتيجة أفضل أو الحل الأمثل.

وبصفة عامة يسهل حل مسائل البرمجة الخطية للمسائل التي تحتوي معادلاتها على () أسهل منها في حالة (=) أو (≥) مع شرط أن يكون الطرق الأيمن (bi) موجباً وفي حالة كونه سالباً يجب ضرب المعادلة في إشارة (-) قبل الشروع في الحل.

5.2 الخطوات الأساسية في تطبيق السمبلكس:

1- تحويل المعادلات من المعادلات غير المتساوية إلى حالة التساوي:

أ- إذا كانت المعادلة على الصورة أقل من كما يلي:

$$a\ x_i \leq b_i \qquad (5.1)$$

يجب أن نقدم متغير جديد إلى الجهة الشمال أسمه Stack variable (s) يرمز له x_s ≤ 0 ويعاد كتابة المعادلة (5.1) على النحو الآتي:

$$a\ x_i + x_s \leq b_i \qquad (5.2)$$

وقيمة هذا المتغير:

$$x_s + b_i - a\ x_i \qquad (5.3)$$

وعليه تكون قيمة هذا المتغير موجبة في حالة وجود فرق أو صفر في حالة التساوي عند الوصول إلى الحل الأمثل.

ب- إذا كانت المعادلة على صورة أكبر من كما يلي:

$$a_i\ x_i \geq b_i \qquad (5.4)$$

يمكن ضرب المعاجلة في 1- وتتحول على الصورة التالية:

$$- a_s x_i - x_i = b_i \qquad (5.3)$$

وفي هذه الحالة:

$$X_s = a_i x_s - b_i \qquad (5.2)$$

5.3 أمثلة تطبيقية:

مثال 1:

إذا اعتبرنا المعادلتين التاليتين. فأوجد الحل الابتدائي للمتغيرات

$$4 x_1 + x_2 \leq 20 \qquad (4.8)$$

$$x_1 + 4 x_2 \leq 40 \qquad (4.9)$$

إذا أضفنا المتغير الفارق (Slack variable)، فيمكن كتابة المعادلات على النحو الآتي:

$$4 x_1 + x_2 \;\; x_{51} = 20 \qquad (4.10)$$

$$x_1 + 4 x_2 + x_{22} = 40 \qquad (4.11)$$

ويمكن معاملة المعادلات التي تحتوي على أكبر من (≥) بواسطة إضافة المتغير الصناعي الفائض (artificial variable) حيث أن المتغير الصناعي لا توجد له أي قيمة طبيعية أو معنوية والغرض من إضافته الحصول الفوري على حل ابتدائي وبعدها تبدأ طريقة السمبلكس التي سوف توضح فيما بعد:

∴

$$a x_i \leq b_i \qquad (5.1)$$

يمكن كتابتها على الصورة:

$$a x_i + x_s + x_A = b_i \qquad (5.13)$$

أما في حالة

$$a\ x_i = b_i \qquad (5.14)$$

للحصول على حل ابتدائي وذلك بإضافة المتغير الصناعي فقط:

$$a\ x_i + x_A = b_i \qquad (5.15)$$

والأمثلة الآتية يمكن أن تعطي توضيح أكثر.

مثال 2:

حول المعادلات الآتية إلى صورة جاهزة لاستخدامها للحل بطريقة السمبلكس.

$$4\ x_1 - 2\ x_2 \leq 28$$
$$x_1 + x_2 \geq 5$$
$$4\ x_1 + x_2 = 16$$

الحل:

$$4\ x_1 - 2\ x_2 + x_3 = 28$$
$$x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 5$$
$$4\ x_1 + x_2 + x_6 = 16$$

طبقاً للخطوات السابقة ووفقاً للمعادلات فإن الحل الابتدائي:

$$x_3 = 28$$
$$x_5 = 5$$
$$x_6 = 16$$

2- أثر تحويل المعادلات على دالة الهدف:

إن اختيار المتغيرات التي يتخذ عليها القرار يؤثر مباشرة على قيمة دالة الهدف وهذا ينطبق سواء على إضافة (Slack variable) أو المتغير الصناعي (artificial variable)

عليه فإن أي دالة يضاف إليها هذين النوعين من المتغيرات سوف تعاد كتابتها على النحو الآتي:

Maximize $Z = C_i X_i$

Maximize تصبح

Maximize $Z = c_i x_i + c_s x_s + c_A x_A$ (5.16)

نلاحظ أن الجزء $c_i x_i$ هو دالة الهدف الأصلية

أما الجزء $c_s x_s$ هو أثر إضافة على دالة الهدف.

أما الجزء الثالث $c_A x_A$ فهو أثر إضافة المتغير الصناعي على دالة الهدف.

مثال 3:

إذا أعطيت مسألة البرمجة الخطية التالية. المطلوب تغييرها على صيغة قابلة للحل بطريقة السمبلكس.

Min $z = 7 x_1 - 3 x_2 + 5 x_3$

S.T

$$x_1 + x_2 + x_3 = \geq 9$$
$$3 x_1 + 2 x_2 + x_3 \leq 12$$
$$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$$

الحل:

Min $Z = 7 x_1 - 3 x_2 - 5 x_3 + 0 x_{51} - m x_{A1} - 0 x_{52}$

S.T

$$x_1 + x_2 - x_{51} + x_A = 9$$
$$3 x_1 + 2 x_2 + x_3 + x_{52} = 12$$
$$x_1 , x_2 , x_3 , x_5 , x_A , x_{52} \geq 0$$

ويمكن صياغة هذه المسألة بصورة أسهل استعمالاً

$$\text{Min} \quad Z = -7x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 0x_4 - m x_5 - 0x_6$$

S.T

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 9$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_5 + x_6 = 12$$

$$x_1, \ldots\ldots\ldots, x_6 \geq 0$$

حيث:

$$x_4 = x_{51}$$

$$x_5 = x_A$$

$$x_6 = x_{52}$$

3- بعض التعريفات والرموز المهمة لطريقة السمبلكس:

$$\text{Maximize} \quad Z = c\,x$$

S.T

$$A\,x = b$$

$$x \geq 0$$

حيث c مصفوفة الصف الواحد $(n \times 1)$

A مصفوفة $m \times n$

b مصفوفة عمود واحد $(1 \times m)$

مثال 4:

إذا اعتبرنا مسألة البرمجة الخطية التالية حيث:

Slacks $x5$, $x4$

$$\text{MAX} \quad Z = 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

S.T

$$x_1 + 3\,x_2 - x_5 + x_4 = 12$$
$$5\,x_1 + 6\,x_2 + x_5 = 24$$
$$x \geq 0$$

هذه المسألة يمكن كتابتها على النحو التالي:

MAX $\quad Z = c\,x$

S.T

$$A\,x = b$$
$$x \geq 0$$

$$c = [\,5 \;\; 7 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0\,]$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix}$$

أي مصفوفةB تسمى حل ابتدائي إذا حققت حل المعادلة $A\,x = b$ مع الأخذ في الاعتبار أن قيم لـ x $(x \geq 0)$ وإذا خالف هذا الشرط يسمى حل غير منظور.

أي أن $x < 0$

∴ الحل الابتدائي لأي مسألة برمجة خطية

$$xB = B^{1-}b$$

حيث x_B

$$x\,B\begin{pmatrix} z_{B_1} \\ z_{B_2} \\ M \\ z_{B_m} \end{pmatrix}$$

مثال 5:

في المثال السابق إذا اخترنا

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

$$x_B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{36}{5} \\ \frac{24}{5} \end{pmatrix}$$

$$\therefore x_{B1} = -\frac{36}{5}$$

$$x_{B2} = \frac{24}{5}$$

وبما أن $x_{B1} < 0$ $\therefore$ هذا الحل غير منظور

مثال 6:

إذا اخترنا المتغيرات الابتدائية للحل x_4 ، x_5

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$xB = B^{-1}b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix}$$

$$x_{B1} = x_4 = 12 > 0$$
$$x_{B2} = x_4 = 24 > 0$$

∴ الحل حل ابتدائي ويقابله في دالة الهدف:

$$z = c_B x_B = (0,0)\begin{pmatrix} 12 \\ 24 \end{pmatrix} = 0$$

مثال 7:

$$\text{Max} \quad z = 3\,x_1 + x_2 + 2\,x_3$$
$$\text{S.T}$$
$$x_1 + 2\,x_2 + 4\,x_3 = \le 18$$
$$3\,x_1 + 2\,x_2 + 12\,x_3 \le 54$$
$$x \ge 0$$

الحل:

$$\text{Min} \quad Z = 3\,x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 0\,x_4 = 18$$
$$\text{S.T}$$
$$3\,x_1 + 2\,x_2 + 12\,x_3 + x_5 = 54$$
$$x \ge 0$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 12 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 18 \\ 24 \end{pmatrix}$$

إذا اخترنا المتغيرات x_2 ، x_3 كحل ابتدائي

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 12 \end{pmatrix}$$

$$xB = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

بما أن x_{B1} ، x_{B2} (≥ 0)

∴ قيمة Z المقابلة

$$Z = c_B x_B = (1 \quad 2) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{2} \end{pmatrix} = 9$$

نلاحظ أن العمود aj في المصفوفة A يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$aj = y_{ij} b_i + \dots\dots\dots + y_{mj} bm$$

$$= \sum_{L=1}^{m} y_i \quad , \quad Jb_i$$

$$a_j = By_i$$

$$y_i = B^{-1} a_j$$

$$y_i = \begin{pmatrix} y_{1,j} \\ y_{i,j} \\ M \\ y_{mj} \end{pmatrix}$$

وأن y_{ij} هو مضروب المصاحب لـ I في العمود B

J ترمز إلى مصفوفة الصف aj فمثلاً $y_{3.7}$ ترمز إلى العمود 3b في B و $a7=a_j$

$$Zi = y_{1,j} c_{B,1} + \dots\dots\dots\dots y_{mi} c_{B,m}$$

$$= c_B y_i$$

∴ بالنظر إلى المثال السابق

$$y_1 = B^{-1}\theta_1$$

$$y_1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$Z_1 = c_B y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

مثال 8:

$$\text{Min} \quad z = -5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

S.T

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 = \leq 7$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x \geq 0$$

لصياغة القيود ودالة الهدف بحيث يمكن حلها بواسطة طريقة السمبلكس نضيف (Slack) وتحول دالة الهدف من (Min) إلى (Max) بالضرب في (−).

$$\text{Min} \quad Z = 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_4 + 0x_5$$

S.T

$$3x_1 + x_2 + 2x_{51} + x_A \qquad = 7$$

$$x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 12$$

$$x \geq 0$$

$$c = \begin{bmatrix} 5, -2, 3, & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الذي يدخل في الحل

وبما أن a3 و a2 و a1 ليست في الحل الابتدائي الأساسي

$\therefore$ لابد من حساب y_1 ، y_2 ، y_3 وكذلك

$Z_1 - c_1$, $Z_2 - c_2$, $Z_3 - c_3$

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_j = c_B y_j$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$Z_1 - c_1 = 0 - 5 = -5$$
$$Z_2 - c_2 = 0 - (-2) = 2$$
$$Z_3 - c_3 = 0 - 3 = -3$$

بما أن المسألة Max فإن احتمال:

$(Z_1\text{-}c_1)$ ، $(Z_3\text{-}c_3)$ كليهما (-ve)

$\therefore$ لحساب المتغير الذي يدخل وذلك باستخدام القاعدة التالية

$$y_{B,x} = \min_{i}\left\{\frac{x_{B,1}}{X_{1,j}}, \frac{x_{B-2}}{X_{2,1}}\right\}$$ حيث $Y_{ij} > 0$

$$= \min_{i}\left\{\frac{7}{3}, \frac{2}{1}\right\} = \frac{7}{3}$$

$\therefore\ y_{Br} / y_{r,1}$ تقابل $y_{B,1} / y_{1,1}$

التي تعني أن b_1 يجب أن تخرج عندما $r = 1$

$$\hat{B} = (a_1, a_2) = (b_1, b_2) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x_B^* = B^{-1}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$x_{B,1} = x_1 = \frac{7}{3}$$

$$x_{B,2} = x_2 = \frac{2}{3}$$

$$Z' = c_B^{/} x_B = (5 \quad 0)\begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{7}{3} \end{pmatrix} = \frac{35}{3}$$

لحساب هل يمكن

$$Z_2' - c_2' \quad , \quad Z_3' - c_3' \quad , \quad Z_4' - c_4'$$

$$y_2 = B'^{-1}a_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$y_z = B'^{-1}a_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$y'_4 = B'^{-1}a_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$Z'_2 = c'_B y'_2 = (5 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{5}{3}$$

$$Z'_3 = c'_B \hat{y}_1 = (5 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{10}{3}$$

$$Z'_4 = c'_B y_4 = (5 \quad 0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{5}{3}$$

$$\hat{Z}_2 - c_2 = \frac{5}{3} - (-2) = \frac{11}{3}$$

$$\hat{Z}_3 - c_3 = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$$

$$\hat{Z}_4 - c_4 = \frac{5}{3} - 0 = \frac{5}{3}$$

وبما أن كل $z_j - c_j$ موجبة

$\therefore$ هذا الحل هو الحل الأمثل

$$x^* = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$z^* = -\frac{35}{3}$$

5.4 الخطوات الأساسية لطريقة السمبلكس:

1- البحث عن حل ابتدائي موجب ($x\ B = B^{-1}b\ x \geq 0$).

2- اختبار $(2j - ci) \geq 0$.
أذهب إلى الخطوة رقم (6) وغيره أذهب إلى الرقم (3).

3- أذاً لأي $(zj - cj) < 0$ لا يوجد أي عنصر موجب لـ y_1 فإن المسألة ذات حل غير محدود المساحة (Unbounded crece).

4- استخدم القاعدة التالية:

$$\frac{X_{B,r}}{Y_{r,j}} = \min\left(\frac{X_{B,r}}{Y_{r,j}}, y_{ij} > 0\right)$$

5- حقق حل ابتدائي جديد وأوجد قيمة المتغيرات وقيمة دالة الهدف وأرجع إلى الخطوة رقم (2).

6- إذا تحقق الحل وأن أي متغير صناعي مازال في الحل الابتدائي بقيمة موجبة فإن المسألة لا يوجد لها حل، غير يعتبر الحل الأمثل مع ملاحظة أن $zj - cj \leq 0$.

5.5 مسائل:

1- حل المسألة التالية:

$$\text{Maximize} \quad z = 4x_1 - 7x_2 + x_3$$

S.T

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12 \\ 3x_1 + x_2 &\le 18 \\ x_3 &\ge 2 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

2- حل المسألة التالية:

$$\text{Maximize} \quad z = 2x_1 + x_2 - x_3$$

S.T

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\ge 20 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\le 15 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

3- حل المسألة التالية:

$$\text{Maximize} \quad z = 10x_1 + 20x_2$$

S.T

$$\begin{aligned} 5x_1 + 18x_2 &\le 40 \\ 5x_1 + 3x_2 &\le 30 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

4- حل المسألة التالية:

$$\text{Maximize} \quad z = 3x_1 + 2x_3$$

S.T

$$\begin{aligned} 5x_1 + x_2 &\ge 10 \\ 2x_1 + 2x_2 &\le 12 \end{aligned}$$

$$x_1 + 4x_2 \geq 12$$
$$x_1 , \quad x_2 \geq 0$$

5- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 6x_1 + 8x_2$

S.T

$$4x_1 + x_2 \leq 20$$
$$x_1 + 4x_2 \leq 40$$
$$x_1 , \quad x_2 \geq 0$$

6- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 6x_1 + 8x_2$

S.T

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$
$$x_2 \geq 2$$
$$x_1 , \quad x_2 \geq 0$$

7- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 6x_1 + 4x_2$

S.T

$$x_1 + x_2 \leq 3$$
$$3x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 , \quad x_2 \geq 0$$

8- حل المسألة التالية:

Maximize $z = 30x_1 + 50x_2$

S.T

$$2x_1 + x_2 \leq 16$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 11$$
$$x_1 , \quad x_2 \geq 0$$