الفصل الأول

مفاهيم عامة

الفصل الأول
مفاهيم عامة

1- عمليات على المجموعات

إنّ المجموعة بمفهوم مؤسس النظرية العامة للمجموعات العالم الرياضي الألماني كانتور[1] (Cantor) هي عبارة عن تجميع لأشياء متمايزة تماما، محسوسة أو مجرّدة. تسمى هذه الأشياء بالعناصر، وهكذا فإنّ المجموعة هي تجميع لهذه العناصر مع بعضها.

نسمّي المجموعة التي لا تحتوي على أيّ عنصر بالـمجموعة الخالية ونرمز لها بـ $\varnothing$. تجدر الإشارة إلى أنّ كلّ عنصر من مجموعة معيّنة لا يحتسب إلا مرة واحدة وأنّ ظهوره أكثر من مرة لا يغيّر في المجموعة شيئا.

إذا كانت E مجموعة غير خالية فنرمز لمجموعة كل المجموعات الجزئية *(subsets)* في E بـ $\mathcal{P}(E)$، بمعنى أنّ

$$\mathcal{P}(E)=\{A:\ A\subset E\}.$$

نسمّي أسرة من المجموعات الجزئية من مجموعة غير خالية E كلّ "مجموعة" متكوّنة من مجموعات جزئية لـ E، نرمز لها بـ $\{A_i\}_{i\in I}$.

لدينا الاحتواء التالي

$$\{A_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{P}(E).$$

لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من E، نعرّف الفرق ما بين A و B بـ

$$A\setminus B=\{x\in E: x\in A \ \text{و}\ x\notin B\}.$$

---

[1]) جورج كانتور [George Cantor] (1845-1918)

كما نعرّف متمّمة المجموعة الجزئية A في E بـ $A^c := E\setminus A$.
أخيرًا، نعرّف الفرق التناظري لمجموعتين جزئيتين A و B في E بـ
$A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

لدينا فورًا $\left(A^c\right)^c = A$ ، $A\setminus B = A\cap B^c$ و $A\Delta A = \varnothing$.
لتكن C مجموعة جزئية ثالثة من E ، عندئذ

$$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C) = A\cap B\cap C ،$$
$$(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C) = A\cup B\cup C ،$$
$$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C) ،$$
$$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C) ،$$
$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C) = A\Delta B\Delta C ،$$
$$A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C) .$$

نعتبر الآن الأسرة $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(E)$ ، حيث I مجموعة اختيارية من المؤشرات. لدينا الخاصيتان التاليتان:

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c \quad \text{و} \quad \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$$

تعرفان بـــقانونَي دو مورجن (De Morgan).

إذا كانت A مجموعة جزئية من E فإنّ

$$A\setminus\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A\setminus A_i) \quad \text{و} \quad A\setminus\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(A\setminus A_i) .$$

في حالة ما إذا كانت المجموعة I خالية فنضع اصطلاحا

$$\bigcup_{i\in\varnothing} A_i = \varnothing \quad \text{و} \quad \bigcap_{i\in\varnothing} A_i = E .$$

نقول عن أسرة $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(E)$ إنّها تجزئة *(partition)* للمجموعة E إذا حققت ما يلي:

$E = \bigcup_{i\in I} A_i$ و $A_i\cap A_j = \varnothing$ ، من أجل كلّ $i,j\in I$ بحيث $i\neq j$.

نعرّف النهايتين الدنيا والعليا لمتتالية $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(E)$ كالآتي

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k\geq n} A_k \quad \text{و} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n\geq 1}\bigcap_{k\geq n} A_k .$$

لدينا دومًا الاحتواء $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$. إذا حصلت المساواة بين النهايتين الدنيا والعليا، وكانت قيمتهما المشتركة مجموعة A، نقول حينئذ عن A إنّها نهاية المتتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}$، ونكتب $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ (أو $A_n \to A$، عندما n يؤول إلى ∞).

نقول عن متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(E)$ إنها **متزايدة** (على الترتيب، **متناقصة**) إذا حققت ما يلي

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$$

(على الترتيب، $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$).

نقول عن متتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}$ إنها رتيبة إذا كانت متناقصة أو متزايدة.

2- الدوال والتطبيقات

نسمي دالــة من مجموعة E نحو مجموعة F كل علاقة ترفق لكل عنصر من E على **الأكثر** عنصرًا من F، نرمز لهذه العلاقة بـ f، ونكتب $f: E \to F$. تدعى E **مجموعة منطلق** f وتدعى F **مجموعة مستقرّ** f، كما نسمّي $f(x)$ صورة العنصر x بالدالة f.

مجموعة تعريف الدالة f هي المجموعة D_f التي تضم كل عناصر E التي لها صور في F بالدالة f، أي

$$D_f = \{x \in E : f(x) \in F\}.$$

نسمّي **تطبيقا** من مجموعة E نحو مجموعة F كلّ علاقة ترفق لكل عنصر x من E **عنصرًا وحيدا** $f(x)$ من F، نرمز لهذه العلاقة بـ f، ونكتب $f: E \to F$.

يتبيّن من التعريف السّابق للدالة والتطبيق أنّ كل تطبيق هو دالة غير أنّ العكس ليس صحيحًا لاحتمال وجود عناصر من E ليس لها صور في F، وفيما يخصّ التطبيق فإنّ لكلّ عنصر من E صورة وحيدة في F.

فعلى غرار ما يفعله الكثير من المؤلفين فلا نفرّق في هذا الكتاب بين تطبيق ودالّة طالما كانت هذه الأخيرة معرّفة تعريفا جيّدا على مجموعة المنطلق.

لتكن لدينا دالّة $f:E\to F$.

- إذا كانت A مجموعة جزئية من E فنسمّي المجموعة الجزئية $\{f(x): x\in A\}$ من F صورة A بالدّالة f، ونرمز لها بـ $f(A)$.
- إذا كانت B مجموعة جزئية من F فنسمّي المجموعة الجزئية $\{x\in E: f(x)\in B\}$ من E **الصورة العكسيّة لـ B بالدّالة f**، ونرمز لها بـ $f^{-1}(B)$.
- إذا كانت Ω أسرة مجموعات جزئية من E فنسمّي أسرة المجموعات الجزئية $\{f(A): A\in\Omega\}$ من F صورة Ω بالدّالة f، ونرمز لها بـ $f(\Omega)$.
- إذا كانت Σ أسرة مجموعات جزئية من F فنسمّي أسرة المجموعات الجزئية $\{f^{-1}(B): B\in\Sigma\}$ من E **الصورة العكسية لـ Σ بالدّالة f**، ونرمز لها بـ $f^{-1}(\Sigma)$.

(ينبغي للقارئ توخي الحذر عند استعمال الصورة العكسية لأسرة $\Sigma\subset\mathcal{P}(F)$ وليعلم أنّ

$$\left(f^{-1}(\Sigma)\neq\{A\in\mathcal{P}(E): f(A)\in\Sigma\}\right)$$

تكون دالّة $f:E\to F$ **متباينة** إذا حققت ما يلي: مهما يكن x_1 و x_2 في E بحيث $x_1\neq x_2$ فإنّ $f(x_1)\neq f(x_2)$.

وتكون f **غامرة** إذا حققت ما يلي: مهما يكن y في F يوجد x في E بحيث $y=f(x)$، أي $f(E)=F$.

نسمّي **دالّة تقابليّة** كلّ دالّة متباينة وغامرة.

تقبل كلّ دالّة تقابليّة $f:E\to F$ دالّة عكسيّة f^{-1} من F على E، وهذه الأخيرة هي بدورها دالّة تقابليّة.

نقول عن f إنّها دالة من E "في" F إذا كان $f(E)\subset F$، بينما نقول عن f إنّها دالة من E "على" F إذا حققت $f(E)=F$، أي كلّما كانت غامرة.

أخيرًا، نعرّف الدالة المميّزة لمجموعة جزئية A (من E)، ونرمز لها بـ χ_A، الدالة المعرّفة بـ

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A\\ 0, & x\notin A\end{cases}$$

هذه الآن بعض الخواص العامّة:

لتكن f دالة من مجموعة E نحو مجموعة أخرى F،

$\{A_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{P}(E)$ و $\{B_j\}_{j\in J}\subset\mathcal{P}(F)$، عندئذ

أ) $f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(A_i)$،

ب) $f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(A_i)$،

ج) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}B_j\right)=\bigcup_{j\in J}f^{-1}(B_j)$،

د) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)=\bigcap_{j\in J}f^{-1}(B_j)$،

ومن أجل $A\subset E$ و $B, B'\subset F$، فإنّ

ه) $f(E)\setminus f(A)\subset f(E\setminus A)$،

و) $f^{-1}(B'\setminus B)=f^{-1}(B')\setminus f^{-1}(B)$،

ز) $f(E)\cap B=\varnothing \Leftrightarrow f^{-1}(B)=\varnothing$.

نختم هذا المقطع بهذه المُسلمة التي تعدّ من أهم المُسلمات في الرياضيات ألا وهي مُسلمة الاختيار *(axiom of choice)* والتي نستطيع

بفضلها إنشاء مجموعة غير قابلة للقياس بمفهوم عالم الرياضيات الفرنسي لوبيغ[2] [Lebesgue] في المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$.

مُسلّمة الاختيار 01.1: لتكن E مجموعة غير خالية و $\{A_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{P}(E)$ أسرة غير خالية بحيث $A_i \neq \varnothing$، $(\forall i \in I)$. عندئذ توجد دالة $\varphi : I \to \bigcup_{i\in I} A_i$ بحيث $\varphi(i) \in A_i$، $(\forall i \in I)$. تدعى φ دالة الاختيار.

ملاحظة 02.1: نشير إلى أنّ مسلّمة الاختيار تكافئ ما يلي:

لأيّ مجموعة غير خالية E وأيّ أسرة من مجموعات جزئية $\{A_i\}_{i\in I}$ من E بحيث $A_i \neq \varnothing$، لكلّ $i \in I$، تكون المجموعة $\prod_{i\in I} A_i$ غير خالية.

(أنظر المرجع [39])

3- علاقة التكافؤ ومجموعة القسمة

نقول عن علاقة ثنائية $\mathcal{R}$ على مجموعة E إنّها **علاقة تكافؤ** إذا تمتّعت بالشروط التالية:

عت1) **الانعكاسية:** $x\mathcal{R}x$، $(\forall x \in E)$

عت2) **التناظر:** $(x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x)$، $(\forall x, y \in E)$

عت3) **التعدّي:** $(x\mathcal{R}y$ و $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$، $(\forall x, y, z \in E)$

نعرّف **صفّ تكافؤ** عنصر $a \in E$ وفق العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$، ونرمز له بـ $[a]$ أو $\dot{a}$، المجموعة الجزئية من E التالية:

$[a] = \{x \in E : x\mathcal{R}a\}$.

لدينا فورًا $[x] = [a]$، من أجل كلّ $x \in [a]$. تسمى مجموعة كل صفوف التكافؤ وفق العلاقة $\mathcal{R}$ **بمجموعة القسمة** ونرمز لها بـ $E/\mathcal{R}$.

---

[2] هنري لوبيغ [Henri Lebesgue] (1875-1941)

مثال 03.1: نعتبر على مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$ العلاقة الثنائية $\mathcal{R}$ المعرّفة بـ

$$(\forall m,n\in\mathbb{Z}),\ (m\mathcal{R}n \Leftrightarrow m-n\in 5\mathbb{Z}),$$

لدينا $n-n=0\in 5\mathbb{Z}$، $(\forall n\in\mathbb{Z})$، ($5\mathbb{Z}$ هي مجموعة مضاعفات العدد 5)، ومنه $n\mathcal{R}n$، $(\forall n\in\mathbb{Z})$. إذن، العلاقة $\mathcal{R}$ انعكاسية. ليكن m و $n\in\mathbb{Z}$ بحيث $m\mathcal{R}n$، عندئذ $(m-n)$ مضاعف للعدد 5، وبالتالي العدد $(n-m)$ مضاعف للعدد 5، وهكذا فإنّ $n\mathcal{R}m$. إذن، العلاقة $\mathcal{R}$ تناظرية. لتكن الآن m، n و p عناصر من $\mathbb{Z}$ بحيث $m\mathcal{R}n$ و $n\mathcal{R}p$، عندئذ $(m-n)$ و $(n-p)$ مضاعفان للعدد 5، وبالجمع نحصل على $(m-p)$ مضاعف للعدد 5، وبالتالي فإنّ $m\mathcal{R}p$، وهذا يعني أنّ العلاقة $\mathcal{R}$ متعدّية. بما أنّ $\mathcal{R}$ انعكاسية، تناظرية ومتعدية فهي إذن علاقة تكافؤ على $\mathbb{Z}$.

تعيين صفوف التكافؤ، لدينا

$$\dot{0}=\{n\in\mathbb{Z}: n-0=5k,\ k\in\mathbb{Z}\}=5\mathbb{Z},$$

$$\dot{1}=\{n\in\mathbb{Z}: n-1=5k,\ k\in\mathbb{Z}\}=5\mathbb{Z}+1,$$

$$\dot{2}=\{n\in\mathbb{Z}: n-2=5k,\ k\in\mathbb{Z}\}=5\mathbb{Z}+2,$$

$$\dot{3}=\{n\in\mathbb{Z}: n-3=5k,\ k\in\mathbb{Z}\}=5\mathbb{Z}+3,$$

$$\dot{4}=\{n\in\mathbb{Z}: n-4=5k,\ k\in\mathbb{Z}\}=5\mathbb{Z}+4.$$

لاحظ أنّ $\dot{0}=\dot{5}=\dot{10}=\ldots$، $\dot{1}=\dot{6}=\dot{11}=\ldots$ الخ. وعليه فإنّ مجموعة القسمة هي كالآتي:

$$\mathbb{Z}/_{\mathcal{R}}=\{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4}\}.$$

مبرهنة 04.1: كلّ صفي تكافؤ هما إمّا متطابقان وإمّا منفصلان.

إثبات : ليكن $[x]$ و $[y]$ صفي تكافؤ وفق علاقة ثنائية $\mathcal{R}$. نفرض أنّ $[x]\cap[y]\neq\varnothing$. ليكن $a\in[x]\cap[y]$، عندئذ $a\in[x]$ و $a\in[y]$. إذن، $[x]=[a]$ و $[y]=[a]$، وعليه فإنّ $[x]=[y]=[a]$، أي أنّ الصفين $[x]$ و $[y]$ متطابقان كلّما كانا غير منفصلين.■

نستنتج من هذه المبرهنة أنّ أسرة صفوف التكافؤ وفق علاقة ثنائية $\mathcal{R}$ تشكل تجزئة للمجموعة E. ومن جهة أخرى، توجد بفضل مسلّمة الاختيار مجموعة $\mathcal{P} \subset E$ تضم عنصرًا وحيداً من كلّ صفّ تكافؤ من $E/\mathcal{R}$. سوف نعود لهذه الفكرة خلال تطرقنا إلى إنشاء مجموعة غير قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ.

4- القدرة وقابلية العد *(countability)*

تعريف 05.1: نقول عن مجموعة E إنّها متكافئة مع مجموعة F (أو إنّ E وَ F متساويتا القدرة) إذا وُجد تقابل من E على F، ونكتب $E \sim F$.

إنّ العلاقة '$\sim$' تحقق الخواص التالية: من أجل مجموعات E، F و G لدينا

أ) **خاصيّة الانعكاسية:** $E \sim E$

ب) **خاصيّة التناظر:** $E \sim F$ يستلزم أنّ $F \sim E$

ت) **خاصيّة التعدّي:** $E \sim F$ وَ $F \sim G$ يستلزمان أنّ $E \sim G$

نشير إلى أنّ '$\sim$' ليست علاقة تكافؤ بمفهوم نظرية المجموعات لكونها مُعرّفة على "أسرة" كلّ المجموعات وهذه الأخيرة ليست مجموعة بالمفهوم المتعارف عليه في النظريّة العامة للمجموعات حسب مفارقة راسل[3] (Bertrand Russell) الشهيرة بل هي **صفّ بحت** *(proper class)* وهو أعمّ من مفهوم المجموعة.

إذا كانت E مجموعة غير خالية فنسمّي **صف تساوي القدرة** $\{F : F \sim E\}$ **أصلي** *(cardinal)* E أو **قدرة** *(power)* E (بمفهوم فراج-راسل (Frege-Russell))، ونرمز له بـ $|E|$ أو $\operatorname{Card} E$.

نضع $|E| = 0$ ، عندما $E = \varnothing$، و $|E| = n_0$، عندما $E \sim \{1, 2, ..., n_0\}$.

يتبيّن من خلال تعريف قدرة مجموعة ما أنّ القدرة هي الميزة المشتركة بين كلّ المجموعات المتكافئة ألا وهي احتوائها على نفس العدد من العناصر بدون ذكر لهذا العدد نفسه إلاّ في الحالية المنتهية.

---

[3]) برتران راسل [Bertrand Russell] (1872-1970)

تعريف 06.1: نقول عن مجموعة E إنّها غير منتهية إذا وإذا فقط وُجدت مجموعة جزئية $A \subsetneq E$ بحيث $A \sim E$. كما نقول عن مجموعة E إنّها منتهية إذا كان $\mathrm{Card}E < \infty$.

أمثلة 07.1: إنّ المجموعات التالية غير منتهية:

- مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$،
- مجموعة الأعداد الصحيحة $\mathbb{Z}$،
- مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$،
- مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$،
- مجموعة الأعداد المركّبة $\mathbb{C}$.

تعريف 08.1: نقول عن قدرة مجموعة E إنّها أصغر من قدرة مجموعة F أو تساويها، ونكتبها $|E| \leq |F|$، إذا وجدت دالّة متباينة من E نحو F.
(إنّ هذا يكافئ وجود مجموعة جزئية $B \subset F$ بحيث $|E| = |B|$)

تنصّ القضيّة التالية على أمكانية ترتيب قدرتي مجموعتين اختياريتين، بمعنى أنّ من أجل كلّ مجموعتين اختياريتين E و F، إمّا أن يوجد تباين من E في F، وإمّا أن يوجد تباين من F في E. لدينا

قضية 09.1: من أجل كلّ مجموعتين E و F لدينا إمّا $|E| \leq |F|$ وإمّا $|F| \leq |E|$.

نذكر فيما يلي بمبرهنة بيرنشتاين[4] (Bernstein) التي يمكن للقارئ الاطّلاع على إثباتها في كتب التحليل والنظريّة العامة للمجموعات:

مبرهنة 10.1 [بيرنشتاين]: إنّ $|E| \leq |F|$ وَ $|F| \leq |E|$ تستلزمان أنّ $|E| = |F|$.

ملاحظة 11.1: 1) من ميزات العلاقة $\leq$ أنّها لا تتعلق بممثّلي المجموعتين E و F، وأنها انعكاسية، ضد تناظرية (حسب **المبرهنة 10.1**) ومتعدية، أي $\leq$ هي علاقة ترتيب كلي على الصف البحت للقدرات.

---

[4] سيرج ناتانوفتش بيرنشتاين [Sirgei Natanovich Bernstein] (1880–1968)

2) إذا كانت E وَ F مجموعتين بحيث $|E|\leq|F|$ و $|F|\neq|E|$، فنكتب عندئذ $|E|<|F|$.

نقدّم فيما يلي مبرهنة كانتور[5] التي تبيّن أنّ قدرة مجموعة E هي أصغر تماما من قدرة $\mathcal{P}(E)$.

مبرهنة 12.1: لدينا $|E|<|\mathcal{P}(E)|$ من أجل كلّ مجموعة E.

إثبات : إذا كانت $E=\varnothing$ عندئذ $|E|=0<|\mathcal{P}(E)|=1$، ومنه المتباينة محققة. نفرض إذن أنّ $E\neq\varnothing$ ونعرّف التباين $j:E\to\mathcal{P}(E)$ بـ $j(x)=\{x\}$، $(\forall x\in E)$، نحصل فورًا على $|j(E)|=|E|\leq|\mathcal{P}(E)|$.
ولإثبات أنّ $|E|<|\mathcal{P}(E)|$ نفرض جدلا أنّ $|E|=|\mathcal{P}(E)|$. لتكن ψ دالّة تقابليّة من E على $\mathcal{P}(E)$.

نعرّف المجموعة

$$H=\{x\in E: x\notin\psi(x)\}.$$

ينتج عن كون $H\in\mathcal{P}(E)$ وَ ψ دالّة تقابليّة وجود عنصر وحيد $x_0\in E$ بحيث $\psi(x_0)=H$.

- إذا كان $x_0\in H$ فإنّ $\psi(x_0)\equiv H\not\ni x_0$، وهذا تناقض.
- إذا كان $x_0\notin H$ فإنّ $\psi(x_0)\equiv H\ni x_0$، وهذا تناقض آخر.

إذن لا يوجد أيّ تقابل ما بين E و $\mathcal{P}(E)$، وعليه فإنّ $|E|<|\mathcal{P}(E)|$.■

تعريف 13.1: **نقول عن مجموعة E إنّها قابلة للعد (countable) إذا كانت منتهية أو متكافئة مع مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$، كما نقول عن E إنّها قابلة للعد تماما إذا كانت $E\sim\mathbb{N}$.**

ترميز 14.1: سوف نرمز لأصلي $\mathbb{N}$ بـ ω_0 (''أومغا'' صفر)، كما نرمز لأصلي $\mathbb{R}$ بـ c ونسمّيه قدرة المستمرّ (continuum)، لدينا دومًا العلاقة $\omega_0<c$.

[5] جورج كانتور [George Cantor] (1845-1918)

مثال 15.1: المجموعات التالية $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ (مجموعة الأعداد الصحيحة)، $\mathbb{Q}$ (مجموعة الأعداد النسبية، أي من الشكل $\frac{p}{q}$، حيث p، $q\in\mathbb{Z}$ مع $(q\neq 0)$، كلها قابلة للعد تماما، غير أنّ متمّمات هذه المجموعات في $\mathbb{R}$ ليست قابلة للعد.

المجموعة $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ليست قابلة للعد لأنّ $|\mathbb{N}|=\omega_0<|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ حسب المبرهنة **12.1**، لدينا في الواقع $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|=c$.

قضية 16.1: تحتوي كــلّ مجموعة غير منتهية E على مجموعة جزئيّة قابلة للعــد تماما.

إثبات: بما أنّ $E\neq\varnothing$ فبإمكاننا اختيار n عنصرًا x_0، x_1، ...، x_{n-1} في E وتبقى المجموعة $E\setminus\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$ غير خالية. ليكن x_n عنصرًا من $E\setminus\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$. بما أنّ $E\setminus\{x_0,\dots,x_n\}$ هي بدورها غير خالية فإنّنا نحصل تدريجيّا على تباين $\varphi:\mathbb{N}\to E$ معرّف بــ $\varphi(n)=x_n$، $(\forall n\geq 0)$. وهكذا نحصل على مجموعة جزئيّة قابلة للعد تماما ألا وهي $\varphi(\mathbb{N})$.■

قضية 17.1: إنّ الفترة $]0,1[\subset\mathbb{R}$ ليست قابلة للعد.

إثبات: نفرض بالعكس أنّ $]0,1[$ قابلة للعد، عندئذ $]0,1[=\bigcup_{n\geq 1}\{x_n\}$، وبالتالي يقبل كلّ عنصر x_n من $]0,1[$ نشرًا عشريًّا وحيدًا كالآتي: $x_n=0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\dots x_{nk}\dots$، حيث x_{nk}، $(k,n\geq 1)$ أرقام من 0 إلى 9. لدينا إذن

$$x_1=0.x_{11}x_{12}x_{13}\dots x_{1k}\dots،$$
$$x_2=0.x_{21}x_{22}x_{23}\dots x_{2k}\dots،$$
$$x_3=0.x_{31}x_{32}x_{33}\dots x_{3k}\dots،$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots،$$
$$x_n=0.x_{n1}x_{n2}x_{n3}\dots x_{nk}\dots.$$

نعتبر العدد العشري $]0,1[\ni y=0.y_1y_2y_3...$ بحيث $y_k \neq x_{nn}$، مهما يكن k و n. من السّهل التأكّد من أنّ y مختلف عن كلّ العناصر x_n، وبالتالي لا يمكن له أن ينتمي إلى الفترة $]0,1[$، وهذا تناقض. وهكذا فإنّ هذه الفترة ليست قابلة للعد.■

مبرهنة 18.1: لتكن E مجموعة غير خالية، $\{A_r\}_{r\in D} \subset \mathcal{P}(E)$، D مجموعة قابلة للعد وغير خالية، و A_r مجموعة جزئية قابلة للعد من أجل كلّ مؤشر $r \in D$، عندئذ المجموعة $\bigcup_{r\in D} A_r$ قابلة للعد.

إثبات : نفرض أنّ $A_r \neq \varnothing$، $(\forall r \in D)$. بما أنّ المجموعة D قابلة للعد فنكتبها إذن $D=\{r_k\}_{k\geq 1}$، كما نكتب

$$A_{r_1}=\{a_{11},a_{12},a_{13},...,a_{1k},...\}،$$
$$A_{r_2}=\{a_{21},a_{22},a_{23},...,a_{2k},...\}،$$
$$.......................،$$
$$A_{r_n}=\{a_{n1},a_{n2},a_{n3},...,a_{nk},...\}،$$
$$.......................،$$

نرتّب الآن عناصر الاتحاد $\bigcup_{r\in D} A_r \left(=\bigcup_{k\geq 1} A_{r_k}\right)$ كالآتي

$$\left\{a_{11},\underbrace{a_{12},a_{21}},\underbrace{a_{31},a_{22},a_{13}},\underbrace{a_{14},a_{23},a_{32},a_{41}},...\right\}،$$

لنحصل على مجموعة قابلة للعد.■

لازمة 19.1: لتكن E مجموعة غير خالية و $\{A_1,...,A_n\}$ جملة منتهية من مجموعات جزئية قابلة للعد من E، عندئذ المجموعة $\prod_{k=1}^{n} A_k$ قابلة للعد.

إثبات: يكفي إثبات أنّ الضرب الديكارتي لمجموعتين جزئيتين قابلتين للعد هو كذلك مجموعة جزئية قابلة للعد ، ويُبرهن على الحالة العامّة بالاستقراء على n. في حالة ما إذا كان $A_1=\varnothing$ أو $A_2=\varnothing$، عندئذ $A_1\times A_2=\varnothing$، وهي مجموعة قابلة للعد. نفرض إذن أنّ $A_1\neq\varnothing$

1- مفاهيم عامة

و $A_2 \neq \varnothing$. لدينا $A_1 \times A_2 = \bigcup_{x \in A_1} (\{x\} \times A_2)$، مع الملاحظة أنّ المجموعة $\{x\} \times A_2$ قابلة للعد من أجل كلّ $x \in A_1$ (يكفي اعتبار التباين $y \mapsto (x,y)$ من المجموعة الجزئية القابلة للعد A_2 في $\{x\} \times A_2$). نستنتج فورًا من المبرهنة 18.1 أنّ $A_1 \times A_2$ مجموعة قابلة للعد.■

مثال 20.1: المجموعات $\mathbb{N}^n$، $\mathbb{Z}^n$ و $\mathbb{Q}^n$ قابلة للعد تماما من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

5- الفضاء الطبولوجي

تعريف 21.1: لتكن E مجموعة غير خالية. نقول عن أسرة $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(E)$ إنّها طبولوجيا على E، إذا حققت الخواص التالية:

طب1) المجموعتان $\varnothing$ و E تنتميان إلى $\mathcal{T}$،
طب2) اتحاد (اختياري) لعناصر من $\mathcal{T}$ هو عنصر من $\mathcal{T}$،
طب3) تقاطع كلّ عنصرين من $\mathcal{T}$ هو عنصر من $\mathcal{T}$.

يدعى كلّ عنصر من الفضاء الطبولوجي $(E,\mathcal{T})$ مفتوحة أو مجموعة جزئية مفتوحة في E، كما نسمّي مغلقة أو مجموعة جزئية مغلقة في E كلّ مجموعة جزئية من E متمّمتها مجموعة مفتوحة في E.

تعريف 22.1: ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيًا و A مجموعة جزئية من E.

1) نسمّي داخلية (*interior*) A، ونرمز لها بـ $\mathring{A}$، أكبر مفتوحة محتواة في A.

2) نسمّي إغلاقة (*closure*) A، ونرمز لها بـ $\overline{A}$، أصغر مغلقة تحوي A.

3) نقول عن A إنّها كثيفة (*dense*) في E إذا حققت $\overline{A} = E$.

4) نقول عن المجموعة E إنّها قابلة للفصل (*separable*) إذا احتوت على مجموعة جزئية قابلة للعد وكثيفة، بمعنى توجد مجموعة جزئية قابلة للعد $A \subset E$ بحيث $\overline{A} = E$.

4) نقول عن فضاء طبولوجي $(E,\mathcal{T})$ إنّه انفصالي (*separated* أو *Hausdorff*) إذا وجدت من أجل كلّ نقطتين متمايزتين x و y من E مفتوحتان $V\in\mathcal{T}$، U بحيث $x\in U$، $y\in V$ وَ $U\cap V=\varnothing$.

تعريف 23.1: ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيًا. نسمّي تغطية مفتوحة لمجموعة جزئية $A\subset E$ كلّ أسرة $\{V_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{T}$ بحيث $A\subset\bigcup\limits_{i\in I}V_i$. نقول عن مجموعة جزئية $A\subset E$ من فضاء طبولوجي انفصالي $(E,\mathcal{T})$ إنّها متراصة (*compact*) إذا أمكن استخراج من كلّ تغطية مفتوحة لِـ A تغطية مفتوحة منتهية.

تعريف 24.1: نقول عن فضاء طبولوجي $(E,\mathcal{T})$ إنّه مترابط (*connected*) إذا تعذّر وجود تجزئة لِـ E بمفتوحتين غير خاليتين.

تعريف 25.1: ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيًّا. نقول عن مجموعة جزئية $A\subset E$ إنّها من نمط G_δ إذا وجدت متتالية من المفتوحات $\{V_n\}_{n\geq 1}$ بحيث $A=\bigcap\limits_{n\geq 1}V_n$.
نقول عن مجموعة جزئية $B\subset E$ إنّها من نمط F_σ إذا وجدت متتالية من المغلقات $\{K_n\}_{n\geq 1}$ بحيث $B=\bigcup\limits_{n\geq 1}K_n$.

يتجلى من التعريف السابق أنّ كل مفتوحة من فضاء طبولوجي هي من نمط G_δ وأنّ كل مغلقة هي من نمط F_σ. ومن جهة ثانية فإنّ متمّمة مجموعة جزئية من نمط G_δ هي مجموعة جزئية من نمط F_σ، وأنّ متمّمة مجموعة جزئية من نمط F_σ هي مجموعة جزئية من نمط G_δ.

وهذه أمثلة أخرى عن مجموعات من نمط G_δ و F_σ :

مثال 26.1: لدينا في الفضاء الطبولوجي $(\mathbb{R},\mathcal{T}_0)$ (حيث $\mathcal{T}_0$ الطبولوجيا الاعتيادية على $\mathbb{R}$)

$$[a,b]=\bigcap_{n\geq 1}\left]a-1/n\,,b+1/n\right[،$$

و $[a+1/n\,,b-1/n]$ $]a,b[=\bigcup\limits_{n\ge 1}$ ،

إذن الفترتان، المغلقة $[a,b]$ والمفتوحة $]a,b[$، هما في آن واحد من كلا النمطين G_δ و F_σ ولا غرابة في ذلك.

نظرًا لأهميتها نذكر القارئ بهذه المبرهنة الهامة في التحليل الرياضي لصاحبها كانتور والتي تنصّ على أن كل مفتوحة في $\mathbb{R}$ هي عبارة عن اتحاد قابل للعد لفترات مفتوحة منفصلة مثنى مثنى.

مبرهنة 27.1 [كانتور]: لتكن V مجموعة جزئية غير خالية من $\mathbb{R}$. تكون V مفتوحة إذا وإذا فقط وجدت متتالية من الفترات المفتوحة والمنفصلة مثنى مثنى $\{J_n\}_{n\ge 1}$ بحيث $V=\bigcup\limits_{n\ge 1} J_n$.

إثبات: إذا وجدت متتالية من الفترات المفتوحة والمنفصلة مثنى مثنى $\{J_n\}_{n\ge 1}$ بحيث $V=\bigcup\limits_{n\ge 1} J_n$ فإنّ هذه الأخيرة هي حتما مفتوحة في $\mathbb{R}$.

عكسيًا، نفرض أنّ V مفتوحة في $\mathbb{R}$. ليكن a عنصرًا من V، توجد إذن فترة مفتوحة J^a تحوي a بحيث $J^a\subset V$. نضع

$\mathcal{I}(a)=\bigcup\{J^a : J^a\subset V\}$ ، $\alpha=\inf\mathcal{I}(a)$ و $\beta=\sup\mathcal{I}(a)$.

(مع الملاحظة أنّه بإمكان α و β أن يكونا غير منتهيين).

لنثبت أوّلا أنّ $\mathcal{I}(a)=]\alpha,\beta[$. من الواضح أنّ $\mathcal{I}(a)\subset]\alpha,\beta[$.

ولإثبات الاحتواء الثاني، نعتبر نقطة x مختلفة عن a من الفترة المفتوحة $]\alpha,\beta[$. نفرض على سبيل المثال أنّ $\alpha<x<a$ (نتّبع نفس الاستدلال عندما $a<x<\beta$). إذا كان $\alpha=-\infty$ يوجد عندئذ x' في $\mathcal{I}(a)$ بحيث $-\infty<x'<x$، وإذا كان α منتهيا فمن أجل العدد الموجب $\varepsilon=x-\alpha$ يوجد حسب خاصيّة الحد الأدنى x' في $\mathcal{I}(a)$ بحيث $\alpha<x'<x$. بما أنّ x' ينتمي إلى إحدى الفترات المفتوحة J^a الحاوية لِـ a، نستنتج أنّ $]x',a[\subset\mathcal{I}(a)$، وهذا يستلزم $x\in\mathcal{I}(a)$ لكون $x'<x<a$.

فيما يخصّ الاحتواء الثاني فإنّه محقق بموجب إدراكنا أنّ x اختياري، وهكذا فإنّ $\mathcal{I}(a)=]\alpha,\beta[$.

نلاحظ من جهة أخرى أنّ كلّ فترتين $\mathcal{I}(a)$ و $\mathcal{I}(a')$ إمّا أن تكونا غير متقاطعتين وإمّا أن تكونا متطابقتين.

نعرّف الآن على المجموعة الجزئية V علاقة التكافؤ $\mathcal{R}$ التالية:
من أجل كلّ a و b في V، فإنّ $a\mathcal{R}b$ إذا وإذا فقط كان $b \in \mathcal{I}(a)$.
لدينا من جهة

$$[a] = \{x \in V : x\mathcal{R}a\} = \{x \in V : x \in \mathcal{I}(a)\} = \mathcal{I}(a).$$

ومن جهة أخرى فإنّ $[a]=[p]$ من أجل كلّ عدد نسبي p في $[a]$.
بما أنّ الأسرة $\left\{[a] : [a] \in V/\mathcal{R}\right\}$ تشكل تجزئة لـِ V، حيث $V/\mathcal{R}$ هي مجموعة القسمة المتكوّنة من صفوف التكافؤ $[a]$، عندئذ

$$V = \bigcup \left\{\mathcal{I}(a) : [a] \in V/\mathcal{R}\right\} = \bigcup_{p \in P} \left\{\mathcal{I}(p) : [p] \in V/\mathcal{R}\right\},$$

حيث أنّ $P = \left\{p \in \mathbb{Q} \cap V : p \in [a] \in V/\mathcal{R}\right\}$.
وهكذا فإنّ V هو اتحاد قابل للعد لفترات مفتوحة ومنفصلة مثنى مثنى.■

تعريف 28.1: ليكن $(E,\mathcal{T})$ و $(E',\mathcal{T}')$ فضائين طبولوجيين. نقول عن دالّة $f : (E,\mathcal{T}) \to (E',\mathcal{T}')$ إنها متّصلة إذا حققت $f^{-1}(\mathcal{T}') \subset \mathcal{T}$، بمعنى أنّ $f^{-1}(W) \in \mathcal{T}$، من أجل كل $W \in \mathcal{T}'$.

تعريف 29.1: لتكن E مجموعة غير خالية. نقول عن تطبيق $\rho : E \times E \to \mathbb{R}^+$ إنّه مسافة أو مترية على E إذا تمتّع بالشروط التالية:

مت1) $\rho(x,y) = 0$ إذا وإذا فقط كان $x = y$، $(x,y \in E)$،
مت2) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$، $(\forall x,y \in E)$،
مت3) $\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$، $(\forall x,y,z \in E)$.

تدعى الثنائية (E,ρ) فضاءً متريًّا.

نسمّي كرة مفتوحة (على الترتيب، مغلقة) في E، مركزها x_0 ونصف قطرها $r > 0$، ونرمز لها بـ $B(x_0,r)$ (على الترتيب، $B'(x_0,r)$) المجموعة

$$B(x_0,r) = \{x \in E : \rho(x_0,x) < r\}$$

(على الترتيب، $B'(x_0,r) = \{x \in E : \rho(x_0,x) \le r\}$).

نقول عن مجموعة جزئية V إنّها مفتوحة في E إذا وُجدت من أجل كلّ نقطة a في V كرة مفتوحة $B(a,r)$ بحيث $B(a,r)\subset V$.

ملاحظة 30.1: تشكّل أسرة كل المجموعات المفتوحة في E طبولوجيا على E.

ليكن (E,ρ) فضاءً متريًّا، نقول عن متتالية $\{x_n\}_{n\geq 1}\subset E$ **إنّها متقاربة وتنتهي إلى نقطة** $x\in E$ (نهاية المتتالية $\{x_n\}_{n\geq 1}$)، عندما يؤول n إلى $+\infty$، إذا وإذا فقط وجد من أجل كلّ $\varepsilon>0$ مؤشر n_0 بحيث، مهما يكن $n\geq n_0$، فإنّ $\rho(x_n,x)<\varepsilon$.

تعريف 31.1: نقول عن متتالية $\{x_n\}_{n\geq 1}\subset E$ إنّها أساسية (أو كوشيّة) إذا وُجد من أجل كلّ $\varepsilon>0$ مؤشر n_0 بحيث

$$\forall p,q\geq n_0 \Rightarrow \rho(x_p,x_q)<\varepsilon.$$

نقول عن فضاء متري (E,ρ) إنّه تام إذا كانت كلّ متتالية أساسية متقاربة.

ملاحظة 32.1: كلّ متتالية متقاربة هي متتالية أساسية.

مثال 33.1: نعتبر في $\mathbb{R}$ المسافة $\rho(x,y)=|x-y|$، عندئذ الفضاء المتري $(\mathbb{R},\rho)$ تام. بالتأكيد، لتكن $\{x_n\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{R}$ متتالية كوشية، عندئذ من أجل كلّ $k\in\mathbb{N}$ يوجد حسب التعريف $p_k\geq 1$ بحيث $\rho(x_m,x_n)<1/2^{k+1}$، مهما يكن m و $n\geq p_k$.

نعرّف الآن المتتالية $\{n_k\}_{k\geq 0}$ كالآتي

$$n_0=p_0,\ n_1=\max(n_0+1,p_0),\dots,n_{k+1}=\max(n_k+1,p_k),\dots$$

لنحصل على متتالية متزايدة تماما. إذن، من أجل كلّ $k\in\mathbb{N}^*$ فإنّ $\rho(x_m,x_n)<1/2^{k+1}$، مهما يكن m و $n_k\leq n$، وبالخصوص، نحصل من أجل $m=n_{k+1}$ و $n=n_k$ على $\rho(x_{n_{k+1}},x_{n_k})<1/2^{k+1}$.

نضع من أجل كلّ $k\in\mathbb{N}^*$، $J_k=\left[x_{n_k}-1/2^k,x_{n_k}+1/2^k\right]$.

واضح أنّ الفترة J_k مغلقة و $J_{k+1}\subset J_k$، $(\forall k\geq 1)$، إضافة إلى أنّ $\{x_n\}_{n\geq n_k}\subset J_k$. نستنتج من مبرهنة كانتور الخاصة بتقاطع الفترات

المتداخلة أنّ $\bigcap_{k\geq 1} J_k \neq \varnothing$. ليكن $a\in\bigcap_{k\geq 1} J_k$، عندئذ $\left|x_{n_k}-a\right|\leq 1/2^k$، $(\forall k\geq 1)$. بناءً على كلّ ما سبق فإنّ

$$\rho(x_n,a)=|x_n-a|=\left|x_n-x_{n_k}+x_{n_k}-a\right|$$
$$\leq\left|x_n-x_{n_k}\right|+\left|x_{n_k}-a\right|\leq 1/2^{k-1}$$

من أجل كلّ $n\geq n_k$، ومنه $\lim_{n\to\infty} x_n=a$. إذن الفضاء المتري $(\mathbb{R},\rho)$ تام.■

تعريف 34.1: ليكن E فـضاء متّجهات *(vector space)* عـلى حقل K.
نـقول عـن تـطبيق $\|.\|:E\to\mathbb{R}^+$ إنه معيار *(norm)* على E إذا حقق الشروط التالية:

نظ1) $\|x\|=0$ إذا وإذا فقط كان $x=0$،
نظ2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$، $(\forall x\in E)$، $(\forall\lambda\in K)$،
نظ3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$، $(\forall x,y\in E)$.

تدعى الثنائية $(E,\|.\|)$ فضاءً مُعيّرا *(normed space)* على الحقل K.

نقول عـن تـطبيق $\sigma:E\to\mathbb{R}^+$ إنّه نصف معيار على E إذا حقق الشرطين نظ2)، نظ3) و $\sigma(0)=0$ بينما لا يُطلب منه تحقيق الاستلزام التالي:
$\sigma(x)=0\Rightarrow x=0$.

ملاحظة 35.1: تجدر الإشارة إلى أنّه إذا كان $(E,\|.\|)$ فضاءً معيّرا فإنّ التطبيق $\rho_0:E\times E\to\mathbb{R}^+$ المعرّف بـ $\rho_0(x,y)=\|x-y\|$ مترية على E.

نقول عن فضاء معيّر $(E,\|.\|)$ إنّه تام أو فضاء بناخ[6] (نسبة إلى عالم الرياضيات البولندي بناخ [Stefan Banach]) إذا كـان الفضاء المتري (E,ρ_0) تاما، حيث ρ_0 المترية المعرّفة في الملاحـظة 35.1.

---
[6] ستيفان بناخ [Stefan Banach] (1892–1945)

مثال 36.1: لتكن $\mathcal{R}([0,1])$ مجموعة كلّ الدوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان على الفترة المغلقة $[0,1]$. نضع $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. إنّ التطبيق $\|.\|_1$ نصف معيار على $\mathcal{R}([0,1])$ ويكون معيارا على $C([0,1])$، مجموعة كلّ الدوال المتّصلة على $[0,1]$. بالتأكيد، من السهل التأكّد من الخاصيتين نظ2) ونظ3)، لنعتن إذن بالخاصية نظ1).
إنّ الدالة $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ $f(1/2)=1$ و $f(x)=0$، عندما $x\neq 1/2$، عنصر من المجموعة $\mathcal{R}([0,1])$، وهي غير معدومة تماما على $[0,1]$. لدينا

$$\|f\|_1 = \int_0^{1/2}|f(x)|dx + \int_{1/2}^1 |f(x)|dx = 0،$$

وهكذا فإنّ $\|f\|_1 = 0$ لا تستلزم أنّ $f=0$، وبالتالي $\|.\|_1$ هو نصف معيار فقط على $\mathcal{R}([0,1])$.

فيما يخصّ المجموعة $C([0,1])$، نفرض أنّ $\|f\|_1 = 0$ وأنّه توجد نقطة $a\in[0,1]$ بحيث $0<|f(a)|$. ينتج عن اتصال الدالة $|f|$ أنّ من أجل العدد $\varepsilon=|f(a)|/2$ يوجد $0<\delta<1$ بحيث، مهما يكن x في $[0,1]$ يحقق $|x-a|<\delta$، فإنّ $\left||f(x)|-|f(a)|\right|<|f(a)|/2$، ومنه $|f(x)|>|f(a)|/2$. بوضع

$$\beta = min\{1,a+\delta\} \quad \text{و} \quad \alpha = max\{0,a-\delta\}$$

نحصل على

$$\int_0^1|f(x)|dx \geq \int_\alpha^\beta |f(x)|dx \geq (1/2)\int_\alpha^\beta |f(a)|dx$$
$$=(1/2)(\beta-\alpha)|f(a)|>0$$

إذن $\|f\|_1\neq 0$ وهذا تناقض. نستخلص أنّ $f\equiv 0$، ومنه التطبيق $\|.\|_1$ معيار على $C([0,1])$.

بما أنّنا نتعامل بكثرة مع المستقيم الحقيقي الموسّع $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ طيلة هـذا الكتاب لذلك نـذكّر ببعض العمليات المتداولة في $\overline{\mathbb{R}}$، لدينا

1) $(\forall x\in\mathbb{R}),\ x\pm\infty=\pm\infty+x=\pm\infty$،
2) $\pm\infty\pm\infty=\pm\infty$،

$$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=-(\pm\infty)\cdot(\mp\infty)$$
3)
$$=-(\mp\infty)\cdot(\pm\infty)=+\infty$$

4) $x.(\pm\infty)=(\pm\infty).x=\begin{cases}\pm\infty, & x>0\\ \mp\infty, & x<0\end{cases}$ ، $(\forall x\in\mathbb{R})$.

تحذير: ينبغي تجنّب حالة عدم التعيين $\infty-\infty$ في كلّ الحسابات المقبلة.

اصطلاح: نضع اصطلاحًا $0.(\pm\infty)=0.(\pm\infty)=0$.

فيما يخصّ الطبولوجيا الطبيعية $\bar{\mathcal{T}}_0$ على $\bar{\mathbb{R}}$ فهي تقبل كقاعدة لها الأسرة

$$\bar{\mathcal{B}}=\{[-\infty,a[,]a,b[,]b,+\infty],\ a,b\in\mathbb{R}\ \text{أو}\ a,b\in\mathbb{Q}\}$$ ،

بمعنى أنّ كلّ مفتوحة في $\bar{\mathbb{R}}$ تكتب على شكل اتحاد مزيج من هذه الفترات. لدينا

$$\mathcal{T}_0=\mathbb{R}\cap\bar{\mathcal{T}}_0:=\{\mathbb{R}\cap W: W\in\bar{\mathcal{T}}_0\}$$ ،

حيث $\mathcal{T}_0$ الطبولوجبا الاعتيادية على المستقيم الحقيقي $\mathbb{R}$.

6- النهايات الدنيا والعليا

نسمّي **متتالية عددية** كلّ تطبيق $u:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$، نرمز لها بـ $\{u_n\}_{n\ge 0}$، حيث $u_n:=u(n)$ ، $(\forall n\ge 0)$. نقول عن متتالية $\{u_n\}_{n\ge 0}$ إنّها **تنتهي** (أو **تتقارب**) إلى $\alpha\in\mathbb{R}$ ، عندما يؤول n إلى $+\infty$، ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\alpha$ ، إذا وجد من أجل كلّ عدد موجب $\varepsilon>0$ عدد طبيعي n_0 بحيث، مهما يكن المؤشر $n\ge n_0$، فإنّ $|u_n-\alpha|<\varepsilon$.

نسمي العدد α نهاية المتتالية $\{u_n\}_{n\ge 0}$.

نقول عن متتالية $\{u_n\}_{n\ge 0}$ إنّها **تؤول** إلى $+\infty$ (على الترتيب، $-\infty$)، عندما يؤول n إلى $+\infty$، ونكتب $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=+\infty$ (على الترتيب، $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=-\infty$)، إذا وجد من أجل كلّ عدد موجب A عدد طبيعي N_0

بحيث، مهما يكن المؤشر $n \geq N_0$، فإنّ $u_n > A$ (على الترتيب، $u_n < -A$).

نقول عن متتالية $\{u_n\}_{n\geq 0}$ إنّها متباعدة إذا كانت غير متقاربة.

نعرف النهاية الدنيا للمتتالية $\{u_n\}_{n\geq 0}$ بـ $\sup_{n\geq 0} \inf_{k\geq n} u_k$، ونرمز لها بـ $\liminf_{n\to\infty} u_n$ أو $\underline{\lim}\, u_n$. كما نعرّف النهاية العليا للمتتالية $\{u_n\}_{n\geq 0}$ بـ $\inf_{n\geq 0} \sup_{k\geq n} u_k$، ونرمز لها بـ $\limsup_{n\to\infty} u_n$ أو $\overline{\lim}\, u_n$.

إنّ النهايتين الدنيا والعليا موجودتان في كلّ الحالات (في $\overline{\mathbb{R}}$)، ولدينا دومًا المتباينة التالية: $\underline{\lim}\, u_n \leq \overline{\lim}\, u_n$. وفي حالة مساواة قيمتي النهايتين الدنيا والعليا، عندئذ تكون المتتالية $\{u_n\}_{n\geq 0}$ متقاربة في $\overline{\mathbb{R}}$، ولدينا

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n .$$

هذه الآن بعض الخواص الأخرى التي تتمتّع بهما النهايتان الدنيا والعليا:

من أجل كلّ متتاليتين عدديتين $\{u_n\}_{n\geq 0}$ وَ $\{v_n\}_{n\geq 0}$ فإنّ

أ) $\underline{\lim}(-u_n) = -\overline{\lim}\, u_n$ وَ $\overline{\lim}(-u_n) = -\underline{\lim}\, u_n$.

ب) $\underline{\lim}\, u_n \leq \underline{\lim}\, v_n$ وَ $\overline{\lim}\, u_n \leq \overline{\lim}\, v_n$، حيث $u_n \leq v_n$، $(\forall n \geq n_0)$.

وإذا كانت $\{u_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$ وَ $\{v_n\}_{n\geq 0} \subset \mathbb{R}$، فإنّ

ج) $\underline{\lim}\, u_n + \underline{\lim}\, v_n \leq \underline{\lim}(u_n + v_n)$،

د) $\underline{\lim}(u_n + v_n) \leq \underline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n$،

ه) $\overline{\lim}(u_n + v_n) \leq \overline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n$،

طالما كان المجموع معرّفًا تعريفًا جيّدًا.

أمثلة 37.1:

1) نعتبر المتتالية $u_n = (-1)^n$، $(\forall n \geq 0)$. لدينا $\inf_{k\geq n} u_k = -1$،
و $\sup_{k\geq n} u_k = +1$، $(\forall n \geq 0)$، عندئذ $\underline{\lim}\, u_n = -1$ و $\overline{\lim}\, u_n = +1$،
وهذا معناه أنّ المتتالية $u_n = (-1)^n$ متباعدة.

2) لتكن المتتالية $u_n = \dfrac{-2n+1}{3n-2}$، إذا كان n فرديّا
و $u_n = \dfrac{n-1}{2n+5}$، إذا كان n زوجيّا. لاحظ أنّ الدالتين

$$g(x) = \frac{x-1}{2x+5} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{-2x+1}{3x-2}$$

متزايدتان على $[1,+\infty[$ وأنّ $f(x) < 0 \leq g(x)$ على $[1,+\infty[$،
وهذا يؤدّي إلى

$$\inf_{p\geq n} u_p = \begin{cases} u_n, & n = 1, 3, \ldots, 2k+1, \ldots \\ u_{n+1}, & n = 0, 2, \ldots, 2k, \ldots \end{cases} \text{،} \quad (\forall n \geq 0)\text{،}$$

وَ

$$\sup_{p\geq n} u_p = \sup\left\{\frac{k-1}{2k-5},\ k = 2, 4, 6, \ldots\right\} = 1/2 \text{،} \quad (\forall n \geq 0)\text{،}$$

ومنه $\underline{\lim}\, u_n = -2/3$ و $\overline{\lim}\, u_n = 1/2$.

بما أنّ $\underline{\lim}\, u_n \neq \overline{\lim}\, u_n$، عندئذ المتتالية $\{u_n\}_{n\geq 0}$ متباعدة.

3) نعتبر المتتالية $u_n = n^3 e^{-n}$، $(\forall n \geq 0)$. نحصل بفضل المتباينة

$$e^{n+1} > \frac{(n+1)^4}{4!} > \frac{n^3(n+1)}{24} \text{،} \quad (\forall n \geq 0)\text{،}$$

على $u_n = n^3 e^{-n} < \dfrac{24e}{n+1}$، $(\forall n \geq 0)$، ومنه $\inf_{k\geq n} u_k = 0$،
$(\forall n \geq 0)$، وبالتالي $\underline{\lim}\, u_n = 0$.

لدينا من جهة أخرى، $\sup_{k\geq n} u_k = u_n$، $(\forall n \geq 3)$، لأن الدالة $\theta(x) = x^3 e^{-x}$ متناقصة في الفترة $[3,+\infty[$. إذن، $\overline{\lim}\, u_n = 0$، ومن ثمّ فإنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = \underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n = 0$.

تعريف 38.1: لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدّوال من فضاء طبولوجي E نحو $\overline{\mathbb{R}}$. نعرّف الدّوال $\inf_{n\geq 1} f_n$، $\sup_{n\geq 1} f_n$، $\underline{\lim}\, f_n$ و $\overline{\lim}\, f_n$ من E نحو $\overline{\mathbb{R}}$ كالآتي:

$$\left(\inf_{n\geq 1} f_n\right)(x) := \inf_{n\geq 1}\left(f_n(x)\right),\quad \left(\sup_{n\geq 1} f_n\right)(x) := \sup_{n\geq 1}\left(f_n(x)\right)$$

$$\left(\underline{\lim}\, f_n\right)(x) := \underline{\lim}\left(f_n(x)\right),\quad \left(\overline{\lim}\, f_n\right)(x) := \overline{\lim}\left(f_n(x)\right),$$

من أجل كلّ x في E.

نعمّم فيما يلي مفهوم النهاية الدنيا والعليا للدّوال $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ كالآتي:

تعريف 39.1: ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيًّا و $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ دالة معطاة. نعرّف النهاية الدنيا (على الترتيب، العليا) للدّالة f عند النقطة $a \in E$ بـ

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \sup_{V\in\mathcal{N}(a)}\left(\inf\{f(x), x\in V, x\neq a\}\right)$$

(على الترتيب، $\overline{\lim}_{x\to a} f(x) = \inf_{V\in\mathcal{N}(a)}\left(\sup\{f(x), x\in V, x\neq a\}\right)$)،

حيث $\mathcal{N}(a)$ أسرة كلّ الجوارات (neighborhoods) المفتوحة للنقطة a.

لدينا الخصائص التالية:

1) $\underline{\lim}_{x\to a} f(x) \leq \overline{\lim}_{x\to a} f(x)$،

2) $\lim_{x\to a} f(x) = L(\in\mathbb{R})$ إذا وإذا فقط كان $\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \overline{\lim}_{x\to a} f(x) = L$،

3) إذا كان $E = \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}$، فإنّ

$$\underline{\lim}_{x\to a} f(x) = \sup_{\varepsilon>0}\left(\inf_{0<|x-a|<\varepsilon} f(x)\right)$$

و $\overline{\lim}_{x\to a} f(x) = \inf_{\varepsilon>0}\left(\sup_{0<|x-a|<\varepsilon} f(x)\right)$.

مسألة محلولة

لتكن f دالّة من فضاء طبولوجي $(E,\mathcal{T})$ نحو فضاء متري (F,d). نضع من أجل كلّ $x \in E$،

$$\varphi(x) = \inf\{\delta(f(V)),\ V \in \mathcal{N}(x)\}،$$

حيث $\mathcal{N}(x)$ مجموعة كلّ جوارات النقطة x

و $\delta(f(V)) = \sup\{d(f(x),f(y)),\ (x,y) \in V\times V\}$،

قطر المجموعة $f(V)$.

1) أثبت أنّ المجموعة $\varphi^{-1}([0,a[)$ مفتوحة في E من أجل كلّ $0<a$.

2) إذا رمزنا بـ C_f لمجموعة نقاط اتصال f، أثبت أنّ

$$C_f = \varphi^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n\geq 1} \varphi^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[\right).$$

3) استنتج أنّ C_f من نمط G_δ.

4) أثبت أنّ مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ ليست من نمط G_δ. ماذا تستنتج؟

الحل:

1) ليكن $A=\varphi^{-1}([0,a[)$ و $x \in A$، عندئذ

$$\varphi(x) = \inf\{\delta(f(V)),\ V \in \mathcal{N}(x)\} < a$$

ممّا يؤدّي إلى وجود جوار مفتوح V_0 لِـ x بحيث $\delta(f(V_0)) < a$.

إنّ كون V_0 مفتوحا يقتضي أنّ $V_0 \in \mathcal{N}(y)$، $(\forall y \in V_0)$. نستنتج من $\delta(f(V_0)) < a$ أنّ $\varphi(y) < a$، $(\forall y \in V_0)$، و منه $V_0 \subset A$. إذن A مجموعة مفتوحة في E.

2) ينتج عن $\{0\}=\bigcap_{n\geq 1}[0,\frac{1}{n}[$ أنّ

$$\varphi^{-1}(\{0\})=\varphi^{-1}\left(\bigcap_{n\geq 1}\left[0,\frac{1}{n}\right[\right)=\bigcap_{n\geq 1}\varphi^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{n}\right[\right).$$

لنثبت الآن أنّ $C_f=\varphi^{-1}(\{0\})$. ليكن $x_0\in C_f$، عندئذ

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists V_0\in\mathcal{N}(x_0):\ f(V_0)\subset B(f(x_0),\varepsilon)$$

حيث $B(f(x_0),\varepsilon)$ الكرة المفتوحة ذات المركز $f(x_0)$ ونصف القطر ε، ومنه

$$\delta(f(V_0))\leq\delta(B(f(x_0),\varepsilon))\leq 2\varepsilon،$$

ومن ثمّ فإنّ $\forall\varepsilon>0,\ \varphi(x_0)\leq 2\varepsilon$. إذن $\varphi(x_0)=0$، أي $x_0\in\varphi^{-1}(\{0\})$.

عكسيّا، نفرض أنّ $\varphi(x_0)=0$، عندئذ يوجد، من أجل كلّ $\varepsilon>0$، $V_0\in\mathcal{N}(x_0)$ بحيث $\delta(f(V_0))<\varepsilon$، ومنه $f(V_0)\subset B(f(x_0),\varepsilon)$، وهذا يثبت أنّ f دالّة متّصلة عند النقطة x_0. إذن $x_0\in C_f$، إضافة إلى أنّ

$$C_f=\varphi^{-1}(\{0\})=\bigcap_{n\geq 1}\varphi^{-1}\left([0,\frac{1}{n}[\right).$$

3) نستنتج ممّا سبق أنّ المجموعة C_f هي تقاطع قابل للعد لمجموعات مفتوحة في E فهي إذن من نمط G_δ.

4) نفرض بالعكس أنّ $\mathbb{Q}$ من نمط G_δ، عندئذ توجد متتالية من المجموعات الجزئية المفتوحة $\{V_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{T}_0$ (حيث $\mathcal{T}_0$ الطبولوجيا الاعتيادية لِـ $\mathbb{R}$) بحيث $\mathbb{Q}=\bigcap_{n\geq 1}V_n$، ومنه $\mathbb{Q}^c=\bigcup_{n\geq 1}V_n^{\,c}$.

نعلم أنّ $\mathbb{Q}$ مجموعة قابلة للعد، وبالتالي فإنّ $\mathbb{Q}=\bigcup_{n\geq 1}\{r_n\}$، ومنه

$$\mathbb{R}=\bigcup_{n\geq 1}\left(V_n^{\,c}\cup\{r_n\}\right).$$

نضع الآن $R_n=V_n^{\,c}\cup\{r_n\}$ ، $(n\geq 1)$، ولنثبت أنّ $\mathring{R_n}=\varnothing$، $(\forall n\geq 1)$. يكفي إثبات أنّ داخليّة R_n خالية، مهما يكن $n\geq 1$ لكونها مجموعة جزئية مغلقة في $\mathbb{R}$. نلاحظ أنّ $R_n\subset\mathbb{Q}^c\cup\{r_n\}$،

$(\forall n \geq 1)$، وعليه فإنّه لا يمكن لِـ R_n أن تحوي فترة مفتوحة غير منحلة وإلاّ احتوت على عدد غير منته من الأعداد النسبية، وبالتالي فإنّ $\overset{\circ}{\overline{R_n}} = \varnothing$، $(\forall n \geq 1)$.

نذكر من جهة أخرى أنّ $(\mathbb{R}, |.|)$ فضاء متريّ تام، وبالتالي لا يمكن له أن يكتب على الشكل $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 1} R_n$، حيث $\overset{\circ}{\overline{R_n}} = \varnothing$، $(\forall n \geq 1)$، وذلك لعدم ملائمة هـذا التعبير مع مبرهنة بيـر[7] (Baire) التالية:

مبرهنة 37.1 [بيـر]: **لا يمكن لـفضاء متريّ تام أن يُـكتب عـلى شكل اتحاد قابل للعد لمجموعات جزئية داخلية إغلاقاتها خالية.**

إذن مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ ليست من نمط G_δ.

الاستنتاج: نستنتج من السؤالين 3) و4) أنّه لا توجد على الإطلاق دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بحيث تكون متّصلة على $\mathbb{Q}$ وغير متّصلة على $\mathbb{Q}^c$.

تمارين مقترحة

01 **لتكن E مجموعة غير خالية و A، B وَ C مجموعات جزئية من E.**
تَحقّـق من صحّة المساويات التالية:

1) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$،

2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$،

3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$،

4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$،

5) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B \cap C) = (A \Delta B) \cup (B \Delta C)$.

---

[7] ريني بيـر [René-Louis Baire] (1932−1874)

02 لتكن f دالة من E نحو F، $\{A_i\}_{i\in I}\subset\mathcal{P}(E)$ و $\{B_j\}_{j\in J}\subset\mathcal{P}(F)$. أثبت العلاقات التالية:

أ) $f\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\bigcup_{i\in I}f(A_i)$ ،

ب) $f\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\subset\bigcap_{i\in I}f(A_i)$ ،

ج) $f(E)\setminus f(A_i)\subset f(E\setminus A_i)$ ، $(i\in I)$،

د) $f^{-1}\left(\bigcup_{j\in J}B_j\right)=\bigcup_{j\in J}f^{-1}(B_j)$ ،

ه) $f^{-1}\left(\bigcap_{j\in J}B_j\right)=\bigcap_{j\in J}f^{-1}(B_j)$ ،

و) $f^{-1}(B_k\setminus B_j)=f^{-1}(B_k)\setminus f^{-1}(B_j)$ ، $(j,k\in J)$،

ز) $f(E)\cap B_j=\varnothing\Leftrightarrow f^{-1}(B_j)=\varnothing$ ، $(j\in J)$.

03 لتكن E مجموعة غير خالية و $\{A_n\}_{n\geq 0}$ متتالية من المجموعات الجزئية من E. أحسب النهايتين العليا والدنيا للمتتالية $\{A_n\}_{n\geq 0}$ في الحالات التالية:

1) $\{A_n\}_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة،

2) $\{A_n\}_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة،

3) $\{A_n\}_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة بـ $A_n=P$ ، إذا كان n عددا زوجيّا، و $A_n=Q$ ، إذا كان n عددا فرديّا، حيث P و Q مجموعتان جزئيتان اختياريان من E.

04 لتكن E مجموعة غير خالية و $\{A_i\}_{i\in I}\subset E$، $(|I|\geq 2)$.
أثبت العلاقات التالية:

1) $\chi_{A_i\cap A_j}=\chi_{A_i}\cdot\chi_{A_j}=\min\{\chi_{A_i},\chi_{A_j}\}$ ، $(\forall i,j\in I)$

2) $\chi_{A_i^c}=1-\chi_{A_i}$ ، $(\forall i\in I)$

3) $\chi_{A_i\setminus A_j}=\chi_{A_i}(1-\chi_{A_j})$ ، $(\forall i,j\in I)$

4) $\chi_{A_i\cup A_j}=\chi_{A_i}+\chi_{A_j}-\chi_{A_i}\cdot\chi_{A_j}=\max\{\chi_{A_i},\chi_{A_j}\}$ ، $(\forall i,j\in I)$

5) $\chi_{A_i \Delta A_j} = \chi_{A_i} + \chi_{A_j} - 2\chi_{A_i} \cdot \chi_{A_j}$ ، $(\forall i,j \in I)$

6) $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \sum_{i\in I} \chi_{A_i}$ إذا كانت $\{A_i\}_{i\in I}$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى.

05 لتكن A و B مجموعتين جزئيتين من مجموعة غير خالية E. برهن أنّ $|A\cup B| + |A\cap B| = |A| + |B|$.

06 أثبت أنه إذا كانت f دالة غامرة من $\mathbb{N}$ على مجموعة E، عندئذ E مجموعة قابلة للعد.

07 أثبت أنّ $\omega_0 \leq |E|$ من أجل كلّ مجموعة غير منتهية E.

08 لتكن $E \neq \varnothing$ و $\varphi : E \to \mathbb{N}$ دالة تحقق $|\varphi^{-1}(\{n\})| \leq \omega_0$ ، $(\forall n \geq 0)$.

1) أثبت أنّ $|E| \leq \omega_0$.

2) استنتج أنّ مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ قابلة للعد تماما.

3) إذا كانت E قابلة للعد أثبت أنّ المجموعة $\mathcal{P}_f(E) = \{A \subset E : |A| < \infty\}$ هي أيضا قابلة للعد.

09 أثبت أنّ مجموعة كثيرات الحدود ذات معاملات نسبية هي قابلة للعد.

10 ليكن (E,d) فضاءً متريًا و $A,B \subset E$. أثبت أنّ

أ) $\overline{A\cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

ب) $\overline{A\cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$

ج) $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A\cup B)^{\circ}$

د) $(A\cap B)^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$

ه) $\left(\mathring{A}\right)^c = \overline{A^c}$

11 لتكن $f : (E,d) \to (F,\rho)$ دالة معطاة.

أ) أثبت أنّ f متّصلة إذا وإذا فقط كان $f^{-1}\left(\mathring{B}\right) \subset \left(f^{-1}(B)\right)^{\circ}$ ، من أجل كلّ $B \subset F$.

ب) أثبت أنّ f متصلة إذا وإذا فقط كان $f\left(\overline{A}\right)\subset\overline{f(A)}$، من أجل كلّ $A\subset E$.

12 لتكن E مجموعة غير منتهية. أثبت أنّ الأسرة

$$\tau=\left\{A\subset E : \left|A^c\right|<\infty\right\}\cup\{\varnothing\}$$

طبولوجيا على E، ثمّ أوجد $\overline{A}$ وَ $\mathring{A}$ من أجل كلّ مجموعة جزئية $A\subset E$.

13 لتكن f دالّة من E نحو F. إذا كانت $\mathcal{T}$ طبولوجيا على F أثبت أنّ

$$f^{-1}(\mathcal{T})=\left\{f^{-1}(V), V\in\mathcal{T}\right\}$$

طبولوجيا على E. (إنّها أضعف طبولوجيا على E تجعل دالّة f متّصلة).

14 أثبت أنّ في فضاء طبولوجي قابل للفصل كلّ أسرة من المفتوحات غير المتقاطعة مثنى مثنى هي قابلة للعد.

15 أثبت أنّ الفترات التالية هي في آن واحد من كلا النمطين G_δ و F_σ:

1) $[a,b]$ 2) $]a,b[$ 3) $[a,\infty[$

16 أثبت أنّ كلّ مفتوحة أو مغلقة في فضاء متري هي من كلا النمطين F_σ و G_δ.

17 لتكن $E=C([-1,1])$ مجموعة الدوال الحقيقية المتصلة على $[-1,1]$ والمزوّدة بالمعيار $\|u\|_1=\int_{-1}^{1}|u(x)|dx$. نعتبر المتتالية $\{u_n\}_{n\geq 1}\subset E$

$$u_n(x)=\begin{cases}0, & -1\leq x\leq 0\\ nx, & 0\leq x\leq \frac{1}{n}\\ 1, & \frac{1}{n}\leq x\leq 1\end{cases}\quad (\forall n\geq 1).$$

- أثبت أنّ $\{u_n\}_{n\geq 1}$ متتالية كوشية في E.
- أثبت أنّ تقارب $\{u_n\}_{n\geq 1}$ في E إلى u يستلزم أنّ

$$u(x)=\begin{cases}0, & -1\leq x\leq 0\\ 1, & 0<x\leq 1\end{cases}.$$

- استنتج أنّ الفضاء $\left(E,\|\cdot\|_1\right)$ ليس تاما.

18 ليكن $1\leq p<\infty$، نعرّف فضاء المتّجهات ℓ^p بـ

$$\ell^p = \left\{ \{x_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R} : \sum_{n\geq 1} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

نضع $\|x\|_p = \left(\sum_{n\geq 1} |x_n|^p \right)^{1/p}$ ، من أجل كلّ $x = \{x_n\}_{n\geq 1} \in \ell^p$.

أثبت أنّ التطبيق $\|.\|_p$ معيار على ℓ^p وأنّ $\left(\ell^p(E), \|.\|_p\right)$ فضاء بناخ.

19 لتكن $\{u_n\}_{n\geq 1}$ وَ $\{v_n\}_{n\geq 1}$ متتاليتين عدديتين. أثبت العلاقات التالية:

أ) $\overline{\lim}(-u_n) = -\underline{\lim}\, u_n$ ، ب) $\underline{\lim}\, u_n \leq \overline{\lim}\, u_n$ ،

ج) $\underline{\lim}\, u_n + \underline{\lim}\, v_n \leq \underline{\lim}(u_n + v_n) \leq \overline{\lim}\, u_n + \underline{\lim}\, v_n$
$\leq \overline{\lim}(u_n + v_n) \leq \overline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n$

20 لتكن $\{u_n\}_{n\geq 1}$ متتالية عددية.

أ) أثبت أنّ $\overline{\lim}\, u_n = L (\in \mathbb{R})$ إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

ش1) $[\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 1]: \ (\forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n < L + \varepsilon)$

ش2) $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1, \exists n_1 \geq n : \ u_{n_1} > L - \varepsilon$

ب) أثبت أنّ $\underline{\lim}\, u_n = L (\in \mathbb{R})$ إذا وإذا فقط تحقّق الشرطان:

ش'1) $[\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \geq 1]: \ (\forall n \geq n_0 \Rightarrow u_n > L - \varepsilon)$

ش'2) $\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq 1, \exists n_1 \geq n : \ u_{n_1} < L + \varepsilon$

ج) استنتج ممّا سبق أنّ $\lim_{n\to\infty} u_n = L (\in \mathbb{R})$ إذا وإذا فقط كان $\underline{\lim}\, u_n = \overline{\lim}\, u_n = L$.

21 لتكن I مجموعة اختيارية و $\{x_i\}_{i\in I}, \{y_i\}_{i\in I} \subset [0, \infty]$. نضع

$\sum_{i\in I} x_i = \sup\left\{ \sum_{i\in J} x_i : |J| < \infty, J \subset I \right\}$ ، عندما $I \neq \emptyset$ ،

و $\sum_{i\in I} x_i = 0$ عندما $I = \emptyset$.

1) أثبت أنّ $\sum_{i\in I}(x_i + y_i) = \sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i$.

2) إذا فرضنا أنّ $\sum_{i\in I} x_i = a < \infty$ ، أثبت وجود مجموعة جزئية قابلة للعد $I_0 \subset I$ بحيث

$x_i = 0$ ، $(\forall i \notin I_0)$ وأنّ $\sum_{i\in I_0} x_i = a$.