الفصل السابع

النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية

يناقش هذا الفصل بالأمثلة التوضيحية تقنية النموذج الثنائي وكيفية استخدامها في تحوير البرمجة الخطية الأولى إلى النموذج الثنائي. ويتناول الفصل العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي، وأهمية هذه العلاقة، بالإضافة إلى مناقشة طرق حسابهما ، وطريقة حل المسائل الثنائية بواسطة السمبلكس. كما يسلط الفصل الضوء على تحليل الحساسية من خلال الأمثلة والتمارين التطبيقية.

الفصل السابع

7

النموذج الثنائي لمسائل البرمجة الخطية
Duality in Linear Programming

7.1 مقدمة:

من الظواهر المهمة المصاحبة لمسائل البرمجة الخطية الثنائية (Duality) والتي تعرف بتحوير نموذج البرمجة الخطية الأولى إلى النموذج الثنائية. ويختص النموذج الثنائي بسهولة حله عند حصول أي تغير في معاملات وإتاحة المتغيرات في النموذج الأولي بعد صياغته وحله، وتُستخدم هذه الخاصية في تسهيل ظاهرة الحساسية لنموذج البرمجة الخطية (Sensitivity Analysis).

ويُعرف النموذج الثنائي أيضاً بأنه النموذج المماثل للنموذج الأولي لصياغة مسائل البرمجة الخطية. ويرمز النموذج الثنائي الكثير من المعلومات التي يمكن أن تفيد إدارة العمليات الصناعية في سهولة اتخاذ القرارات، بالإضافة إلى تقليل العمليات الحسابية التي أصبحت سهلة بواسطة الحاسوب وتحتاج إلى وقت أقل في حالة توفر عدد كبير من القيود والمتغيرات عنها في النموذج الأول.

فمثلاً النموذج الأول يمكن أن يعرف على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix} \text{MAXIMIZE} \\ \text{أو} \\ \text{MINIMIZE} \end{bmatrix} \quad Z = \sum_{J=1}^{n} C_J x_J$$

$$\sum_{J=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad L = 1,2,......m$$

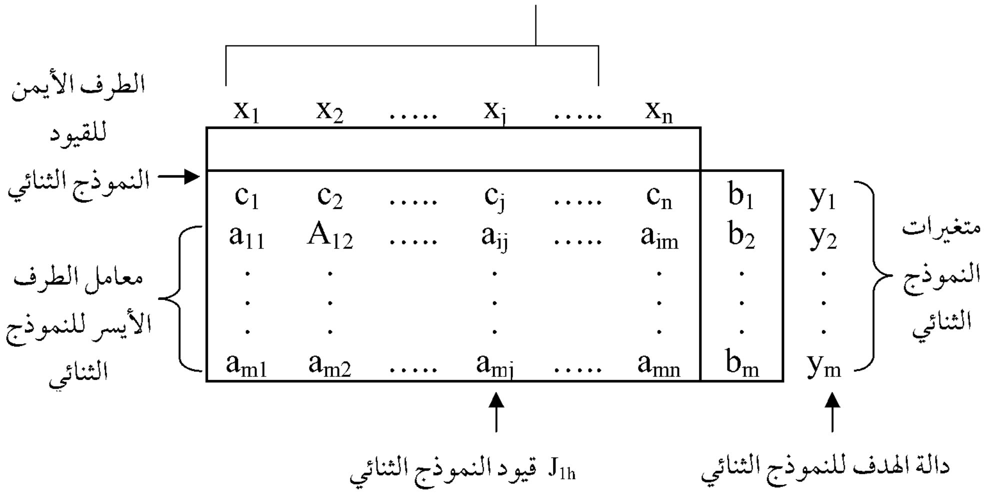
$$x_j \geq 0 \quad J = 1,2,......n$$

مع ملاحظة أن x_j تحتوي على المتغير الفائض والمتغير الصناعي.

ولتوضيح النموذج الثنائي بالنظر إلى الجدول (6.1)

جدول (6-1)

متغيرات النموذج الأول



والقاعدة تعني أن النموذج الثنائي له متغيرات m $(y_1, y_2, .. y_m)$ وله قيود n مقابلة $(x_1, x_2, .. x_n)$.

والجدول رقم (6-2) يوضح الانتظام في التغيرين النموذج الأول والنموذج الثنائي.

جدول (6-2)

دالة الهدف للنموذج الأول	**النموذج الثنائي**		
	دالة الهدف	**القيود**	**المتغيرات**
تعظيم (MAX)	تصغير	$\geq$	غير محددة
تصغير (MIN)	تعظيم	$\leq$	غير محددة

والأمثلة التالية توضح فكرة تغيير النموذج الأول إلى النموذج الثنائي:

مثال 7.1:

النموذج الأول:

Max $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$

S.T.

$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$

$2x_1 = x_2 + 3x_3 = 8$

$x_1 ,\ x_2 ,\ x_3 \ge 10$

بإضافة المتغير الفائض والمتغير الصناعي:

Max $z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4$

S.T.

$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$

$2x_1 = x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 8$

$x_1 ,\ x_2 ,\ x_3 , x_4 \ge 0$

∴ النموذج الثنائي: (Dual)

Min $w = 10y_1 + 8y_2$

S.T.

$x_1 :\quad y_1 + 2y_2 \ge 5$

$x_2 :\quad 2y_1 - y_2 \ge 12$

$x_3 :\quad y_1 + 3y_2 \ge 4$

$x_4 :\quad y_1 + 0y_2 \ge 0$

y_1 , y_2 غير محددة.

مثال 7.2:

$$\text{Max} \quad z = 5x_1 - 2x_2$$

S.T.

$$-x_1 + x_2 \geq -3$$
$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$
$$x_1, \; x_2 \geq 0$$

بإضافة المتغير الفائض والمتغير الصناعي:

$$\text{Min} \quad z = 5x_1 - 2x_2$$

S.T.

$$x_1 - x_2 + x_3 = 3$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_4 = 5$$
$$x_1, \; x_2, \; x_3, x_4 \geq 0$$

النموذج الثنائي:

$$\text{Max} \quad w = 3y_1 + 5y_2$$

S.T.

$$y_1 + 2y_2 \leq 5$$
$$-y_1 + 3y_2 \leq -2$$
$$y_1 \leq 0$$
$$y_2 \leq 0$$

غير محدد الإشارة y_1, y_2 .

مثال 7.3:

$$\text{Min} \quad z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

S.T.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$$
$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 17$$
$$x_1, \; x_2, \; x_3$$

ويمكن إعادة كتابة المسألة على النحو التالي:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{S.T.} \quad & \\ & x_1 + x_2 + x_3 \le -40 \\ & 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 17 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

أما النموذج الثنائي:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & w = -40y_1 + 17y_2 \\ \text{S.T.} \quad & \\ & -y_1 + 2y_2 \le 2 \\ & -y_1 - y_2 \le 3 \\ & -y_1 + y_2 \le 1 \\ & y_1, y_2 \le 0 \end{aligned}$$

7.2 العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي:

1- إن تحويل النموذج الثنائي إلى نموذج ثنائي يتحول إلى نموذج أول.

2- المصفوفة A (m x n) للنموذج الأولى تعطي المصفوفة (n x m) للنموذج الثنائي.

3- لكل قيود النموذج الأولى توجد علاقة لمتغيرات النموذج الثنائي والعكس صحيح.

4- لكل متغير في النموذج الأول، توجد علاقة له بقيود النموذج الثنائي والعكس صحيح.

5- لكل حل ابتدائي للنموذج الأول.

أ- $z \le Z$

ب- $z^* = Z^*$

ج- إذا كان $C\,x_o = w_o\,b$ ومنها

$$x_o = x^* \qquad w_0 = w^*$$

6- إذا كان النموذج الأول يوجد له حل أمثل فإن النموذج الثنائي له حل أمثل.

7- إذا كان النموذج الأول له حل غير محدود فإن النموذج الثنائي لا يوجد له حل والعكس صحيح.

ويمكن شرح العلاقة بين النموذج الأول (Primal problem) والنموذج الثاني (Dual problem) بواسطة العلاقة الرياضية التالية:

النموذج الأول

$$\text{Max } z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

S.T.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10$$
$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

النموذج الثاني

$$\text{Min } z = 10y_1 + 8y_2$$

S.T.

$$y_1 + 2y_2 \ge 5$$
$$2y_1 - y_2 \ge 12$$
$$y_1 - 3y_2 \ge 4$$
$$y_1 \ge 0 - \infty\, c\, y_2\, c \ne \infty$$

وبحل المسألتين كل على حدة بواسطة طريقة السمبلكس تلاحظ الحل في الجداول (6.3) و (6.4).

المعلومات التالية يمكن استنتاجها.

[الحل الأمثل لـ معادلة z للمسألة الأولى] = [الفرق ما بين الشمال واليمين لقيود المسألة الثنائية المصاحبة للمتغيرات].

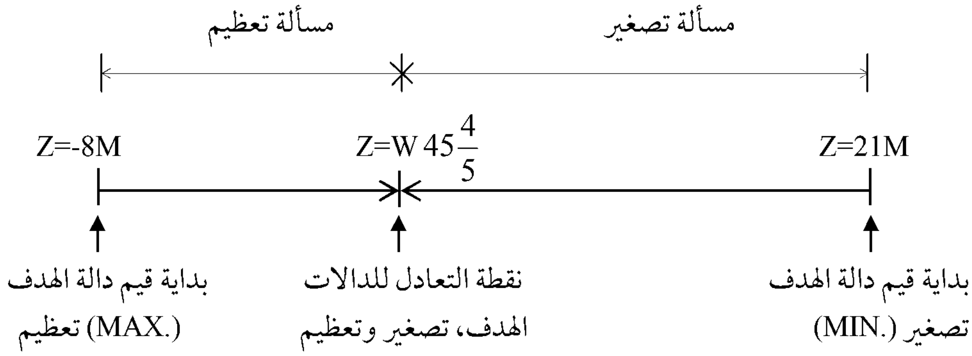
جدول (3-6)

المحاولة	أساس	x_1	x_2	x_3	x_4	R	الحل
0 (starting	z	-5-2M	-12+M	-4-3M	0	0	-8M
x_3 enters	x_4	1	2	1	1	0	10
R leaves	R	2	-1	3	0	1	8
1	z	-7/3	-40/3	0	0	$\frac{4}{3}+M$	32/3
x_2 enters	x_4	1/3	7/3	0	1	-1/3	22/3
x_4 leaves	R	2/3	-1/3	1	0	1/3	8/3
2	z	-3/7	0	0	40/7	$-\frac{4}{3}+M$	368/7
x_1 enters	x_2	1/7	1	0	3/7	-1/7	22/7
x_3 leaves	x_3	5/7	0	1	1/7	2/7	26/7
3	Z	0	0	3/5	29/5	$-\frac{2}{5}+M$	$54\frac{4}{5}$
(optimal)	x_2	0	1	-1/5	2/5	-1/5	12/5
	x_1	1	0	7/5	1/5	2/5	26/5

جدول (6-4)

Iteration	Basic	y_1	y'_2	y''_2	y_3	y_4	y_5	R_1	R_2	R_3	Solution
0 (starting)	W	-10+4M	-8+4M	8-4M	-M	-M	-M	0	0	0	21M
	R_1	1	2	-2	-1	0	0	1	0	0	5
	R_2	2	-1	1	0	-1	0	0	1	0	12
	R3	1	3	-3	0	0	-1	0	0	1	4
4 (optimal)	W	0	0	0	-26/5	-12/5	0	26/5-M	12-5-M	-M	$54\frac{4}{5}$
	y_5	0	0	0	-7/5	1/5	1	7/5	-1/5	-1	3/5
	y''_2	0	-1	1	2/5	-1/5	0	-2/5	-1/5	-1	2/5
	y_1	1	0	0	-1/5	-2/5	0	1/5	2/5	0	29/5

وباقي المعلومات التي يمكن تحديدها في الشكل 6.1.



وهذه النتائج يمكن تعميمها لزوج المسألة الأولى والثنائية.

1- لكل من الحل الابتدائي للمسألة الأولى والثنائية

(دالة الهدف لمسألة تعظيم) $\geq$ (دالة الهدف لمسألة تصغير)

2- الحل الأمثل للمسألة الأولي والثنائية

(دالة الهدف لمسألة تعظيم) = (دالة الهدف لمسألة تصغير)

7.3 أهمية العلاقة ما بين النموذج الأولي والنموذج الثنائي وحساباتها:

لغرض دراسة عملية تحليل الحساسية (Sensitivity analysis) يأتي اهتمامنا بالنتيجة التي يمكن تغيرها بواسطة تغيير المعاملات والتي يمكن تؤثر على مسار الحل المحقق سواء كان الحل الابتدائي أو الحل الأمثل المعهود. ونلاحظ عند تغير الطرق الأيمن أو معاملات المتغيرات سوف نحتاج إلى إعادة حساب المسألة من جديد للتأكد من وجود حل ابتدائي أو حل أمثل للمسألة من خلال المعلومات المتوفرة بجداول

السمبلكس. ويمكن تحقيق وجود حل سريع بدون إعادة حل المسألة من جديد بواسطة العلاقة ما بين النموذج الخطي الابتدائي الثنائي. ويمكن تطوير طريقة حسابية تسمى بالسمبلكس الثنائي (Dual simplex).

وقبل شرح هذه الطريقة يستوجب النظر على بعض التعريفات الجبرية المهمة.

تعريف:

تعرف المصفوفة (m x n) بأنها مصفوفة مستطيلة ولها صفوف m وأعمدة n، وحجم صفوف n (1 x n) وحجم الأعمدة (m) هي (m x 1) وأن المصفوفة (m x n) تحتوي على m صفوف و n أعمدة وعلى سبيل المثال:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

هي مصفوفة ذات حجم (2×3) لها عمودين هما $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

وكل عمود له ثلاثة صفوف على النحو الآتي:

$(0 , 1) \quad (4, -1) \quad (3 , 2)$

طريقة ضرب المصفوفات:

لو فرضنا مصفوفة الصف V

$$V = (v_1, v_2, \ldots\ldots v_m)$$

والمصفوفة المستطيلة A

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن:

$$V.A = (v_1, v_2,\ldots\ldots v_m)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{L=1}^{m} v_i a_{i1} \sum_{L=1}^{m} v_i a_{12} \ldots\ldots\ldots\ldots \sum_{L=1}^{m} v_i a_{in}$$

ولو مثلنا هذه الأرقام فإن:

$$= (11, 22, 33)\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$= (3x11+4x22+6x33,\ -1x11+8x22+9x33)$$

$$= (319\ ,\ 462)$$

أما مضروب مصفوفة A x P حيث

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \\ P_3 \end{bmatrix}$$

$$A \times P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & K & a_{1n} \\ a_{11} & a_{11} & K & a_{2n} \\ M & & K & \\ a_{m1} & a_{m2} & K & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ M \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} p_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} p_j \\ M \\ \sum_{j=1}^{n} a_{mj} p_j \end{bmatrix}$$

ولو مثلنا هذه القاعدة بالأرقام فإن:

$$= \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11\times & 1+22\times 5+33\times 7 \\ 11\times & 2+22\times 0+37\times 8 \\ 11\times & 3+22\times 6+33\times 9 \\ 11\times & -1+22\times 4+33\times -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} 352 \\ 386 \\ 462 \\ 11 \end{matrix}$$

7.4 طرق حساب النموذج الأولي والثنائي:

يمكن شرح طريقة حساب النموذج الأولي، الثنائي باستخدام أزواج من مسائل النموذج الأول والثنائي والتي يعطي طريقة حلها بالسمبلكس في الجداول (7.1)، (7.2) حيث:

النموذج الأولي:

Max $\quad z = 5\ x_1 + 12\ x_2 + 4\ x_3 - MR$

S.T.

$(y_1)\ x_1 + 2\ x_2 + x_3\ + 4\ x_3 = 10$

$(y_2) 2\ x_1 - x_2 + 3\ x_3 + R = 8$

$x_1\ , x_2, x_3\ , R \geq R$

النموذج الثنائي (Dual):

Minimize $\quad z = 10\ y_1 + 8\ y_2$

S.T.

$y_1 + 2\ y_2 \geq 5 \qquad (x_1)$

$2y_2 - \ y_2\ \geq 5 \qquad (x_2)$

$y_1 + 3\ y_2 \geq 4 \qquad (x_3)$

$y_1 + 2\ y_2 \geq 5 \qquad (x_1)$

$y_1 \geq 0 \qquad (x_1)$

$y_2 \geq -M \qquad (R)$

y_2 غير محدودة الإشارة (Unrestricted)

7.4.1 طرق حساب قيود الأعمدة:

عند أي محاولة لإحدى محاولات طريقة السمبلكس (أولي، أو ثنائي) فإن عناصر العمود الشمالية أو اليمنى لأي قيد من مصفوفات الجدول ويمكن حسابها على النحو الآتي:

(العمود في محاولة i) = (معكوس المحاولة i) × (العمود الأصلي)

ولتوضيح هذه المعادلة باعتبار المسألة الأولية أعلاه فإن بداية الحل الأساسي لـ x_3 ، R في الجدول (7.1)، فإن المصفوفة المعكوسة في كل محاولة (Iteration)، فلو اعتبرنا المحاولة رقم (1) وقيد x_1.

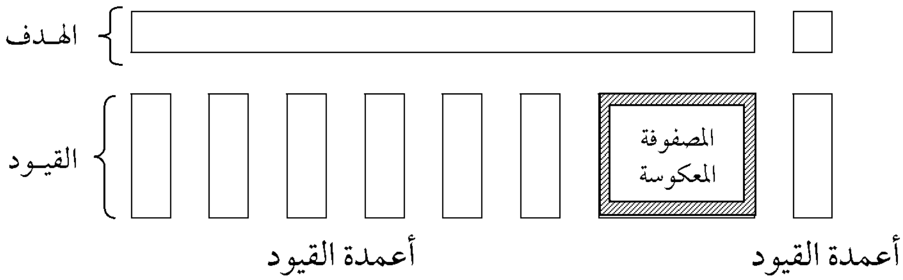
(العمود x_1 في الأصلي) = (معكوس المحاولة الأولى) × (العمود x_1 الأصلي)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

في محاولة رقم (2)

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{1} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{7} \\ \frac{26}{7} \end{bmatrix}$$

لتوضيح الطريقة بالرسم كما هو في الشكل (7.2).



شكل (7-2)

7.4.2 طريقة حساب صف دالة الهدف:

عند أي محاولة أثناء إجراء عملية السمبلكس للمسألة الأولية، فإن عناصر معادلة دالة الهدف لكل متغير x_j يمكن حسابها بالطريقة التالية:

(الجانب الأيمن من القيد الثنائي المقابل) – (الجانب الأيسر من القيد الثنائي المقابل) = (عنصر x_1 × معادلة الهدف).

وبتطبيق هذه المعادلة على النموذجين الأول والثاني السابقين سنحصل على المعادلات الآتية:

بتطبيق المعادلة أعلاه فإن:

معامل z لـ $x_1 = y_1 + 2\,y_2 - 5$

معامل z لـ $x_2 = 2\,y_1 + 2\,y_2 - 12$

معامل z لـ $x_3 = y_1 + 3\,y_2 - 4$

معامل z لـ $x_4 = y_1 - 0$

معامل $R = y_2 - (-M) = y_2 + M$

ولحساب هذه المعاملات عددياً نحتاج إلى قيم عددية للمتغيرات y_1 ، y_2 لأن معاملات دالة الهدف تتغير عند أي محاولة، ونتوقع أن قيم y_1، y_2 تتغير من محاولة إلى التي بعدها، والصياغة التالية يمكن استخدامها لحل إيجاد قيم المتغيرات الثنائية عند أي محاولة.

$$\begin{pmatrix} \text{قيم المتغيرات الثنائية} \\ \text{عند أي محاولة } i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{معامل دالة الهدف} \\ \text{الأصلية عند أي محاولة } i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \text{معكوس المصفوفات} \\ \text{عند أي محاولة } i \end{pmatrix}$$

وبالنظر إلى الجدول (7.1)

محاولة 0 : (معامل x_4 ، R) = (-M ، 0)

محاولة 1 : (معامل x_4 ، x_3) = (4 ، 0)

محاولة 2 : (معامل x_2 ، x_3) = (12 ، 4)

محاولة 3 : (معامل x_2 ، x_1) = (5 ، 12)

7.4.3 ملخص طريقة حساب النموذج الأولي الثنائي:

1- احسب كل عنصر في كل عمود في كل قيد باستخدام الطريقة (7.4.1).

2- احسب القيم الثنائية وذلك بضرب المسألة الأصلية (معاملات دالة الهدف الأصلية) في الحل الحالي في معكوس الصف.

3- احسب الطرف الشمالي للعناصر دالة الهدف لمعرفة الفرق بين الطرف الشمالي والطرف اليمين.

7.4.4 التفسير الاقتصادي لمعنى النموذج الثنائي:

Economic Interpretation of Duality

1- عند الوصول إلى الحل الأمثل: (at optimum)

$$\begin{pmatrix} \text{قيمة دالة الهدف} \\ \text{الأوليـة} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{قيمة دالة الهدف} \\ \text{الثنائيــة} \end{pmatrix}$$

2- عند أي محاولة أثناء الحل وقبل الوصول إلى الحل الأمثل في المسألة الأولية:

(معامل دالة الهدف للمغيرات x_j) = (الطرف الشمال المقابل للقيود الثنائية) – (الطرف الأيمن المقابل للقيود الثنائية)

وإن هاتين النتيجتين تؤديان إلى ملاحظة اقتصادية مهمة للنماذج الثنائية والمتغيرات الثنائية – ويمكن تمثيل العلاقة بين النموذج الأولي والنموذج الثنائية على الصورة التالية.

النموذج الأولي:

$$\text{Max} \qquad z = \sum_{J=1}^{n} L_j x_j$$

Subject to:

$$\sum_{J=1}^{n} L_j x_j = b_i \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots,n$$

النموذج الثنائي:

$$\text{Min} \qquad z = \sum_{L=1}^{m} b_i y_i$$

Subject to:

$$\sum_{L=1}^{m} a_j C_j \qquad j = 1,2,\ldots\ldots\ldots,m$$

$$y_i \geq 0\,, \qquad i = 1,2,\ldots\ldots\ldots,m$$

حيث إن المعاملات C_j تمثل الربح لكل وحدة منتجة من النشاط J. وإن كمية الموارد المتاحة I ، b_i والتي خصصت بمعدل a_{ij} وحدة من الموارد I لكل وحدة من المخرجات للنشاط J.

7.5 طريقة حل المسائل الثنائية بواسطة السمبلكس (Dual Simplex Method)

من خلال الفصول السابقة التي تناولت طريقة السمبلكس للمسألة الأولى تبين إذا كان $z_j - C_j < 0$ في حالة التعظيم لأي متغير أو أكثر فإن المسألة ليس له الحل الأمثل – وأن الشرط الأساسي لتحقيق الحل الأمثل أن جميع $z_j - C_j \geq 0$ لكل (J).

فإذا نظرنا إلى هذا الشرط من ناحية أو جهة المسائل الثنائية، فإن:

$$z_j - C_j = \sum_{L=1}^{m} a_{ij} y_i - C_j$$

إذا كان $z_i - C_j < 0$ فإن $\sum_{L=1}^{m} a_{ij} y_i < C_j$

والذي يعني أن المسألة الثنائية لها حل غير موجود وهذا الشرط يتحقق عندما تكون المسألة الأولية ليس حل أمثل.

ومن جهة أخرى عندما يكون:

$$z_i - C_j < 0$$

فإن

$$\sum_{L=1}^{m} a_{ij} y_i < C_j$$

وهذا يعني أن المسألة الثنائية في دائرة الحل أو طريقها للحل عندما تكون المسألة الأولى لها حل مثالي.

وبناء على النتائج المدونة أعلاه فإنه يقترح حل مسألة البرمجة الخطية من جديد أو من بدايتها مرة ثانية، حيث تكون بداية المسألة ليس حل واضح ولكن في النهاية لها حل مثالي (ويمكن مقارنتها بطريقة السمبلكس الاعتيادية والتي تبدأ لهما في أن لها الحل واضح وفي الأخير لا يوجد لها حل، أما الطريقة التي تختصر الحل تسمى السمبلكس الثنائي (Dual Simplex). والتي تبدأ من عدم وجود حل واضح (Infeasibility)

وتنتهي عندما يتوفر وضوح وجود للمسألة (Feasibility) وعند توفر (Feasibility) عندما يكون الحل الأمثل (Optimality). وهذا النوع من المسائل متوفر جداً في مسائل البرمجة الخطية وله أهمية كبرى، ويمكن أن يكون له عامل مساعد ومباشر في تحليل حساسية متغيرات مسائل LP.

مثال 7.4:

Minimize $\quad z = 2\,x_1 + x_2$

Subject to:

$$3\,x_1 + x_2 \ge 3$$
$$4\,x_1 - 3\,x_2 \ge 6$$
$$x_1 + 2\,x_2 \le 3$$
$$x_1\,,\; x_2 \ge 0$$

الخطوة الابتدائية تحول كل القيود من ≤ وإضافة المتغير الاحتياطي (Stack variable) للحصول على إشارة التساوي (=).

تصغير Minimize $\quad z = 2\,x_1 + x_2$

بشرط Subject to:

$$-\,3\,x_1 - x_2 + x_3 = -3$$
$$-\,4\,x_1 - 3\,x_2 + x_4 = -6$$
$$x_1 - 2\,x_2 + x_5 = 3$$
$$x_1\,,\, x_2\,,\, x_3\,,\, x_4\,,\, x_5 \ge 0$$

البداية بطريقة السمبلكس الاعتيادية والتي توضح أن المتغيرات الاحتياطية (x_3, x_4 , x_5) لا توفر حل واضح مادام المسألة تصغر وكل معاملات دالة الهدف تكون 0 ≥ وهذا يعني أن الحل الأساسي للمسألة هو:

$$x_3 = -3$$
$$x_4 = -6$$
$$x_5 = 3$$

فهو حل مثالي (Optimal) لكن غير منظور أو حل خيالي لأنه لا يحقق شرط $x \geq 0$ للجميع.

∴ المسألة يمكن معالجة حلها بطريق السمبلكس الثنائي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	-2	-1	0	0	0	0
x_3	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	1	2	0	0	1	3

وكما هو معروف في طريقة السمبلكس – أن الطريقة تعتمد على توفر الحل المثالي – وشرط عدم الخيالية في الأرقام – حيث شرط توفر الحل المثالي تضمن توفر الحل المثالي – وعدم الخيالية تضغط على قيم المتغيرات نحو نقاط الحل ومساحته المعروفة بطرق استخدام الرسم (أنظر الفصل الثالث).

شرط عدم الخياليـة في قيم الأرقام (Feasibility Condition):

إن المتغير الذي يخرج من المتغيرات الأساسية يعتبر له أكبر قيمة سالبة.

أما إذا كان المتغير الأساسي غير سالم فإن عمليات التغيير يجب أن تتوقف ويعتبر الحل المنظور (الغير خيالي) مثالي.

شرط وجود الحل المثالي (Optimality):

إن المتغير الذي يدخل من ضمن متغيرات الحل يتم اختياره من ضمن المتغيرات الغير أساسية في الحل (Nonbasic). تأخر النسبة بالنسبة للطرف الشمال أو معاملات الطرف الشمال لـ المعادلة Z إلى المعاملات المقابلة للمتغير المقترح أو المختار خروجه من المتغيرات الأساسية. إهمال أي نسبة مقامها + أو صفر – ويقرر دخول المتغير وفقاً للأقل نسبة موجبة، أما إذا كانت كل المقامات صفر أو قيمة موجبة فإن المسألة لها حل خيالي. (unfeasible)

ويعد اختيار المتغير الذي يدخل متغيرات الحل واختيار المتغير الذي يخرج يلي ذلك الحصول على تغيير الصفوف للحصول على المصفوفة الأحادية المعهودة ومنها إلى محاولة أخرى حتى الوصول إلى الحل الأمثل أو التوقف عن وجود حل.

فبالإشارة إلى الجدول السابق نلاحظ أن المتغير المختار إلى الخروج (6- =) x_4 لأنه يتحصل أكبر قيمة سالبة. أما المتغير التي دخل الحل فيعطي وفقاً للجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z معادلة	-2	-1	0	0	0
x_3 معادلة	-4	-2	0	1	0
النسب	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-	-	-

$\therefore$ المتغير المرشح للدخول x_2 لأنه مقابل إلى أقل قيمة موجبة ($\frac{1}{3}$) وبتطبيق قواعد المصفوفات للحصول على المصفوفة الأحادية التالية للمتغيرات نحصل على الجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	$-\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_3	$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
x_4	$-\frac{4}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_5	$-\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	-1

الحل المدرج أعلاه مثالي ولكن خيالي حيث $x_3 = -1$ ، $x_5 = -1$

فإذا اخترنا x_3 لمغادرة المتغيرات الأساسية، فإن x_1 تنطبق عليه الشروط للدخول إلى قائمة المتغيرات الأساسية والتي تعطي بالجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	2
x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	-1
x_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	2
x_3	0	0	-1	1	1	-1

ومن الجدول الأخير يتضح أن الحل مثالي وغير خيالي.

يعتبر تطبيق طريقة السمبلكس الثنائية ذات استخدام مفيد في تحليل الحساسية. وتظهر هذه الأهمية عندما يضاف قيد جديد للمسألة بعد الحصول على الحل للمسألة بكل الإضافة. فإذا كان القيد (المضاف) لا يحقق شرط الحل الأمثل والغير خيالي فإن المسألة سيبقى لها حل مثالي ولكن خيالي. وبالتالي طريقة السمبلكس الثنائية يمكن استخدامها بدون إعادة الحل من البداية حتى تحقق شروط الحل الأمثل والغير خيالي في عدد قليل من الخطوات الحسابية.

7.6 تحليل الحساسية (Sensitivity Analysis):

من المعروف بأنه في معظم التطبيقات العملية أن بعض المعلومات لا تكون دقيقة إنما هي مقربة أو محاكاة للواقع الفعلي إلى حد حقيقي جداً، وعليه فإن من المهم أن تجد الحل الأمثل مرة أخرى عند إتاحة المعلومات (Information Availability) الأكثر دقة حتى يعد حل المسائل، وهذا ممكن أن يحصل بدون إعادة حل المسألة الأصلية من البداية. وفي بعض الأحيان أن بعض المتغيرات يحصل عليه تغير أثناء عملية صياغة المسائلة وقبيل بدأ الحل أو في إحدى مراحل الحل.

بالإضافة إلى ذلك أن بعض القيود لا تكون مساوية تماماً عند الحصول على الحل الأمثل وبالتالي يجب النظر في هذه الإتاحية من خلال وجود الحل الأمثل، ويمكن أن يضاف قيد آخر بعد حل المسألة نظراً للتطورات التي تحصل في المسألة من البداية.

كل هذه التطورات التي تحصل على نموذج البرمجة الخطية وما شابه ذلك يمكن أن تسمى بتحليل الحساسية . فعلى سبيل المثال:

Minimize $z = c\,x$

S. T.

$A\,x = b$

$x \geq 0$

ولمعرفة أهمية قواعد الحساسية وذلك باعتبار مسألة تطبيقية وذلك على النحو الآتي:

تصغير Minimize $z = 3\,x_1 + 2\,x_2$

تحت شرط S.T

$x_1 + 2\ x_2 \leq 0$ (مواد خام A)

$2\ x_1 + x_2 \leq 8$ (مواد خام B)

$-\ x_1 + x_2 \leq 1$ (نهاية الطلبية)

$x_2 \leq 2$ (نهاية الطلبية)

$x_1\ ,\ x_2 \geq 0$ (شروط عدم السلبية)

بعد الحصول على الحل الأمثل ترغب إدارة الإنتاج لتحديد هذه الحالة وفقاً للتغيرات الآتية:

1- يرغب قسم تخطيط الإنتاج لزيادة 2 طن مون المواد الخام B ويقابل هذا زيادة المواد الخام A إلى 3 طن.

2- إن الاحتياج إلى المنتج x_2 يصبح 3.5 بدلاً من 2 كنهاية للطلب.

3- استخدام الماجة الخام B & A يتطلب دراسة لتقليصها في المادة.
النتيجة من 1 & 2 إلى 0.8 و 1.7 (يقصد بها معاملات المعادلة (القيد) الأولى المصاحبة (x_2 ، x_1)

4- معاملات الربح في دالة الهدف وفقاً لقسم الحسابات بالمصنع تتغير إلى 2.5 ، 1.5 د.ل/ طن بدلاً من 3 ، 2 كما هو في المسألة الأصلية.

5- من خلال دراسات السوق وجد أنه لا يمكن استخدام كمية من المواد A ، B أكثر من 3 طن بدلاً من 6 & 8.

نلاحظ أن قائمة المطالب والتي تشمل تغيير المسألة الأصلية تحتاج إلى زمن كثير لحل المسألة 5 مرات على الأقل. وهذه الحالة يعبر عنها بتحليل الحساسية. والسؤال المطروح هل عندما تحصل هذه المتغيرات يبقى الحل الأمثل - هو الحل الأمثل. والجواب يقع في احتمالين لا غير.

1- الحل الحالي يمكن أن يصبح حل خيالي (Infeasible).
2- الحل الحالي يمكن أن يصبح غير مثالي (Nonoptimal).

وهذان الاحتمالات يعتمد على نتيجة حسابات النموذج الأولي – الثنائي.

وبناءً على المناقشة يمكن اتخاذ إجراءات تحليل الحساسية في الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: حل المسألة الأصلية للبرمجة الخطية لإيجاد الحل الأمثل بواسطة طريقة السمبلكس.

الخطوة الثانية: وفقاً للتغيرات المطلوبة في معاملات المسألة تستخدم طريقة حساب النموذج الأولي – الثنائي.

الخطوة الثالثة: إذا كان جدول المصفوفات الجديد لا يطابق الحل الأمثل. أذهب إلى الخطوة الرابعة. إذا كان الحل الخيالي أذهب إلى الخطوة الخامسة. أما إذا كان الحل المثالي توقف.

الخطوة الرابعة: طبق طريقة السمبلكس الاعتيادية لإيجاد الحل الأمثل للمسألة (الجدول) الجديدة. أو أثبت أن الحل ذو مساحة غير معلومة (Unbounded).

الخطوة الخامسة: طبق طريقة الحل للنموذج الأولي – والثنائي لإيجاد الحل الأمثل الجديد، أو وضح أنه لا يوجد للمسألة حل.

وفقاً للخطوات السابقة نتجه الآن لشرح كيفية تطبيق تحليل الحساسية للمسألة المذكورة أعلاه.

المسألة الأولية:

تعظيم Minimize $z = 3\,x_1 + 2\,x_2$

S. T.

$x_1 + 2\,x_2 \leq 6$

$2\,x_1 + x_2 \leq 8$

$-x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1\,,\; x_2 \leq 0$

الخطوة الابتدائية تحول كل القيود من ≤ وإضافة المتغير الاحتياطي (Stack variable) للحصول على إشارة التساوي (=).

Minimize $z = 6\,y_1 + 8\,y_2 + y_3 + 2\,y_4$

S. T

$y_1 + 2\,y_2 - y_3 \geq 3$

$2\,y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geq 2$

$y_1\,,\, y_2\,,\, y_3\,,\, y_4$

إن الحل الأمثل للمسألة الأولية يعطي بالجدول التالي:

وكل هذه المعلومات تصلح لبداية تحليل الحساسية كما هو مشار إليه في الخطوة الأولى المذكورة أعلاه.

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
x_1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_2	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
x_3	0	0	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$

سوف نشير إلى الحل الأمثل بالحل الحالي (Current solution).

7.6.1 حالات الحساسية:

1- التغير في الطرف الأيمن في القيود (b_i)

إذا حصل تغير في القيد الأول للطرف الأيمن من 6 طن إلى 7 طن فما هو التغير الذي يحصل على الحل الأمثل. يمكن معالجته باستخدام طريقة الحل الأولي – الثنائي وذلك على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{الطرف} \\ \text{الأيمن} \\ \text{الجديد} \end{pmatrix}$$

وبما أن الطرف الأيمن الجديد مازال غير سالب. هذا يعني أن الحل الأمثل يبقى أمثل ويصبح التغير فقط في قيم $x_1 = 3$ ، $x_2 = 2$ ، $x_5 = 2$

أما إذا فرضنا في الطرف الأيمن تغيرت قيم القيد الأول والثاني من 6 و 8 إلى 7 ، 4 فيمكن حساب الطرف الأيمن الجديد على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ \frac{1}{3} \\ -2 \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{الطرف} \\ \text{الأيمن} \\ \text{الجديد} \end{pmatrix}$$

ولهذا التغير أثر على قيم x_5 ، x_6 تحولن إلى قيم سالبة وأصبح الحل خيالي.

والآن يجب أن نطبق طريقة النموذج الأولي – الثنائي لمعالجة مشكلة الخيالية وذلك يوضح القيم في الجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{23}{3}$
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
x_5	0	0	$\boxed{-1}$	1	1	0	-2
x_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{4}{3}$

وأن قيمة (z) الجديدة $\frac{23}{3}$ وأن الجدول أعلاه يعطي الحل المثالي حيث معادلة Z تمتاز بأن قيمتها كلها $0 \leq$ لكن الحل خيالي لأن بعض القيم سالبة وبالتالي فإن تطبيق طريقة السمبلكس للنموذج الأولي - الثنائي تعتبر ضرورية لتحقيق المثالية والحقيقة. ووفقاً لقواعد الطريقة فإن x_5 تخرج من متغيرات الحل و x_3 تدخل لمتغيرات الحل والتي يعطي بالجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
z	0	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	7
x_2	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
x_1	1	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_3	0	0	1	-1	-1	0	2
x_6	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	0

هذا الجدول يحقق شرط الحل الأمثل والأعداد الحقيقية والحل الأمثل هو:

$x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$ ، $z = 7$ حيث أن الحل ذو أعداد حقيقية تحقق في محاولة واحدة فقط.

2- إضافة قيد جديد للمسألة الأولى:

عند إضافة قيد جديد سوف ينتج عنه شرطين لا غيرهما:

1- تحقيق أن الحل الأمثل لا يتغير نتيجة كون القيد مكرر أو داخل منطقة الحل (Nonbinding or redundant).

2- إن القيد لا يحقق الحل الأمثل ولا الأعداد الحقيقية، وبالتالي نحتاج إلى تطبيق طريقة السمبلكس للنموذج الأولي - الثنائي ولتوضيح هذه الحالات نفرض إضافة القيد التالي:

$$x_1 \le 4$$

وهذا القيد يجب أن يضاف إلى النموذج الأول.

وبما أن $x_1 = \frac{10}{3}$ ، $x_2 = \frac{4}{3}$ من الواضح أنه يحقق القيد المضاف ولا داعي لحصول أي تغير يذكر.

أما إذا افترضنا أن القيد المضاف

$x_1 \le 3$ من الواضح أنه لا يحقق الحل الحالي $x_1 = \frac{10}{3}$ ، $x_2 = \frac{4}{3}$. لأننا لم نعطي حقيقة الأرقام.

ولحل المسألة بعد إضافة القيد الجديد يجب أن نضيف له المتغير الفائض.

فيصبح القيد على النحو الآتي:

$$x_1 + x_7 = 3 \qquad\qquad x_7 \ge 0$$

من المعروف أنه في الحل الحالي x_1 في الحل الأمثل وبالتعويض في معادلة القيد الأول

$$x_1 - \left(\frac{1}{3}\right)x_3 + \left(\frac{2}{3}\right)x_4 = \frac{10}{3}$$

وبالتالي يصبح القيد الجديد

$$\frac{10}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)x_3-\left(\frac{2}{3}\right)x_4+x_7=3$$

أو

$$\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_4+x_7=-\frac{1}{3}$$

وأن القيمة السالبة في الطرف الأيمن تعطي عدم توفر شرط الأرقام الحقيقي.

فإذا قلنا أن

$$x_3 = x_4 = 0$$

والتي يعرض شرط أن $x_7 = -\frac{1}{3}$

$$x_7 \geq 0$$

فالجدول التالي يوضح المعلومات الملخصة أعلاه:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الحل
z	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	0	$\frac{38}{3}$
x_3	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	0	$\frac{10}{3}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	$\frac{10}{3}$
x_5	0	0	$\boxed{1}$	1	1	0	0	3
X_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	$\frac{2}{3}$
x_7	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{3}$

بطريقة السمبلكس الأولي – الثنائي x_7 و x_4 تدخل والتي يعطي التالي الحل الأمثل.

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	الحل
z	0	0	1	0	0	0	2	12
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_1	1	0	0	0	0	0	1	3
x_5	0	0	$\boxed{-\frac{1}{2}}$	0	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$
X_6	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_7	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

وهو الحل الأمثل الجديد في محاولة واحدة فقط.

3- التغير في معاملات دالة الهدف:

يمكن شرح هذه الظاهرة مباشرة باستخدام المثال السابق حيث:

$$z = 3\,x_1 + 2\,x_3$$

وتغيرت هذه الدالة

$$z = 5\,x_1 + 2\,x_3$$

فيمكن حساب القيم الثنائية (y_1) (Duol values)

$$y_1, y_2, y_3, y_4 = (4\,,5\,,0\,,0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1\,,2,0\,,0)$$

والخطوة الثانية بإعادة حساب معاملات المعادلة z بواسطة أخذ الفرق ما بين الطرف الشمالي والطرف اليمين لقيود المسألة الثنائية.

وهذا يعمل على النحو الآتي:

x_1 معامل $= y_1 + 2\,y_2 - y_3 - 5$

$= 1\,(1) + 2\,(2) - (0) - (5) = 0$

x_2 معامل $= 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 - 4$

$= 2\,(1) + 2 + 0 + 0 - 4 = 0$

x_3 معامل $= y_1 - 0 = 1 - 0 = 1$

x_4 معامل $= y_2 - 0 = 2 - 0 = 2$

x_5 معامل $= y_3 - 0 = 0 - 0 = 0$

x_6 معامل $= y_4 - 0 = 0 - 0 = 0$

وبما أن كل معاملات المعادلة 2 ≤ 0 (تعظيم) وهذا يعني أن دالة الهدف لا تغير من الحل الأمثل الحالي وقيمتها الجديدة.

$$5\left(\frac{10}{3}\right)+4\left(\frac{4}{3}\right)=22$$

فإذا فرضنا أن دالة الهدف تغيرت إلى الحالة التالية:

$$z = 4\,x_1 + x_2$$

$$\therefore\ (y_1, y_2, y_3, y_4) = (4\,,5\,,0\,,0)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{-2}{3}, \frac{7}{3}, 0\,, 0\right)$$

ويمكن التحقق من قيم z الجديدة:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
z	0	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{44}{3}$

وبما أن $x_3 \geq 0$ (قيمة سالبة) فيجب x_3 أن تدخل الحل وتحقق الحل الأمثل بتطبيق طريقة السمبلكس للنموذج الأول – الثنائي وكما هو موضح بالجداول التالية:

المحاولة	المتغير	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
1	z	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{7}{3}$	0	0	$\frac{44}{3}$
x_2 تدخل	x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1 تخرج	x_1	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
	x_5	0	0	$\boxed{-1}$	1	1	0	3
	x_6	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
	z	0	1	0	2	0	0	16
	x_3	0	$\frac{3}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	2
	x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	4
	x_5	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	5
	x_6	0	0	0	0	0	1	2

4- إضافة نشاط جديد (New x)

يمكن المقصود بإضافة متغير جديد وفق المثال الآتي:

Maximize تعظيم

تحت شرط Subject to

$$x_1 + 2\,x_2 + \frac{3}{4}\,x_7 \le 6$$

$$2\,x_1 + x_2 + \frac{3}{4}\,x_7 \le 8$$

$$-\,x_1 + x_2 - x_7 \le 1$$

$$x2 \le 2$$

$$x_1\,,\,x_2\,,\,x_7 \ge 0$$

ويعني إضافة متغير مستوي لعمل تغير دالة الهدف. ويمكن اعتبار x_7 بأنها موجودة أصلا في المسألة مع توفر معاملات صفر.

وأول اختبار يجب التفكير فيه اختبار النموذج الثنائي المقابل.

$$\left(\frac{3}{4}\right) y_1 + \left(\frac{3}{4}\right) y_2 - y_3 \ge \frac{2}{3}$$

وبما أن نلاحظ أن x_7 متغير غير أساسي (لا بدخل في الحل) في المسألة الأولية. النموذج الثنائي غير متغير.

∴ فإن معامل x_7 في الحل الأول مثالي.

$$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right)-(1)(0)-\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}$$

وهذا يعني أن الحل سوف يتحسن إذا x_7 أصبحت (+)

الحل المثالي الحالي يمكن تحسنه بخلق عمود ف الطرف الشمالي للمعادلة z ومعاملها التي تساوي $-\frac{1}{4}$.

والقيد المصاحب مما يحسب على النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -1 \\ \frac{-1}{4} \end{pmatrix}$$

أنظر الجداول التالية:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_7	x_3	x_4	x_5	x_6	الحل
z	0	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{38}{3}$
x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{10}{3}$
x_5	0	0	$\boxed{1}$	-1	1	1	0	3
x_6	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{2}{3}$
z	0	1	0	1	1	0	0	14
x_7	0	4	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
x_1	1	-1	0	-1	1	0	0	2
x_5	0	4	0	$\frac{5}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{25}{3}$
x_6	0		0	0	0	0	1	2

7.7 مسائل:

ضع علامة (✓) أو (✗) على العبارات التالية:

1- المسألة الأولية يجب دائما أن تكون من نوع تعظيم ( )

2- النموذج الثنائي للنموذج الثنائي هو النموذج الأولي ( )

3- إذا كان حل المسألة الأولية غير محدود فإن حل النموذج الثنائي خيالي ( )

4- إذا كان النموذج الأولي حله غير مثالي، فإن النموذج الثنائي يكون خيالي ( )

5- التغير في الطرف الأيمن من القيود يؤثر فقط على قيم الحل في الجدول الذي يعطي الحل الأمثل ( )

6- إضافة نشاط جديد يمكن أن يحسن قيمة دالة الهدف ( )

7- إضافة قيد جديد يحسن من قيمة دالة الهدف ( )

8- إذا تم تغير الطرف الأيمن للقيود ومعاملات دالة الهدف يمكن أن يبطل توفر الحل الأمثل والوجود الحقيقي للقيم العددية ( )

9- في طريقة السمبلكس للنموذج الأولي – الثنائي. مسائل البرمجة الخطية تبدأ من وجود حل مثالي ولكن خيالي ( )

10- إذا كانت مسألة البرمجة الخطية الأولية أصلها مسألة تصغير فإن مسألة النموذج الثنائي تكون تعظيم وبإشارة للقيود $\leq$.

11- أكتب النموذج الثنائي للمسائل الآتية:

أ- Maximize $z = 10\,x_1 + 20\,x_2$

S. T.

$$- x_1 + x_2 \le -3$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 \le 5$$
$$x_1\ ,\ x_2 \ge 0$$

ب- Maximize $z = 6\,x_1 - 3\,x_2$

S. T.

$$6\,x_1 + 3\,x_2 + x_3 \ge 2$$
$$3\,x_1 + 4\,x_2 + x_3 \ge 5$$
$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \ge 0$$

جـ- Maximize $z = 5\,x_1 + 6\,x_2$

S. T.

$$x_1 + 2\,x_2 = 5$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 \ge 3$$

x_1 غير محدد الإشارة

$$x_2 \ge 0$$

د- Maximize $z = 3\,x_1 + 4\,x_2 + 6\,x_3$

S. T.

$$x_1 + x_2 \ge 10$$
$$x_1\ ,\ x_3 \ge 0$$
$$x_2 \ge 0$$

هـ- Maximize $z = x_1 + x_2$

S. T.

$$2\,x_1 + x_2 = 5$$
$$3\,x_1 + x_2 \ge 6$$

$x_1\ ,\ x_2$ غير محددي الإشارة

12- إذا علمت أن

$$\text{Maximize} \quad z = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

S.T.

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le b_1$$
$$x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le b_2$$
$$x_1 \; , \; x_2 \; , \; x_3 \ge 0$$

حيث b_1 ، b_2 ثوابت ولقيم خاصة لـ b_1 ، b_2 يعطي الحل الأمثل بالجدول التالي:

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	الحل
z	0	a	7	d	e	150
x_1	1	b	2	1	0	30
s_1	0	c	-8	-1	1	10

حيث a ، b ، c ، d ، c ثوابت، أحسب

أ- قيم b_1 ، b_2 التي تحق الحل الأمثل.

ب- الحل الأمثل للنموذج الثنائي.

ج- قيم a ، b ، c عند توفر الحل الأمثل.

13- حل المسألة التالية بطريقة السمبلكس للنموذج الثنائي:

$$\text{Maximize} \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

S. T.

$$2x_1 + 3x_2 \le 30$$
$$x_1 + 2x_2 \le 10$$
$$x_1 \; , \; x_2 \ge 0$$

14- حل المسألة التالية بطريقة السمبلكس للنموذج الثنائي:

Maximize $z = 5\ x_1 + 6\ x_2 + 3\ x_2$

S. T.

$$5\ x_1 + 5\ x_2 + 3\ x_3 \geq 502$$
$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 20$$
$$7\ x_1 + 6\ x_2 + 9\ x_3 \geq 30$$
$$5\ x_1 + 5\ x_2 + 5\ x_3 \geq 35$$
$$2\ x_1 + 4\ x_2 - 15\ x_3 \geq 10$$
$$12\ x_1 + 10\ x_2 \geq 90$$
$$x_1 - 10\ x_3 \geq 20$$
$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ x_3 \geq 0$$

قارن عدد القيود ما بين المسألة الأولية والثنائية.

15- حل المسألة (14) إذا أصبحت دالة الهدف

Min $z = 6\ x_1 + 8\ x_2 + 3\ x_2$