الفصل العاشر

صيغ التقارب

الفصل العاشر
صيغ التقارب

نعلم أنّ هناك طرقا عديدة لوصف تقارب متتالية من الدوال القابلة للقياس $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ إلى دالة قابلة للقياس f. لقد تناولت مقرّرات الحساب المتقدّم مفهوم التقارب البسيط والتقارب المنتظم حيث أنّ التقارب المنتظم يستلزم التقارب البسيط غير أنّ العكس ليس صحيحًا على العموم. لقد سبق لنا أن أدخلنا في الفصول السابقة نوعين آخرين من التقارب ألا وهما التقارب μ-تاك والتقارب في $L^p(E,\Sigma,\mu)$، كما وصفنا كذلك في مبرهنتي **التقارب الرتيب والتقارب المرجّح** العلاقة ما بين التقارب البسيط (و μ-تاك) والتقارب في $L^1(E)$ و $L^p(E)$.
سوف نعرض في هذا الفصل صيغًا أخرى من التقارب كما ندرس مختلف العلاقات ما بين كلّ هذه الصيغ. لهذا الغرض نقسّم دراستنا إلى ثلاث حالات: الحالة العامّة، حالة الفضاء المنتهي وحالة الترجيح في $L^p(E)$. ولتبسيط الأمور للقارئ نختم الفصل بتقديم مخطّطات تلخّص كلّ هذه العلاقات.

1- تعاريف عامة

ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياريّا و $1\leq p<\infty$.

سوف ندرس في هذا الفصل صيغ التقارب التي تحققها متتالية ما مع إثبات الاستلزامات المترتّبة عنها.

نستهلّ بالتذكير بالتعاريف التالية:

ليكن $f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ و $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset\mathfrak{M}(E,\Sigma)$.

1) نقول عن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ إنّها تتقارب

أ) ببساطة إلى f على E إذا حققت ما يلي

$$\forall x\in E,\forall \varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}^*:\forall n\geq n_0\Rightarrow \left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$ ،

أي $\forall x\in E,\ \lim\limits_{n\to\infty}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0$ ، (لاحظ أنّ n_0 متعلق بـ ε و x)، نرمز لهذا التقارب بـ

$f_n \xrightarrow{s} f$ على E.

ب) بانتظام إلى f على E إذا حققت ما يلي

$$\forall \varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}^*:\forall n\geq n_0,\forall x\in E\Rightarrow \left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$ ،

أي $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in E}\left|f_n(x)-f(x)\right|\right)=0$ ، (لاحظ أنّ n_0 متعلق بـ ε فقط)، نرمز لهذا التقارب بـ

$f_n \xrightarrow{u} f$ على E.

ج) μ-تاك (تقريبًا أينما كانت) إلى f على E إذا وُجدت $A\in\Sigma$ مهملة بحيث $f_n \xrightarrow{s} f$ على A^c، نرمز لهذا التقارب بـ $f_n\to f$ ، μ-تاك، أو $f_n \xrightarrow{a.e.} f$ على E.

د) تقريبًا بانتظام إلى f على E إذا حققت ما يلي

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists A\in\Sigma,\ \mu\left(A^c\right)<\varepsilon:\ f_n \xrightarrow{u} f\ \ (\text{على } A)$$

نرمز لهذا التقارب بـ

$f_n \xrightarrow{a.u.} f$.

ه) بانتظام تقريبًا أينما كان إلى f على E إذا حققت ما يلي

$$\exists A\in\Sigma,\ \mu\left(A^c\right)=0:\ f_n \xrightarrow{u} f\ \ (\text{على } A)$$

نرمز لهذا التقارب بـ

$f_n \xrightarrow{L^\infty(E)} f$.

من الواضح أنّ التقارب المنتظم يستلزم التقارب البسيط وأنّ هذا الأخير يستلزم التقارب μ-تاك.

2) نقول عن متتالية $\{f_n\}_{n\geq1}\subset L^p(E)$ ، $1\leq p<\infty$ ، إنّها تتقارب بالوسط من المرتبة p إلى $f\in L^p(E)$ إذا حقّقت

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_p < \varepsilon$$

نرمز لهذا التقارب بـــ $f_n \xrightarrow{L^p(E)} f$.

ملاحظة 01.10: نسمّي التقارب في $L^1(E)$ (على الترتيب، $L^2(E)$) **بالتقارب بالوسط (على الترتيب، بالوسط التربيعي).**

نشير إلى أنّ الإحتماليّين يستعملون مصطلح **التقارب بالتأكيد تقريبًا** بدلا من **التقارب أينما كان تقريبًا.**

إضافة إلى التعاريف السابقة نعرّف التقارب بالقياس كما يلي

تعريف 02.10: لتكن $f \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$ و $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(E,\Sigma)$. نقول عن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ **إنّها تتقارب بالقياس إلى f على E إذا حققت ما يلي**

$$\forall \varepsilon, \delta > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}^* :$$
$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \mu\left(\left\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\right\}\right) < \varepsilon$$

أي $\forall \delta > 0, \lim\limits_{n\to\infty} \mu\left(\left\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\right\}\right) = 0$،

نرمز لهذا التقارب بـــ $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

2- العلاقة ما بين مختلف التقاربات

نستهلّ بالنتيجة التالية التي تخصّ وحدانية النهاية "تقريبًا أينما كانت" لمتتالية متقاربة بالقياس، لدينا

مبرهنة 03.10: لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(E,\Sigma)$ و $f,g \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$ **بحيث** $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $f_n \xrightarrow{\mu} g$، عندئذ $f = g$، μ-تأك.

إثبات: ليكن $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$، يوجد $n_0 \geq 1$ و $n_1 \geq 1$ بحيث

$$\mu(F_n) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad (\forall n \geq n_0)$$

و

$$\mu(G_n) < \tfrac{\varepsilon}{2}, \quad (\forall n \geq n_1),$$

و $G_n = \{x \in E : |f_n(x) - g(x)| \geq \frac{\delta}{2}\}$.

نستنتج من الاحتواء

$$\{x \in E : |f(x) - g(x)| \geq \delta\} \subset F_n \cup G_n \text{ ،} \quad (\forall n \geq 1) \text{ ،}$$

أنّ من أجل كلّ $n \geq max\{n_0, n_1\}$ لدينا

$$\mu(\{x \in E : |f(x) - g(x)| \geq \delta\}) \leq \mu(F_n) + \mu(G_n) < \varepsilon \text{ .}$$

ينتج عن كون ε اختياريًا أنّ $\mu(\{x \in E : |f(x) - g(x)| \geq \delta\}) = 0$ ، $(\forall \delta > 0)$، وعليه فإنّ $f = g$ ، μ-تاك. ■

مبرهنة 04.10: لتكن $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathfrak{M}(E, \Sigma)$ و $f \in \mathfrak{M}(E, \Sigma)$ بحيث $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ ، عندئذ $f_n \xrightarrow{\mu} f$.

إثبات: نفرض أنّ $f_n \xrightarrow{a.u.} f$. ليكن $\varepsilon > 0$ ، توجد $A \in \Sigma$ ، $\mu(A^c) < \varepsilon$ ، بحيث $f_n \xrightarrow{u} f$ على A . إذن، من أجل كلّ $\delta > 0$ يوجد $n_0 \geq 1$ بحيث

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| < \delta \text{ ،} \quad (\forall n \geq n_0) \text{ ،}$$

ومنه $A \subset \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \delta\}$ ، $(\forall n \geq n_0)$، أو بعبارة أخرى $\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\} \subset A^c$ ، $(\forall n \geq n_0)$.

إذن،

$$\mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) \leq \mu(A^c) < \varepsilon \text{ ،} \quad (\forall n \geq n_0) \text{ ،}$$

ممّا يثبت أنّ $f_n \xrightarrow{\mu} f$. ■

مبرهنة 05.10: لتكن $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathfrak{M}(E, \Sigma)$ و $f \in \mathfrak{M}(E, \Sigma)$ بحيث $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ ، عندئذ $f_n \to f$ ، μ-تاك.

إثبات: نفرض أنّ $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ ، عندئذ من أجل كلّ $n \geq 1$ يوجد

$A_n \in \Sigma$ بحيث $\mu\left(A_n^c\right)<\frac{1}{n}$ و $f_n \xrightarrow{u} f$ على A_n. لنضع $A=\bigcup_{n\geq 1} A_n$ ولنثبت أنّ A^c مجموعة مهملة. بالتأكيد، لدينا

$$0\leq \mu\left(A^c\right)=\mu\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n^c\right)\leq \mu\left(A_n^c\right)<\frac{1}{n}, \quad (\forall n\geq 1),$$

ومنه $\mu\left(A^c\right)=0$.

ليكن الآن $x\in A$، يوجد عندئذ $n_0\geq 1$ بحيث $x\in A_{n_0}$، ومن تعريف A_{n_0} نرى أنّ $f_n(x)\to f(x)$. إذن $f_n\to f$، μ-تاك.■

ملاحظة 06.10: على العموم المبرهنة العكسية غير صحيحة إلاّ في حالة القياس المنتهي والتي تعبّر عنها **مبرهنة إغوروف 32.4**.

عمومًا لا توجد علاقة ما بين التقارب بالقياس والتقارب البسيط وحتّى التقارب μ-تاك. فعلى سبيل المثال، تتقارب المتتالية $f_n=\chi_{[n,n+1]}$ ببساطة إلى 0 إلاّ أنّها ليست متقاربة بالقياس. كذلك بإمكاننا إنشاء متتالية متقاربة بالقياس وليست متقاربة μ-تاك. لكن لدينا في حالة فضاء القياس المنتهي النتيجة التالية:

قضية 07.10: نفرض أنّ $\mu(E)<\infty$، عندئذ التقارب تقريبًا أينما كان يستلزم التقارب بالقياس.

إثبات: نفرض أنّ $f_n\to f$، μ-تاك. نستنتج فورًا من **مبرهنة إغوروف** أنّ $f_n\xrightarrow{a.u} f$، ومنه $f_n\xrightarrow{\mu} f$ حسب المبرهنة 04.10.■

ملاحظة 08.10: في الواقع تبقى هذه القضية صحيحة في فضاء قياس غير منته مع إضافة شرط ترجيح المتتالية بدالة قابلة للمكاملة، راجع **مبرهنة إغوروف 58.6**.

مبرهنة 09.10: ليكن $1\leq p<\infty$، عندئذ $f_n\xrightarrow{L^p(E)} f$ يستلزم أنّ $f_n\xrightarrow{\mu} f$.

إثبات: ليكن $\varepsilon>0$ و $\delta>0$. نضع من أجل كلّ $n\geq 1$

$$\cdot\, A_n = \left\{ x \in E : \left| f_n(x) - f(x) \right| \geq \delta \right\}$$

ينتج عن التقارب $f_n \xrightarrow{L^p(E)} f$ وجود مؤشر $n_0 \in \mathbb{N}^*$ متعلّق بـ ε و δ بحيث $\forall n \geq n_0$، لدينا

$$\delta\varepsilon^{1/p} > \left\| f_n - f \right\|_p = \left(\int_E \left| f_n - f \right|^p d\mu \right)^{1/p} \geq \left(\int_{A_n} \left| f_n - f \right|^p d\mu \right)^{1/p}$$

$$\geq \left(\int_{A_n} \delta^p d\mu \right)^{1/p} = \delta \mu\left(A_n \right)^{1/p}$$

ومنه $\mu\left(A_n \right) < \varepsilon$. إذن $f_n \xrightarrow{\mu} f$.■

نشير إلى أنّنا نحصل على نفس النتيجة عندما $p = \infty$ بينما المبرهنة العكسية غير صحيحة كما يتّضح في المثال التالي:

مثال 10.10: نعتبر المتتالية $\{f_n\}_{n \geq 1}$ المعرّفة على $[0,1]$ بـ $f_n = n\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}$. لدينا $f_n \xrightarrow{s} 0$ ، وأنّ

$$\cdot\, m\left(\left\{ x \in [0,1] : \left| f_n(x) - 0 \right| \geq \delta \right\} \right) = \tfrac{1}{n} \to 0$$

وبالتالي $f_n \xrightarrow{m} 0$. بما أنّ $\left\| f_n - 0 \right\|_p^p = \int_0^{\frac{1}{n}} n^p dx = n^{p-1}$ ، فإنّ $f_n \not\to 0$ في $L^p([0,1])$ ، مهما يكن $p \in [1, \infty[$.

نودّ في كثير من الأحيان معرفة ما إذا كانت النّهاية عنصرًا من نفس الفضاء، وهذا صحيح في $L^p(E)$ لكونه فضاءً تامّا. من جهة أخرى،

تبقى مبرهنتي التقارب الرتيب والتقارب المرجّح وكذلك متباينة فاتو صحيحة عندما نعوّض التقارب تقريبًا أينما كان بالتقارب بالقياس (انظر المبرهنة 15.10).

مبرهنة 11.10: ليكن $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ، عندئذ توجد متتالية جزئية $\{f_{n_k}\}_{k \geq 1}$ من $\{f_n\}_{n \geq 1}$ بحيث $f_{n_k} \to f$ ، μ-تأك.

إثبات: يستلزم التقارب $f_n \xrightarrow{\mu} f$ أنّ

$$\forall \varepsilon,\delta>0,\exists n_0\in\mathbb{N}^*:$$
$$\mu\left(\left\{x\in E:\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\delta\right\}\right)<\varepsilon,\left(\forall n\geq n_0\right)$$

وبالخصوص، يوجد من أجل $\varepsilon=\delta=1/2^k$ مؤشر $n_k\in\mathbb{N}^*$ (نختار $\{n_k\}_k$ متزايدة تماما) بحيث

$$\mu\left(\left\{x\in E:\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}\right)<\left(\tfrac{1}{2}\right)^k.$$

لنتأكد الآن من أنّ $f_{n_k}\to f$، μ–تأك. نضع

$$A_k=\left\{x\in E:\left|f_n(x)-f(x)\right|\geq\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\right\}.$$

لدينا

$$\sum_{n\geq1}\mu(A_k)\leq\sum_{n\geq1}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=1<\infty$$

ومنه $\lim\limits_{m\to\infty}\sum\limits_{k=m}^{\infty}\mu(A_k)=0$. إذن

$$\mu\left(\overline{\lim}A_k\right)=\mu\left(\bigcap_{m\geq1}\bigcup_{k\geq m}A_k\right)\leq\mu\left(\bigcup_{k\geq m}A_k\right)\leq\sum_{k\geq m}\mu(A_k)\text{، }$$
$$(\forall m\geq1)$$

وبالتالي، $\mu\left(\overline{\lim}A_k\right)=0$.

ليكن $x\in\left(\overline{\lim}A_k\right)^c$، عندئذ يوجد $m_0\in\mathbb{N}^*$ بحيث $x\notin A_k$، $(\forall k\geq m_0)$، وعليه فإنّ

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|<\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\text{، }(\forall k\geq m_0).$$

وهذا يثبت أنّ $f_{n_k}\to f$، μ–تأك.■

مبرهنة 12.10: نفرض أنّ $\mu(E)<\infty$. إذا كانت $\{f_n\}_{n\geq1}\subset L^p(E)$، $1\leq p<\infty$، بحيث $f_n\xrightarrow{u}f$، فإنّ

$$f\in L^p(E)\text{ و }f_n\xrightarrow{L^p(E)}f.$$

إثبات: بما أنّ $f_n\xrightarrow{u}f$، فإنّ

لدينا من أجل كلّ $n \geq n_0$

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_E |f_n - f|^p \, d\mu < \frac{\varepsilon^p}{\left(1+\sqrt[p]{\mu(E)}\right)^p}\mu(E)$$

$$\leq \frac{\left(\sqrt[p]{\mu(E)}\right)^p}{\left(1+\sqrt[p]{\mu(E)}\right)^p}\varepsilon^p < \varepsilon^p$$

ومنه $\|f_n - f\|_p < \varepsilon$.

لدينا من جهة أخرى،

$$\|f\|_p = \left\|f_{n_0} - f - f_{n_0}\right\|_p \leq \left\|f_{n_0}\right\|_p + \left\|f_{n_0} - f\right\|_p < \left\|f_{n_0}\right\|_p + \varepsilon < \infty$$ ،

إذن، $f \in L^p(E)$ ، وبالتالي $f_n \xrightarrow{L^p(E)} f$. ■

ملاحظة 13.10: إنّ شرط محدودية القياس ضروري لصحّة المبرهنة السابقة كما يتّضح في المثال المضاد التالي:

مثال 14.10: نعتبر المجموعة $E = [0,\infty[$ (مع قياس لوبيغ) و $\left\{f_n = \frac{1}{\sqrt[p]{n}}\chi_{[0,n]}\right\}_{n\geq 1} \subset L^p(E)$ ، $(1 \leq p < \infty)$.

لدينا $f_n \xrightarrow{u} 0$ بينما $\|f_n - 0\|_p = \left(\int_0^\infty f_n^p dx\right)^{1/p} = 1 \not\to 0$.

مبرهنة 15.10: لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(E)$ بحيث $f_n \xrightarrow{\mu} f$. نفرض وجود $g \in L^p(E)$ بحيث $|f_n| \leq g$ من أجل كلّ $n \geq 1$. عندئذ،

$f \in L^p(E)$ و $f_n \xrightarrow{L^p(E)} f$.

إثبات: توجد حسب المبرهنة 11.10 متتالية جزئيّة $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ من

$\{f_n\}_{n\geq 1}$ بحيث $f_{n_k} \to f$ ، μ-تاك، ومنه $|f| \leq g$ ، μ-تاك. إذن $f \in L^p(E)$.

لنفرض جدلا أنّ $\{f_n\}_{n\geq 1}$ لا تتقارب إلى f في $L^p(E)$، يوجد عندئذ $\varepsilon > 0$ بحيث لكلّ $k \in \mathbb{N}^*$ يوجد n_k يحقّق $\|f_{n_k} - f\|_p \geq \varepsilon$.

ينتج عن كون $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ متتالية جزئيّة من متتالية متقاربة بالقياس إلى f أنّها بدورها متقاربة بالقياس إلى f. نستنتج مرّة ثانية من المبرهنة 11.10 وجود متتالية جزئيّة $\{f'_l\}_{l\geq 1}$ من $\{f_{n_k}\}_{k\geq 1}$ بحيث $f'_l \to f$ ، μ-تاك. لدينا من جهة أخرى $|f'_l| \leq g$ ، $(\forall l \geq 1)$. بتطبيق المبرهنة 24.8 (التقارب المرجّح في $L^p(E)$) نحصل على $f'_l \xrightarrow{L^p(E)} f$ ، إذن من أجل العدد ε (الذي أثبتنا وجوده أعلاه) يوجد $l_0 \geq 1$ بحيث $\|f'_l - f\|_p < \varepsilon$ ، $(\forall l \geq l_0)$، وهذا تناقض مع الفرضية الموضوعة.

وهكذا فإنّ $f_n \xrightarrow{L^p(E)} f$. ■

لازمة 16.10: لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p(E)$. نفرض وجود $g \in L^p(E)$ بحيث $|f_n| \leq g$ من أجل كلّ $n \geq 1$. إذا كان $f_n \xrightarrow{u} f$ (على الترتيب، $f_n \xrightarrow{a.u.} f$ أو $f_n \xrightarrow{a.e.} f$)، فإنّ $f \in L^p(E)$ و $f_n \xrightarrow{L^p(E)} f$.

إثبات: ينتج عن كون التقارب المنتظم (وكذا التقارب المنتظم تقريبًا) يستلزم التقارب بالقياس أنّ $f \in L^p(E)$ و $f_n \xrightarrow{L^p(E)} f$ بفضل المبرهنة السابقة.■

ملاحظة 17.10: من السهل التأكد من أنّ $f_n = n\chi_{\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]}$ على $[0,1]$ متقاربة تقريبًا بانتظام إلى 0 على $[0,1]$ غير أنّها ليست متقاربة في $L^p([0,1])$، $1 \leq p < \infty$. وهذا يثبت أنّ التقارب المنتظم تقريبًا لا يستلزم التقارب بالوسط من المرتبة p بدون إضافة شرط الترجيح.

نشير إلى أنّ العكس غير صحيح حتى في حالة الترجيح، نعتبر على سبيل المثال التالي:

مثال 18.10: إنّ المتتالية المعرّفة $\{f_n\}_{n\geq 1}$ بـ $f_n(x)=x^n$ في $[0,1]$ متقاربة إلى $f=0$ في $L^p([0,1])$ وغير متقاربة بانتظام. يمكن كذلك اعتبار المتتالية $f_n=\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]}$ على $E=[0,\infty[$ المتقاربة إلى $f=0$ في $L^p([0,\infty[)$ والمتقاربة ببساطة إلى 0 غير أنّها ليست متقاربة بانتظام.

ملاحظة 19.10: سوف نبيّن فيما يلي أنّه لا توجد علاقة مباشرة بين التقارب بالوسط من المرتبة p والتقارب البسيط أو التقارب **"تقريبًا أينما كان"**.

مثال 20.10: نعتبر المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ المعرّفة على $[0,1]$ بـ $f_n=n\chi_{]0,\frac{1}{n}]}$. لدينا $f_n\to 0$، m–تاك، غير أنّها ليست متقاربة بالوسط من المرتبة p لأنّ $\int_0^1 f_n^p dx=n^{p-1}\geq 1$، $(\forall n\geq 1)$.

وفيما يخصّ العكس نعتبر المثال الآتي:

مثال 21.10: نعتبر الفترات الجزئية من الفترة $[0,1]$:

$$J_{1,0},J_{2,0},J_{2,1},J_{3,0},J_{3,1},J_{3,2},\ldots,J_{n,0},J_{n,1},\ldots,J_{n,n-1},\ldots$$

حيث

$J_{n,k}=\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right]$، $k=0,\ldots,n-1$، من أجل كلّ $n\geq 1$.

نعرّف المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ على $[0,1]$ بـ

$$f_1=\chi_{J_{1,0}},\quad f_2=\chi_{J_{2,0}},\quad f_3=\chi_{J_{2,1}},\quad f_4=\chi_{J_{3,0}},\quad f_5=\chi_{J_{3,1}},\ldots$$

لدينا $\int_0^1 f_n^p dx\to 0$، أي $f_n\xrightarrow{L^p([0,1])}0$. نلاحظ من جهة أخرى أنّ من أجل كلّ $x\in[0,1]$ تقبل المتتالية العددية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ متتاليتين

بما أنّ x اختياري فإنّ المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ لا تتقارب ببساطة على الفترة $[0,1]$.

مبرهنة 22.10: لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset L^1(E)$ و $f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ بحيث $f_n\to f$، μ-تاك، عندئذ $f_n\xrightarrow{L^1(E)}f$ إذا وإذا فقط كان $f\in L^1(E)$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E|f_n|d\mu=\int_E|f|d\mu$.

يمكننا تعميم هذه المبرهنة بفضل متراجحة فاتو لنحصل على:

مبرهنة 23.10: ليكن $1\leq p<\infty$، $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset L^p(E)$ و $f\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ بحيث $f_n\to f$، μ-تاك، عندئذ $f_n\xrightarrow{L^p(E)}f$ إذا وإذا فقط كان $f\in L^p(E)$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_p=\|f\|_p$.

هذه المبرهنة غير صحيحة في $L^\infty(E)$ كما يوضّحه المثال التالي:

مثال 24.10: نعتبر المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ المعرّفة على $]0,1[$ بـ $f_n=\chi_{]\frac{1}{n},1[}$، لدينا $f_n\xrightarrow{s}1$ و $\|f_n\|_\infty=1=\|f\|_\infty$، $(\forall n\geq 1)$، بينما $\|f_n-1\|_\infty=1$، $(\forall n\geq 1)$.

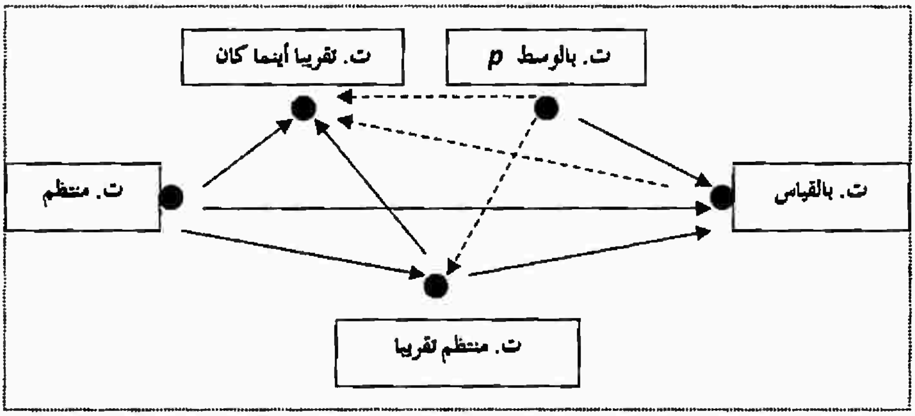
قضية 25.10: إذا كان $f, f_n\in L^\infty(E)$، $(n=1,2,\dots)$، و $f_n\xrightarrow{L^\infty(E)}f$ فإنّ $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n\|_\infty=\|f\|_\infty$.

3- مخططات التقارب

نلخّص فيما يلي العلاقات الممكنة بين مختلف صيغ التقارب، وبغية

تيسير هذه العلاقات نستعمل الترميز التالي:
$X \longrightarrow Y$، يعني أنّ التقارب بالمفهوم X يستلزم التقارب بالمفهوم Y، بينما يعني الترميز $X - - - > Y$ وجود متتالية جزئية متقاربة بالمفهوم Y.

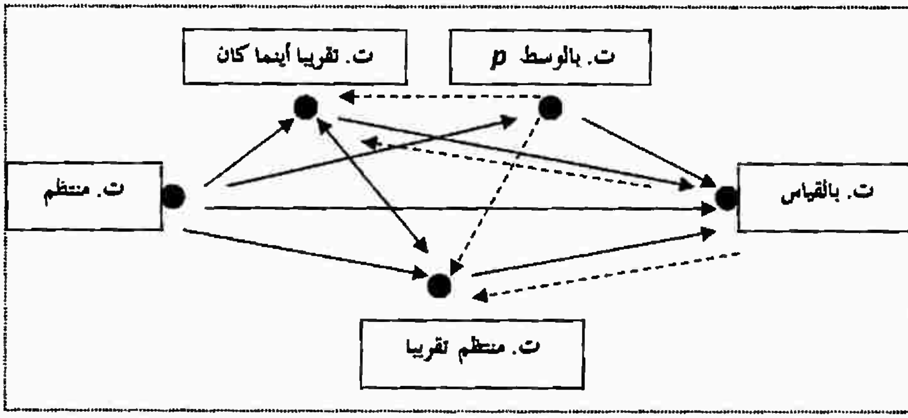
الحالة العامة: لدينا مخطّط التقاربات التالي:



لاحظ أنّ التقارب المنتظم يستلزم كل صيغ التقارب الأخرى ما عدا التقارب بالوسط p بينما التقارب بالقياس والتقارب تقريبًا أينما كان فإنّهما لا يستلزمان أيّة صيغة من التقارب الأخرى.

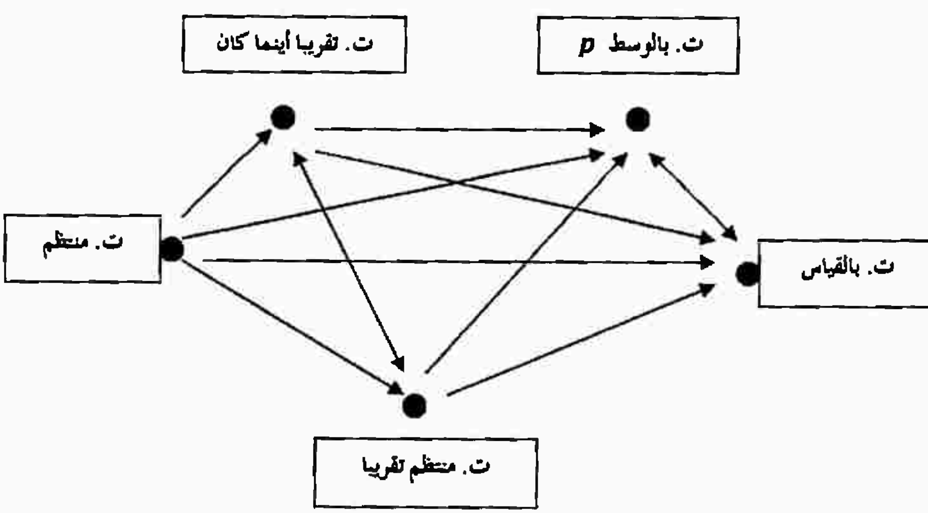
الحالة المنتهية $\mu(E) < \infty$:

إذا كان الفضاء ذا قياس منته فإنّ مخطط التقاربات يأخذ الشكل التالي:



حالة الترجيح:

في حالة وجود دالة $g \in L_+^p(E)$ بحيث $|f_n|^p \le g$ ، $(\forall n \ge 1)$ ، فإنّ مخطط التقاربات يبدو كالآتي:



في الأخير، نضيف إلى التعاريف السابقة نوعًا آخرًا من التقارب في الفضاءات $L^p(E)$ ألا وهو التقارب بضعف المستعمل في كثير من التطبيقات.

تعريف 26.10: ليكن $1 \leq p < \infty$ و $f, f_n \in L^p(E)$. نقول عن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ إنّها **تتقارب بضعف إلى f إذا حققت**

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n g d\mu = \int_E f g d\mu \text{ ،} \left(\forall g \in L^q(E)\right)\text{،}$$

حيث q الأس المرافق لـــ p.

ملاحظة 27.10: باستخدام متباينة هولدر يمكننا إثبات أنّ التقارب بالوسط من المرتبة p يستلزم التقارب بضعف، ومن جهة أخرى، فإنّ التقارب تقريبًا أينما كان يستلزم التقارب بضعف تحت شروط معيّنة (انظر التمرين رقم 16).

مسألة محلولة

نعتبر في $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), m)$ المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ المعرّفة بـــ

$$f_n(x) = n^a \chi_{\left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]}(x) \text{ ،} (\forall x \in \mathbb{R})\text{،}$$

حيث $a > 0$ عدد مثبّت.

ادرس التقاربات التالية إلى $f = 0$:

1) المنتظم تقريبًا 2) m–تأك 3) بالقياس 4) في $L^p([0,1])$ من أجل $1 \leq p \leq \infty$.

الحل:

1) إثبات أنّ $f_n \xrightarrow{a.u.} 0$: لكلّ $\varepsilon > 0$، يوجد $n_0 \geq 1$ بحيث $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}$.

بوضع $A=\left[0,\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}\right]$ نجد أنّ $A\in\mathcal{B}([0,1])$ وأنّ $m(A)<\varepsilon$.
ليكن $x\in A^c$، عندئذ $\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}<x\leq 1$، ومنه $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1}<x$، $(\forall n\geq n_0)$.
إذن $x\notin\left[\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right]$، $(\forall n\geq n_0)$، وبالتالي $f_n(x)=0$، $(\forall n\geq n_0)$.
كخلاصة لما تقدّم نستطيع القول أنّه لكلّ $\varepsilon>0$ يوجد $A\in\mathcal{B}([0,1])$، $m(A)<\varepsilon$، ويوجد $n_0\geq 1$ بحيث $\sup\limits_{x\notin A}|f_n(x)|=0$، $(\forall n\geq n_0)$،
أي $f_n\xrightarrow{a.u.}0$.

2) بما أنّ $f_n\xrightarrow{a.u.}0$، عندئذ $f_n\to 0$، m-تاك، وذلك حسب المبرهنة 05.10.
3) لدينا $m([0,1])<\infty$ و $f_n\to 0$، m-تاك، عندئذ $f_n\xrightarrow{\mu}0$ بفضل القضية 07.10.
4) الحالة $1\leq p<\infty$: لدينا

$$\|f_n\|_p^p=\int_{[0,1]}|f_n|^p dx=\frac{n-1}{n^2}n^{p\alpha}<\infty,\quad(\forall n\geq 1)$$

و منه $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset L^p([0,1])$. بما أنّ $f_n\to 0$، m-تاك، عندئذ تكون نهاية المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ (إن وُجدت) معدومة في $L^p([0,1])$. لدينا من جهة أخرى

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n-0\|_p=\lim_{n\to\infty}n^{\alpha-\frac{1}{p}}=\begin{cases}0, & if\ \ 1\leq p<\frac{1}{\alpha}\\ 1, & if\ \ 1\leq p=\frac{1}{\alpha}\\ +\infty, & if\ \ 1\leq p\ \&\ \frac{1}{\alpha}<p\end{cases}$$

نحصل إذن على $f_n\xrightarrow{L^p([0,1])}0$، عندما $1\leq p<\frac{1}{\alpha}$.

'4) الحالة $p=\infty$: لدينا $\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)|=n^\alpha$، $(\forall n\geq 1)$، وبالتالي فإنّ $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset L^\infty([0,1])$.

نفرض أنّ $f_n\xrightarrow{L^\infty([0,1])}0$، عندئذ يوجد $A\in\mathcal{B}([0,1])$ بحيث $m(A^c)=0$ و $f_n\xrightarrow{u}0, A$. نختار لكلّ $n\geq 1$ عنصرًا x_n من $J_n=\left[\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right]\cap A$ لنحصل على $f_n(x_n)=n^\alpha$، $(\forall n\geq 1)$، (لاحظ أنّ

$J_n \neq \varnothing$، $(\forall n \geq 1)$، وإلا صار $\left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right] \subset A^c$، ممّا يؤدّي إلى $m\left(\left[\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right]\right) = \frac{n-1}{n^2} \leq m\left(A^c\right) = 0$، $(\forall n \geq 1)$، وهذا مستحيل)، ومن ثمّ فإنّ $\lim_{n\to\infty} f_n\left(x_n\right) = \infty$. إذن $f_n \xrightarrow{u}\!\!\!\!\!/\;\; 0$ على A، وعليه فإنّ $\{f_n\}_{n\geq 1}$ لا تتقارب في $L^\infty\left([0,1]\right)$.

تمارين مقترحة

01 أثبت أنّ التقارب بالوسط من المرتبة p، في فضاء ذي قياس منته، يستلزم التقارب بالوسط.

02 نفرض أنّ μ قياس منته و $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset L^p\left(E\right)$ بحيث $f_n \xrightarrow{\mu} f$ ويوجد ثابت $M > 0$: $\|f_n\|_p \leq M$، $(\forall n \geq 1)$.

أثبت أنّ $f_n \xrightarrow{L^q(E)} f$، لكل q بحيث $1 \leq q < p$.

03 نفرض أنّ $f, f_n \in L^p\left(E\right)$، $1 \leq p < \infty$، ويوجد $M > 0$ بحيث $\|f_n\|_p \leq M$. أثبت أنّ $f_n \to f$، μ-تاك يستلزم أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \left\| |f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p \right\|_1 = 0 .$$

04 أثبت أنّ المتتالية $f_n = n\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right]} - n\chi_{\left[-\frac{1}{n},0\right]}$ تتقارب ببساطة إلى 0 على $[-1,1]$ وأنّها لا تتقارب بانتظام ولا بالوسط من المرتبة p، $1 \leq p < \infty$.

05 لتكن المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ معرّفة بـ $f_n = n\chi_{\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]}$ على $[0,1]$.

أثبت أنّ $f_n \to 0$، m-تاك و $f_n \xrightarrow{m} 0$.

عيّن قيم p بحيث $f_n \xrightarrow{L^p([0,1])} 0$.

06 لتكن $f_n = \chi_{\left[n2^{-k}-1, (n+1)2^{-k}-1\right]}$، حيث $k \in \mathbb{N}$ يحقّق

. $2k \le n < 2^{k+1}$ أثبت أنّ $f_n \xrightarrow{L^p([0,1])} 0$ ، $(\forall p \in [1,\infty[)$، وأنّها لا تتقارب عند أيّة نقطة في $[0,1]$.

07 لتكن المتتالية

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x \in]-\infty, 0[\\ nx, x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 1, x \in]\frac{1}{n}, +\infty[\end{cases}.$$

أ) هل $\{f_n\}_{n\ge1}$ متقاربة ببساطة إلى دالة معيّنة f؟

ب) هل العلاقة $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty$ صحيحة؟

ت) هل تتقارب $\{f_n\}_{n\ge1}$ في $L^\infty(\mathbb{R})$؟

08 لتكن $A \subset \mathbb{R}$ مجموعة جزئية محدودة بحيث $m(A) > 0$ و $\{f_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ معرّفة بِ

$$f_n(x) = \frac{3}{2}\chi_{A+n}(x) \text{ ، } (\forall n \ge 1).$$

أثبت أنّ $f_n \xrightarrow{s} 0$ بينما $f_n \stackrel{\mu}{\nrightarrow} 0$.

09 ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس منتهيًا و $\{f_n\}_{n\ge1} \subset \mathcal{M}(E, \Sigma)$ بحيث من أجل كلّ $\delta > 0$ لدينا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \ge \delta\}) < +\infty.$$

أثبت أنّ $f_n \to f$ ، μ-تاك.

10 ادرس صيغ تقارب المتتالية $\{f_n\}_{n\ge1}$ المعرّفة على $[0,1]$ بـ $f_n = n\chi_{[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]}$.

11 لتكن $\{f_n\}_{n\ge1} \subset L^1(E)$ متتالية بحيث $f_n \xrightarrow{L^1(E)} f$ و φ_n ، φ دوال قابلة للقياس ومحدودة بانتظام بحيث $\varphi_n \to \varphi$ ، μ-تاك. أثبت أنّ

$$\varphi_n f_n \xrightarrow{L^1(E)} \varphi f.$$

هل باستطاعتنا تعميم السؤال السابق لكل $p \in [1, +\infty[$.

12 لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset L^1(E)$. أثبت أنه إذا كان $f_n \xrightarrow{L^1(E)} f$ و $\sum_{n\geq 1}\int_E |f_n-f|d\mu<+\infty$ فإنّ $f_n\to f$، μ-تاك.

13 ليكن μ قياسًا منتهيًا $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset L^1(E)$ و $f\in L^1(E)$ بحيث $f_n\xrightarrow{\mu} f$ و $\lim\limits_{n\to\infty}\int_E\sqrt{1+f_n^2}\,d\mu=\int_E\sqrt{1+f^2}\,d\mu$.

أثبت أنّ $f_n\xrightarrow{L^1(E)} f$.

14 ليكن $p,q\in[1,\infty]$ أسّين مترافقين و $f_n,f\in L^p(E)$ و $g_n,g\in L^q(E)$. أثبت أنه إذا كان $f_n\xrightarrow{L^p(E)} f$ و $g_n\xrightarrow{L^q(E)} g$، عندئذ $f_ng_n\xrightarrow{L^1(E)} fg$.

15 أثبت أنّ $f_n(x)=\sin nx$ متتالية دوال محدودة في $L^2([-\pi,\pi])$ لا تقبل متتالية جزئية متقاربة في $L^2([-\pi,\pi])$.

16 ليكن فضاء σ-منتهيًا، ولتكن $p\in]1,\infty[$ $f_n,f\in L^p(E)$. نفرض وجود ثابت $M>0$ بحيث $\|f_n\|_p\leq M$ و $f_n\to f$، μ-تاك.

1) أثبت أنّ $f_n\xrightarrow{w} f$ (بضعف) في $L^p(E)$.

2) أوجد مثالاً يوضح أنّ هذه النتيجة غير صحيحة في $L^1(E)$.

<u>مساعدة</u>: اعتبر المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ المعرّفة بـ $f_n=n^{\frac{1}{p}}\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$.

17 أوجد مثالاً لمتتالية من الدوال $\{f_n\}_{n\geq 1}$ تحقق $f_n\xrightarrow{w} 0$ (بضعف) في $L^p([0,1])$، $(1<p<\infty)$ و $f_n\to 0$، μ-تاك على $[0,1]$ بينما لا تتقارب إلى 0 في $L^p([0,1])$.

18 لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}\subset \mathcal{M}_f(\mathbb{R},L,m)$ معرّفة بـ

$$f_n(x)=\frac{1}{\ell n(n+1)}\chi_{[0,n]}(x)\text{،}\quad (\forall n\geq 1)$$

1) أثبت أنّ $f_n\xrightarrow{u} 0$ على $\mathbb{R}$.

2) هل $f_n\xrightarrow{L^p(\mathbb{R})} 0$ من أجل $1\leq p<\infty$ ؟

3) تأكد من انتماء $g(x)=\dfrac{1}{x+1}\chi_{[0,+\infty[}(x)$ إلى $L^q(\mathbb{R})$، مهما يكن

$1 < q \leq \infty$ ، ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n g\, dm$. ماذا تستنتج ؟

19 لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة متّصلة و T–دوريّة ولتكن $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ بحيث $0 < m(A) < \infty$.

1) أثبت أنّ المتتالية $\{f_n\}_{n\geq 0}$ المعرّفة بِ $f_n(x) = f(nx)$ متقاربة بِضعف في الفضاء $L^p(A, \mathcal{B}(A))$ ، $(1 < p < \infty)$ إلى الدالة الثابتة $\sigma = \frac{1}{T}\int_0^T f\, dx$.

2) أثبت أنّ $f_n \xrightarrow{L^p(A)} \sigma$ إذا وإذا فقط تحققت المساواة التالية $\int_0^T |f|^p\, dx = T|\sigma|^p$.

20 أثبت أنّ تعريف التقارب بالقياس يكافئ التعريف التالي:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}^* :$$
$$\forall n \geq n_0 \Rightarrow \mu\Big(\big\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\big\}\Big) < \varepsilon$$

21 أثبت ما يلي

أ) إذا كان $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$ فإنّ $f_n + g_n \xrightarrow{\mu} f + g$.

ب) إذا كان $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $c > 0$ فإنّ $cf_n \xrightarrow{\mu} cf$.

22 أثبت أنّه إذا كان $\mu(E) < \infty$ ، $f_n \xrightarrow{\mu} f$ و $g_n \xrightarrow{\mu} g$ فإنّ $f_n g_n \xrightarrow{\mu} fg$.