الفصل السادس

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

يأتي هذا الفصل مكملاً وداعماً للفصل الخامس، حيث يكون التركيز منصباً على الجداول كما كان مناسب لتخزين المعلومات بواسطة طريقة السمبلكس. ومن الطرق المتبعة في هذا المجال والتي يناقشها هذا الفصل طريقة القيمة الكبرى M لحل مسائل البرمجة الخطية. كما يتناول الفصل بعض الظواهر الشاذة لحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس.

الفصل السادس

6

طرق حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس بشكل الجداول

The Simplex Method Tableau and Computation

6.1 مقدمة:

تعتبر الجداول المعدة لاستخدامها في حل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس كمكان مناسب لتخزين المعلومات بطريقة مناسبة بغض النظر عن نوع المعلومات. وهذه المعلومات تشمل:

1- دالة الهدف $z = C_B\, x_B$

2- الحل الابتدائي الأساسي $x_B = B^{-1}\, b$

3- مصفوفة الإتاحية $B = (b_1, b_2\, \ldots.., b_m$

4- معامل المتغير $y_1 = B^{-1}\, \theta_j$

حيث z_j - $C_B\, y_j$

فرق التغير في $z_j - C_j$ الذي بناء عليه يمكن اتخاذ القرار على أن الحل أمثل أو ذو مساحة غير محدودة أو لا يوجد إمكانية حل.

وبناء على هذه المعلومات يمكن تلخيص الجدول على النحو التالي:

(6-1) الجدول العام لحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة السمبلكس

معامل المتغيرات التي تدخله في الحل	المتغيرات الأساسية في حكم الحل	المتغيرات				قيمة الحل الابتدائي للمتغيرات
		X_1	X_2	…………	x_n	
C_{B1}	x_{B1}	$y_{1,1}$	$Y_{1,2}$	………..	$Y_{1,n}$	X_{B1}
⋮	⋮	⋮	⋮			⋮
C_{Bm}	x_{Bm}	$Y_{m,1}$	$Y_{m,2}$	…………	$Y_{m,n}$	X_{Bm}
		Z_1-c_1	Z_2-c_2	…………	Z_n-c_n	z

(6-2) الجدول العام بالرموز

	Basic Value	C_1	C_2	…………	C_B	
C_{B1}	x_{B1}	y_{11}	Y_{12}	………..	Y_{1n}	X_{B1}
⋮	⋮	⋮	⋮			⋮
C_{Bm}	x_{Bm}	Y_{m1}	Y_{m2}	…………	Y_{mn}	X_{Bm}
		Z_1-c_1	Z_2-c_2	…………	Z_n-c_n	z

مثال 6.1:

إذا أعطيت المعلومات التالية أوجد الحل الابتدائي للمسألة:

Maximize $z = 6x_1 + 4x_2$

S.T

$$4x_1 + x_2 \le 20$$
$$x_1 + 4x_2 \le 40$$
$$x_1, \; x_2 \ge 0$$

Max $\quad Z = 6x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4$

S.T

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 20$$
$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 40$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

C	x_1	x_2	x_3	x_4	
Z =	-6	-8	0	0	0
x_3	4	1	1	0	20
x_4	1	4	0	1	4

$(\frac{20}{1}, \frac{4}{4})$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Big| = I$$

$y_1 = B^{-1}\,aj = I^{-1}\,a_j = I\,a_j = a_j\ \Upsilon\ s$

$x_1 = B^{-1}\,b = I^{-1}\,b = Ib = b$

$$z = C_B\,x_B = (0\ .\ 0)\begin{pmatrix} 20 \\ 40 \end{pmatrix} = 0$$

$Z_j = C_B y_j - C_j$

$z_1 = C_1 = 0 - 6 = -6$

$z_2 = C_2 = 0 - 8 = -8$

$z_3 = C_3 = 0 - 0 = 0$

$z_4 = C_4 = 0 - 0 = -0$

6.2 حل مسألة البرمجة الخطية بطريقة جداول السمبلكس:

عند كل محاولة تقوم عملية حل المعادلات الخطية الآتية بطريقة السمبلكس

$$B\,x_B = b$$
$$W\,B = C_B$$
$$B\,y = a$$

التي تكون مكونة لنظام البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Min} \quad z$$

$$\text{Subject to:} \quad z - C_B\,x_B - C_n\,x_n = 0 \qquad (6.1)$$
$$B\,x_B + N\,x = b \qquad (6.2)$$
$$x_B \;,\; x_n \;\geq 0$$

من المعادلة 6.1

$$X_B + B^{-1}\,N\,X_n = B^{-1}b$$

بضرب المعادلة (6.3) في CB وإضافتها إلى المعادلة (6.1)

$$z + 0\,x_B + (C_B\,B^{-1}\,N - C_N)\,x_n = C_B\,B^{-1}b$$

إذا كانت حالياً $x_n = 0$

وفق المعادلتين (6.3) ، (6.4)

نحصل على

$$x_B = B^{-1}b$$
$$z = C_B\,B^{-1}b$$

ويمكن كتابة هذه المعادلات في صورة جدول على النحو الآتي:

		z	X_B	X_N	الطرف الأيمن	
	Z	1	0	$C_B\,B^{-1}\,N - C_N$	$C_B\,B^{-1}b$	صف 0
	X_B	0	1	$B^{-1}\,N$	$B^{-1}b$	صف 1 إلى m

من الصف صفر نلاحظ هل الحل هو الحل الأمثل بشرط أن $(z_j C_j \leq 0)$

وغير ذلك أن المتغيرات غير الأساسية في الحل تدخل الحل إلى حين الوصول للحل الأمثل.

وفي حالة أن $(z_j - C_j) \geq 0$ و $\Upsilon k \geq 0$ فإن الحل يكون غير محدود المساحة (Unbounded area)

ويمكن تحديد المتغير الذي يخرج من المتغيرات الأساسية (التي لها حل) وتحديد المتغير الذي يدخل في الحل وبالتالي يسمى متغير أساسي (تم شرحه مسبقاً).

6.3 الخطوات الأساسية لطريقة السمبلكس:

أ- الخطوة الابتدائية: وذلك بإيجاد الحل الابتدائي على النحو التالي:

	z	X_B	X_B	الطرف الأيمن
Z	1	0	$C_B B^{-1} N - C_N$	$C_B b'$
X_B	0	1	$B^{-1} N$	b'

ب- الخطوة الأساسية: إذا افترضنا أن

$$z_k - C_k = \text{Max } \{ z - c_j \ j \ E \ R\} \ z_k - C_k \leq 0$$

توقف ويعتبر الحل وهو الحل الأمثل (تصغير) إذا لم يتوفر الشرط المذكور أعلاه اختر y_k توقف، فإن الحل هو الأمثل لمساحة غير محدودة خلال الاتجاه.

$$\left\{ \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} : xk \geq 0 \right\}$$

حيث c_k مصفوفة الصف الواحد وتحتوي على كل صفر ما عدا عند موقع محدد <u>K</u>. إذا $y_k > 0$ أحسب الموقع ٢

$$\frac{b_r}{y_{rk}} = \min \left\{ \frac{b_i}{y_{ik}} : y_{rk} \geq 0 \right\}$$

واستمر إلى الخطوات التكرارية حتى الحل الأمثل أو غيره.

مثال 6.2

$$\text{Min} \quad z = x_1 + x_2 - 4\, x_3$$

S.T

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2\, x_3 &\leq 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 &\leq 2 \\ - x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 , \ x_2 , \ x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

بإضافة (Slack) المتغيرات التي تحصل على إشارة التساوي

$$\text{Min} \quad z = x_1 + x_2 + 4\, x_3 + 0\, x_4 + 0\, x_5 = 0\, x_6$$

S.T

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2\, x_3 + x_4 &= 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 2 \\ - x_1 + x_2 + x_3 + x_6 &= 4 \end{aligned}$$

وبما أن كل $b \geq 0$ إذاً يمكن اختيار المتغيرات الأساسية التي نبدأ بها الحل

$$B = [\, x_4 , x_5 , x_6 \,]$$

محاولة رقم 1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	-1	-1	4	0	0	0	0
x_4	1	1	1	1	1	0	0	9
← x_5	1	1	1	-1	0	1	0	2
x_6	-1	1	1	1	0	0	1	4

إذا نظرنا إلى الصف صفر (0) نلاحظ وجود قيمة موجبة واحدة مناظرة إلى x_3 وبالتالي بقيمة $z_3 - C_1 \geq$ وهذا يحدد دخول x_3 إلى الحل وتصبح من المتغيرات الأساسية لتحسين الوصول إلى الحل الأمثل.

ويمكن تحديد (x) التي تخرج من الحل الأساسي من ضمن (x_4 , x_5 , x_0) وذلك باستخدام القاعدة بقسمة العمود (الطرق اليمين) على العمود الذي تم اختياره ونختار أقل قيمة موجبة.

$$(\frac{9}{2},\frac{2}{-1},\frac{4}{1})$$

$$= (4.5 , -2 , 4)$$

∴ أقل قيمة موجبة هي 4 المقابلة لـ x_6

عليه يجب أن تخرج x_6 وتدخل x_3 وتصبح **المحاولة الثانية** على الشكل الآتي:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	1	3	-5	0	0	0	-4	-16
x_4	0	3	-1	0	1	0	-2	1
← x_5	0	0	2	0	0	1	1	6
x_6	0	-1	1	1	0	0	1	4

بالنظر إلى الصف 0 مازالت توجد قيمة موجبة $(Z_J - C_J)$ مقابلة إلى $x_j(3)$ وتطبق نفس الخطوات للمحاولة الثالثة.

المحاولة الثالثة:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
z	1	0	-4	-	-1	0	-2	17
x_1	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5 ←	0	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$

وبما أن كل $z_j - C_j \le 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية.

∴الحل هو الأمثل وقيم الحل هي:

$x_1 = \frac{1}{3}$ $\quad x_3 = \frac{13}{3}$ $\quad x_5 = 0$

$x_2 = 0$ $\quad x_4 = 0$ $\quad x_6 = 0$

$z = -17$

6.4 طريقة القيمة الكبرى M لحل مسائل البرمجة الخطية (Big M)

لقد شرحنا سابقاً أسباب إضافة المتغير الصناعي (Artificial variable) وذلك لإنشاء الحل الابتدائي لمسائل البرمجة الخطية بالإضافة إلى أن وجود هذا المتغير بقيمة موجبة تعني أن الحل الحالي ليس حلاً ملموساً لأي مسألة ويمكن التخلص من المتغير الصناعي وذلك بإضافة إلى دالة الهدف بموافق ذو قيمة كبيرة جداً وغير مشجعة، كمتغير في القيود وتصبح بذلك إمكانية التخلص منه سريعة جداً.

ولتوضيح هذه الظاهرة مع شرط أن $b \geq 0$

$$\text{Min} \quad z = C_x$$

$$\text{S.T}$$

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

بإضافة المتغير الصناعي في حالة التساوي

$$Ax + x_a = b$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

إن بداية المتغيرات الأساسية للحل يمكن أن تعطي على هيئة:

$$x_a = b$$

ودالة الهدف طورت بطريقة الطرد المتغير الصناعي وذلك بإضافة قيمة كبيرة خيالية لمعاقبة وجود المتغير الصناعي في الحل وبالتحديد يسمى (M) وعليه يعاد صياغة المسألة على النحو التالي:

$$\text{Min} \quad z = C_x + mix_a$$

$$\text{S.T}$$

$$Ax + x_a = b$$
$$x_1 , x_2 \geq 0$$

حيث M قيمة موجبة كبيرة جداً، والصفر Mixa يمكن تعليله كعقوبة يدفعها الحل الذي يحتوي على $x_a \neq 0$ بالرغم من أن $x = 0$ ، $x_a = b$ كبداية للحل فقط وبإضافة M الكبيرة تسعى طريقة السمبلكس وحدها لإزالة x_a (المتغير أو المتغيرات الصناعية).

ولتوضيح هذه الطريقة نقدم المثال التالي:

$$\text{Min} \qquad z = x_1 + 2x_2$$

S.T

$$x_1 + x_2 \geq 2$$
$$-x_1 + x_2 \geq 1$$
$$x_2 \leq 3$$
$$x_1 , \ x_2 \geq 0$$

أولاً: يجب إضافة x_3 , x_4 , x_5 slacks ومتغيرات صناعية x_6 ، x_7 وتصبح المسألة على الصيغة التالية:

$$\text{Max} \qquad Z = x_1 - 2x_2 - 0x_3 - 0x_4 + 2x_5 + Mx_6 + Mx_7$$

S.T

$$x_1 + x_2 + x_3 \qquad + x_6 \qquad = 2$$
$$-x_1 + 4x_2 \quad - x_4 \qquad + x_7 = 1$$
$$x_2 \qquad + x_5 \qquad = 3$$
$$x_1 , \ x_2 , \ x_3 , x_4 , x_5 , x_6 , x_7 \geq 0$$

ويمكن كتابتها في جداول السمبلكس على النحو التالي:

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
Z	1	-1	2	0	0	0	-M	-M	0
لا يوجد	0	1	1	-1	0	0	0	0	2
	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
	0	0	1	0	0	1	1	0	3

بضرب الصف رقم (1) والصف رقم (2) وجمعها على الصف صفر

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
z	1	-1	2+2M	-M	-M	0	0	0	2
x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	1
x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	3
x_5	0	0	1	0	0	1	0	0	

بالنظر في صف 0 0 $z_j - C_j \ge 0$ بالنسبة x_2 وعليه نختار x_2 للدخول في الحل الأساسي وتخرج x_7 وفق القاعدة:

$$\left(2/1 \; , \; \frac{1}{1} \; , \; 3/1 \right)$$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
z	1	1+2M	0	-M	2+M	0	0	2-2M	-2+M
x_6	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_7	0	-1	1	0	-1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	0	1	1	0	-1	2

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
z	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}-M$	$-\frac{2}{3}-M$	$-\frac{2}{5}$
x_6	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_7	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	0	1	1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$

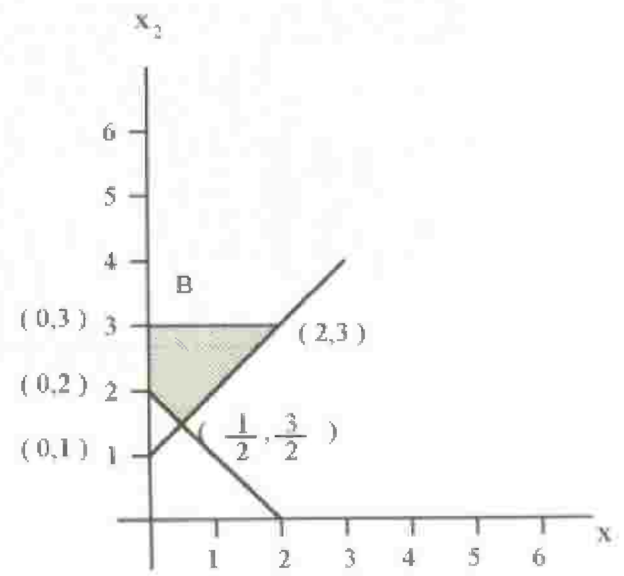
	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
z	1	-3	0	2	0	0	-2-M	M	-4
x_4	0	2	0	-1	1	0	1	-1	1
x_2	0	1	1	-1	0	0	1	0	2
x_5	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الطرف الأيمن
z	1	-1	0	0	0	-2	-M	-M	-6
x_4	0	1	0	0	1	1	0	-1	2
x_2	0	0	1	0	0	1	0	0	3
x_1	0	-1	0	1	0	1	-1	0	1

بما أن كل $z_j - C_j \geq 0$ كل متغير لا يوجد في الحل الأساسي

∴ آخر جدول تعتبر الحل الأمثل (Optimum)

ويوضح الرسم الحل البياني للمسألة.



مثال 6.3:

(في حالة عدم وجود حل متاح للمسألة (Infeasible solution)

$$\text{Min} \qquad z = -x_1 - 3x_2 + x_3$$

S.T

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\le 4 \\ -x_1 \qquad + x_3 &\ge 4 \\ x_3 &\ge 3 \\ x_1,\ x_2,\ x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	الطرف الأيمن
1	1	3	-1	0	0	0	-M	-M	0
0	1	1	2	1	0	0	0	0	4
0	-1	0	1	-1	-1	0	1	0	4
0	0	0	1	0	0	-1	0	1	3

بضرب الصف 2 و 3 في M وإضافتهما إلى الصف 0

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	X_8	الطرف الأيمن
z	1	1-M	3	-1+2M	0	-M	-M	0	0	7M
← x_4	0	1	1	2	1	0	0	0	0	4
X_7	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0	4
x_8	0	0	0	1	0	0	-1	0	1	3

بالنظر في الصف 0 نلاحظ وجود قيم لغير المتغيرات الأساسية.

مثال x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , x_6 أن $(z_j - C_j \geq 0)$ وبالتالي باختيار أكبر قيمة موجبة لتقرير المتغير الذي يدخل الحل وباستخدام القاعدة بقسمة $\frac{b}{x_r}$ حيث r العمود المختار.

$$(\frac{4}{2}, \frac{4}{1}, \frac{3}{1}) \Rightarrow (2, 4, 3)$$

وباعتبار 2 أقل قيمة موجبة عليه تدخل x_3 وتخرج x_4.

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	الطرف الأيمن
z	1	$\frac{3}{2}$-2M	$\frac{7}{2}$-M	0	$\frac{1}{2}$-M	-M	-M	0	0	2+3M
x_6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	2
x_7	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	0	1	0	2
x_5	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	-1	0	1	1

بما أن M قيمة موجبة وكبيرة جداً وأن $z_j - C_j \leq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية في الحل، عليه فإن شروط الحصول على الحل الأمثل قد تحققت؛ ولكن بما أن المتغيرات الصناعية x_7 ، x_8 موجودة بالحل وعند قيم موجبة عالية وفقاً للقاعدة فإن الحل خيالي وغير موجود.

مثال 6.4 الحل موجود ولكن غير محدود المساحة:

(Unbounded optimal solution)

$$\text{Min} \quad Z = -x_1 - 3x_2$$

S.T

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1$$
$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4 \geq 0$$

بإضافة متغيرات صناعية للتساوي حسب القاعدة هما x_5 ، x_6 وبالتالي يعاد كتابة المسألة على النحو الآتي:

$$\text{Min} \quad Z = -x_1 - x_2 + M x_5 + M x_6$$

S.T

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 1$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 4$$
$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ x_4, \ x_5, \ x_6 \geq 0$$

ويمكن نقل المسألة على هيئة الجداول على النحو الآتي:

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
1	1	1	0	0	-M	-M	0
0	1	-1	-1	0	1	0	1
0	-1	1	2	-1	0	1	1

يضرب الصف الأول والثاني في صفر وإضافتها إلى الصف صفر

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	1	1	M	-M	0	0	2M
x_5	0	-1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	0	1	2	2	-1	0	1	1

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	$1+\frac{1}{2}M$	$1-\frac{1}{2}M$	0	$\frac{1}{2}M$	0	$\frac{1}{2}M$	$-\frac{2}{5}$
x_5	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	0	2	0	1	-M-2	-M-1	-3
X_1	0	1	0	0	-1	2	1	3
x_5	0	0	1	1	-1	1	1	2

ونلاحظ أن $z_j - C_j \geq 0$ المقابلة لـ x_2 قيمة موجبة لكم $x_2 \leq 0$ عليه فإن المسألة ذات حل محدود ولأن المتغيرات الصناعية x_5 ، x_6 آلت إلى الصفر.

مثال 6.5:

$$\text{Min} \quad Z = -x_1 - 3x_2$$

S.T

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 2$$
$$x_1, \; x_2, \; x_3 \geq 0$$

Min $Z = x_1 - x_2 + M x_5 + 0 x_6 + 0 x_4$

S.T

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 4$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_6 = 2$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

عليه يمكن كتابة المسألة على هيئة الجداول على النحو الآتي:

	x_1	x_2	x_3 ↓	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	-1	1	-1	0	M	0	0
x_5	1	1	2	-1	1	0	4
x_6	1	-2	1	0	0	0	2

يضرب الصف الأول والثاني في صفر وإضافتها إلى الصف (0)

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	-1-M	1-m	-2M-1	-M	0	0	4–M
x_5	1	1	2	-1	1	0	4
x_6	1	-2	1	0	0	1	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	M	-6M-1	0	M	0	2M+1	2
x_5	-1	5	0	-1	1	-2	0
x_3	1	-2	0	0	0	1	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	$-\frac{1}{5}$	0	0	$-\frac{1}{5}$	$M+\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	2
x_5	$-\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
x_3	$\frac{3}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	2

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	0	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$M+\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{3}$
x_2	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
x_1	1	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$

بما أن $y_{12} \leq 0$ والمتغيرات الصناعية كلها آلات إلى الصفر، فإن الحل ذ مساحة غير محدودة. وتوجد قيمة موجبة $z_j - C_j \leq 0$ مقابلة x_4.

مثال 6.6

$$\text{Min} \qquad Z = -x_1 - x_2$$

S.T

$$x_1 - x_2 \geq 1$$
$$-x_1 + x_2 \geq$$
$$x_1 , \quad x_2 \quad ?$$

بإضافة Slack x_3 , x_4 وإضافة المتغيرات الصناعية x_5 ، x_6 للوصول إلى حالة التساوي وبالتالي يمكن كتابة المسألة على النحو التالي:

$$\text{Min} \qquad Z = -x_1 - x_2 - 0\,x_4 + M\,x_5 + M\,x_6$$

S.T

$$x_1 + x_2 \qquad + x_5 \qquad = 1$$
$$-x_1 + x_2 \quad - x_4 \quad + x_6 = 1$$
$$x_1 ,\ x_2 ,\ x_3 , x_4 ,\ x_5 ,\ x_6 \ \geq 0$$

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
1	1	1	0	0	-M	-M	0
0	1	-1	-1	0	1	0	1
0	-1	1	0	-1	0	0	1

يضرب الصف الأول والصف الثاني في M وإضافتها إلى الصف صفر.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z	1	1	1	-M	-M	0	0	2M
x_5	0	1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	0	-1	1	0	-1	0	1	2

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الطرف الأيمن
z		0	2	1-M	-M	-1	0	2M-1
x_1	0	1	-1	-1	0	1	0	1
x_6	0	0	0	-1	-1	1	1	2

نلاحظ أن الصف صفر الذي يحتوي على $z_j - C_j$ توجد قيم المتغيرات الغير داخلة في أكبر من الصفر (≥ 0) ولا يمكن إدخال أي متغير آخر لتحسين الحل نظراً لعدم إمكانية تحسين الحل وفق القاعدة ($\frac{2}{5} , \frac{1}{-1}$) لا يجوز اختيار أحد العناصر ويدل على عدم توفر حل يحقق هذه المسألة.

6.5 بعض الظواهر الشاذة لحل مسائل البرمجة الخطية بواسطة طريقة السمبلكس:

1- المتغيرات الغير محددة المدى $(-\infty < x < +\infty)$ (Unrestricted variables)

من خلال فصول هذا الكتاب نلاحظ أن المتغيرات التي تم التعامل معها كلها ذات خاصة أن $x \geq 0$.

وبالرغم من ذلك نواجه أحياناً بعض المتغيرات التي حدودها من $-\infty$ إلى $\infty +$.

مثال أن:

$$-\infty < x3 < +\infty$$

ويمكن تحويرها إلى الشكل التالي:

وتستبدل $x3 = x_3^- - x_3^-$

$$x_3^+ \geq 0$$

$$x_3^- \geq 0$$

ونعامل x_3^+ إذا كانت من ضمن المتغيرات في الحل الأساسي $0 \geq x_3^+$ وتعامل x_3 إذا كانت من ضمن المتغيرات في الحل الأساسي على النمو $x_3 \leq 0$

2- تكرار القيد (Redundant constraint)

يقصد بتكرار القيد الذي نادراً ما يحصل في صياغة المسائل وجود القيد الذي لا يؤثر في طبيعة الحل.

3- الانحراف (Degeneracy)

يقصد بالانحراف عندما يوجد متغيراً أساسي واحد أو أكثر يكون له قيمة صفر، وتشكل هذه الظاهرة ما يلي:

أ- عدم التحسن في دالة الهدف عندما يتحرك الحل من نقطة إلى أخرى كما هو الحال بواسطة الرسم أو الجداول.

ب- من الممكن أن تنتقل من نقطة إلى أخرى في دائرة لا يمكن التحسن فيها أبداً في دالة الهدف للوصول إلى الحل الأمثل.

6.6 دراسة حالة Case study

تم اختيار مصنع الورق المقوى بالزهراء كحالة للدارسة وتطبيق الأسلوب الرياضي لما يميز هذا المصنع عن المصانع الأخرى لكونه يعتمد على الإنتاج حسب الطلب ولا يوجد لديه إنتاج مصمم مسبقاً وبالتالي كان تطبيق الأسلوب الرياضي عليه ممكناً ويمكن الاستفادة من نتائجه بغرض تطبيقه في تصميم عمليات الإنتاج.

مقدمة عن المصنع:

يعتبر مصنع الورق المقوى (الكرتون) من إحدى القلاع الصناعية بالجماهيرية العظمى.

يقع هذا المصنع بمنطقة الزهراء وقد أقيم على مساحة إجمالية وقدرها (15.000) متر مربع منها (17.000) متر مربع مباني إنتاجية وخدمية.

تبلغ الطاقة الإنتاجية للمصنع (15.000) طن في السنة أي ما يعادل (27) مليون متر مربع من (الكرتون) المسطح على أساس وردية واحدة في اليوم وقد تم إضافة وردية ثانية لزيادة القدرة الإنتاجية.

ويهدف هذا المشروع لتغطية احتياجات المصانع والشركات والمشاريع الزراعية والتشاركيات والأفراد بصناديق الكرتون لتغليف وتعبئة مختلف المنتجات المحلية.

وبقدر العدد الإجمالي للعاملين في المصنع بالورديتين 186 منتج، يوجد بالمصنع تسعة خطوط إنتاجية يمر المنتج بثلاث مراحل حتى ظهوره بالشكل النهائي؛ والمراحل هي:

1- مرحلة التقوية حيث يتم في هذه المرحلة تقويم الورق وذلك بلصق ثلاثة طبقات من الورق مع بعضها تكون الطبقة الوسطى بشكل متعرج وهي التي تجعل الورق ذو متانة وقوة عالية.

2- مرحلة التفصيل وهي المرحلة التي تلي مرحلة التقوية حيث يتم في هذه المرحلة إجراء عمليات شق (Slit) للورق بهدف الحصول على المقاسات المطلوبة وتتم عملية الشق باستخدام آلات شق خاصة بالورق وتتميز هذه الآلات بالدقة وإمكانية شق أي مقاس مطلوب.

يظهر الفاقد الناتج عن التوزيع (Layout) في هذه المرحلة حيث يتم استخلاصه وسحبه بواسطة الآلات خاصة يتم بعد ذلك تجميعه والتصرف فيه أيضاً يتم في نفس المرحلة قص المنتج وتفصيله ليكون جاهزاً للعملية التالية.

3- مرحلة اللصق والطباعة في هذه المرحلة يتم طباعة البيانات المطلوبة على الورق وبعدها يتم لصقه ليكون في شكله النهائي.

يعتمد المصنع في إنتاجيه على الطلب الوارد من الشركات والمصانع والتشاركيات والأفراد ويختلف الطلب الوارد من شركة إلى أخرى أو من مصنع إلى آخر من حيث الكمية والنوع. يعتبر طلب المصنع الواحد أو الشركة الواحدة شبه ثابت من حيث النوع وتختلف الكمية المطلوبة من فترة إلى أخرى، وتعتبر هذه ميزة تستفيد منها إدارة الإنتاج في تخطيط عملياتها الإنتاجية حيث يتم تخزين كمية من الإنتاج الفائض لطلب معين (أي لا يمكن اعتباره فاقد) ويتم استخدامه عند وصول طلب آخر لنفس النوع ويترتب عن تخزين الفائض تكاليف تخزين ولكنها عموماً أقل من تكاليف اعتبار الفائض الفاقد.

وبخبرة إدارة الإنتاج نستطيع أن نتوقع أن المصانع والشركات تكون في حاجة إلى منتجات، وبالتالي تقوم إدارة الإنتاج بتصميم العمليات الإنتاجية للطلبيات المتوقعة،

وبذلك يستمر الإنتاج ولا يتحمل المصنع تكاليف إضافية نتيجة لتوقف العمليات الإنتاجية.

يستخدم المصنع أربعة أبعاد قياسية للمواد الخام والتي هي عبارة عن لفائف ورقية وهذه الأبعاد هي (210 ، 220، 230 ، 240) سنتيمتر ويعتبر توفر هذه الأبعاد القياسية ميزة أخرى تستفيد منها إدارة الإنتاج في تقليل الفاقد عند التصميم لتوزيع المنتجات (Layout) على اللفائف حيث يتم استخدام البعد القياسي الأمثل أي الذي يحقق أقل كمية مفقودة.

دراسة تحليل طلب معين:

يختلف الطلب الوارد إلى المصنع ويتفاوت من يوم إلى آخر، لذلك سوف تختار عينة عشوائية لطلبية واردة في يوم 8-5-1994م وكانت الطلبية واردة من شركة الصابون ومواد التنظيف وتحتوي على ثلاثة أصناف كالتالي:

- الصنف الأول عدد الطلبية 52088 وحدة.
- الصنف الثاني عدد الطلبية 1245 وحدة.
- الصنف الثالث عدد الطلبية 28490 وحدة.

وكانت أبعاد الطلبيات محدودة لكل وحدة على النحو التالي:

	الطول (mm)	العرض (mm)
الصنف الأول	931	508
الصنف الثاني	1017	328
الصنف الثالث	1397	60

أما عرض اللفائف القياسية المتوفرة بالمصنع هي (210 ، 220، 230 ، 240) وجميع هذه اللفائف كانت بطول قياسي (260 متر) وبمعلومية الطول القياسي للفائق والطول الإجمالي للوحدات يمكن تحديد عدد اللفائف المطلوبة من كل صنف.

1- الصنف الأول كانت الكمية (52088) وحدة وطول الوحدة (0.931) متر.

الطول الكلي المطلوب الأول = (0.931) (52088) = 48493.92 متر

عدد اللفائف المطلوبة من الصنف الأول = (48493.92) ÷ (260) = 186.51 = 187

2- الصنف الثاني كانت الكمية (1245) وحدة وطول الوحدة (1.017) متر.

الطول الكلي للصنف الثاني= (1.017) (1245) = 1266.16 متر

عدد اللفائف المطلوبة من الصنف الثاني = (1266.16) ÷ (260) = 4.86

3- الصنف الثالث كانت الكمية (28490) وحدة وطول الوحدة (1.397) متر.

الطول الكلي للصنف الثالث= (28490) (1.397) = 39798.3 متر

عدد اللفائف المطلوبة من الصنف الثالث = (3978.3) ÷ (260) = 153

طريقة الحل لدراسة الحالة بالأسلوب التقليدي:

بعد أن تم تحديد المعالم الرئيسية للحالة بصورة واضحة يتم إيجاد الحل المناسب لها وفق الخطوات المتبعة. وبذلك يمكن صياغة الطلب كالآتي:

الصنف	العرض (m)	عدد اللفائف
1	0.51 = 0.508	187
2	0.33 = 0.328	5
3	0.60	153

وبما أنه يوجد بالمصنع أربعة قياسات فإنه سوف يصاغ النموذج لكل بُعد قياسي على فرض أنه لا يوجد لدى الشركة إلا بُعد قياسي واحد، كذلك يمكن المفاضلة في اختيار البعد القياسي الأمثل لإنتاج الطلبية فيما لو توفرت الأبعاد القياسية الأربعة.

1- البعد القياسي الأول (عرض 2.100 متر) بطول (260 متر)

يتم أولاً تحديد عدد الطرق الممكنة للتقسيم وهي كالآتي:

وقد تم استخدام برنامج حاسب آلي لحساب عدد التقسيمات (Settings) المنطقية التي تحقق أقل كمية فاقد وهذا البرنامج موجود بالملحق (1) والجدول التالي يوضح تجميع البيانات للتقسيمات الممكنة.

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	العدد المطلوب
33	3	1	0	3	6	1	4	1	2	4	0	5
60	1	2	0	0	0	1	1	0	2	0	3	153
51	1	1	4	2	0	2	0	3	0	1	0	187
فاقـد	0	6	6	9	12	15	18	24	24	27	30	

ثم يتم بعد ذلك تحدد عدد التوليفات الممكنة لإنتاج الطلبية، إن عدد التوليفات الممكنة لإنتاج الطلبية كبير إذا أخذنا في الاعتبار الاحتمالات الممكنة لتكوين التوليفات، لذلك سيتم أخذ عينة من التوليفات وإجراء عملية المقارنة عليها، وهذه التوليفات كالتالي:

التوليفة الأولى:

يتم قطع 77 لفة بالطريقة الثانية وقطع 28 لفة بالطريقة الثالثة.

الفاقد نتيجة التوزيع = (6 x 77) + (28 x 6) = 5.10 متر

الفاقد من اللفات الفائضة = (33 x 72) + (60 x 1) + (15 x 2) = 25.38 متر

الفاقد الكلي = 25.38 + 5.10 = 30.48 متر

= (30.48 x 260) = 7924.8 متر مربع

التوليفة الثانية:

يتم قطع 50 لفة بالطريقة الثانية وقطع 53 لفة بالطريقة السادسة وقطع 8 لفات بالطريقة الثالثة.

الفاقد نتيجة التوزيع = (50 x 6) + (53 x 15) + (8 x 6) = 11.13 متر

الفاقد نتيجة الفائض= (98 x 33) + (1 x 51) = 32.85 متر

الفاقد الكلي = 11.13 + 32.85 = 93.98 متر

= (43.98 x 260) = 1434.8 متر مربع

التوليفة الثالثة:

تم قطع 77 لفة بالطريقة الأولى وتم قطع 55 لفة بالطريقة الرابعة.

الفاقد نتيجة التوزيع = (77 x 6) + (55 x 9) = 9.66 متر

الفاقد نتيجة الفائض= (237 x 33) + (1 x 60) = 78.21 متر

الفاقد الكلي = 9.66 + 87.21 = 87.87 متر.

= (87.87 x 260) = 22846.2 متر مربع.

تم اختيار التوليفة الأولى لإنتاج الطلبية بفرض توفر البعد (210) فقط.

2- البعد القياسي الثاني (بعرض 2.20 متر وطول 260 متر).

يتم تحديد عدد الطرق الممكنة للتقسيم بواسطة برنامج الحاسوب وهي (140) توزيع قد وجد 11 توزيع منطقي وهي التي تحمل أقل قيمة للفاقد وكانت كالتالي:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	العدد المطلوب
33	2	3	5	1	0	3	1	0	3	6	1	4	5
60	0	2	0	3	1	1	1	0	0	0	1	1	153
51	3	0	1	0	3	1	1	4	2	0	2	0	187
فاقد	1	1	4	7	7	10	16	16	19	22	25	28	

بعد أن تم تحديد التوزيعات الأفضل نقوم بإجراء المفاضلة بين التوليفات لتوضيح المشكلة وهي كالتالي:

التوليفة الأولى:

تم قطع 30 لفة بطريقة التقسيم الرابعة وقطع 63 لفة بطريقة التقسيم الخامسة.

الفاقد نتيجة التوزيع = (30 x 7) + (63 x 7) = 6.51 متر

الفاقد نتيجة الفائض = (25 x 33) + (2 x 51) = 9.27 متر

الفاقد الكلي = (6.5 + 9.27) = 15.78 متر

الفاقد الكلي (m^2) = (15.78 x 260) = 4102.8 متر مربع

التوليفة الثانية:

تم قطع 51 لفة بطريقة التقسيم الرابعة وقطع 63 لفة بطريقة التقسيم الأولي.

الفاقد نتيجة التوزيع = (1 x 63) + (7 x 51) = 4.20 متر

الفاقد نتيجة الفائض = (132 x 33) + (2 x 51) = 60.54 متر

الفاقد الكلي = 4.20 + 60.54 = 64.74 متر

= (64.74 x 260) = 16832.4 متر مربع

التوليفة الثالثة:

تم قطع 50 لفة بالطريقة الرابعة و 60 لفة بالطريقة الخامس، و 7 لفات بالطريقة السابعة.

الفاقد نتيجة التوزيع = (50 x 7) + (7 x 60) + (16 x 7) = 8.82 متر

الفاقد الناتج عن اللفائف الزائدة = (52 x 33) + (60 x 64) = 55.56 متر

الفاقد الكلي= 8.82 + 55.56 = 64.38 متر مربع

وبالمقارنة تم اختيار التوليفة الأولى في حالة توفر البعد القياسي 2.20 متر.

3- البعد القياسي الثالث (بعرض 2.30 متر وطول 260 متر):

باستخدام برنامج الحاسوب وجد أن عدد التوزيعات الممكنة هي (140) وبتحديد أفضل توزيعات وهي التي تحمل أقل كمية من الفاقد وكان بيانها كالتالي:

العدد المطلوب	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	المقياس
5	6	3	0	1	3	0	1	5	2	3	0	5	2	33
153	0	0	0	2	1	1	3	0	0	2	2	1	1	60
187	0	2	4	1	1	3	0	1	3	0	2	0	2	51
	32	29	26	26	20	17	17	14	11	11	8	5	2	فاقد

وبطريقة طرق التقسيم السابقة يمكن تحديد عدد من التوليفات وكانت:

التوليفة الأولى:

هي عبارة عن قطع 77 لفة بالطريقة الثالث وقطع 33 لفة بالطريقة السادسة.

وبالتالي يكون الفاقد نتيجة التوزيع =

$$(14 \times 33) \div (8 \times 77) = 6.16 + 4.6 = 10.78 \text{ متر}$$

والفاقد نتيجة الفائض من اللفائف $53.40 = (160 \times 33) \div (60) \div =$ متر

وبالتالي يكون الفاقد الكلي = $64.18 = (53.40 \times 10.78)$ متر

الفاقد الكلي (متر) = $6686.8 = 260 \times 64.18$ متر مربع

التوليفة الثانية:

وتمت بقطع 51 لفة بالطريقة السابعة وقطع 63 لفة بالطريقة الخامسة.

وكانت الفاقد نتيجة التوزيع = $8.67 = (11 \times 63) + (17 \times 51)$ متر

والفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف= $55.52 = (174 \times 33) \div (2 \times 51)$ متر

الفاقد الكلي = $64.19 = 8.67 \div 55.52$ متر

الفاقد الكلي = $16689.4 = 64.19 \times 260$ متر مربع

التوليفة الثالثة:

وتمت بقطع 94 لفة بالطريقة الثالثة وقطع لفة واحدة بالطريقة الثانية.

وكان الفاقد نتيجة التوزيع = $7.57 = 5 \div (8 \times 94)$ متر

الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف= $23.25 = (5 \times 33) \div (36 \times 60)$ متر

الفاقد الكلي = $8013.2 = 260 \times 30.82$ متر مربع

التوليفة الرابعة:

وتمت بقطع 94 لفة بالطريقة الثالثة وقطع 5 لفائف بالطريقة السابعة.

وكان الفاقد نتيجة التوزيع = $8.37 = (17 \times 5) \div (8 \times 94)$ متر

الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف= $30.51 = (50 \times 60) \div (1 \times 51)$ متر

الفاقد الكلي = 8.37 + 30.51 = 38.88 متر

الفاقد الكلي = 38.88 × 260 = 10108.8 متر مربع

وبالمقارنة بين الفاقد في التوليفات الرابعة نجد أن أفضل توليفة لإنتاج الطلبية باستخدام البعد القياسي (2300) متر هي التوليفة الثالثة التي تحقق أقل فاقد.

4- البعد القياسي الرابع (بعرض 2.400 متر وطول 260 متر):

باستخدام برنامج الحاسوب وجد أن عدد التوليفات الممكنة هي (270) وقد تم اختيار أفضل 7 توزيعات وهي التي تحمل أقل كمية من الفاقد وكان بينها كالتالي:

العدد المطلوب	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	المقياس
5	3	1	0	5	2	3	0	5	2	7	0	4	2	1	0	33
153	1	3	1	0	0	2	2	1	1	0	3	0	2	0	4	60
187	1	0	3	1	3	0	2	0	2	0	1	2	1	4	0	51
	30	27	27	24	21	21	18	15	12	9	9	6	3	3	0	فاقد

وباستخدام طرق التقسيم أو التوزيعات المختارة يمكن تحديد التوليفات الممكنة لإنتاج الطلبية وكانت كالتالي:

التوليفة الأولى:

تمت بقطع 39 لفة بالطريقة الأولى وقطع 47 لفة بالطريقة الثانية.

كان الفاقد نتيجة التوزيع = 3 × 47 = 1.41

والفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف=

(33 × 42) ÷ (51 × 1) + (60 × 3) = 15.17 متر

وكان الفاقد الكلي= 1.14 + 15.17 = 16.58 متر

∴ الفاقد الكلي = 16.58 × 260 = 4310.8 متر مربع

الفاقد الكلي (متر) = 64.18 × 260 = 6686.8 متر مربع

التوليفة الثانية:

وتمت بقطع 51 لفة بالطريقة الخامسة وقطع 34 لفة بالطريقة الثانية.

وكان الفاقد نتيجة التوزيع = (51 × 9) ÷ (3 × 34) = 5.61 متر

وكان الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف = 9.57

الفاقد الكلي = 9.57 + 5.61 = 15.18 متر

الفاقد الكلي = 260 × 15.18 = 3946.8 متر

التوليفة الثالثة:

وتمت بقطع 20 لفة بالطريقة الخامسة وقطع 41 لفة بالطريقة الثانية وقطع 25 لفة بالطريقة

وكان الفاقد نتيجة التوزيع = (41 × 3) + (9 × 25) = 3.48 متر

الفاقد نتيجة الفائض في عدد اللفائف = (51 × 2) + (60 × 2) + (33 × 36) + (36 × 33) = 1410 متر

الفاقد الكلي = 9.57 + 5.61 = 15.18 متر

الفاقد الكلي = 260 × 15.18 = 3946.8 متر

بإجراء المقارنات بين الفاقد في التوليفات الثلاثة نجد أن التوليفة الثانية هي التي تحمل أقل فاقد وبالتالي تكون هي أفضل توليفة لإنتاج الطلبية.

إجراء الحل بطريقة البرمجة الخطية:

مد أن تم إيجاد الحل للمشكلة المدروسة بالطريقة التقليدية والتي تحتاج إلى زمن لإجراء خطوات الحل ولإجراء الحل بالصورة الرياضية تم استخدام طريقة (Big-M) بالاستعانة ببرنامج حاسب آلي موجود بملحق (2) وكان ذلك على النحو التالي:

صياغة نموذج رياضي لكل الحالة:

1- النموذج الأول باستخدام البعد القياسي (2.100) متر والجدول الآتي يوضح البيانات المتعلقة بالمشكلة.

العدد المطلوب	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	المقياس
5	0	4	2	1	4	1	6	3	0	1	3	33
135	3	0	2	0	1	1	0	0	0	2	1	60
187	0	1	0	3	0	2	0	2	4	1	1	51
	30	27	24	24	18	14	12	9	6	6	0	فاقد

بعد ذلك يتم تحديد المعادلات والتي تمثل قيود النموذج الرياضي.

$3x1 + x2 + 3x4 + x6 + x8 + 2x9 + x8 + 2x9 + 4x10$ = عدد اللفائف المنتجة بعرض (33).

$1 + 2x2 + x6 + x7 + 2x9 + 3x10$ = عدد اللفائف المنتجة بعرض (60).

$1 + x2 + 4x3 + 2x4 + 2x6 + x3 + x$ = عدد اللفائف المنتجة بعرض (51).

يكون العدد الفائض من اللفائف عند الحد المطلوب

$Y1 = 1x1 + x2 + 3x4 + 6x5 + x6 + 4x7 + x8 + 2x9 + 4x10 = 5$

$Y2 = 1 = 1x2 + x6 + x7 + 2x9 + 3x11 = 151$

$Y3 = x1 + x2 + 4x3 + 2x6 + 3x7 + x9 + x9 = 187$

وبهذا تكون كمية الفاقد الكلي الناتج عن عملية التقسيم

L (6x2+6x3+94+12x5+15x6+18x7+24x8+24x9+27x10+30x11)

حيث L طول اللفة القياسية ويمكن إهماله لأنه عامل مشترك. كذلك يتم إهمال الفاقد Y1، Y2، Y3 وبهذا يمكن صيغة النموذج الرياضي على الصورة:

$$Zmin = 6\ x_2 + 6\ x_3 + 6\ x_4 + 12\ x_5 + 15\ x_1 + 24\ x_8 + 24\ x_9 + 27\ x_{10} + 30\ x_{11}$$

Subject To:

$3\ x_1 - x_2 + 3\ x_4 + 6\ x_5 + x_6 + 4\ x_7 + x_8 + 2\ x_9 + 4\ x_{10} = 5$

$x_1 + 2\ x_2 \qquad + x_6 + x_7 + 2\ x_9 + 3\ x_{11} = 154$

$x_1 + x_2 + 4x_3 + 2\ x_4 + 2\ x_6 + 2\ x_8 + x_{10} = 187$

$x_L \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ x_{11} \geq 0$

ولإجراء الحل على النموذج لابد من وضعه على الصورة القياسية كالتالي:

$$Zmin = 6\ x_2 + 6\ x_3 + 9\ x_4 + 12\ x_5 + 15\ x_6 + x_7 + 24\ x_8 + 24\ x_9 + 27\ x_{10} + 30\ x_{11} + MR1\ \ MR2 + MR2$$

Subject To:

$3\ x_1 + x_2 + 3\ x_4 + 6\ x_5 + x_6 + 4\ x_7 + x_8 + 2\ x_9 + 4\ x_{10} + R1 = 5$

$x_1 + 2\ x_2 \qquad + x_6 + x_7 + 2\ x_9 + 3\ x_{11} + R2 = 154$

$x_1 + x_2 + 4\ x_3 + 2\ x_4 + 2\ x_6 + 3\ x_8 + x_{10} + R3 = 187$

$x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ x_{11} \geq 0$

$R1\ , R2\ , R3 \geq 0$

بعد وضع النموذج الرياضي على الصورة القياسية صار بالإمكان إجراء خطوات الحل بالطريق المبسط (BIG - M) وذلك بإدخاله في برامج: Linear Programming Analysis

$$Z_{min} = 5M\, x_1 + (4M-6)\, x_2 + (4M-6)\, x_3 + (9M-9)\, x_4 + (6M-12)\, x_5 + (4M-5)\, x_6 + (5M-18)\, x_7 + (4M-24)\, x_8 + (4M-24)\, x_9 + (5M-27)\, x_{10} + (3M-30)\, x_{11}$$

Subject To:

$$3\, x_1 + x_2 + 3\, x_4 + 6\, x_5 + x_6 + 4\, x_7 + x_8 + 2\, x_9 + 4\, x_{10} + R1 = 5$$

$$x_1 + 2\, x_2 + x_6 + x_7 + 2\, x_9 + 3\, x_{11} + R2 = 154$$

$$x_1 + x_2 + 4\, x_3 + 2\, x_4 + 2\, x_6 + 3\, x_8 + x_{10} + R3 = 187$$

$$x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{11} \geq 0$$

$$R1\ ,\ R2\ ,\ R3 \geq 0$$

```
*******************************
*                             *
*     LINEAR PROGRAMMING      *
*          ANALYSIS           *
*                             *
*******************************
```

** INFORMATION ENTERED **

NUMBER OF CONSTRAINTS	3
NUMBER OF VARIABELS	11
NUMBER OF <= CONSTRAINTS	0
NUMBER FO = CONSTRAINTS	3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS	0

ITERATION 0
X 12 = 5
X 13 = 154
X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
X 2	0.40E+13	1.000	2.000	1.000
X 3	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 4	0.50E+13	3.000	0.000	2.000
X 5	0.60E+13	6.000	0.000	0.000
X 6	0.40E+13	1.000	1.000	2.000
X 7	0.50E+13	4.000	1.000	0.000
X 8	0.40E+13	1.000	0.000	3.000
X 9	0.40E+13	2.000	2.000	0.000
X 10	0.50E+13	4.000	0.000	1.000
X 11	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	0.00E+13	1.000	0.000	0.000
R 2	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+13	5.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 1
BASIS
X 5 = .8333334
X 13 = 154
X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	R3
X 1	0.20E+13	0.500	1.000	1.000
X 2	0.30E+13	0.160	2.000	1.000
X 3	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 4	0.20E+13	0.500	0.000	2.000
X 5	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 6	0.30E+13	0.160	1.000	2.000
X 7	0.10E+13	0.660	1.000	0.000
X 8	0.30E+13	0.160	0.000	3.000
X 9	0.20E+13	0.330	2.000	0.000
X 10	0.10E+13	0.660	0.000	1.000
X 11	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.34E+15	0.830	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.41E+14

ITERATION 2
BASIS
X 3 = 46.75
X 5 = 0.8333334
X 14 = 154

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	X3
X 1	0.10E+13	0.500	1.000	0.250
X 2	0.20E+13	0.160	2.000	0.250
X 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
X 4	0.00E+13	0.500	0.000	0.500
X 5	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 6	0.10E+13	0.160	1.000	0.500
X 7	0.10E+13	0.660	1.000	0.000
X 8	-.18E+13	0.160	0.000	0.750
X 9	0.20E+13	0.330	2.000	0.000
X 10	-.18E+02	0.660	0.000	0.250
X 11	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.250
SOLU	0.15E+15	0.830	154.0	46.75

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1.54E+14

ITERATION 3
BASIS
X 3 = 46.75
X 5 = .8333334
X 14 = 51.33334

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	R3
X 1	0.18E+02	0.500	0.300	0.2
X 2	0.18E+02	0.160	0.600	0.2
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.0
X 4	0.00E+00	0.500	0.000	0.5
X 5	0.00E+12	1.000	0.000	0.0
X 6	0.00E+00	0.160	0.330	0.5
X 7	0.00E+00	0.660	0.330	0.0
X 8	-.18E+02	0.160	0.000	0.7
X 9	0.00E+00	0.330	0.660	0.0
X 10	-.18E+02	0.660	0.000	0.2
X 11	0.00E+13	0.000	1.000	0.0
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.0
R 2	-.10E+13	0.000	0.330	0.0
R 3	-.00E+13	0.000	0.000	0.2
SOLU	0.18E+04	0.830	51.33	46

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1830

ITERATION 4
BASIS
X 1 = 1.666667
X 3 = 46.33333
X 11 = 50.77778

Basis	C(j) - Z(J)	X5	R2	X3
X 1	0.00E+12	0.500	1.000	0.250
X 2	0.12E+02	0.160	2.000	0.250
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
X 4	-.15E+02	0.500	0.000	0.500
X 5	-035E+02	1.000	0.000	0.000
X 6	-.58E+01	0.160	1.000	0.500
X 7	-.23E+02	0.660	1.000	0.000
X 8	-.23E+02	0.160	0.000	0.750
X 9	-.12E+02	0.330	2.000	0.000
X 10	-.41E+02	0.660	0.000	0.250
X 11	0.00E+12	0.000	3.000	0.000
R 1	-.10E+13	0.160	0.000	0.000
R 2	-.10E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.250
SOLU	0.18E+04	0.830	154.0	46.75

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1801.33

ITERATION 5
BASIS
X 2 = 5
X 3 = 45.5
X 11 = 48

Basis	C (j) - Z (J)	X5	R2	R3
X 1	-.35E+02	3.000	-1.67	-.50
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	0.00
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.00
X 4	-.53E+02	3.000	-2.00	-.25
X 5	-.11E+03	6.000	-4.00	-1.5
X 6	-.18E+02	1.000	-3.00	0.25
X 7	-.70E+02	4.000	-2.34	-1.0
X 8	-.35E+02	1.000	-.670	0.5
X 9	-.35E+02	2.000	-.670	-.50
X 10	-.88E+02	4.000	-2.67	-.70
X 11	0.00E+12	0.000	1.000	0.0
R 1	-.10E+13	1.000	-.670	-.2
R 2	-.10E+13	0.000	.300	0.0
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.2
SOLU	0.17E+04	5.000	48.00	45

THE VARIABLES WHICH FORM THE SOLUTION SPACE

X 2 = 5

X3 = 45.5

X 11 = 48

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1743

TOTAL SCRAP = 260 * 1743 = 4531

2- صياغة النموذج الرياضي باستخدام البعد القياسي (2.200) والجدول التالي يوضح المتغيرات المتعلقة بالمشكلة:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	العدد المطلوب
33	2	3	5	1	0	3	1	0	3	6	1	4	5
60	0	2	0	3	1	1	2	0	0	0	1	1	153
51	3	0	1	0	3	1	1	4	2	0	2	0	187
فاقد	1	1	4	7	7	10	16	16	19	22	25	28	

وبذلك يكون النموذج الرياضي على الصورة:

$$\begin{aligned} Z_{max} = {} & (5M-1)\,x_1 + (5M-1)\,x_2 + (6M-4)\,x_3 + (4M-7)\,x_4 + (4M-7)\,x_5 + \\ & (5M-10)\,x_6 + (4M-16)\,x_7 + (4M-18)\,x_8 + (5M-19)\,x_9 + (6M-22)\,x_{10} \\ & + (4M-25)\,x_{11} + (5M-25)\,x_{12} + MR1 + MR2 + MR3 \end{aligned}$$

Subject To:

$$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \quad + 3x_6 + x_7 + 3x_9 + 6x_{10} + x_{11} + 9x_{12} + R1 = 5$$

$$2x_2 \quad + 3x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_{11} + x_{12} + R2 = 154$$

$$3x_1 \quad + x_3 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 4x_8 + 2x_9 + 2x_{11} + R3 = 187$$

$$x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{12} \geq 0$$

$$R1\ ,\ R2\ ,\ R3 \geq 0$$

بعد أن تم وضع النموذج في الصورة القياسية يمكن البدء في إجراءات الحل:

المتغير الداخل x_{10} والمتغير الخارج R_1.

```
*******************************
*                             *
*    LINEAR PROGRAMMING       *
*         ANALYSIS            *
*                             *
*******************************
```

** INFORMATION ENTERED **

NUMBER OF CONSTRAINTS 3
NUMBER OF VARIABELS 12
NUMBER OF <= CONSTRAINTS 0
NUMBER FO = CONSTRAINTS 3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS 0

ITERATION 0
X 12 = 5
X 13 = 154
X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 2	0.50E+13	3.000	2.000	0.000
X 3	0.60E+13	5.000	0.000	1.000
X 4	0.40E+13	1.000	3.000	0.000
X 5	0.40E+13	0.000	1.000	3.000
X 6	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
X 7	0.40E+13	1.000	2.000	1.000
X 8	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 9	0.50E+13	3.000	0.000	2.000
X 10	0.60E+13	6.000	0.000	0.000
X 11	0.40E+13	1.000	1.000	2.000
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+13	5.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 1
BASIS
X 3 = 1
X 14 = 154
X 15 = 186

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.26E+13	0.400	0.000	2.000
X 2	0.14E+13	0.660	2.000	-.100
X 3	0.00E+12	0.000	0.000	0.000
X 4	0.28E+13	1.000	3.000	-1.00
X 5	0.40E+12	0.200	1.000	3.000
X 6	0.14E+13	0.600	1.000	0.000
X 7	0.28E+13	0.200	2.000	0.000
X 8	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 9	0.14E+13	0.600	0.000	1.000
X 10	-.12E+13	0.200	0.000	-1.00
X 11	0.28E+13	0.200	0.000	-.100
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.12E+13	0.200	0.000	-.100
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.34E+15	1.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 2
BASIS
X 3 = 1
X 5 = 62
X 14 = 92

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	-.87E+13	0.400	-870	0.860
X 2	-.22E+13	0.600	2.200	0.000
X 3	0.00E+13	1.000	0.000	-.070
X 4	0.31E+13	0.200	3.060	1.000
X 5	0.00E+13	0.000	0.000	0.130
X 6	0.87E+13	0.600	0.860	0.260
X 7	0.17E+13	0.200	1.730	1.330
X 8	-.13E+13	0.000	-1.34	1.330
X 9	-.47E+13	0.600	-.470	0.460
X 10	0.40E+13	1.200	0.400	-.410
X 11	0.40E+13	0.200	0.390	0.600
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	-.93E+13	0.200	0.060	-.070
R 2	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	-.13E+13	0.000	-.340	0.330
SOLU	0.92E+14	1.000	92.66	62.00

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 9.2E+13

TERATION 3
BASIS
X 3 = 5
X 5 = 62.33333
X 14 = 76.66666

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	-.70E+13	2.000	-7.00	1.000
X 2	-.70E+13	3.000	-7.00	0.000
X 3	-.15E+13	5.000	-15.3	0.300
X 4	0.00E+13	1.000	0.000	0.000
X 5	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
X 6	-.83E+13	3.000	-8.34	0.300
X 7	-.13E+13	1.000	-1.34	0.300
X 8	-.13E+13	0.000	-1.34	1.300
X 9	-.97E+13	3.000	-9.67	0.000
X 10	-.18E+13	6.000	-18.0	0.000
X 11	-.27E+13	1.000	-2.67	0.000
X 12	0.30E+13	0.000	3.000	0.000
R 1	0.40E+13	1.000	-3.00	0.000
R 2	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
R 3	-.13E+13	0.000	-.340	0.000
SOLU	0.77E+14	5.000	76.66	62.00

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 7.67E+

2- صياغة النموذج الرياضي باستخدام البعد القياسي (2.300) والجدول التالي يوضح المتغيرات المتعلقة بالمشكلة:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	العدد المطلوب
33	2	5	0	3	2	5	1	0	3	1	0	3	6	5
60	1	1	2	2	0	0	3	1	1	2	0	0	0	153
51	2	0	2	0	3	1	0	3	1	1	4	2	0	187
فاقد	2	5	8	11	11	14	17	17	20	26	26	29	32	

وبذلك يكون النموذج الرياضي على الصورة:

$$\begin{aligned} Zmax = {} & (5M-2)\,x_1 + (6M-5)\,x_2 + (4M-8)\,x_3 + (5M-11)\,x_4 + (5M-11)\,x_5 + \\ & (6M-14)\,x_6 + (4M-17)\,x_7 + (4M-17)\,x_8 + (5M-20)\,x_9 + (4M-26)\,x_{10} \\ & + (4M-26)\,x_{11} + (5M-29)\,x_{12} + (6M-32)\,x_{13} + MR1 + MR2 + MR3 \end{aligned}$$

Subject To:

$2\,x_1 + 5\,x_2 + 3\,x_4 + 2\,x_5 + 5\,x_6 + x_7 + 3\,x_9 + x_{10} + 3\,x_{11} + 6x_{12} + R1 = 5$

$x_1 + x_2 + 2\,x_3 + 2\,x_4 + 3\,x_7 + x_8 + 1\,x_9 + 2\,x_{10} + x_{13} + R2 = 154$

$2x_1 + 2\,x_3 + 3\,x_5 + x_6 + 3\,x_8 + x_9 + x_{10} + 4\,x_{11} + R3 = 187$

$x_1\ x_2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{13} \geq 0$

$R1\ ,\ R2\ ,\ R3 \geq 0$

بعد صياغة النموذج في صورته القياسية يتم البدء في إجراء الحل بوضع النموذج في الجداول الخاصة بالطريقة.

```
********************************
*                              *
*    LINEAR PROGRAMMING        *
*         ANALYSIS             *
*                              *
********************************
```

** INFORMATION ENTERED **

NUMBER OF CONSTRAINTS 3
NUMBER OF VARIABELS 13
NUMBER OF <= CONSTRAINTS 0
NUMBER FO = CONSTRAINTS 3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS 0

ITERATION 0
X 12 = 5
X 13 = 154
X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R5	R2	R3
X 1	0.50E+13	2.000	1.000	2.000
X 2	0.60E+13	5.000	1.000	0.000
X 3	0.40E+13	0.000	2.000	2.000
X 4	0.50E+13	3.000	2.000	0.000
X 5	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 6	0.60E+13	5.000	0.000	1.000
X 7	0.40E+13	1.000	3.000	0.000
X 8	0.40E+13	0.000	1.000	3.000
X 9	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
X 10	0.40E+13	1.000	2.000	1.000
X 11	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 12	0.50E+13	3.000	0.000	2.000
X 13	0.60E+13	6.000	0.000	0.000
R 1	0.00E+13	1.000	1.000	0.000
R 2	0.00E+13	0.000	0.000	0.000
R 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+15	5.000	154.0	187.0

ITERATION 1
BASIS
X 1 = 1
X 14 = 153
X 15 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.26E+13	0.400	0.000	0.60
X 2	0.00E+13	1.000	2.000	0.00
X 3	0.40E+12	0.000	0.000	2.00
X 4	0.14E+13	0.600	3.000	1.40
X 5	0.26E+12	0.400	1.000	-0.40
X 6	0.00E+13	1.000	1.000	-1.00
X 7	0.28E+13	0.200	2.000	2.00
X 8	0.40E+13	0.000	0.000	1.00
X 9	0.14E+13	0.600	0.000	0.39
X 10	0.28E+13	0.200	0.000	1.80
X 11	0.40E+13	0.000	1.000	0.00
X 12	0.14E+13	.0.600	3.000	-0.61
X 13	-.12E+13	1.200	3.000	-1.21
R 1	-.12E+13	0.200	0.000	-.20
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	1.00
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	0.00
SOLU	0.34E+15	1.000	154.0	153.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 2
BASIS
X 2 = 1
X 3 = 76.5
R 3 = 34

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.14E+13	0.400	0.300	1.400
X 2	0.00 E+12	1.000	0.000	0.000
X 3	0.00E+13	0.000	1.000	0.000
X 4	-.14E+13	0.600	0.700	-1.400
X 5	0.34E+13	0.400	-0.200	3.400
X 6	0.20E+13	1.000	-0.500	2.000
X 7	-.28E+13	0.200	1.400	-2.800
X 8	0.20E+13	0.000	0.500	2.000
X 9	0.60E+12	0.600	0.190	0.600
X 10	-.80E+13	0.200	0.900	-0.800
X 11	0.40E+13	0.000	0.000	4.000
X 12	0.26E+13	0.600	-0.310	2.600
X 13	0.12E+13	1.200	0.610	1.200
R 1	-.80E+12	0.000	-0.100	0.200
R 2	-.20E+13	0.000	0.500	-1.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.92E+14	1.000	76.50	34.00

TERATION 3
BASIS
X 2 = 5
R 3 = 76.5
R 11 = 8.5

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.12E+02	0.400	0.300	0.60
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	0.00
X 3	0.00E+12	0.000	1.000	2.00
X 4	-.12E+02	0.600	0.700	1.40
X 5	0.12E+02	0.400	-0.200	-0.40
X 6	0.00E+00	1.000	-0.500	-1.00
X 7	-.28E+02	0.200	1.400	2.00
X 8	0.00E+00	0.000	0.500	1.00
X 9	-.12E+02	0.600	0.190	0.39
X 10	-.28E+02	0.200	0.900	1.80
X 11	0.00E+12	0.000	0.000	0.00
X 12	-.12E+02	0.600	-0.310	-0.61
X 13	-.23E+02	1.200	-0.610	-1.21
R 1	-.10E+13	0.200	-0.100	-.20
R 2	-.10E+13	0.000	0.500	1.00
R 3	-.10E+13	0.000	0.000	0.00
SOLU	0.84E+03	1.000	76.50	153.0

TERATION 4
BASIS
X 2 = 2.5
X 3 = 76.75
X 11 = 7.625

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.00E+12	0.000	0.300	0.000
X 2	-.29E+02	2.500	-0.750	-0.880
X 3	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 4	-.29E+02	1.500	0.240	0.880
X 5	0.00E+00	1.000	-0.500	0.500
X 6	0.29E+02	2.500	-1.250	-0.380
X 7	-.29E+02	0.500	1.250	-0.880
X 8	0.00E+00	0.000	0.500	0.500
X 9	-.29E+02	1.500	-0.380	-0.380
X 10	-.29E+02	0.500	-0.380	-0.380
X 11	0.00E+12	0.000	1.000	1.000
X 12	-.29E+02	1.500	0.120	0.120
X 13	-.58E+02	3.000	-0.750	-0.75
R 1	-.10E+13	0.500	-0.130	-0.130
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	-0.250
R 3	-.10E+13	0.000	0.250	0.250
SOLU	0.81E+03	2.500	7.620	7.620

The variables which form the solution space:

X 1 = 2.5
X 3 = 75.75
X 11 = 7.625
Objective function value: 809.25
total scrap = 809 * 260 = 2104.2104.05 m^2

4- صياغة النموذج الرياضي باستخدام البعد القياسي (2.400) والجدول التالي يوضح المتغيرات المتعلقة بالمشكلة:

المقياس	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	العدد المطلوب
33	0	1	2	4	0	7	2	5	0	3	2	5	0	1	3	5
60	4	0	2	0	3	0	1	1	2	2	0	0	1	3	1	153
51	0	4	1	2	1	0	2	0	2	0	3	1	3	0	1	187
فاقد	0	3	3	6	9	9	12	15	18	21	21	24	27	27	30	

وبذلك يمكن وضع النموذج القياسي على الصورة:

$$Zmin = 3\ x_2 + 3\ x_3 + 6\ x_4 + 9\ x_5 + 9\ x_6 + 12\ x_7 + 15\ x_8 + 18\ x_9 + 21\ x_{10} + 2\ x_{11} + 24\ x_{12} + 27\ x_{13} + 27\ x_{14} + 30\ x_{15} + MR1\ \ MR2 + MR2$$

Subject To:

$$x_1 - 2x_2 + 4x_4 + 7x_6 + 2x_7 + 2x_8 + 3x_{10} + 2x_{11} + 5x_{12} + x_{14} + 3x_{15} + R1 = 5$$

$$4x_1 + 2x_2 + 3x_5 + x_6 + x_7 + 2x_8 + 2x_9 + 2x_{10} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + R2 = 154$$

$$4x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + 2\ x_7 + 2x_9 + 3x_{11} + x_{12} + 3x_{13} + x_{15} + R3 = 187$$

$$x_1\ x_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ x_{15} \geq 0$$

$$R1\ ,\ R2\ ,\ R3 \geq 0$$

```
*******************************
*                             *
*    LINEAR PROGRAMMING       *
*         ANALYSIS            *
*                             *
*******************************
```

** INFORMATION ENTERED **

NUMBER OF CONSTRAINTS	3
NUMBER OF VARIABELS	15
NUMBER OF <= CONSTRAINTS	0
NUMBER FO = CONSTRAINTS	3
NUMBER OF >= CONSTRAINTS	0

ITERATION 0
X 12 = 5
X 13 = 154
X 14 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	R1	R2	R3
X 1	0.40E+13	0.000	4.000	0.000
X 2	0.50E+13	1.000	0.000	4.000
X 3	0.50E+13	2.000	2.000	1.000
X 4	0.60E+13	4.000	0.000	2.000
X 5	0.40E+13	0.000	3.000	1.000
X 6	0.70E+13	7.000	0.000	0.000
X 7	0.50E+13	2.000	1.000	2.000
X 8	0.60E+13	5.000	1.000	0.000
X 9	0.40E+13	0.000	2.000	2.000
X 10	0.50E+13	3.000	2.000	0.000
X 11	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 12	0.60E+13	5.000	0.000	1.000
X 13	0.40E+13	0.000	1.000	3.000
X 14	0.40E+13	1.000	3.000	0.000
X 15	0.50E+13	3.000	1.000	1.000
R 1	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.35E+15	5.000	154.0	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 1
BASIS
X 6 = .7142858
X 17 = 154
X 18 = 187

Basis	C(j) - Z(J)	X6	R2	R3
X 1	0.40E+13	0.000	4.000	0.60
X 2	0.40E+13	0.140	0.000	0.00
X 3	0.30E+13	0.280	2.000	2.00
X 4	0.20E+13	0.570	0.000	1.40
X 5	0.40E+12	0.000	3.000	-0.40
X 6	0.00E+12	1.000	0.000	-1.00
X 7	0.30E+13	0.280	1.000	2.00
X 8	0.10E+13	0.710	1.000	1.00
X 9	0.40E+13	0.000	2.000	0.39
X 10	0.20E+13	0.420	2.000	1.80
X 11	0.30E+13	0.280	0.000	0.00
X 12	0.10E+13	0.710	0.000	-0.61
X 13	0.40E+13	.0.000	1.000	-1.21
X 14	0.30E+13	0.140	3.000	0.00
X 15	0.20E+13	0.420	1.000	0.00
R 1	-.10E+13	0.140	0.000	-.20
R 2	0.00E+12	0.000	1.000	1.00
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	0.00
SOLU	0.34E+15	0.710	154	153

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 3.46E+14

ITERATION 2
BASIS
X 2 = 1
X 3 = 76.5
R 3 = 34

Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 2	0.40E+12	0.140	0.000	4.000
X 3	0.10E+13	0.280	0.500	1.000
X 4	0.20E+13	0.570	0.000	2.000
X 5	0.10E+13	0.000	0.570	1.000
X 6	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 7	0.20E+13	0.280	0.250	2.000
X 8	-.86E+01	0.710	0.250	0.000
X 9	0.20E+13	0.000	0.500	2.000
X 10	-.17E+02	0.420	0.500	0.000
X 11	0.30E+13	0.280	0.000	3.000
X 12	0.10E+13	0.710	0.010	1.000
X 13	0.30E+13	0.000	0.250	3.000
X 14	-.26E+02	0.140	0.750	0.000
X 15	0.10E+13	0.420	0.250	1.000
R 1	-.10E+13	0.140	0.000	0.000
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	0.000
R 3	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.19E+14	1.710	38.50	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1.87E+14

TERATION 3
BASIS
X 1 = 38.5
X 2 = 5
X 18 = 167

Basis	C(j) - Z(J)	X2	X1	R3
X 1	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	4.000
X 3	-.70E+13	2.000	0.500	1.000
X 4	-.14E+14	4.000	0.000	2.000
X 5	0.10E+13	0.000	0.570	1.000
X 6	-.28E+14	6.000	0.000	0.000
X 7	-.60E+13	2.000	0.250	2.000
X 8	-.20E+14	5.000	0.250	0.000
X 9	0.20E+13	0.000	0.500	2.000
X 10	-.12E+14	3.000	0.500	0.000
X 11	0.50E+13	2.000	0.000	3.000
X 12	0.19E+14	5.000	0.000	1.000
X 13	-.30E+13	0.000	0.250	3.000
X 14	-.40E+14	1.000	0.750	0.000
X 15	-.11E+14	3.000	0.250	1.000
R 1	-.50E+13	1.000	0.000	0.000
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	0.000
R 3	0.00E+13	0.000	0.000	1.000
SOLU	0.84E+03	5.000	38.50	187.0

OBJECTIVE FUNCTION VALUE: 1.78E+14

TERATION 4
BASIS
X 1 = 24.58333
X 2 = 5
X 13 = 55.66667

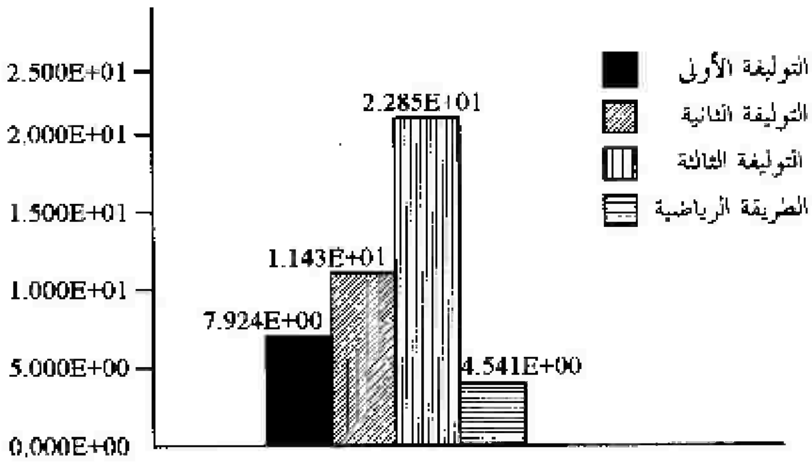
Basis	C(j) - Z(J)	X5	X2	X3
X 1	0.00E+12	0.000	1.000	0.000
X 2	0.00E+12	1.000	0.000	0.000
X 3	-.60E+02	2.000	1.080	-2.34
X 4	-.12E+03	4.000	1.160	-4.67
X 5	0.00E+00	0.000	0.660	0.330
X 6	-.24E+03	6.000	2.330	-9.34
X 7	-.60E+02	2.000	0.750	-2.00
X 8	-.18E+03	5.000	1.910	-6.670
X 9	0.00E+00	0.000	0.330	0.660
X 10	-.12E+03	3.000	0.500	-4.00
X 11	0.60E+02	2.000	0.410	-1.67
X 12	0.18E+03	5.000	1.580	-6.34
X 13	0.00E+12	0.000	0.000	1.000
X 14	-.60E+02	1.000	1.080	-1.34
X 15	-.12E+03	3.000	1.160	-3.670
R 1	-.10E+13	1.000	0.330	-1.340
R 2	-.10E+13	0.000	0.250	0.000
R 3	0.10E+13	0.000	-.090	0.330
SOLU	0.15E+03	2.500	24.58	55.66

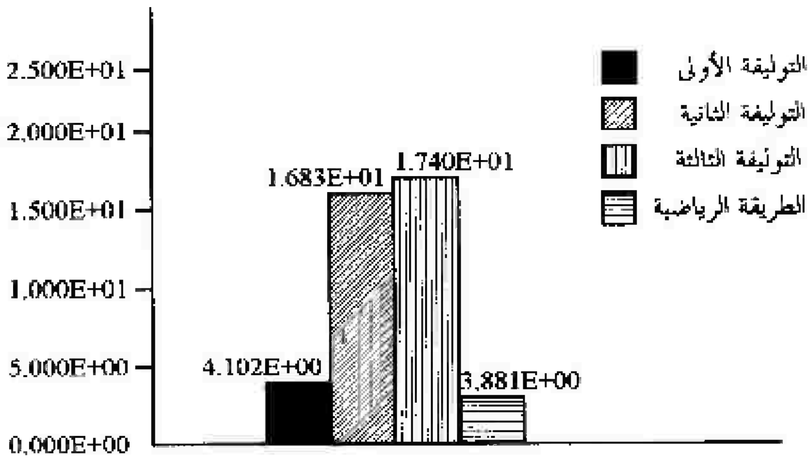
The variables which form the solution space:

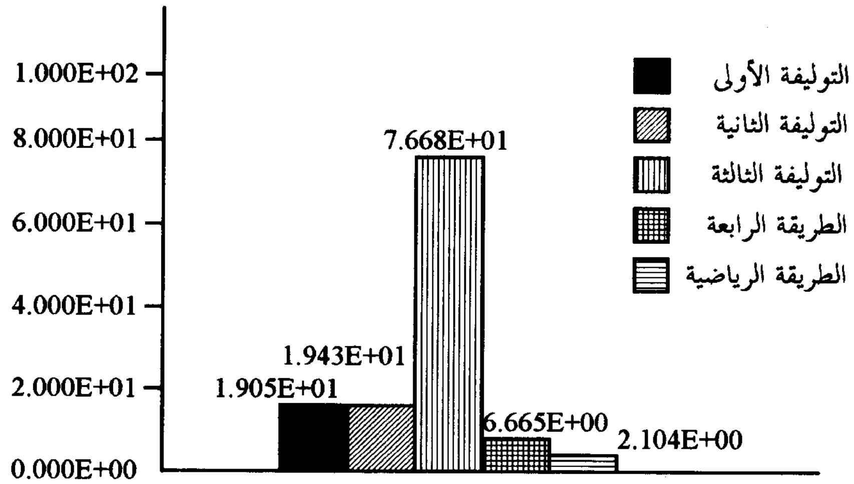
X 1 = 24.58333
X 2 = 5
X 13 = 55.66667
Objective function value: 1518
Total scrap = 15018 * 260 = 3946.8 m^2

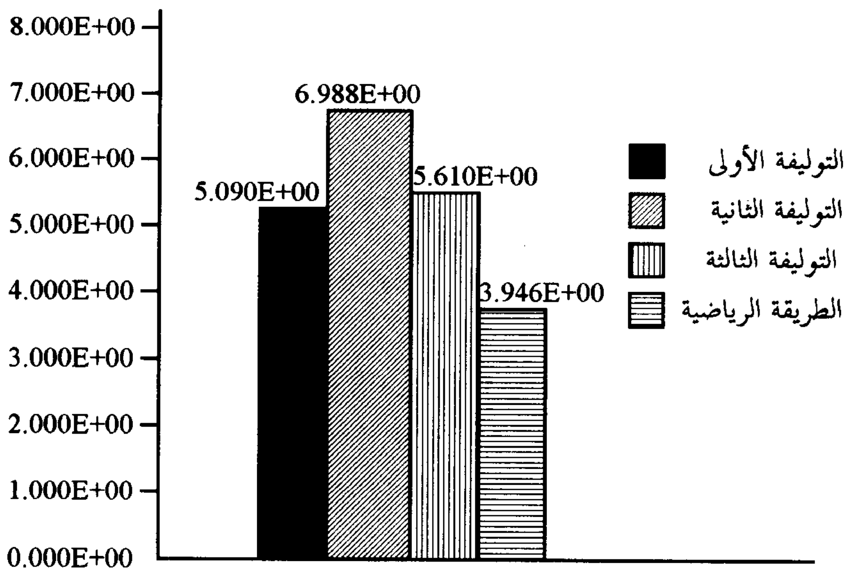
6.7 الخلاصة:

بعد إجراء الحسابات اللازمة لإيجاد قيمة الفاقد بالطريقتين التقليدية الرياضية وكما هو موضح بالأشكال. وجد أن استخدام أسلوب البرمجة الخطية في تقليل الفاقد يحقق أقل قيمة للفاقد يعطي نتائج في زمن أقل باستخدام الحاسب الآلي.






1.000E+02
8.000E+01
6.000E+01
4.000E+01
2.000E+01
0.000E+00
7.668E+01
1.943E+01
1.905E+01
6.665E+00
2.104E+00
التوليفة الأولى
التوليفة الثانية
التوليفة الثالثة
الطريقة الرابعة
الطريقة الرياضية


8.000E+00
7.000E+00
6.000E+00
5.000E+00
4.000E+00
3.000E+00
2.000E+00
1.000E+00
0.000E+00
6.988E+00
5.090E+00
5.610E+00
3.946E+00
التوليفة الأولى
التوليفة الثانية
التوليفة الثالثة
الطريقة الرياضية

6.8 مسائل:

أوجد حل المسائل الآتية بواسطة طريقة السمبلكس

-1

$$\text{Max} \quad z = 20\,x_1 + 24\,x_2$$

S.T.

$$2\,x_1 + x_2 \le 2$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 \le 48$$
$$x_1 + x_2 \le 20$$
$$x_1\ ,\ x_2 \ge 0$$

-2

$$\text{Max} \quad z = 30\,x_1 + 50\,x_2$$

S.T.

$$2\,x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + 2\,x_2 \le 11$$
$$x_1 + 3\,x_2 \le 15$$
$$x_1\ ,\ x_2 \ge 0$$

-3

$$\text{Max} \quad z = 10\,x_1 + 20\,x_2$$

S.T.

$$5\,x_1 + 8\,x_2 \le 40$$
$$5\,x_1 + 3\,x_2 \le 30$$
$$x_1\ ,\ x_2 \ge 0$$

-4

$$\text{Max} \quad z = 6\,x_1 + 8\,x_2$$

S.T.

$$4\,x_1 + x_2 \le 20$$
$$x_1 + 4\,x_2 \le 40$$
$$x_1\ ,\ x_2 \ge 0$$

-5

Max $z = -2x_1 + x_2$

S.T.

$x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 + x_2 \le 6$

$x_1 \ge 0$

$-\infty < x_2 < +\infty$

-6

Max $z = -x_1 - 2x_2 + x_5$

S.T.

$2x_1 + x_2 + x_3 \le 6$

$2x_2 - x_3 \le 3$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

-7

Max $z = 2x_1 - 12x_2 + 7x_5$

S.T.

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 10.000$

$2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 4000$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

-8

Max $z = 6x_1 + 8x_2$

S.T.

$x_1 - 3x_2 \ge -3$

$x_1 + 3x_2 \ge -6$

$2x_1 + x_2 \le 8$

$4x_1 - x_2 \le 16$

$x_1, x_2 \ge 0$

-9

Max $z = -3x_1 - 2x_2$

S.T.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 1 \\ 6x_1 + 4x_2 &\le 24 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge 16 \\ x_1 , x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

-10

Min $z = 3x_1 - x_2$

S.T.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\ge 12 \\ 4x_1 + x_2 &\le 20 \\ 3x_1 + 6x_2 &\ge 36 \\ x_1 , x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

-11

Max $z = 5x_1 + x_2$

S.T.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 12 \\ 4x_1 + x_2 &\le 20 \\ x_1 , x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

-12

Max $z = 6x_1 + 8x_2$

S.T.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 3 \\ 3x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1 , x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

-13

$$\text{Max} \quad z = 4x_1 + 7x_2 + x_3$$

S.T.

$$x_1 + 2x_2 = 12$$
$$3x_1 + x_2 = 18$$
$$x3 \geq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

-14

$$\text{Max} \quad z = x_1 + 4x_2 + x_5$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10$$
$$-3x_2 + x_3 = -4$$
$$x_1 + x_3 = 3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

-15

$$\text{Max} \quad z = 4x_1 - 2x_2 + 6x_5$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 36$$
$$5x_1 - x_3 \leq 2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

-16

$$\text{Max} \quad z = 5x_1 + 4x_2 + 2x_5$$

S.T.

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4$$
$$4x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

-17

Max $z = 4x_1 + 3x_2 + x_5$

S.T.

$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 22$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 30$

$-x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 42$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

-18

Max $z = 4x_1 - 2x_2 + 6x_5$

S.T.

$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 36$

$5x_1 - x_3 \leq 2$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$