الفصل الرابع

الدوال القابلة للقياس

الفصل الرابع
الدّوال القابلة للقياس

إنّ الدّوال القابلة للقياس التي نحن بصدد تعريفها لا تعتمد أساسًا على مفهوم قياس المجموعات المعرّف سابقًا بل ترجع قابلية قياسها إلى العشيرتين المعرفتين على مجموعتي المنطلق والمستقر. فعلى غرار الدوال المتّصلة التي تتعلق أساسًا بمفهوم المجموعات المفتوحة المرتبطة بفضاءات طبولوجية $f:(E,\mathcal{T})\to(E',\mathcal{T}')$، حيث $(E,\mathcal{T})$ و $(E',\mathcal{T}')$ فضاءان طبولوجيان، و $f^{-1}(\mathcal{T}')\subset\mathcal{T}$، فإنّ الدّوال القابلة للقياس (التي تعتمد على المجموعات القابلة للقياس المرتبطة بفضاءات قابلة للقياس) تلعب دورًا متميّزًا في نظرية المكاملة بمفهوم لوبيغ فهي بمثابة الدّوال المتّصلة عند دراسة تكامل ريمان.

1- الدّوال القابلة للقياس وخواصها

نذكّر أنّه إذا كانت f دالّة من E نحو E' فإنّ الصورة العكسيّة لأسرة $\mathcal{C}\subset\mathcal{P}(E')$ هي

$$f^{-1}(\mathcal{C})=\{f^{-1}(B):B\in\mathcal{C}\}.$$

من جهة أخرى، إذا كانت الأسرة $\mathcal{C}$ جبرًا (على الترتيب، عشيرة أو طبولوجيا) على E' فإنّ الأسرة $f^{-1}(\mathcal{C})$ جبر (على الترتيب، عشيرة أو طبولوجيا) على E. لدينا التعريف التالي

تعريف 01.4: ليكن (E,Σ) و (E',Σ') فضائين قابلين للقياس. نقول ع ن دالّة $f:E\to E'$ إنّها (Σ,Σ')-قابلة للقياس إذا حقّقت $f^{-1}(\Sigma')\subset\Sigma$، أي من أجـ ل كلّ عنصر $B\in\Sigma'$ فإنّ $f^{-1}(B)\in\Sigma$.

ملاحظة 02.4: 1) سوف نستغني أحياناً عن ذكر الفضائين القابلين للقياس (Σ,Σ') إن لم يكن هنالك أيّ لبس.

2) إذا كان (E,Σ,P) **فضاء احتمال** فنسمّي حينئذ كلّ دالّة قابلة للقياس $X:(E,\Sigma,P)\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ **متغيّرا عشوائيًّا** *(random variable)* **حقيقيّاً**.

هذه بعض الأمثلة عن دّوال قابلة للقياس:

مثال 03.4: ليكن (E,Σ) و (E',Σ') فضائين قابلين للقياس اختياريين.

نفرض أنّ $f:E\to E'$ دالّة ثابتة بحيث $f(x)=a$، $(\forall x\in E)$، a مثبّت في E'. لدينا من أجل كلّ $B\in\Sigma'$ ما يلي:

$$f^{-1}(B)=\begin{cases}\varnothing, & if\ a\notin B\\ E, & if\ a\in B\end{cases}$$،

وعليه فإنّ $f^{-1}(B)\in\Sigma$، $(\forall B\in\Sigma')$، أي أنّ $f^{-1}(\Sigma')=\{\varnothing,E\}\subset\Sigma$.

إذن كلّ دالة ثابتة هي (Σ,Σ')-قابلة للقياس.

مثال 04.4: ليكن (E,Σ) فضاءً قابلاً للقياس و $A\subsetneq E$ مجموعة جزئية غير خالية. نعرّف الدالة $f:(E,\Sigma)\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ بـ $f=\chi_A$.

تكون f دالة $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-قابلة للقياس إذا وإذا فقط كانت $A\in\Sigma$.

بالتأكيد، ليكن $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$، من السهل التحقّق من أنّ

$$f^{-1}(B)=\begin{cases}A, & if\ 0\notin B\ \&\ 1\in B\\ A^c, & if\ 0\in B\ \&\ 1\notin B\\ \varnothing, & if\ 0\notin B\ \&\ 1\notin B\\ E, & if\ 0\in B\ \&\ 1\in B\end{cases}$$،

ومنه $f^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))=\{\varnothing,A,A^c,E\}$.

إذن، f دالة $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-قابلة للقياس إذا وإذا فقط كانت $A\in\Sigma$.

مثال 05.4: ليكن (E,Σ) و (E',Σ') فضائين قابلين للقياس بحيث $\Sigma=\mathcal{P}(E)$. عندئذ، كلّ دالة $f:E\to E'$ هي (Σ,Σ')-قابلة للقياس.
بالتأكيد، لدينا $f^{-1}(B)\in\mathcal{P}(E)$ ، $(\forall B\in\Sigma')$، أي $f^{-1}(\Sigma')\subset\Sigma$ ،
وبالتالي فإنّ الدالة f قابلة للقياس.

ملاحظة 06.4: بأخذ $\Sigma=\mathcal{P}(E)$ نرى أنّ $A\in\Sigma$ ، $(\forall A\subset E)$، وبالتالي فإنّ $f=\chi_A$ دالة قابلة للقياس من أجل كلّ $A\subset E$. من جهة أخرى، للحصول على دالة غير قابلة للقياس $f:(E,\Sigma)\to(\mathbb{R},B(\mathbb{R}))$ حيث $\mathcal{P}(E)\subsetneq\Sigma\subsetneq\{\varnothing,E\}$ نعتبر $f=\chi_A$ مع $A\notin\Sigma$.

تبيّن المبرهنة المقبلة أنّ عـملية تركيب دالّتين قابلتين للقياس تحافظ عـلى خاصية قابلية القياس أي أنّ فضاء الدّوال القابلة للقياس مستقر (أو مغلق) تحت عمليّة التركيب. لدينا

مبرهنة 07.4: لتكن (E,Σ)، (E',Σ') و (E'',Σ'') ثـلاثة فضـاءات قابـلة للقياس. نفرض أنّ $f:(E,\Sigma)\to(E',\Sigma')$ دالّة (Σ,Σ')-قابـلة للـقياس و $g:(E',\Sigma')\to(E'',\Sigma'')$ دالّة (Σ',Σ'')-قابلة للقياس، عندئذ الدالّة المركّبة $g\circ f:(E,\Sigma)\to(E'',\Sigma'')$ دالة (Σ,Σ'')-قابلة للقياس.

إثبات: لدينا من أجل كلّ $B\in\Sigma''$ ما يلي:

$A:=g^{-1}(B)\in\Sigma'$ و $f^{-1}(A)\in\Sigma$ ،

لكون f و g قابلتين للقياس، وعليه فإنّ

$$f^{-1}(A)=f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)=(g\circ f)^{-1}(B)\in\Sigma\ .$$

إذن $(g\circ f)^{-1}(\Sigma'')\subset\Sigma$، وهذا يثبت أنّ $g\circ f$ دالّة (Σ,Σ'')-قابلة للقياس.■

قضية 08.4: لتكن f دالّة من E نحو E' ، $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(E)$ و $\mathcal{F}'\subset\mathcal{P}(E')$

بحيث $\mathcal{F}\subset f^{-1}(\mathcal{F}')$. عندئذ، f دالة $(\sigma_E(\mathcal{F}),\sigma_{E'}(\mathcal{F}'))$-قابلة للقياس.

إثبات: ينتج أوّلا عن الاحتواء $f^{-1}(\mathcal{F}')\subset\mathcal{F}$ أنّ $f^{-1}(\mathcal{F}')\subset\sigma_E(\mathcal{F})$،

وينتج من جهة أخرى عن كون الأسرة

$$\Sigma_f=\{B\in E' : f^{-1}(B)\in\sigma_E(\mathcal{F})\}$$

عشيرة على E' تحوي $\mathcal{F}'$ أنّ $\sigma_{E'}(\mathcal{F}')\subset\Sigma_f$.

وهذا يؤدّي إلى الاحتواء $f^{-1}(\sigma_{E'}(\mathcal{F}'))\subset\sigma_E(\mathcal{F})$، ومن ثمّ فإنّ f دالة $(\sigma_E(\mathcal{F}),\sigma_{E'}(\mathcal{F}'))$-قابلة للقياس.■

إذا كان $\mathcal{F}'\subset\mathcal{P}(E')$ و $\Sigma'=\sigma_{E'}(\mathcal{F}')$ فإنّ بيان قابليّة القياس لدى الدالة f يُختصر على التحقق من الاحتواء $f^{-1}(\mathcal{F}')\subset\Sigma$ فقط، وهذا ما تنصّ عليه المبرهنة التالية.

مبرهنة 09.4: ليكن (E,Σ)، (E',Σ') فضائين قابلين للقياس و $\mathcal{F}'\subset\mathcal{P}(E')$ **بحيث** $\sigma_{E'}(\mathcal{F}')=\Sigma'$. عندئذ تكون $f:E\to E'$ دالة (Σ,Σ')-قابلة للقياس **إذا وإذا فقط كان** $f^{-1}(\mathcal{F}')\subset\Sigma$.

إثبات: نفرض أنّ f دالة (Σ,Σ')-قابلة للقياس، عندئذ $f^{-1}(\Sigma')\subset\Sigma$، ومنه $f^{-1}(\mathcal{F}')\subset\Sigma$ لأنّ $\mathcal{F}'\subset\sigma_{E'}(\mathcal{F}')=\Sigma'$.

عكسيًا، إذا كان $f^{-1}(\mathcal{F}')\subset\Sigma$ فإنّه بفضل القضية السابقة f دالة $(\sigma_E(\Sigma),\sigma_{E'}(\mathcal{F}'))$-قابلة للقياس.

بما أنّ $\sigma_E(\Sigma)=\Sigma$ و $\sigma_{E'}(\mathcal{F}')=\Sigma'$، فهذا يستلزم أنّ f دالة (Σ,Σ')-قابلة للقياس.■

سوف ندرج فيما يلي مفهوم الدالة البوريلية (نسبة إلى عالم الرياضيات

الفرنسي بوريل[1] (Borel) وذلك بتزويد الفضائين E و E' بطبولوجيا اختيارية فيكون حينئذ مرجع قابلية القياس وفق العشيرتين البوريليتين $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$ و $\mathcal{B}_{\mathcal{T}'}(E')$.

تعريف 10.4: ليكن $(E,\mathcal{T})$ و $(E',\mathcal{T}')$ **فضائين طبولوجيين. نقول عن دالة** $f:E\to E'$ **إنها بوريلية إذا كانت** $\left(\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E),\mathcal{B}_{\mathcal{T}'}(E')\right)$**-قابلة للقياس.**

مثال 11.4: ليكن $(E,\mathcal{T})$ و $(E',\mathcal{T}')$ فضائين طبولوجيين. كلّ دالة متّصلة $f:(E,\mathcal{T})\to(E',\mathcal{T}')$ هي دالة بوريلية.

بالتأكيد، ينتج فورًا عن اتّصال f أنّ $f^{-1}(\mathcal{T}')\subset\mathcal{T}$، وبتطبيق المبرهنة السابقة 09.4 نحصل على $f^{-1}\left(\mathcal{B}_{\mathcal{T}'}(E')\right)\subset\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$، ومنه f دالّة بوريلية.

2- أثر أسرة على مجموعة جزئية معيّنة

نقدّم فيما يلي مفهوم أثـر (*trace*) عشيرة على مجموعة جزئية معيّنة من المجموعة المرجعية E بغية دراسة اقتصار دالة قابلة للقياس على أيّ عنصر من هذه العشيرة.

لتكن A مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة E. نعرّف **التباين القانوني** $j_A:A\to E$ بـــ $j_A(x)=x$، $(\forall x\in A)$. لدينا من أجل كلّ أسرة $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(E)$ ما يلي:

$$j_A^{-1}(\mathcal{F})=\left\{j_A^{-1}(F):F\in\mathcal{F}\right\}=\left\{A\cap F:F\in\mathcal{F}\right\}=A\cap\mathcal{F}.$$

تشكل هذه الأخيرة أسرة آثار الأسرة $\mathcal{F}$ على المجموعة الجزئية A. نُذكّر أنّه إذا كانت $\mathcal{F}$ جبرًا (على الترتيب، **عشيرة** أو **طبولوجيا**) على E فإنّ الأسرة $A\cap\mathcal{F}$ هي **جبر** (على الترتيب، **عشيرة** أو **طبولوجيا**) على

---

[1] اميل بوريل [Emile Borel] (1871–1956)

A، تسمّى بـالـجبر (على الترتيب، العشيرة أو الطبولوجيا) المستخلص(ة) من $\mathcal{F}$ على A.
إذا كانت Σ عشيرة على E فنسمّي حينئذ الثنائية $(A,A\cap\Sigma)$ **بالـفضاء الجزئي القابل للقياس من** (E,Σ).

مبرهنة 12.4: ليكن (E,Σ) فضاءً قابلاً للقياس، $A\subset E$ مجموعة جزئية غير خالية و $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(E)$. عندئذ،

$$\sigma_A(A\cap\mathcal{F})=A\cap\sigma_E(\mathcal{F}).$$

وبالخصوص، إذا كان $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيّا فإنّ

$$\mathcal{B}_{A\cap\mathcal{T}}(A)=A\cap\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E).$$

إثبات: ليكن $j_A:A\to E$ التباين القانوني من A في E، نحصل بفضل العلاقة $j_A^{-1}(\mathcal{F})=A\cap\mathcal{F}$ والمبرهنة 25.2، 2) على

$$\sigma_A(A\cap\mathcal{F})=\sigma_A\left(j_A^{-1}(\mathcal{F})\right)=j_A^{-1}(\sigma_E(\mathcal{F}))$$
$$=A\cap\sigma_E(\mathcal{F})$$

وفيما يخصّ الحالة الخاصة، نستنتج فورًا ممّا سبق أنّ

$$\mathcal{B}_{A\cap\mathcal{T}}(A)=\sigma_A(A\cap\mathcal{T})=A\cap\sigma_E(\mathcal{T})=A\cap\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)،$$

وهو المطلوب.■

توطئة 13.4: ليكن (E,Σ)، (E',Σ') فضائين قابلين للقياس، $A\subset E$ مجموعة جزئية غير خالية و $f:E\to E'$ دالّة (Σ,Σ')-قابلة للقياس. عندئذ الاقـتصار $f_{|A}:A\to E'$ هو دالّة $(A\cap\Sigma,\Sigma')$-قابلة للقياس.

إثبات: يحقق التباين القانوني $j_A:A\to E$ العلاقة $f_{|A}=f\circ j_A$، وذلك حسب المخطّط التالي:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[ur, "j_A"] \arrow[rr, "f_{|A}=f\circ j_A"] & & E' \end{tikzcd}$$

ليكن $B\in\Sigma'$، من الواضح أنّ

$$f_{|A}^{-1}(B)=\left(f\circ j_A\right)^{-1}(B)=\left(j_A^{-1}\circ f^{-1}\right)(B)$$
$$=j_A^{-1}\left(f^{-1}(B)\right)=A\cap f^{-1}(B)\qquad \in A\cap\Sigma$$

وبالتالي فإنّ $f_{|A}$ دالّة $(A\cap\Sigma,\Sigma')$–قابلة للقياس.■

تساعدنا المبرهنة المقبلة على تمييز الدّوال القابلة للقياس وذلك عن طريق اقتصاراتها على مجموعات جزئية قابلة للقياس. لدينا

مبرهنة 14.4: ليكن (E,Σ)، (E',Σ') فضائين قابلين للقياس وَ $\{E_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ بحيث $E=\bigcup_{n\geq 1}E_n$. تكون $f:E\to E'$ دالّة (Σ,Σ')–قابلة للقياس إذا وإذا فقط كانت الاقتصارات $f_{|E_n}:E_n\to E$، دوال $(E_n\cap\Sigma,\Sigma')$–قابلة للقياس، $(\forall n\geq 1)$.

إثبات: نفرض أوّلاً أنّ f دالّة (Σ,Σ')–قابلة للقياس. نستنتج من التوطئة 13.4 أنّ الاقتصار $f_{|E_n}$ دالّة $(E_n\cap\Sigma,\Sigma')$–قابلة للقياس، $(\forall n\geq 1)$.
عكسيًّا، نفرض أنّ كلّ الاقتصارات $f_{|E_n}$ دوال $(E_n\cap\Sigma,\Sigma')$–قابلة للقياس. نرى من الاحتواءات $E_n\cap\Sigma\subset\Sigma$، $(\forall n\geq 1)$، أنّ $f_{|E_n}^{-1}(B)\in E_n\cap\Sigma\subset\Sigma$، $(\forall n\geq 1)$، من أجل كلّ $B\in\Sigma'$، ومنه

$$f^{-1}(B)=E\cap f^{-1}(B)=\left(\bigcup_{n\geq 1}E_n\right)\cap f^{-1}(B)$$
$$=\bigcup_{n\geq 1}\left\{E_n\cap f^{-1}(B)\right\}=\bigcup_{n\geq 1}f_{|E_n}^{-1}(B)\qquad\in\Sigma$$

إذن f دالّة (Σ,Σ')–قابلة للقياس.■

3- الدّوال العدديّة القابلة للقياس

نسمّي **دالة عدديّة** على مجموعة E كلّ دالّة معرّفة على E وتأخذ قيمها في المستقيم الحقيقي الموسّع $\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.
نقول عن دالّة عدديّة إنّها **منتهية** إذا كان لدينا $f(E)\subset\mathbb{R}$، بمعنى أنّ

$f(x)\in\mathbb{R}$ ، $(\forall x\in E)$.

نقول عن دالّة عدديّة إنّها محدودة إذا وُجد ثابت منته $M\geq 0$ بحيث $|f(x)|\leq M$ ، $(\forall x\in E)$.

يتّضح من هذا التعريف أنّ كلّ دالّة محدودة هي منتهية، بينما العكس غير صحيح.

ملاحظة 15.4: سوف نزوّد طيلة هذا الكتاب المجموعة $\overline{\mathbb{R}}$ بالعشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

تعريف 16.4: ليكن (E,Σ) فضاءً قابلاً للقياس. نقول عن دالّة عددية $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$ إنّها Σ-قابلة للقياس إذا كانت $\left(\Sigma,\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})\right)$-قابلة للقياس. (أي نُسقط الإشـــارة إلى العشيرة $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ وذلك بناءً على الملاحظة السابقة).

سوف نرمز لمجموعة كلّ **الدّوال العديّة القابلة للقياس على E** بـ $\mathcal{M}(E,\Sigma)$. ، ولمجموعة كلّ **الدّوال العديّة الموجبة القابلة للقياس** بـ $\mathcal{M}^+(E,\Sigma)$، كما نرمز بـ $\mathcal{M}_{fin}(E,\Sigma)$ لمجموعة كلّ **الدّوال العددية المنتهية القابلة للقياس.**

لدينا الاحتواء التالي

$$\mathcal{M}_{fin}(E,\Sigma)\subset\mathcal{M}(E,\Sigma).$$

تعدّ المبرهنة الآتية من أهم المبرهنات المُميّزة للدّوال العددية القابلة للقياس حيث تسمح لنا بالتركيز على الفترات من الشكل $]a,+\infty]$ وكذا $[a,+\infty]$ ، $[-\infty,a[$ ، $[-\infty,a]$، حيث $a\in\mathbb{R}$ ، عوض كـــلّ العناصر $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. في الواقع، هذه النّتيجة هي تطبيق مباشر **للمبرهنة 09.4** لأنّ

$\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\{]a,+\infty], a\in\mathbb{R}\}) = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$.

مبرهنة 17.4: ليكن (E,Σ) فضاءً قابلاً للقياس و $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ دالّة عدديّة معطاة. إنّ القضايا التالية متكافئة:

أ) f دالّة Σ-قابلة للقياس.

ب) $f^{-1}(]a,+\infty]) \in \Sigma$، $(\forall a\in\mathbb{R})$،

ت) $f^{-1}([a,+\infty]) \in \Sigma$، $(\forall a\in\mathbb{R})$،

ث) $f^{-1}([-\infty,a[) \in \Sigma$، $(\forall a\in\mathbb{R})$،

ج) $f^{-1}([-\infty,a]) \in \Sigma$، $(\forall a\in\mathbb{R})$.

إثبات: الاستلزام أ) $\Leftarrow$ب):

لتكن f دالّة Σ-قابلة للقياس، عندئذ $f^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \subset \Sigma$، وهذا يستلزم $f^{-1}(]a,+\infty]) \in \Sigma$، $(\forall a\in\mathbb{R})$، لأنّ $]a,+\infty] \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$، $(\forall a\in\mathbb{R})$.

الاستلزام ب) $\Leftarrow$أ):

نفرض أنّ $f^{-1}(]a,+\infty]) \in \Sigma$، $(\forall a\in\mathbb{R})$. بما أنّ

$$\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}\{]a,+\infty], a\in\mathbb{R}\} = \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$$

فإنّنا نحصل بفضل المبرهنة 09.4 على $f^{-1}(\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})) \subset \Sigma$، أي أنّ f دالّة Σ-قابلة للقياس.

نحصل على باقي التكافؤات بنفس الطريقة.■

ترميز: إذا كان $f,g \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ فإنّنا نرمز اختصارًا بـ

$\{f<g\}$، $\{f\le g\}$ و $\{f=g\}$

للمجموعات $\{x\in E : f(x)<g(x)\}$، $\{x\in E : f(x)\le g(x)\}$

و $\{x\in E : f(x)=g(x)\}$، على الترتيب.

قضية 18.4: ليكن $f,g \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$، عندئذ المجموعات التالية عناصر من Σ:

1) $A=\{f>g\}\left(\equiv(f-g)^{-1}(]0,\infty])\right)$،

2) $B=\{f\geq g\}$،

3) $C=\{f=g\}$.

إثبات: 1) يمكن للقارئ التأكد بسهولة من المساواة التالية:

$$A=\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\left\{f^{-1}(]r,\infty])\cap g^{-1}([-\infty,r[)\right\}.$$

نرى فورًا من المبرهنة السابقة ومن قابلية عد مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$ أنّ $A\in\Sigma$.

2) فيما يخصّ المجموعة B نلاحظ أنّ

$$B=E\setminus\{f<g\}=E\setminus(g-f)^{-1}(]0,\infty])،$$

وهي من الواضح قابلة للقياس.

3) نلاحظ أخيرًا أنّ $C=B\setminus A$، وهي قابلة للقياس لكونها فرقا للمجموعتين القابلتين للقياس A و B. ■

تختزل المبرهنة التالية الكثير من العمليات المتعلقة بالدوال العددية المنتهية القابلة للقياس كالجمع، الضرب، القسمة وغيرهم من العمليات المعهودة وذلك بتعويض الدالّة Φ بالعبارة المناسبة.

مبرهنة 19.4: ليكن (E,Σ) فضاءً قابلاً للقياس و $(F,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيًا. إذا كان $f,g\in\mathcal{M}_{fin}(E,\Sigma)$ و $\Phi:\mathbb{R}^2\to F$ دالّة متّصلة، فإنّ الدّالة $h:E\to F$ المعرّفة بـ .

$$(\forall x\in E)\text{،}\ h(x)=\Phi(f(x),g(x))\text{،}$$

دالّة $(\Sigma,\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(F))$-قابلة للقياس.

إثبات: نفرض كالعادة أنّ المجموعة $\mathbb{R}^2$ مزوّدة بالعشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ المرفقة بالطبولوجيا الاعتيادية $\mathcal{T}_1:=\mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$. نعرّف الدالّة

$\psi : E \to \mathbb{R}^2$ بـ $\psi(x) = (f(x), g(x))$، $(\forall x \in E)$.

بهذا التعريف يكون لدينا $h = \Phi \circ \psi$. لنثبت الآن أنّ ψ دالّة $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$-قابلة للقياس. بالتأكيد، توجد من أجل كلّ مفتوحة $\Theta \in \mathcal{T}_1$ متتالية من المستطيلات المفتوحة $\{R_n\}_{n\geq 1}$، حيث $R_n = \mathcal{I}_n \times \mathcal{J}_n$، (الفترات المفتوحة $\mathcal{I}_n$ موازية لمحور الفواصل بينما الفترات المفتوحة $\mathcal{J}_n$ موازية لمحور التراتيب)، بحيث $\Theta = \bigcup_{n\geq 1} R_n$.

لدينا إذن

$$\psi^{-1}(\Theta) = \psi^{-1}\left(\bigcup_{n\geq 1} R_n\right) = \bigcup_{n\geq 1} \psi^{-1}(R_n)$$
$$= \bigcup_{n\geq 1} \left(f^{-1}(\mathcal{I}_n) \cap g^{-1}(\mathcal{J}_n)\right) \qquad \in \Sigma$$

ومنه $\psi^{-1}(\mathcal{T}_1) \subset \Sigma$، وبتطبيق المبرهنة **09.4** نرى أنّ ψ دالّة $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$-قابلة للقياس. نستنتج أخيرًا من المبرهنة **07.4** أنّ الدالّة المركّبة h دالّة $(\Sigma, \mathcal{B}_{\mathcal{T}}(F))$-قابلة للقياس.■

فيما يخصّ الدّوال العددية القابلة للقياس العامة لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 20.4: نفرض أنّ $f, g \in \mathfrak{M}(E, \Sigma)$، عندئذ $f + g,\ fg \in \mathfrak{M}(E, \Sigma)$.

إثبات: إذا كان $f, g \in \mathfrak{M}_{fin}(E, \Sigma)$، فبوضع $\Phi(x, y) = x + y$، مع الملاحظة أنّ Φ متّصلة من $\mathbb{R}^2$ نحو $\mathbb{R}$، نحصل بفضل المبرهنة السابقة على

$$f + g \in \mathfrak{M}_{fin}(E, \Sigma) \subset \mathfrak{M}(E, \Sigma).$$

نفرض الآن أنّ $f, g \in \mathfrak{M}(E, \Sigma)$ بحيث يكون المجموع $f + g$ معرّفًا على E. بوضع

$$A = \{x \in E : |f(x)| = +\infty\} \cup \{x \in E : |g(x)| = +\infty\},$$

نجد أنّ $A\in\Sigma$ (لأنّ $|f|$، $|g|$ و $+\infty$ دوال قابلة للقياس). من الواضح أنّ الاقتصارين $f_{|A}$ و $g_{|A}$ عنصران من $\mathfrak{M}(A,A\cap\Sigma)$، وأنّ $f_{|A^c},g_{|A^c}\in\mathfrak{M}_{fin}\left(A^c,A^c\cap\Sigma\right)$. إذن،

$$(f+g)_{|A^c}=f_{|A^c}+g_{|A^c}\in\mathfrak{M}\left(A^c,A^c\cap\Sigma\right).$$

من جهة أخرى، من أجل كلّ $a\in\mathbb{R}$ فإنّ

$$\begin{aligned}\left((f+g)_{|A}\right)^{-1}(]a,+\infty])&=\{x\in A:f(x)+g(x)=+\infty\}\\&=A\cap\left(\{x\in E:f(x)=+\infty\}\cup\{x\in E:g(x)=+\infty\}\right)\in A\cap\Sigma\end{aligned}$$

وهذا يثبت أنّ $(f+g)_{|A}\in\mathfrak{M}(A,A\cap\Sigma)$، وبالتالي $f+g\in\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ حسب مبرهنة (الاقتصارات) **14.4**.

فيما يخصّ الضرب، لدينا $fg\in\mathfrak{M}_{fin}(E,\Sigma)$، لكلّ $f,g\in\mathfrak{M}_{fin}(E,\Sigma)$، وذلك بتطبيق المبرهنة السابقة من أجل الدالة $\Phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـــ $\Phi(x,y)=xy$.

بوضع

$$\begin{aligned}B=&\left(\{x\in E:|f(x)|=+\infty\}\setminus\{x\in E:g(x)=0\}\right)\\&\cup\left(\{x\in E:|g(x)|=+\infty\}\setminus\{x\in E:f(x)=0\}\right)\end{aligned}$$

نحصل أوّلا على $B\in\Sigma$ وبنفس الاستدلال السابق نجد

$$f_{|B^c}\in\mathfrak{M}_{fin}\left(B^c,B^c\cap\Sigma\right) \text{ و } g_{|B^c}\in\mathfrak{M}_{fin}\left(B^c,B^c\cap\Sigma\right)،$$

ومنه $(fg)_{|B^c}\in\mathfrak{M}\left(B^c,B^c\cap\Sigma\right)$.

أخيرًا، من أجل كلّ $a\in\mathbb{R}$، فإنّ

$$\begin{aligned}\left((fg)_{|B}\right)^{-1}(]a,+\infty])&=\{x\in B:f(x)g(x)=+\infty\}\\&=B\cap\Big(\{x\in E:f(x)=+\infty\ \&\ g(x)>0\}\\&\qquad\cup\{x\in E:g(x)=+\infty\ \&\ f(x)>0\}\Big)\\&\quad\cup\{x\in E:f(x)=-\infty\ \&\ g(x)<0\}\\&\quad\cup\{x\in E:g(x)=-\infty\ \&\ f(x)<0\}\quad\in B\cap\Sigma\end{aligned}$$

إذن $(fg)_{|B} \in \mathfrak{M}(B, B \cap \Sigma)$، وبالتالي $fg \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ حسب المبرهنة 14.4، وهو المطلوب.■

ملاحظة 21.4: 1) بأخذ $g = c$ (ثابت) و $f \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ نجد أنّ $cf \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$.

2) يمكن الاستدلال بالاستقراء لإثبات أنّ $f \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ يستلزم أنّ $f^n \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ (f أس n)، من أجل كلّ $n \geq 2$.

لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1}$ متتالية من الدّوال العددية على مجموعة E، نعرّف الدّوال العددية $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$، $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$، $\underline{\lim} f_n$ و $\overline{\lim} f_n$ من E نحو $\overline{\mathbb{R}}$ كالآتي:

1) $\left(\inf\limits_{n\geq 1} f_n\right)(x) = \inf\limits_{n\geq 1}\left(f_n(x)\right)$، $(\forall x \in E)$،

2) $\left(\sup\limits_{n\geq 1} f_n\right)(x) = \sup\limits_{n\geq 1}\left(f_n(x)\right)$، $(\forall x \in E)$،

3) $\left(\underline{\lim} f_n\right)(x) = \underline{\lim}\left(f_n(x)\right) \equiv \sup\limits_{n\geq 1}\inf\limits_{k\geq n} f_k(x)$، $(\forall x \in E)$،

4) $\left(\overline{\lim} f_n\right)(x) = \overline{\lim}\left(f_n(x)\right) \equiv \inf\limits_{n\geq 1}\sup\limits_{k\geq n} f_k(x)$، $(\forall x \in E)$.

تعريف 22.4: نقول عن متتالية من الدّوال العددية $\{f_n\}_{n\geq 1}$ إنّها تتقارب "ببساطة" إلى f على E، عندما $n \to +\infty$، إذا وإذا فقط، من أجل كلّ نقطة $x \in E$، المتتالية العددية $\{f_n(x)\}_{n\geq 1}$ تتقارب إلى $f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$، عندما $n \to +\infty$. نكتبها $f_n \xrightarrow{s} f$.

قضية 23.4: لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathfrak{M}(E,\Sigma)$، عندئذ الدّوال العددية $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$، $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$، $\underline{\lim} f_n$ و $\overline{\lim} f_n$ عناصر من $\mathfrak{M}(E,\Sigma)$.

إثبات: لإثبات هذه القضية نستعين بالعلاقتين التاليتين:

$$\left\{x \in E : \inf_{n\geq 1} f_n(x) < a\right\} = \bigcup_{n\geq 1}\left\{x \in E : f_n(x) < a\right\}، \quad (1)$$

و $\bigcap_{n\geq 1}\{x\in E: f_n(x)\leq a\} = \left\{x\in E: \sup_{n\geq 1} f_n(x)\leq a\right\}$، (2)

من أجل كلّ $a\in\mathbb{R}$.

بالتأكيد، ليكن $y\in\bigcup_{n\geq 1}\{x\in E: f_n(x)<a\}$، يوجد مؤشر n_0 بحيث $f_{n_0}(y)<a$، ومنه $\inf_{n\geq 1} f_n(y)\leq f_{n_0}(y)<a$. إذن $y\in\left\{\inf_{n\geq 1} f_n<a\right\}$،

وهذا يثبت أنّ $\left\{\inf_{n\geq 1} f_n<a\right\}\subset\bigcup_{n\geq 1}\{f_n<a\}$.

عكسيًّا، نفرض أنّ $\{f_n<a\}\bigcup_{n\geq 1}\not\ni y$، عندئذ $y\notin\{f_n<a\}$، $(\forall n\geq 1)$،

أي $f_n(y)\geq a$، $(\forall n\geq 1)$، وبالتالي $\inf_{n\geq 1} f_n(y)\geq a$، إذن

$y\notin\left\{\inf_{n\geq 1} f_n<a\right\}$، وبهذا يكتمل إثبات الاحتواء العكسي.

لإثبات المساواة (2) نلاحظ أنّ $\{x\in E: f_n(x)\leq a\}\bigcap_{n\geq 1}\ni y$ تستلزم أنّ

$f_n(y)\leq a$، $(\forall n\geq 1)$، وبالتالي $\sup_{n\geq 1} f_n(y)\leq a$، أي

$y\in\left\{\sup_{n\geq 1} f_n\leq a\right\}$، وهذا يؤدّي إلى $\left\{\sup_{n\geq 1} f_n\leq a\right\}\supset\bigcap_{n\geq 1}\{f_n\leq a\}$.

عكسيًّا، نفرض أنّ $\{f_n\leq a\}\bigcap_{n\geq 1}\not\ni y$، يوجد عندئذ مؤشر n_0 بحيث

$f_{n_0}(y)>a$، ومنه $\sup_{n\geq 1} f_n(y)\geq f_{n_0}(y)>a$. إذن $y\notin\left\{\sup_{n\geq 1} f_n\leq a\right\}$.

ومنه $\{f_n\leq a\}\bigcap_{n\geq 1}\subset\left\{\sup_{n\geq 1} f_n\leq a\right\}$، وبهذا تتحقق المساواة (2).

نستنتج من العلاقتين (1) و(2) أنّ $\inf_{n\geq 1} f_n$ و $\sup_{n\geq 1} f_n$ عنصران من $\mathfrak{M}(E,\Sigma)$.

فيما يخصّ النهايتين الدنيا والعليا، يكفي وضع $g_n=\inf_{k\geq n} f_k$ و $h_n=\sup_{k\geq n} f_k$، $(\forall n\geq 1)$، لنحصل ممّا سبق على

$$\{g_n\}_{n\geq 1}, \{h_n\}_{n\geq 1}\subset\mathfrak{M}(E,\Sigma)،$$

وبالتالي

$$\left(\overline{\lim} f_n\right)=\inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} f_k\right)=\inf_{n\geq 1} h_n \quad \text{و} \quad \left(\underline{\lim} f_n\right)=\sup_{n\geq 1}\left(\inf_{k\geq n} f_k\right)=\sup_{n\geq 1} g_n$$

عنصران من $\mathfrak{M}(E,\Sigma)$. ■

تنصّ النتيجة الآتية على أنّ نهاية متتالية من الدّوال القابلة للقياس المتقاربة ببساطة هي بدورها قابلة للقياس.

لازمة 24.4: لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ بحيث $f_n \xrightarrow{s} f$، عندئذ $f \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$.

إثبات: لدينا فرضا $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$، $(\forall x \in E)$، ومنه

$f(x) = \underline{\lim} f_n(x) = \overline{\lim} f_n(x)$، $(\forall x \in E)$.

إذن $f \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$، وذلك بفضل القضيّة 23.4.■

ملاحظة 25.4: 1) لتكن $f,g \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$. بوضع $f = f_1$ و $g = f_n$، $(\forall n \geq 2)$، نحصل بفضل القضيّة 23.4 على

$$inf(f,g) = \inf_{n\geq 1} f_n \in \mathfrak{M}(E,\Sigma) \text{ و } sup(f,g) = \sup_{n\geq 1} f_n \in \mathfrak{M}(E,\Sigma).$$

2) من المعلوم أنّ فضاء الدّوال المتّصلة ليس مستقرًّا بالنسبة إلى النّهايات البسيطة (النّقطيّة) بينما تخبرنا **اللازمة 24.4** أنّ الفضاء $\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ مستقرّ بالنّسبة للنّهايات البسيطة.

3) على القارئ توخّي الحذر عند التعامل مع المجموعات غير القابلة للعد، فينبغي له إذن أن يدرك أنّ $\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ ليست مستقرّة بالنّسبة للعمليات غير القابلة للعد، فلا يُسمح بتعويض متتالية من الدّوال في **القضيّة 23.4 واللاّزمة 24.4** بأسرة غير قابلة للعد من الدّوال، أي إذا كانت $\{f_i\}_{i\in S} \subset \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ أسرة من الدّوال القابلة للقياس، حيث S مجموعة **غير قابلة للعد**، فعلى العموم $\sup_{i\in S} f_i \notin \mathfrak{M}(E,\Sigma)$، $\inf_{i\in S} f_i$.

مثال مضاد 26.4: نعتبر فضاء القياس $([0,1],\mathcal{L},m)$ و $P \subset [0,1]$ بحيث $P \notin \mathcal{L}$. من الواضح أنّه من أجل كلّ $i \in P$ لدينا

$\chi_{\{i\}} \in \mathfrak{M}([0,1],\mathcal{L})$، بينما $\sup_{i\in P} \chi_{\{i\}} = \chi_P \notin \mathfrak{M}([0,1],\mathcal{L})$.

تعريف 27.4: لتكن لدينا $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ دالّة عدديّة. نعرّف الجزء الموجب f^+ (على الترتيب، الجزء السالب f^-) للدّالة f كالآتي

$$f^+(x) = sup(f(x), 0) \equiv \frac{|f(x)| + f(x)}{2}$$

(على الترتيب، $f^-(x) = sup(-f(x), 0) \equiv \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$ ، $(\forall x \in E)$).

هذه بعض خواص الدّالتين f^+ و f^- :

1. $f^+(E) \subset [0, +\infty]$ و $f^-(E) \subset [0, +\infty]$ ،
2. $f = f^+ - f^-$ ،
3. $|f| = f^+ + f^-$ ،
4. $f^+(x).f^-(x) = 0$ ، $(\forall x \in E)$.

قضية 28.4: ليكن $f \in \mathcal{M}(E, \Sigma)$ ، عندئذ f^+ ، f^- و $|f|$ عناصر من $\mathcal{M}(E, \Sigma)$. عكسيًا، إذا كان f^+ و f^- في $\mathcal{M}(E, \Sigma)$ فإنّ $f \in \mathcal{M}(E, \Sigma)$.

إثبات: بما أنّ الدّالتين f و 0 قابلتان للقياس، فإنّه بفضل الملاحظة **25.4** الدّالتان f^+ و f^- قابلتان للقياس، وبدورها تكون الدّالة $|f| = f^+ + f^-$ قابلة للقياس.

فيما يخصّ العكس، لدينا $f = f^+ - f^-$ مع الإشارة إلى أنّ الفرق معرّف تعريفا جيّدًا، فيكفي إذن تطبيق المبرهنة **20.4** للحصول على النتيجة المطلوبة.■

ملاحظة 29.4: ننبّه القارئ إلى أنّ كون $|f| \in \mathcal{M}(E, \Sigma)$ لا يستلزم على العموم أنّ $f \in \mathcal{M}(E, \Sigma)$ كما يتجلى في المثال المضاد التالي:

مثال مضاد 30.4: لـ يكن (E, Σ) فضاءً قابلاً للقياس و $A \notin \Sigma$. نعرّف الدّالة العددية $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ كالآتي $f(x) = -1$ ، عندما $x \in A$ ، و $f(x) = +1$ ، عندما $x \notin A$.

من الواضح أنّ $|f| \equiv 1$، وهي بطبيعة الحال دالة قابلة للقياس، وبما أنّ $A = \{f = -1\} \notin \Sigma$، عندئذ $f \notin \mathcal{M}(E,\Sigma)$ وفقا للقضية 18.4.

4- الدّوال البسيطة

سنقدّم فيما يلي نوعًا خاصًّا من الدّوال العددية التي تكتب بدلالة عدد منته من الدوال المميّزة ألا وهي الدّوال البسيطة. كما نتطرّق إلى مسألة تقريب كلّ دالة عددية قابلة للقياس بمتتالية من الدّوال البسيطة ممّا يسمح لنا أوّلا بدراسة خواص التكامل من أجل الدّوال البسيطة ثمّ نوسّعها إلى الدّوال القابلة للقياس وذلك بفضل المبرهنة الأساسية للتقريب 33.4.

تعريف 31.4: نسمّي دالّة بسيطة على مجموعة E كلّ دالّة $\varphi : E \to \mathbb{R}$ من الشكل $\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{E_k}$، حيث $c_1,...,c_m$ ثوابت حقيقية متمايزة و $\{E_k\}_{k=1}^{m}$ تجزئة منتهية للمجموعة E. (يُمثّل χ_{E_k} الدالة المميّزة لـ E_k)

نشير إلى أنّ كل دالة عددية منتهية $\varphi : E \to \mathbb{R}$ بحيث $\text{Card}\varphi(E) < \infty$ يمكن كتابتها على شكل دالة بسيطة. من جهة أخرى، بوضع $\varphi(E) = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$، حيث $c_i \neq c_j$، عندما $i \neq j$، نحصل على تجزئة منتهية $\{E_i\}_{i=1}^{m}$ للمجموعة E كالآتي

$$E_i = \{x \in E : \varphi(x) = c_i\}\text{، } (i = 1,2,...,m).$$

قضية 32.4: ليكن (E,Σ) فضاءً قابلاً للقياس و $\varphi : E \to \mathbb{R}$ دالّة بسيطة معرّفة بـ $\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_{E_k}$، الثوابت $\{c_k\}$ متمايزة. عندئذ، $\varphi \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$ إذا وإذا فقط كان $\{E_k\}_{k=1}^{m} \subset \Sigma$.

إثبات: لدينا $E_i = \{x \in E : \varphi(x) = c_i\}$، $(i = 1,2,...,m)$، وعليه فإنّ

$E_i \in \Sigma$ إذا كان $\varphi \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$ حسب القضية **18.4**.

عكسيًّا، إذا كانت $\{E_k\}_{k=1}^{m} \subset \Sigma$ فإنّ $\{\chi_{E_k}\}_{k=1}^{m} \subset \mathfrak{M}(E,\Sigma)$، (انظر **المثال 04.4**)، نستخلص فورًا من خاصيتي الجمع والضرب بثابت أنّ $\varphi \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$. ■

ترميز: سوف نرمز لمجموعة كلّ **الدّوال البسيطة القابلة للقياس على** (E,Σ) بـــ $\mathbb{S}(E,\Sigma)$، كما نرمز لمجموعة كلّ **الدّوال البسيطة الموجبة القابلة للقياس بـــ** $\mathbb{S}^{+}(E,\Sigma)$.

من السهل التحقّق من أنّ $\mathbb{S}(E,\Sigma)$ فضاء متّجهات على الحقل $\mathbb{R}$، ولدينا الاحتواء التالي:

$$\mathbb{S}^{+}(E,\Sigma) \subset \mathbb{S}(E,\Sigma) \subset \mathfrak{M}(E,\Sigma).$$

نصل الآن إلى نتيجة هامة للغاية الخاصّة بتقريب دالة عددية قابلة للقياس بمتتالية من الدّوال البسيطة. في الواقع تبيّن هذه النتيجة كثافة المجموعة $\mathbb{S}(E,\Sigma)$ في $\mathfrak{M}(E,\Sigma)$ وفق طبولوجيا التقارب البسيط.
لدينا:

مبرهنة 33.4 (المبرهنة الأساسية للتقريب): ليكن (E,Σ) فضاءً قابلاً للقياس و $f \in \mathfrak{M}(E,\Sigma)$. توجد متتالية $\{\theta_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{S}(E,\Sigma)$ بحيث

أ) $\theta_n \xrightarrow{s} f$، على E.

ب) $|\theta_1(x)| \leq |\theta_2(x)| \leq \ldots \leq |\theta_n(x)| \leq \ldots \leq |f(x)|$، $(\forall x \in E)$.

من جهة أخرى، إذا كانت f محدودة فإنّ θ_n تؤول بانتظام إلى f على E.

إثبات: نعتبر أوّلاً الحالة الموجبة $f \in \mathfrak{M}^{+}(E,\Sigma)$. نضع من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}^*$ و k بحيث $1 \leq k \leq n.2^n$ ما يلي:

$$E_{k,n} = \begin{cases} f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right[\right), & if\ 1 \leq k \leq n.2^n \\ f^{-1}\left([n,+\infty]\right), & if\ k = n.2^n + 1. \end{cases}$$

من الواضح أنّ $E_{k,n}\in\Sigma$، وأنّ الجملة $\{E_{k,n}\}_{k=1}^{n.2^n+1}$ تجزئة للمجموعة E. نعرّف $\theta_n:E\to\mathbb{R}$ بـ .

$$\theta_n(x)=\sum_{k=1}^{n.2^n+1}\frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{k,n}}(x).$$

واضح أنّ $\{\theta_n\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{S}^+(E,\Sigma)$، كما يمكن التحقّق بسهولة من أنّ المتتالية $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ متزايدة.

تقارب المتتالية $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$: ليكن $x_0\in E$ بحيث $f(x_0)<+\infty$.
نضع $n_0=[f(x_0)]+1$، (حيث نرمز بـــ $[z]$ للجزء الصحيح للعدد الحقيقي z)، عندئذ $0\leq f(x_0)<n_0$. إذن من أجل كلّ $n\geq n_0$ فإنّ

$$\theta_n(x_0)=\sum_{k=1}^{n.2^n}\frac{k-1}{2^n}\chi_{E_{k,n}}(x_0),$$

كما يوجد $k\in\mathbb{N}^*$، $1\leq k\leq n.2^n$، بحيث $\frac{k-1}{2^n}\leq f(x_0)<\frac{k}{2^n}$. إذن

$$\theta_n(x_0)=\frac{k-1}{2^n} \text{ و } 0\leq f(x_0)-\frac{k-1}{2^n}<\frac{1}{2^n}.$$

ومنه

$$0\leq f(x_0)-\theta_n(x_0)<\frac{1}{2^n},\ (\forall n\geq n_0).$$

وهذا يثبت أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n(x_0)=f(x_0)$.

ليكن الآن $x_0\in E$ و $f(x_0)=+\infty$، عندئذ $f(x_0)>n$، $(\forall n\geq 1)$.
لدينا في هذه الحالة $\theta_n(x_0)=n$، $(\forall n\geq 1)$، وبالمرور إلى النهاية نجد $\lim\limits_{n\to+\infty}\theta_n(x_0)=f(x_0)=+\infty$.

إذن المتتالية $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ متقاربة ببساطة إلى f على E.

نفرض أخيرًا أنّ f محدودة. يوجد عندئذ ثابت $M>0$ بحيث $0\leq f(x)\leq M$، $(\forall x\in E)$. لدينا إذن من أجل كلّ عدد طبيعي $M<n$ ما يلي:

$$0 \le f(x) < n \text{ ، } (\forall x \in E) \text{ ،}$$

نستنتج فوراً أنّ

$$\theta_n(x) = \sum_{k=1}^{n.2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{k,n}}(x) \text{ ، } (\forall x \in E) \text{ ، } (\forall n > M) .$$

نرى ممّا سبق أنّ من أجل كلّ $x \in E$ يوجد عدد طبيعي k ، $1 \le k \le n.2^n$ ، بحيث $\frac{k-1}{2^n} \le f(x) < \frac{k}{2^n}$ ، وبالتالي

$$0 \le f(x) - \frac{k-1}{2^n} = f(x) - \theta_n(x) < \frac{1}{2^n} \text{ ، } (\forall n > M) .$$

وبأخذ الحد الأعلى على E نجد

$$\|f - \theta_n\|_\infty = \sup_{x \in E} |f(x) - \theta_n(x)| \le \frac{1}{2^n} \text{ ، } (\forall n > M) \text{ ،}$$

وهذا يثبت أنّ المتتالية $\{\theta_n\}_{n\ge1}$ متقاربة بانتظام إلى f على E .

فيما يخصّ الحالة العامة للدّوال القابلة للقياس ذات إشارة اختيارية نذكّر أنّ كلّ دالّة عددية f هي عبارة عن فرق دالّتين موجبتين: $f = f^+ - f^-$ (التعريف 27.4)، لذا توجد حسب ما سبق متتاليتان متزايدتان من الدّوال البسيطة القابلة للقياس $\{\varphi_n\}_{n\ge1}$ و $\{\psi_n\}$ في $\mathbb{S}^+(E,\Sigma)$ بحيث $\varphi_n \nearrow f^+$ و $\psi_n \nearrow f^-$ ، عندما $n \to +\infty$.

باعتبار المتتالية $\theta_n = \varphi_n - \psi_n$ ، $(\forall n \ge 1)$ نجد أنّ

$$\{\theta_n\}_{n\ge1} \subset \mathbb{S}(E,\Sigma) \text{ و } \theta_n \xrightarrow{s} f^+ - f^- \equiv f \text{ في } E .$$

لدينا من جهة أخرى،

$|\theta_n| = \varphi_n + \psi_n$ ، $(\forall n \ge 1)$ ، و $\{|\theta_n|\}_{n\ge1} \subset \mathbb{S}^+(E,\Sigma)$ بحيث $|\theta_n| \nearrow (f^+ + f^-) \equiv |f|$ ، عندما $n \to +\infty$ ، وبهذا يكتمل الإثبات.■

نتطرّق فيما يلي إلى مبرهنة **إغوروف**[2] (Egoroff) في فضاء قياس منته

---

[2] ديمتري إغوروف [Dimitri Egoroff] (1869–1931)

والتي مفادها أنّه بالإمكان جعل كلّ متتالية من الدّوال القابلة للقياس، المتقاربة تقريبًا أينما كانت، متقاربة بانتظام على مجموعة جزئية قابلة للقياس بحيث يكون قياس متمّمتها أصغر من كلّ عدد معطى $\varepsilon > 0$. بعبارة أخرى، كلّ متتالية متقاربة μ-تاك هي "تقريبًا" متقاربة بانتظام.

يبدو أنّ فكرة هذه المبرهنة الشهيرة مستوحاة من المتتالية $f_n(x) = x^n$ على $[0,1]$ حيث أنّها متقاربة m-تاك إلى الصفر وليست متقاربة بانتظام على $[0,1]$، والإشكال كلّه هو في جوار النّقطة $x = 1$. بالفعل، لو ابتعدنا قليلاً عن النّقطة $x = 1$ فإنّنا نحصل على التّقارب بانتظام على $[0,1-\delta]$ من أجل كلّ $\delta > 0$ مع الملاحظة أنّ من أجل كلّ عدد $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث $m(]1-\delta,1]) = \delta < \varepsilon$.

مبرهنة 34.4 [إغوروف # Egoroff]: **ليكن** (E,Σ,μ) **فضاء قياس** **<u>منتهيا</u>** **ولتكن** $\{f_n\}_{n\geq 1}$ **و** f **دوالا قابلة للقياس من** E **نحو** $\mathbb{R}^N$ **بحيث** $f_n \to f$، μ**-تاك. عندئذ، من أجل كلّ** $\varepsilon > 0$، **توجد مجموعة جزئية قابلة للقياس** $A \in \Sigma$، $\mu(A^c) < \varepsilon$ **بحيث** $f_n \xrightarrow{u} f$ **(بانتظام) على** A.

إثبات: نعرّف من أجل كلّ m و n في $\mathbb{N}^*$ المجموعات التالية:

$$A_{mn} = \bigcap_{k\geq n} \left\{x \in E : \|f_k(x) - f(x)\| \leq \tfrac{1}{m}\right\}،$$

حيث $\|.\|$ المعيار الإقليدي في $\mathbb{R}^N$:

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^{N} y_i^2، \text{ من أجل } y = (y_1, y_2, \ldots, y_N) \in \mathbb{R}^N.$$

ينتج عن كون الدوال f_k، f و $\|.\|$ قابلة للقياس أنّ $A_{mn} \in \Sigma$.

بوضع $N_0 = \{x \in E : f_n(x) \nrightarrow f(x),\ n \to \infty\}$ نرى أنّ $\mu(N_0) = 0$. من جهة أخرى، لدينا من أجل كلّ m و n في $\mathbb{N}^*$ الاحتواء التالي $A_{mn} \subset A_{m(n+1)}$، أي المتتالية $\{A_{mn}^c\}_{n\geq 1}$ متناقصة من أجل كلّ $m \geq 1$ مثبّت. بما أنّ $\mu(E)$ منته، عندئذ $\mu(A_{m1}^c) < \infty$، نستنتج من الخاصيّة الثانية للتقارب أنّ $\lim_{n\to\infty} \mu(A_{mn}^c) = \mu\left(\bigcap_{n\geq 1} A_{mn}^c\right)$. لنثبت الآن الاحتواء $B_m = \bigcap_{n\geq 1} A_{mn}^c \subset N_0$، من أجل كلّ $m \geq 1$. بالتأكيد، ليكن $x \in B_m$،

عندئذ $x \notin A_{mn}$، لكلّ $n \in \mathbb{N}^*$، أي من أجل كلّ $n \in \mathbb{N}^*$ يوجد $k_n \geq n$ بحيث $\left\| f_{k_n}(x) - f(x) \right\| > \frac{1}{m}$، وهذا يعني أنّ $f_k(x) \nrightarrow f(x)$، عندما $k \to \infty$، ومنه $x \in N_0$. نستنتج ممّا سبق أنّ $\mu\left(\bigcap_{n \geq 1} A_{mn}^c \right) = 0$، ومن ثمّ فإنّ $\left\{ \mu\left(A_{mn}^c \right) \right\}_{n \geq 1}$ تؤول إلى 0، عندما $n \to \infty$، وبالتالي من أجل كلّ $m \geq 1$ و $\varepsilon > 0$، يوجد $n_{\varepsilon,m} \geq 1$ بحيث $\mu\left(A_{mn_{\varepsilon,m}}^c \right) < \varepsilon / 2^{m+1}$.

أخيرًا، بوضع $A = \bigcap_{m \geq 1} A_{mn_{\varepsilon,m}}$، نحصل على $A \in \Sigma$، إضافة إلى أنّ

$$\mu\left(A^c \right) \leq \sum_{n \geq 1} \mu\left({A^c}_{mn_{\varepsilon,m}} \right) < \varepsilon .$$

فيما يخصّ التقارب المنتظم على المجموعة الجزئية A نلاحظ أنّ من أجل $\varepsilon > 0$ معطى، ومن أجل كلّ $m \in \mathbb{N}^*$ وكلّ $k \geq n_{\varepsilon,m}$ ($n_{\varepsilon,m}$ المعرّف أعلاه) فإنّ $\left\| f_k(x) - f(x) \right\| \leq \frac{1}{m}$، مهما يكن $x \in A$ (لأنّ $x \in A$ يستلزم أنّ $x \in A_{mn_{\varepsilon,m}}$، مهما يكن $m \in \mathbb{N}^*$). إذن

$$\sup_{x \in A} \left\| f_k(x) - f(x) \right\| \leq \frac{1}{m} \text{، مهما } k \geq n_{\varepsilon,m} \text{،}$$

وهذا يثبت أنّ $f_n \xrightarrow{u} f$ على A. ■

ملاحظة 35.4: إنّ مبرهنة **إغوروف** ليست صحيحة في فضاء قياس غير منته إن لم يضف إلى المتتالية $\{f_n\}_{n \geq 1}$ شروطًا أخرى سوف نعود إليها لاحقًا (أنظر المبرهنة 58.6). سنعطي فيما يلي مثالاً مضادًا **لمبرهنة إغوروف** في فضاء قياس غير منته.

مثال مضاد 36.4: نعتبر المعطيات التالية:

$$E = \mathbb{R} \text{ و } f_n = \chi_{[n,\infty[} \text{، } (\forall n \geq 1).$$

من السهل التأكد من أنّ $f_n \xrightarrow{s} f = 0$. نفرض أنّ من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ يوجد $A \in \mathcal{L}$ بحيث $m\left(A^c \right) < \varepsilon$ و $\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in A} \left| f_n(x) \right| \right) = 0$. إذن، من أجل $\delta = \frac{1}{2}$ يوجد مؤشر $n_0 \geq 1$ بحيث مهما يكن $x \in A$ و $n \geq n_0$ فإنّ $\left| f_n(x) \right| < \frac{1}{2}$، وهذا يعني (حسب تعريف $f_n(x)$) أنّ $f_n(x) = 0$،

مهما يكن $x\in A$ و $n\geq n_0$. نستنتج أنّ $A\subset]-\infty,n_0[$، أي $[n_0,\infty[\subset A^c$، ومن ثمّ فإنّ $m([n_0,\infty[)=+\infty\leq m(A^c)<\varepsilon$، وهذا غير ممكن. إذن، f_n لا تتقارب بانتظام على A.

تجسيدا للمبدأ الثاني للتلوود[3] (Littlewood) تبيّن مبرهنة لوسين[4] (Lusin) التالية كيف أنّ كلّ دالة قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ في $\mathbb{R}$ هي "تقريبًا" دالة متّصلة، بمعنى أنّه بإمكاننا جعل كلّ دالة قابلة للقياس متّصلة إذا ما أقصينا بعض القيم التي تشكّل مجموعة ذات قياس متناه في الصغر. لدينا

مبرهنة 37.4 [لوسين # Lusin]: لتكن $E\subset\mathbb{R}$ مجموعة جزئية قابلة للقياس (لوبيغ) بحيث $m(E)<\infty$، ولتكن $f:E\to\mathbb{R}$ دالة قابلة للقياس (لوبيغ). عندئذ، من أجل كلّ عدد $\varepsilon>0$ توجد مجموعة جزئية متراصة $K\subset E$ بحيث $m(E\setminus K)<\varepsilon$، ويكون الاقتصار $f:K\to\mathbb{R}$ متّصلا.

إثبات: نفرض أوّلا أنّ f دالة بسيطة $f=\sum_{j=1}^{N}c_j\chi_{E_j}$، حيث $c_i\neq c_j$ من أجل $i\neq j$، و $E_i=\{x\in E: f(x)=c_i\}$، $(\forall i=1,\dots,N)$. توجد من أجل كلّ $i=1,\dots,N$ مجموعة جزئية متراصة $K_i\subset E_i$ بحيث $m(E_i\setminus K_i)<\frac{\varepsilon}{N}$، وذلك حسب **القضية** **42.3**.

بوضع $K=K_1\cup K_2\cup\dots\cup K_N$ نحصل على مجموعة جزئية متراصة K من E تحقق

$$m(E\setminus K)=m\left(\bigcup_{i=1}^{N}E_i\setminus\bigcup_{i=1}^{N}K_i\right)\leq m\left(\bigcup_{i=1}^{N}(E_i\setminus K_i)\right)\leq\sum_{i=1}^{N}m(E_i\setminus K_i)<\varepsilon.$$

نعرّف الآن الدّالة $g:K\to\mathbb{R}$ بـ $g=f_{|K}$.

[3] جون ادنصر لتلوود [John Edensor Littlewood] (1885-1977)

[4] نيكولا لوسين [Nikolaï Nikolaïevitch Lusin] (1883-1950)

لدينا $g(x)=c_i$، $(\forall x\in K_i)$، من أجل كلّ $i=1,...,N$، ومنه الدّوال $g_{|K_i}:K_i\to\mathbb{R}$ متّصلة على المغلقات K_i. إذن، من أجل كلّ مغلقة $W\subset\mathbb{R}$ فإنّ $\left(g_{|K_i}\right)^{-1}(W)\equiv K_i\cap g^{-1}(W)$ مغلقة في K_i، وبما أنّ K_i مغلقة في K، عندئذ $K_i\cap g^{-1}(W)$ مغلقة في K. نستنتج من هذا أنّ

$$g^{-1}(W)=K\cap g^{-1}(W)=\left(\bigcup_{i=1}^{N}K_i\right)\cap g^{-1}(W)=\bigcup_{i=1}^{N}\left(K_i\cap g^{-1}(W)\right)$$

مغلقة في K، وعليه فإنّ الدالّة $g:K\to\mathbb{R}$ متّصلة، وبهذا تتحقق المبرهنة من أجل الدّوال البسيطة القابلة للقياس.

نفرض الآن أنّ f دالة قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ على E، توجد إذن بمقتضى المبرهنة الأساسية للتقريب متتالية من الدّوال البسيطة القابلة للقياس $\{\theta_n\}_{n\geq 1}$ بحيث $\theta_n\xrightarrow{s}f$ في E. وحسب مبرهنة إغوروف فمن أجل كلّ $\varepsilon>0$ توجد مجموعة جزئية متراصة $K_0\subset E$ بحيث

$m(E\setminus K_0)<\frac{\varepsilon}{2}$ وَ $\theta_n\xrightarrow{u}f$ على K_0.

نحصل ممّا سبق أنّه لكلّ عدد طبيعي $n\geq 1$ توجد مجموعة جزئية متراصة $K_n\subset E$ بحيث $m(E\setminus K_n)<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ وَ $\theta_n:K_n\to\mathbb{R}$ دالّة متّصلة.

بوضع $K=\bigcap_{n\geq 0}K_n$ نحصل على مجموعة جزئية متراصة في E غير خالية، وإلاّ صارت E مهملة (لأنّنا نحصل في مثل هذه الحالة إن حدثت على

$$m(E)=m(K)+m(E\setminus K)=0+m\left(\bigcup_{n\geq 0}K_n^c\right)\leq\sum_{n\geq 0}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon$$

مهما يكن ε، ومنه $m(E)=0$).

يحقق K ما يلي

$$m(E\setminus K)=m\left(\bigcup_{n\geq 0}K_n^c\right)\leq\sum_{n\geq 0}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}=\varepsilon.$$

أخيرًا، بما أنّ $K\subset K_n$، $(\forall n\in\mathbb{N})$، وكلّ الدّوال $\theta_n:K\to\mathbb{R}$ متّصلة على K، إضافة إلى أنّ $\theta_n\xrightarrow{u}f$ على K (لأنّ $K_0\subset K$)، فإنّنا

نحصل على دالّة f متّصلة على K، كنهاية منتظمة لمتتالية من الدوال المتّصلة وذلك حسب مبرهنة شهيرة في التحليل الرياضي.■

ملاحظة 38.4: في الواقع لا يمكن تحسين مبرهنة لوسين أكثر ممّا هي عليه، فعلى سبيل المثال، إذا كانت $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالّة قابلة للقياس فلا توجد على العموم مجموعة جزئية $A\in\mathcal{L}$ بحيث $m(A^c)=0$ ويكون الاقتصار $f_{|A}$ متّصلا.

تعريف 39.4: ليكن لدينا (E,τ) فضاءً طبولوجيّا و $f:E\to\mathbb{R}$ دالّة معطاة. نـسمّي إغلاقة الـمجموعة $\{x\in E: f(x)\neq 0\}$ في E بحامل (support) الدالّة f، ونرمز لها بِ $supp f$، كما نرمز بِ $C_c(E)$ لفضاء كـلّ الدوال المتّصلة (ذات قيم حقيقية أو مركّبة) ذات حامل متراص (في E). نزوّد $C_c(E)$ بمعيار التقارب المنتظم $\|f\|_\infty=\sup_{x\in E}|f(x)|$.

(لاحظ أنّ الحد الأعلى موجود لأنّه في الواقع يؤخذ على المجموعة المتراصة $supp f$)

هذه الآن صيغة عامّة لمبرهنة لوسين في فضاء قياس معرّف على فضاء طبولوجي انفصالي متراص محليّا E، بمعنى أنّ E فضاء طبولوجي انفصالي بحيث تقبل كلّ نقطة منه جوارًا متراصًا. على سبيل المثال، $\mathbb{R}^n$ المزوّد بالطبولوجيا الاعتيادية هو مثال عن فضاء متراص محليّا، وعلى العموم كلّ مفتوحة أو مغلقة من فضاء متراص محليّا هي فضاء متراص محليّا بالنسبة إلى الطبولوجيا المستخلصة. نشير أيضًا إلى أنّ كلّ فضاء مُعيّر ذي بُعْـدٍ منته هو متراص محليّا.

مبرهنة 40.4 [لوسين]: ليكن $(E,\mathcal{T})$ فضاءً طبولوجيّا انفصاليّا ومتراصّا محليًّا ولتكن Σ عشيرة على E تحوي العشيرة البوريلية $\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)$. نفرض أنّ $\mu:\Sigma\to[0,+\infty]$ قياس موجب يحقّق الشروط التالية:

أ) $\mu(K)<\infty$ من أجل كلّ مجموعة جزئية متراصة K في E،

ب) مهما تكن $A\in\Sigma$ فإنّ

$\mu(A)=\inf\{\mu(V), A\subset V,\ V$ مفتوحة في $E\}$،

ج) مهما تكن $A \in \Sigma$ بحيث $\mu(A) < \infty$، أو A مفتوحة فإنّ
$\mu(A) = sup\{\mu(K), K \subset A,\ E$ مجموعة جزئية متراصة في $K\}$.
عندئذ، من أجل كلّ عدد $\varepsilon > 0$ وكلّ دالة قابلة للقياس $f : E \to \mathbb{C}$، معدومة على مجموعة جزئية قابلة للقياس متمّمتها منتهية القياس، توجـد دالة $g \in C_c(E)$ بحيث

$$\mu(\{x \in E : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon .$$

بالإضافة إلى ذلك، فإنّ

$$\sup_{x\in E}|g(x)| \le \sup_{x\in E}|f(x)| .$$

يمكن للقارئ أنّ يطلّع على بيان هذه المبرهنة في كتاب و. رودين (Walter Rudin) [40] ص 56.

مسألة محلولة

لتكن $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة تحقق العلاقة الدالية

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}),\ f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad (*)$$

1) أثبت أنّ $f(\mathbb{R}) = \{+\infty\}$ أو $f(\mathbb{R}) = \{-\infty\}$ أو $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.

2) أثبت أنّ $f \in \mathcal{M}_{fin}(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ يستلزم أنّ f محدودة على فترة $J \subset \mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى النقطة 0 (استعن بتوطئة شتينهاور[5] (Steinhaus) التالية:

توطئة 41.4: لتكن $K \subset \mathbb{R}$ مجموعة جزئية متراصة بحيث $m(K) > 0$. توجد عندئذ فترة $J =]-a, a[$ بحيث من أجل كلّ $z \in J$ توجد نقطتان x و y في K تحقّقان $z = x - y$.)

3) استنتج أنّ $(\forall x \in \mathbb{R}),\ f(x) = f(1).x$.

[5] هوغو شتينهاور [Hugo Steinhaus] (1887-1972)

الحل:

1) نفرض وجود عدد حقيقي x_0 يحقق $f(x_0)=+\infty$ ، ينتج فورًا من المعطيات أنّ

$(\forall y\in\mathbb{R}),\ f(x_0+y)=f(x_0)+f(y)=+\infty$ ،

وبأخذ $y=z-x_0$ نحصل على $f(z)=+\infty$ ، $(\forall z\in\mathbb{R})$ ، أي $f(\mathbb{R})=\{+\infty\}$. (نحصل بنفس الاستدلال على $f(\mathbb{R})=\{-\infty\}$).

نذكّر أنّ f لا تقبل القيمتين $+\infty$ و $-\infty$ في آن واحد و إلاّ أصبحت (*) غير معيّنة !.

إذا فرضنا أنّه لا يوجد $x_0\in\mathbb{R}$ بحيث $|f(x_0)|=\infty$ عندئذ $|f(x)|<\infty$ ، $(\forall x\in\mathbb{R})$ ، وهذا يعني أنّ $f(\mathbb{R})\subset\mathbb{R}$.

2) من السهل إثبات أنّ لكلّ عدد نسبي r ولكلّ عدد حقيقي x لدينا $f(rx)=r.f(x)$ ، وذلك باستعمال العلاقة (*).

نعرّف، من أجل كلّ $n\geq 1$ ، المجموعة

$$A_n=[-n,n[\cap\{x\in\mathbb{R}:\ |f(x)|\leq n\}\ .$$

من الواضح أنّ $\{A_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{L}$ و $\mathbb{R}=\bigcup_{n\geq 1}A_n$. يوجد إذن $n_0\in\mathbb{N}^*$ بحيث $0<m(A_{n_0})\leq 2n_0$ ، بالإضافة إلى ذلك فإنّ f محدودة علـى $A:=A_{n_0}$.

توجد من أجل كلّ $\varepsilon>0$ مغلقة $K\subset A$ غير مهملة بحيث $m(A\setminus K)<\varepsilon$ ، وذلك حسب **القضية 42.3**. وبما أنّ A محدودة عندئذ K مجموعة جزئية متراصة في A . ينتج عن تراص K وتوطئة

شتينهاوز وجود فترة $J=]-a,a[$ بحيث، من أجل كلّ $z\in J$، يوجد $x,y\in K$ بحيث $z=x-y$، وبالتّالي

$$|f(z)|=|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|\le 2n_0 .$$

إذن، من أجل كلّ $z\in\mathbb{R}$ و $n\in\mathbb{N}^*$ يحققان $|nz|<a$ فإنّ $|f(nz)|=n|f(z)|\le 2n_0$، وهذا يؤدّي إلى $|f(z)|\le\frac{2n_0}{n}$.

3) نعلم أنّه لكلّ عدد حقيقي x و لكلّ $n\ge 1$ يوجد عدد نسبي r بحيث $|x-r|<\frac{a}{n}$، وعليه فإنّ

$$\begin{aligned}|f(x)-xf(1)|&=|f(x)-f(r)+(r-x)f(1)|\\&=|f(x-r)+(r-x)f(1)|\le\frac{2n_0}{n}+\frac{a}{n}|f(1)|\end{aligned}$$

وهكذا فإنّ $f(x)=xf(1)$، $(\forall x\in\mathbb{R})$، أي f دالّة خطّية على $\mathbb{R}$.

تدعى المعادلة الدّالّية (*) معادلة كوشي[6] الدّالية.

تمارين مقترحة

01 ليكن λ عددًا مركّبًا بحيث $|\lambda|=1$، نعتبر على $\mathbb{C}$ الأسرة $\Lambda=\{A\subset\mathbb{C}:\lambda A=A\}$.

1) أثبت أنّ Λ عشيرة على $\mathbb{C}$.

2) أوجد شرطًا لازمًا وكافيًا حتى تكون الدّالة $f:(\mathbb{C},\Lambda)\to(\mathbb{C},\mathcal{P}(\mathbb{C}))$ قابلة للقياس.

3) أعط مثالاً عن دالة $(\Lambda,\mathcal{P}(\mathbb{C}))$-قابلة للقياس.

02 ليكن $a>0$ عددا مثبّتا . نعتبر على $\mathbb{R}$ الأسرة

[6]) اوغستين لويس كوشي [Augustin Louis Cauchy] (1857-1789)

$\Sigma=\{A\subset\mathbb{R}:(\forall x>0),\ x\in A\Leftrightarrow x+a\in A\}$.

1) أثبت أنّ Σ عشيرة على $\mathbb{R}$ وأنّ $\Sigma\neq\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

2) أوجد دالّة تقابليّة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (Σ,Σ)–قابلة للقياس بحيث لا تكون دالّته العكسية (Σ,Σ)–قابلة للقياس.

03 لتكن $f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ دالّة قابلة للاشتقاق. أثبت أنّ f' (مشتقة f) دالّة بوريلية.

04 أثبت أنّ كلّ دالّة $f:(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))\to(\overline{\mathbb{R}},\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ رتيبة هي دالّة بوريلية.

05 ليكن (E,Σ) فضاءً قابلاً للقياس، $f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ دالّة تقابليّة ورتيبة. برهن على أنّ دالّة $g:E\to\mathbb{R}$ تنتمي إلى $\mathcal{M}_{fin}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ إذا وإذا فقط كان $f\circ g\in\mathcal{M}_{fin}(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

06 لتكن $K\subset\mathbb{R}$ بحيث $K\notin\mathcal{L}$، f_1 و f_2 عنصرين من $\mathcal{M}_{fin}(\mathbb{R},\mathcal{L})$.

أوجد شرطًا كافيًا على f_1 و f_2 حتى لا تكون الدالّة

$f:(\mathbb{R},\mathcal{L})\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$

المعرّفة بـــ

$$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & if\ \ x\in K\\ f_2(x), & if\ \ x\notin K\end{cases}،$$

دالّة $(\mathcal{L},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$–قابلة للقياس.

07 لتكن $A\notin\mathcal{L}$، نعرّف الدالّة $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ كالآتي

$$f(x)=\begin{cases}e^{x}, & x\in A\\ e^{-x}, & x\notin A\end{cases}.$$

1) بيّن أنّ $f^{-1}(\{y\})\in\mathcal{L}$، من أجل كلّ $y\in\mathbb{R}$.

2) هل f دالّة $(\mathcal{L},\mathcal{L})$–قابلة للقياس؟

08 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس تامًّا و $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$ دالّة اختياريّة.

1) إذا كانت A مجموعة مهملة بيّن أنّ $f_{|A}\in\mathcal{M}(A,A\cap\Sigma)$.

2) إذا فرضنا أنّ من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ توجد $A \in \Sigma$ ، $\mu(A^c) < \varepsilon$ وتوجد دالة $g \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$ بحيث $f = g$ على A ، أثبت أنّ $f \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$.

09 نعتبر على العشيرة البوريلية $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ القياس الموجب

$$\mu = 2\delta_{(a)} + 3\delta_{(b)} ،$$

حيث $\delta_{(z)}$ قياس ديراك عند النقطة z من $\mathbb{R}$. أعط الشروط اللازمة والكافية لدالتين عدديين f و g على $\mathbb{R}$ حتى تكونا μ-تاك متساويتين.

10 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس تامًا.

1) إذا كانت f و g دالّتين عدديتين على E بحيث $f = g$ ، μ-تاك و $f \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$ ، أثبت أنّ $g \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$.

2) لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}(E,\Sigma)$ متتالية متقاربة μ-تاك إلى h. أثبت أنّ $h \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$.

11 ليكن $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathcal{L})$ بحيث $0 < m(\{x \in \mathbb{R} : |f(x)| < \infty\})$. أثبت وجود $A \in \mathcal{L}$ غير مهملة بحيث تكون f محدودة على A.

12 ليكن $f \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$. نعرّف $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ كالآتي

$$g(x) = \begin{cases} 1/f(x), \text{ if } f(x) \neq 0 \\ 0, \qquad \text{ if } f(x) = 0 \end{cases}.$$

أثبت أنّ $g \in \mathcal{M}(E,\Sigma)$.

13 لتكن E مجموعة غير قابلة للعد و $\Sigma = \sigma_E\{\{x\}, x \in E\}$.

1) أثبت أنّ Σ تتطابق مع الأسرة:

$$\Omega = \{A \subset E, \text{ قابل للعد } A^c \text{ أو } A\}.$$

2) أثبت أنّ $f : (E,\Sigma) \to (\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ قابلة للقياس $\Leftrightarrow$ توجد $A \in \Sigma$ قابلة للعد ويوجد $a \in \mathbb{R}$ بحيث $f = \sum_{t \in A} f(t)\chi_{\{t\}} + a\chi_{A^c}$.

14 لتكن $A = \bigcup_{n\geq 1}\{x_n\}$ مجموعة جزئية قابلة للعد من فترة $[a,b]$ و $\{\alpha_n\}_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}_+^*$ بحيث $\sum_{n\geq 1}\alpha_n < \infty$. نعرّف الدالة $f : [a,b] \to]0,\infty[$ بـ

$$f(x)=\sum_{k\in J_x}\alpha_k ،$$

حيث $J_x=\{k\in\mathbb{N}:\ x_k<x\}$. أثبت أنّ f دالة بوريلية.

15 لتكن $\{f_n\}_{n\ge 1}\subset\mathcal{M}(E,\Sigma)$. أثبت أنّ مجموعة النقاط x من E بحيث تكون $\{f_n(x)\}_{n\ge 1}$ متتالية كوشية هي مجموعة قابلة للقياس.

16 لتكن J فترة من $\mathbb{R}$، $a\in J$ و $f,g:J\to\mathbb{R}$ دالّتين معطيتين. أثبت التكافؤين التاليين:

1) f و g متّصلتان على J و $f=g$، m–تأك (m قياس لوبيغ) إذا وإذا فقط $f\equiv g$ على J.

2) $f=g$، δ_a–تأك (δ_a قياس ديراك عند النقطة a) إذا وإذا فقط $f(a)=g(a)$.

17 ليكن $f\in\mathcal{M}(E,\Sigma)$. أثبت أنّ الدالة $f_{pq}:E\to\overline{\mathbb{R}}$ المعرّفة بـ

$$f_{pq}(x)=\begin{cases}p, & if\quad p>f(x)\\ f(x), & if\quad p\le f(x)\le q\\ q, & if\quad q<f(x)\end{cases}$$

عنصر من $\mathcal{M}_{fin}(E,\Sigma)$. ($p$ و q ثابتان حقيقيان بحيث $p<q$).

18 ليكن $f:(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))\to(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ دالة قابلة للقياس. أثبت أنّ المجموعة

$$G(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=f(x)\}$$

عنصر من $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

19 لتكن $\theta_1,\theta_2,\theta_3:E\to\mathbb{R}$ دوال بسيطة بحيث $\theta_3(x)\neq 0,\ \forall x\in E$. أثبت أنّ الدوال الآتية بسيطة:

$$\theta_1+\theta_2\ ،\ \theta_1\theta_2\ ،\ 1/\theta_3 \quad و\quad |\theta_1|^n\ ،\ (n\ge 1)\ ،$$

20 أثبت الصيغة العكسية لمبرهنة لوسين **37.4**، أي إذا كانت $E\subset\mathbb{R}$ مجموعة جزئية قابلة للقياس (بمفهوم لوبيغ) بحيث $m(E)<\infty$، و $f:E\to\mathbb{R}$ دالة بحيث من أجل كلّ $\varepsilon>0$ توجد مجموعة جزئية متراصة $K\subset E$، $m(E\setminus K)<\varepsilon$، بحيث يكون الاقتصار $f_{|K}$ متّصلا فإنّ f قابلة للقياس.