الفصل الخامس

تكامل ريمان

الفصل الخامس
تـكامـل ريـمـان

1- تكامل ريمان–ستلجس

قبل التطرّق إلى تعريف تكامل ريمان[1] نستهلّ بتعريف تكامل ريمان–ستلجس[2] (Riemann-Stieljes)، ومن ثمّ نستخلص تعريف تكامل ريمان حيث نبيّن أنّ هذا الأخير ما هو إلاّ حالة خاصّة من تكامل ريمان–ستلجس الذي له تطبيقات عديدة نذكر منها استعماله بكثرة في التحليل الدّالي ونظريّة الاحتمالات والإحصاء. نشير إلى أنّه ليس من هدفنا دراسة أيٍّ من التكاملين فلا نتمادى في إثبات كلّ المبرهنات حتى لا يملّ القارئ من نتائج يعرفها سلفًا، ولذا ننصح كلّ من لديه فكرة عن تكاملي ريمان–ستلجس و ريمان أن يذهب مباشرة إلى الفصل القادم.

تعريف 01.5: لتكن $J=[a,b]$ فترة محدودة من $\mathbb{R}$ و $\alpha : J \to \mathbb{R}$ دالّة متزايدة ولتكن $f : J \to \mathbb{R}$ دالّة محدودة. نعرّف من أجل كلّ تقسيم *(subdivision)* $P=\{a=t_0<t_1<...<t_n=b\}$ مجموع داربو[3] (Darboux) الأدنى (الأعلى، على الترتيب) كالآتي:

$$s(f,\alpha,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\right)\inf_{t\in J_i}\{f(t)\}\text{،}$$

$$\left(S(f,\alpha,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\right)\sup_{t\in J_i}\{f(t)\}\text{، على الترتيب}\right)$$

---

[1]) جورج فريدريك ريمان [Georg Friedrich Riemann] (1826–1866)

[2]) توماس ستلجس [Thomas Joannes Stieltjes] (1856–1895)

[3]) جان غاستون داربو [Jean Gaston Darboux] (1842–1917)

حيث $J_i=[t_{i-1},t_i]$، نسمّى العدد $\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left(\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1})\right)$، ($x_i\in J_i$)، بمجموع ريمان-ستلجس لِـ f بالنسبة لِـ α و P.

نلاحظ أنّ **مجموع** ريمان-ستلجس لا يرتبط بالتقسيم P وبالدالة α فحسب بل كذلك بالنقاط المختارة x_i. تجدر كذلك الإشارة إلى أنّه لا يوجد أيّ مانع من اعتبار **مجموع** ريمان-ستلجس لدوال غير المتّصلة عند نقطة من الفترة J بينما محدوديّة هذه الدّوال هي ضروريّة لصحة هذا التعريف.

ترميز: نرمز لأسرة كلّ تقسيمات الفترة $J=[a,b]$ بـ $\mathcal{P}_J$.

بإمكاننا إثبات بسهولة المبرهنة التالية:

مبرهنة 02.5: لدينا حسب معطيات التعريف السابق:

أ) $s(f,\alpha,P)\leq S(f,\alpha,P)$، من أجل كل α و P،

ب) $\sup_{P\in\mathcal{P}_J} s(f,\alpha,P)\leq \inf_{P\in\mathcal{P}_J} S(f,\alpha,P)$.

مثال 03.5: نعتبر الدالة $f(x)=x^2$ على الفترة $[0,1]$ و $\alpha(x)=x$.
نقسّم الفترة $[0,1]$ كما يلي

$$P=\left\{0=x_0<\tfrac{1}{n}<\tfrac{2}{n}\dots<\tfrac{i}{n}<\dots x_n=1\right\}.$$

لدينا من التعريف السابق ما يلي

$$s(f,\alpha,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{i}{n}-\tfrac{i-1}{n}\right)\inf\left\{x^2 : x\in\left[\tfrac{i-1}{n},\tfrac{i}{n}\right]\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)^2}{n^3}=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

و

$$S(f,\alpha,P)=\sum_{i=1}^{n}\left(\tfrac{i}{n}-\tfrac{i-1}{n}\right)\sup\left\{x^2 : x\in\left[\tfrac{i-1}{n},\tfrac{i}{n}\right]\right\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

لدينا فورًا $\lim\limits_{n\to\infty} s(f,\alpha,P)=\lim\limits_{n\to\infty} S(f,\alpha,P)=\frac{1}{3}$.

تعريف 04.5: نقول عن دالة f إنّها قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان-ستلجس بالنسبة للدالة α إذا وُجد من أجل كل عدد موجب ε تقسيم P للفترة J بحيث $S(f,\alpha,P)-s(f,\alpha,P)<\varepsilon$.

تسمح المبرهنة التالية بتعريف تكامل ريمان-ستلجس حيث لا يتطلب إثباتها سوى استعمال بعض العلاقات والمتراجحات البسيطة.

مبرهنة 05.5: لتكن f دالة قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان-ستلجس بالنسبة لدالة α على J، يوجد عندئذ عدد حقيقي وحيد ξ يحقق

$$\xi=\sup_{P\in\mathcal{P}_J} s(f,\alpha,P)=\inf_{P\in\mathcal{P}_J} S(f,\alpha,P).$$

يدعى العدد ξ تكامل ريمان-ستلجس لـ f بالنسبة لـ α على J، نكتبه كالآتي: $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ أو اختصارا $\int_a^b fd\alpha$.

نحصل بالخصوص من أجل التقسيم البديهي $P=\{a,b\}$ على الحصر التالي:

$$m\left[\alpha(b)-\alpha(a)\right]\le \int_a^b fd\alpha\le M\left[\alpha(b)-\alpha(a)\right],$$

حيث

$$m=\inf\{f(x):x\in[a,b]\} \quad \text{و} \quad M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}.$$

يكفي في كثير من الأحيان استعمال مجموعي داربو الأدنى والأعلى لإثبات خصائص تكامل ريمان-ستلجس، إلاّ أنّه يستحسن أحيانًا استعمال مجموع ريمان-ستلجس خاصة عندما يتعلّق الأمر بعمليّات نقطيّة لدالّة أو أثناء تعميم مفهوم التكامل إلى الدوال المركّبة. إضافة إلى ذلك فإنّ مجموع ريمان-ستلجس يساعد على إيجاد مجموع بعض السلاسل العددية.

ترميز: سوف نرمز بـ $\mathcal{RS}(\alpha,J)$ لمجموعة كلّ الدوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان-ستلجس على الفترة $J=[a,b]$ بالنسبة لـ α.

ملاحظة 06.5: إذا كانت $f\in\mathcal{RS}(\alpha,J)$ فإنّ $f\in\mathcal{RS}(\alpha,J')$، من أجل كلّ فترة جزئية مغلقة J' من J.

مبرهنة 07.5: لتكن $f,g\in\mathcal{RS}(\alpha,J)$، عندئذ

1) $\int_a^b fd\alpha\le\int_a^b gd\alpha$، عندما $f\le g$،

2) $|f|\in\mathcal{RS}(\alpha,J)$ و $\left|\int_a^b fd\alpha\right|\le\int_a^b|f|d\alpha$،

3) الدوال fg، $inf\{f,g\}$ و $sup\{f,g\}$ عناصر من $\mathcal{RS}(\alpha,J)$.

<u>مساعدة</u>: استعن بالمتطابقات التالية:

- $min\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g-|f-g|)$ (يُرمز أيضا لهذه الدالة بـ $f\wedge g$)
- $max\{f,g\}=\frac{1}{2}(f+g+|f-g|)$ (يُرمز أيضا لهذه الدالة بـ $f\vee g$)
- $fg=\frac{1}{4}\left[(f+g)^2-(f-g)^2\right]$، مع إثبات أنّ مربّع عنصر من $\mathcal{RS}(\alpha,J)$ هو كذلك عنصر من $\mathcal{RS}(\alpha,J)$.

هذه الآن بعض الخواص التي تتمتع بها الدوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان-ستلجس وإثباتاتها لا تتطلّب الجهد الكبير.

مبرهنة 08.5: نفرض أنّ $\alpha(x)$ غير ثابتة على $]a,b[$. إذا كانت $f\in\mathcal{RS}(\alpha,J)$ فإنّ الدالة f متّصلة عند نقطة x_0 من $]a,b[$.

مبرهنة 09.5: لتكن $f\in\mathcal{RS}(\alpha,J)$ و g دالة محدودة ورتيبة على $J=[a,b]$، عندئذ يوجد $c\in J$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)d\alpha=g(a)\int_a^c f(x)d\alpha+g(b)\int_c^d f(x)d\alpha .$$

مبرهنة 10.5: نفرض أنّ α و β دالّتان متزايدتان على J، عندئذ

$\alpha \in \mathcal{RS}(\beta,J)$ إذا وإذا فقط $\beta \in \mathcal{RS}(\alpha,J)$، ولدينا في هذه الحالة

$$\int_a^b \alpha d\beta = \alpha(b)\beta(b) - \alpha(a)\beta(a) - \int_a^b \beta d\alpha .$$

مبرهنة 11.5: لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{RS}(\alpha,J)$ متتالية محدودة بانتظام على J وتتقارب ببساطة إلى دالة $f \in \mathcal{RS}(\alpha,J)$، عندئذ

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha .$$

نودّ تنبيه القارئ أنّه بإمكاننا الحصول على خواص هامة أخرى من أجل صيغ خاصّة لـــ α. نختم خواص تكامل ريمان-ستلجس بالمبرهنة التالية:

مبرهنة 12.5: لتكن $\alpha : J \to \mathbb{R}$ دالة متزايدة و $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{RS}(\alpha,J)$ متتالية متقاربة بانتظام إلى دالة $f \in \mathcal{RS}(\alpha,J)$، عندئذ

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n d\alpha = \int_a^b f d\alpha .$$

يمكننا تعميم تكامل ريمان-ستلجس من دوال متزايدة α إلى دوال **"ذات تغيرات محدودة"** α على J. من المفيد التذكير به هنا هو إمكانيّة كتابة كلّ دالة ذات تغييرات محدودة كفرق لدالّتين متزايدتين، وهذا ما سنراه لاحقًا في الفصل التاسع.

سوف نرى في المبرهنة المقبلة أنّ كلّ دالة متّصلة على J هي قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان-ستلجس.

مبرهنة 13.5: لتكن α دالة متزايدة على J، عندئذ، من أجل كلّ دالة متّصلة f على J فإنّ $f \in \mathcal{RS}(\alpha,J)$.

إثبات: نفرض أنّ الدالة α غير ثابتة. بما أنّ J مغلقة و f متّصلة فهي إذن متّصلة بانتظام على هذه الفترة. ليكن ε عددًا موجبًا تمامًا، يوجد عدد موجب δ بحيث أنّ لكلّ x و y في J يحققان $|x-y|<\delta$ لدينا $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

ليكن P تقسيما لـــ J بحيث $t_i - t_{i-1} < \delta$، عندئذ تدرك f حدّيـــها الأعلى والأدنى في كلّ فترة $[t_{i-1}, t_i]$ عند نقطة ξ_i و η_i، على الترتيب.

ينتج عن كون $|\xi_i - \eta_i| < \delta$ أنّ $|f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \varepsilon$ ، ومنه

$$S(f) - s(f) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(\xi_i) - f(\eta_i)\right)\left(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\right)$$

$$\leq \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\right) = \varepsilon\left(\alpha(b) - \alpha(a)\right)$$

(للحصول على ε بدلا من $\varepsilon(\alpha(b)-\alpha(a))$ يكفي أخذ $\dfrac{\varepsilon}{\alpha(b)-\alpha(a)}$ من البداية). وهكذا فإنّ f قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان-ستلجس على J. ■

نلخّص فيما يلي أهمّ الخواص العامة التي يتمتّع بها تكامل ريمان-ستلجس، لدينا

مبرهنة 14.5: أ) إذا كان f_1 و f_2 عنصرين من $\mathcal{RS}(\alpha, J)$ فإنّ $f_1 + f_2 \in \mathcal{RS}(\alpha, J)$، ولدينا

$$\int_a^b (f_1 + f_2)d\alpha = \int_a^b f_1 d\alpha + \int_a^b f_2 d\alpha \text{ ،}$$

ب) إذا كانت $f \in \mathcal{RS}(\alpha, J)$ و $c \in \mathbb{R}$ (ثابت) فإنّ $cf \in \mathcal{RS}(\alpha, J)$، ولدينا

$$\int_a^b (cf)d\alpha = c\int_a^b f d\alpha \text{ ،}$$

ج) إذا كانت $f \in \mathcal{RS}(\alpha, J)$ و $a < \xi < b$ فإنّ f قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان-ستلجس بالنسبة لـــ α على $[a, \xi]$ و $[\xi, b]$، ولدينا

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^\xi f d\alpha + \int_\xi^b f d\alpha \text{ .}$$

د) إذا كانت α_1 و α_2 دالّتين متزايدتين وَ $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ فإنّ

$$\int_a^b f d\alpha = \int_a^b f d\alpha_1 + \int_a^b f d\alpha_2 \text{ .}$$

ملاحظة 15.5: إذا كانت $f \in \mathcal{RS}(\alpha,J)$ فإنّ

$\int_a^a f d\alpha = 0$ و $\int_b^a f d\alpha = -\int_a^b f d\alpha$.

سوف نتطرّق لكلّ هذه النتائج في الحالة الخاصّة $\alpha(x)=x$ أثناء تناولنا لتكامل ريمان. بأخذ $\alpha(x)=x$ في تكامل ريمان-ستلجس المعرّف أعلاه نحصل على ما يُعرف بتكامل ريمان حيث يُعوّض $d\alpha(x)$ بالعنصر التفاضلي المألوف dx .

2- تكامل ريمان

تعريف 16.5: إذا كانت $\alpha(x)=x$ فنسمّي حينئذ تكامل ريمان-ستلجس بتكامل ريمان، ونكتبه كالآتي:

$$\int_a^b f(x)dx \text{ ، } \int_a^b f dx \text{ وكذلك } \mathcal{R}\int_a^b f \text{ .}$$

سوف نرمز بـ $\mathcal{R}(J)$ لمجموعة كلّ الدوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان على الفترة $J=[a,b]$ لنحصل على فضاء متّجهات جزئي من فضاء متّجهات كلّ الدوال على J. نقول عن دالة $f:J\to\mathbb{R}$ إنّها (ر)-قابلة للمكاملة إذا كان $f\in\mathcal{R}(J)$ ("ر" نسبة إلى ريمان).

يأخذ مجموعي داربو الأدنى (الأعلى، على الترتيب) الصيغة التالية:

$$s(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\inf_{t\in J_i}\{f(t)\} \text{ ،}$$

$$\left(S(f,P)=\sum_{i=1}^{n}(t_i-t_{i-1})\sup_{t\in J_i}\{f(t)\}\text{ ، على الترتيب}\right) \text{ ،}$$

حيث $J_i=[t_{i-1},t_i]$.

إذا فرضنا أنّ الدالة f موجبة فإنّ المقدار $(t_i-t_{i-1})\inf_{t\in J_i} f(t)$ (على الترتيب، $(t_i-t_{i-1})\sup_{t\in J_i} f(t)$) يمثّل مساحة المستطيل الجزئي

$$[t_{i-1},t_i]\times\left[0,\inf_{t\in J_i} f(t)\right]$$

(على الترتيب، $\left([t_{i-1},t_i]\times\left[0,\sup_{t\in J_i} f(t)\right]\right)$.

وبتجميع هذه المساحات الجزئية نحصل على حصر لمساحة الحيز الواقع ما بين منحنى f، محور الفواصل والمستقيمين $t=a$ و $t=b$.
إذن، الفرق ما بين تكامل ريمان وتكامل ريمان-ستلجس هو أنّ في هذا الأخير "عـرض" المستطيل الجزئي $(\alpha(t_i)-\alpha(t_{i-1}))$ متعلق بالدالة α على الفترة الجزئية J_i عوض طول هذه الفترة كما هو الحال في تكامل ريمان. بعبارة أخرى، يعتمد تكامل ريمان-ستلجس على "العرض المُرجَّح" عوض "العرض" الاعتيادي.

بما أنّ تكامل ريمان هو حالة خاصّة من تكامل ريمان-ستلجس فإنّ كل نتائج تكامل ريمان-ستلجس تبقى سارية المفعول على تكامل ريمان.

أمثلة 17.5:

1- كل دالة قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان-ستلجس من أجل كلّ دالة متزايدة α هي قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان لأنّ $\alpha(x)=x$ دالة متزايدة.

2- كلّ دالة متّصلة على $[a,b]$ هي دالة قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان.

3- دالة ديركليه $\psi=\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ المذكورة في التمهيد ليست قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان على $[0,1]$ لأنّ

$$\inf\{\psi(t):t\in[t_{i+1},t_i]\}=0 \quad \text{و} \quad \sup\{\psi(t):t\in[t_{i+1},t_i]\}=1$$

من أجل كلّ تقسيم P لـــ $[0,1]$.

قبل التطرّق إلى الخواص العامة لتكامل ريمان والدوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان سوف نقدمّ هذه النتيجة الهامة التي تبيّن مدى ارتباط تكامل ريمان بتكامل ريمان-ستلجس:

مبرهنة 18.5: لتكن $f \in \mathcal{R}(J)$ و α دالة متزايدة، متصلة على J وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$. إذا كانت α محدودة على $]a,b[$ وقابلة للتمديد إلى دالة قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان فإنّ

$$f \in \mathcal{RS}(\alpha,J) \text{، } f\alpha' \in \mathcal{R}(J) \text{ و } \int_a^b f d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx \text{ .}$$

ملاحظة 19.5: إنّ صيغة المكاملة بالتجزئة التالية والمألوفة في الحساب التكاملي هي نتيجة مباشرة لهذه المبرهنة وما قبلها

$$\int_a^b \alpha d\beta = \alpha(b)\beta(b) - \alpha(a)\beta(a) - \int_a^b \beta d\alpha \text{ .}$$

مبرهنة 20.5: إذا كانت $f : J \to \mathbb{R}$ دالة رتيبة فإنّ $f \in \mathcal{R}(J)$.

تُعطي المبرهنة المقبلة لصاحبها لوبيغ تمييزًا عمليًّا، سهلاً وصريحًا عن الدوال القابلة للمكاملة بمفهوم ريمان حيث تختصر العديد من الخواص، فهي على سبيل المثال تثبت استقرار $\mathcal{R}(J)$ بالنّسبة لضرب الدوال، بمعنى أنّ ضرب عنصرين من $\mathcal{R}(J)$ هو كذلك عنصر من $\mathcal{R}(J)$.

مبرهنة 21.5 [لوبيغ] : تكون دالة محدودة $f : J \to \mathbb{R}$ عنصرًا من $\mathcal{R}(J)$ إذا وإذا فقط كانت مجموعة نقاط تقطعها مهملة.

سنعود إلى هذه المبرهنة عند تطرّقنا لتكامل لوبيغ ومقارنته بتكامل ريمان في الفصل السادس.

تبيّن المبرهنة التالية أنّه إذا كانت f دالة (ر)- قابلة للمكاملة و g دالة متساوية مع f إلاّ من أجل عدد منته من النقاط فإنّ g تكون (ر)- قابلة للمكاملة ويتساوى تكامل g مع تكامل f.

مبرهنة 22.5: لتكن $f \in \mathcal{R}(J)$ و $\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\} \subset J$. إذا كانت g دالة بحيث $f(x) = g(x)$، $(\forall x \in J \setminus \{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\})$، فإنّ

$g \in \mathcal{R}(J)$ و $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

قضية 23.5: لتكن $f \in \mathcal{R}(J)$ دالة موجبة، عندئذ
$\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

مبرهنة 24.5: إذا كانت $f : J \to \mathbb{R}$ دالة متّصلة وموجبة فإنّ $\int_a^b f(x)dx = 0$ يستلزم أنّ $f = 0$ على J .

مبرهنة 25.5: لتكن $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}(J)$ متتالية متقاربة بانتظام إلى f على J ، عندئذ $f \in \mathcal{R}(J)$ ، بالإضافة إلى ذلك لدينا
$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

تُمثّل هذه المبرهنة إحدى أهم خواص تكامل ريمان إلاّ أنّ هذا الأخير يبقى عاجزا على التّعامل مع المتتاليات التي لا تتقارب بانتظام على J . المثال الآتي يوضّح جليّا هذا الإخفاق:

مثال 26.5: نعتبر المتتالية $f_n(x) = x^n$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، على $J = [0,1]$.
من السّهل التأكد من أنّ

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1[\\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

، لمّا $n \to \infty$.

وبما أنّ التّقارب غير منتظم فإنّنا لا نستطيع أن نجزم بمقتضى النتيجة السّابقة على أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 0$ على الرغم من صحّة هذه النتيجة الأخيرة.

مبرهنة 27.5 (المبرهنة الأولى للقيمة الوسطى): لتكن $f : J \to \mathbb{R}$ دالة متصلة

و $g \in \mathcal{R}(J)$ دالة ذات إشارة ثابتة على J ، يوجد عندئذ عدد $\xi \in J$ بحيث

$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx$.

لازمة 28.5: إذا كانت $g=1$ فإنّه يوجد عدد $\xi\in[a,b]$ بحيث
$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\xi)$.

مبرهنة 29.5 (المبرهنة الثانية للقيمة الوسطى) : ليكن f و g عنصرين من $\mathcal{R}(J)$ بحيث أنّ f موجبة ومتناقصة على J، يوجد عندئذ عدد $\xi\in J$ بحيث

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f\left(a^+\right)\int_a^\xi g(x)dx \ .$$

نذكر فيما يلي بالمبرهنة الأساسيّة للحساب المعروفة لدى عموم القرّاء وهي كثيرة الاستعمال في أوساط المهندسين.

مبرهنة 30.5: لتكن f دالّة متّصلة على J وقابلة للاشتقاق على $]a,b[$. إذا كانت f' محدودة على $]a,b[$ وقابلة للتمديد إلى دالّة قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان إلى J، فإنّ

$$\int_a^b f'(x)dx=f(b)-f(a) \ .$$

مبرهنة 31.5 (تبديل المتغيّر) : لتكن f دالّة متّصلة على J و $\varphi:J'=[c,d]\to J$، $\varphi\in C^1(J',J)$ بحيث $\varphi(d)=b$ و $\varphi(c)=a$، عندئذ

$$(f\circ\varphi)\varphi'\in\mathcal{R}(J') \text{ و } \int_a^b f(x)dx=\int_c^d f(\varphi(y))\varphi'(y)dy \ .$$

مبرهنة 32.5: لتكن $f\in\mathcal{R}(J)$ و $F(x)=\int_a^x f(t)dt$، $(x\in J)$، عندئذ

أ) F دالّة متّصلة على J.

ب) إذا كانت f متّصلة عند نقطة $x_0\in J$، فإنّ F قابلة للاشتقاق عند x_0، ولدينا

$$F'(x_0)=f(x_0) \ .$$

لازمة 33.5: تقبل كلّ دالّة متّصلة f على J دالّة أصليّة، أي توجد دالّة قابلة للاشتقاق F على J بحيث $F'=f$.

3- تكامل ريمان المعتلّ

لقد سبق لنا أن عرّفنا تكامل ريمان وتكامل ريمان-ستلجس من أجل دوال محدودة على فترات محدودة. وسوف نعمّم خلال هذا المقطع مفهوم التكامل إلى دوال غير محدودة على فترات ليست بالضرورة محدودة. الفترات غير المحدودة المعنية بالذكر هي من الشكل $]a,+\infty[$، $]-\infty,b]$ وحتّى $]-\infty,+\infty[$، وفيما يخصّ الدوال غير المحدودة فإنّنا سوف نركّز بالدرجة الأولى على النقاط التي تكون من أجلها الدوال غير محدودة في كلّ جوار ضيّق لهذه النقاط.

نُعرّف باختصار التّكامل المعتلّ *(improper integral)* (أو تكامل كوشي-ريمان) لدالة غير محدودة على فترة غير محدودة كنهاية لتكامل دالة محدودة على فترة محدودة.

تعريف 34.5: **لتكن $J \subset \mathbb{R}$ فترة اختيارية غير خالية. نضع**
$\alpha = \inf J$ و $\beta = \sup J$، ($\alpha,\beta \in \overline{\mathbb{R}}$).

نقول عن دالة $f : J \to \mathbb{R}$ إنّها (ر)-قابلة للمكاملة على J إذا كانت (ر)-قابلة للمكاملة على كلّ فترة مغلقة ومحدودة $J_0 \subset J$، إضافة إلى كون النهاية

$$\lim_{\substack{a\to\alpha^+\\ b\to\beta^-}} \int_a^b f(x)dx \quad \text{موجودة في } \mathbb{R}.$$

نرمز لهذه النهاية بـــ $\int_\alpha^\beta f(x)dx$، ونسمّيها تكامل ريمان المعتلّ لـ f على الفترة J.

ملاحظة 35.5: في حالة ما إذا كانت f دالة غير محدودة على $]a,b]$ ولكنها محدودة على $[a+\varepsilon,b]$ من أجل كلّ عدد موجب ε صغير بالقدر الكافي و $f \in \mathcal{R}([a+\varepsilon,b])$ فإنّنا نرمز للنّهاية $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b fdx$، إن وُجدت، بـــ $\int_a^b fdx$.

كما نعرّف بنفس الكيفيّة التكامل $\int_a^b fdx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} fdx$، إذا كانت f

دالة غير محدودة على $]a,b]$ ولكنها محدودة على $[a,b-\varepsilon]$، من أجل كلّ عدد موجب ε صغير بالقدر الكافي و $f\in\mathcal{R}([a,b-\varepsilon])$ (مع فرضيّة وجود النهاية).

قد نصادف أحيانًا دوالا f لا تقبل نهاية منتهية عند نقطة $c\in]a,b[$، فيكفي تجزئة التّكامل على $]a,b[$ كما يلي

$$\int_a^b fdx=\int_a^c fdx+\int_c^b fdx$$

ثمّ نحسب التكاملين المعتلّين $\int_a^c fdx$ و $\int_c^b fdx$ بالطريقة المذكورة أعلاه.

مسألة محلولة

نعرّف من أجل كلّ $n\geq 0$ المتتالية $\alpha_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx$.

1) أوجد علاقة تربط α_n بـ α_{n-2} من أجل كلّ $n\geq 2$.

2) استنتج قيمة α_n حسب زوجية وفردية العدد الطبيعي n.

3) استنتج أنّ $\pi=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{2^{4k}(k!)^4}{k\left[(2k)!\right]^2}$.

الحل:

1) بالمكاملة بالتجزئة نجد

$$\alpha_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x(-\cos x)'dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\left(\cos^2 x\right)dx$$
$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx$$
$$=(n-1)(\alpha_{n-2}-\alpha_n)$$

ومنه $n\alpha_n=(n-1)\alpha_{n-2}$، من أجل كلّ $n\geq 2$.

2) نستنتج من السؤال السابق أنّ

$$2k\alpha_{2k}=(2k-1)\alpha_{2k-2}$$
$$(2k-2)\alpha_{2k-2}=(2k-3)\alpha_{2k-4}$$
$$\dots$$
$$2\alpha_2=\alpha_0=\frac{\pi}{2}$$

ومنه $\alpha_{2k}=\frac{1.3.5...(2k-1)}{2.4.6...(2k)}.\frac{\pi}{2}$ ، $(\forall k\geq 1)$.

ونحصل بنفس الكيفية على

$\alpha_{2k+1}=\frac{2.4.6...(2k)}{1.3.5...(2k+1)}$ ، $(\forall k\geq 1)$.

3) نعلم أنّ $0\leq \sin x\leq 1$ ، $\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$، وبالتالي

$\sin^{2k+2}x\leq \sin^{2k+1}x\leq \sin^{2k}x$ ، $\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$.

وبالعودة إلى تعريف α_k نرى أنّ

$0\leq\alpha_{2k+2}\leq\alpha_{2k+1}\leq\alpha_{2k}$ ، $(\forall k\geq 0)$.

إذن المتتالية $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأسفل بالصفر، وبالتالي فهي متقاربة. لدينا من جهة أخرى،

$\frac{\alpha_{2k+2}}{\alpha_{2k}}=\frac{2k+1}{2k+2}\leq\frac{\alpha_{2k+1}}{\alpha_{2k}}\leq 1$ ،

ومنه $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\alpha_{2k+1}}{\alpha_{2k}}=1$.

بتعويض α_{2k+1} و α_{2k} بعبارتيهما المحصّل عليهما في 1) نجد

$$\frac{\pi}{2}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left[2.4.6...(2k)\right]^2}{\left[1.3.5...(2k-1)\right]^2(2k+1)}،$$

أي $$\pi=\lim_{k\to\infty}\frac{2^{4k}(k!)^4}{k\left[(2k)!\right]^2}.$$

تمارين مقترحة

نفرض فيما يلي أنّ $J=[a,b]$.

01 أثبت أنّ $f\in\mathcal{RS}(f,J)$ من أجل الدالة

$$f(x)=\begin{cases}-1, x\in[0,1)\\ +1, x\in[1,2]\end{cases} \text{ و } J=[0,2].$$

02 عيّن كل الدوال المتزايدة α على J بحيث تكون دالة ديريكلي عنصرًا من $\mathcal{RS}(\alpha,J)$.

03 لتكن f دالّة محدودة و α دالّة متزايدة على J أثبت أنّ

أ) إذا وجدت نقطة تقطّع عن يمين $\xi\in[a,b[$ لـ f و α فإنّ f غير قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان-ستلجس على J بالنّسبة لـ α .

ب) إذا وجدت نقطة تقطّع عن يسار $\xi'\in]a,b]$ لـ f و α فإنّ f غير قابلة للمكاملة بمفهوم ريمان-ستلجس على J بالنّسبة لـ α .

04 برهن على أنّ $f\in\mathcal{RS}(\alpha,J)$ يستلزم أنّ $|f|^p\in\mathcal{RS}(\alpha,J)$، من أجل كلّ عدد حقيقي موجب p .

05 لتكن لدينا

$$.\alpha(x)=\begin{cases}0, & a\le x\le c\\ 1, & c<x\le b\end{cases}$$

ميّز كلّ الدوال القابلة للمكاملة على J بمفهوم ريمان-ستلجس بالنسبة لـ α.

06 لتكن α و β دالّتين متزايدتين على J بحيث $\alpha(x)=\beta(x)$، $(\forall x\in(a,b))$ و $\int_a^b fd\alpha=\int_a^b fd\beta$، $(\forall f\in\mathcal{C}(J))$.
أثبت أنّ

$$.\alpha(b)=\beta(b) \text{ و } \alpha(a)=\beta(a)$$

07 أثبت أنّ $f\in\mathcal{R}(J)$ يستلزم

$$.\int_a^b f(x)dx=\inf\left\{\int_a^b g(x)dx : g\in\mathcal{C}[a,b]; g\ge f\right\}$$

<u>مساعدة:</u> بيّن أنّه توجد من أجل كلّ تقسيم P لـ J دالة خطيّة h متّصلة بتقطّع على J تحقّق $f\le h$ بحيث يكون المقدار

$$\left|S(f,P)-\int_a^b h(x)dx\right|$$

صغيرا بقدر كاف.

08 لتكن α و β دالّتين متزايدتين على J بحيث

$$.(\forall f\in\mathcal{C}(J)) \text{، } \int_a^b fd\alpha=\int_a^b fd\beta \text{ و } \alpha(a)=\beta(a)$$

أ) أثبت أنّ $\alpha(b)=\beta(b)$،

ب) أثبت أنّ $\alpha(x)=\beta(x)$ عند كلّ نقطة اتّصال لكلتا الدالّتين α و β.

09 لتكن $f\in\mathcal{R}(J)$.

1) أثبت أنّ $f>0$ على J يستلزم أنّ $\int_a^b f(x)dx>0$.

2) استنتج أنّه إذا كان $f\ge 0$ على J و $\int_a^b f(x)dx=0$ فإنّ المجموعة $D=\{x\in J: f(x)=0\}$ كثيفة في J.

10 أثبت أنّ $f\in\mathcal{R}(J)$ إذا وإذا فقط $f^-,f^+\in\mathcal{R}(J)$ (الجزء الموجب والسالب لـ f)، وفي هذه الحالة فإنّ $|f|\in\mathcal{R}(J)$.

11 أوجد دالة تحقّق $|f|\in\mathcal{R}(J)$ بينما $f\notin\mathcal{R}(J)$.

12 لتكن $f,g\in\mathcal{R}(J)$. بدراسة إشارة الدالة $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرّفة بـ

$$\text{،}\ p(t)=\int_a^b\left(f(x)+tg(x)\right)^2dx$$

أثبت المتباينة التالية

$$\left(\int_a^b fg dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2 dx \right)\left(\int_a^b g^2 dx \right).$$

(تدعى متباينة كوشي – شوارز)

13 باستعمال تعريف تكامل ريمان احسب النهاية التالية:

$L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{u_n}$ ، حيث $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)$.

14 أدرس وجود التكاملين التاليين:

أ) $A = \int_0^1 \frac{x^m - 1}{\ln x} dx$ ، $(m \in \mathbb{R})$، ب) $B = \int_{\sqrt{\alpha}}^{+\infty} \cos x^2 \, dx$ ، حيث $\alpha > 0$ عدد مثبّت.