

الفصل السادس

تكامل توبيغ

الفصل السادس

تكامل لوبيغ

1- مكاملة الدوال الموجبة بمفهوم لوبيغ¹ (Lebesgue)

رأينا في الفصل السابق كيف تمّ تعريف تكامل ريمان على مجموعة ضيقة جدًا من الدوال المحدودة على فترات محدودة، بينما التكامل المعتاد هو تعميم طبيعي لتكامل ريمان من أجل دوال غير محدودة على فترات ليست بالضرورة محدودة. سوف نعمّم فيما يلي مفهوم التكامل لصنف أكبر بكثير من الدوال المتصلة تقريبًا أينما كانت حيث يحتفظ بكل الخصائص التي يتميز بها تكامل ريمان. في الواقع يُعرّف هذا التكامل من أجل دوال ليست بالضرورة متصلة وعلى مجموعات أعمّ من الفترات، المستطيلات وغيرها.

ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس اختياريًا.

تعريف 01.6: نتكن $\theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ دالة بسيطة قابلة للقياس وموجبة، نعرّف

تكامل لوبيغ θ على E وفق القياس الموجب μ بـ

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$$

ونرمز له بـ $\int_E \theta d\mu$ ، $\int_E \theta(x) d\mu(x)$ أو $\int_E \theta$.

مثال 02.6: نتكن $J = [a, b]$ ، نعتبر في $(J, J \cap \mathcal{L}, m)$ دالة ديركليه

$\psi: J \rightarrow [0, 1]$ المعرفة بـ $\psi = \chi_{J \cap \mathbb{Q}}$. لدينا إذن

$$\int_J \psi dm = \int_J \chi_{J \cap \mathbb{Q}} dm = m(J \cap \mathbb{Q}) = 0$$

¹ هنري ليون لوبيغ [Henri Leon Lebesgue] (1875-1941)

لأن $J \cap \mathbb{Q}$ مجموعة مهملة.

مثال 03.6: نعتبر في $(m, \mathcal{L}, [-1, 4], [-1, 4])$ الدالة الدرجية

$\varphi: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}^+$ المعرفة بـ $\varphi = 2\chi_{[-1, 0[} + 3\chi_{[2, 4]}$ لدينا

$$\begin{aligned} \int_{[-1, 4]} \varphi dm &= 2m([-1, 0[) + 3m([2, 4]) \\ &= 2(1) + 3(2) = 8 \end{aligned}$$

تعريف 04.6: لتكن f دالة قابلة للقياس وموجبة على E ، نعرف تكامل لوبيغ f على E وفق القياس الموجب μ بـ

$$(2) \quad \int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \theta d\mu, \theta \in \mathcal{S}^+(E, \Sigma): \theta \leq f \right\}$$

(ترمز أحيانا للتكامل بـ $\int_E f(x) d\mu(x)$ أو $\int_E f$)

كما نعرف تكامل لوبيغ f على مجموعة جزئية قابلة للقياس A من E بـ

$$\int_A f d\mu = \int_E f \chi_A d\mu$$

في الواقع قد يتساءل القارئ ما إذا كان التعريف 01.6 يضمن قيمة وحيدة للتكامل من أجل أي تمثيل للدالة البسيطة θ . بينما التساؤل الثاني هو هل نحصل على نفس القيمة لتكامل دالة بسيطة قابلة للقياس وموجبة عن طريق التعريف 04.6. تجيب القضية التالية على هذين التساؤلين الهاميين:

قضية 05.6: (أ) لا تتعلق قيمة التكامل (1) بتمثيل الدالة البسيطة θ .
(ب) إذا كانت f دالة بسيطة موجبة وقابلة للقياس فإن قيمة التكامل (2) تساوي قيمة التكامل (1).

إثبات: (أ) بالتأكيد، لنفرض أن θ تقبل التمثيلين المختلفين التاليين:

$$\theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{F_j}$$

نلاحظ أنه إذا كان $E_i \cap F_j \neq \emptyset$ فإن $\alpha_i = \beta_j$ على $E_i \cap F_j$ ، ومنه

$$\begin{aligned}
\sum_1^n \alpha_i \mu(E_i) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left(\sum_{j=1}^m \mu(E_i \cap F_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \mu(E_i \cap F_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(E_i \cap F_j) \\
&= \sum_{j=1}^m \beta_j \left(\sum_{i=1}^n \mu(E_i \cap F_j) \right) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(F_j)
\end{aligned}$$

لأن $(F_j = F_j \cap E = \bigcup_{i=1}^n (E_i \cap F_j))$ و $E_i = E_i \cap E = \bigcup_{j=1}^m (E_i \cap F_j)$

إذن

$$\int_E \theta d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) = \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(F_j)$$

(ب) نفرض أن $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$. نستخلص من التعريف 01.6 أن

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E \theta d\mu \right\}, \text{ ومن التعريف 04.6 أن } \int_E f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$$

حيث θ دالة بسيطة قابلة للقياس تحقق $0 \leq \theta \leq f$.

بوضع $I(f) = \sup \left\{ \int_E \theta d\mu \right\}$ نجد أن $\int_E f d\mu \leq I(f)$ (لأن f دالة

بسيطة). ومن جهة أخرى، إذا كان $\theta = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{F_j}$ بحيث $0 \leq \theta \leq f$ ،

فإن $\beta_j \leq \alpha_i$ على المجموعة الجزئية $E_i \cap F_j$ طالما كان $\mu(E_i \cap F_j) \neq 0$ ، إذن،

$$\begin{aligned}
\int_E \theta d\mu &= \sum_{j=1}^m \beta_j \mu(F_j) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j \mu(F_j \cap E_i) \\
&\leq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(F_j \cap E_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i) = \int_E f d\mu
\end{aligned}$$

بأخذ الحد الأعلى نجد $I(f) \leq \int_E f d\mu$ ، وعليه فإن

$$I(f) = \int_E f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i)$$

وهذا يثبت المساواة المطلوبة. ■

ملاحظة 06.6: 1 نشير إلى أنه ليس بالضرورة أن تكون المجموعة E أو إحدى مجموعاتها الجزئية ذات قياس منته، وبإمكاننا مصادفة الحالة $\alpha_i = 0$ و $\mu(E_i) = +\infty$. لذا نصلح على وضع $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$

(2) من أجل كل دالة قابلة للقياس $f: E \rightarrow [0, +\infty]$ فإن تكامل لوبيغ يأخذ قيمه في نصف المستقيم الموسع الموجب $[0, +\infty]$.

مثال 07.6: لتكن E مجموعة غير خالية، $a \in E$ و $f \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{P}(E))$. لنحسب تكامل f على E وفق قياس ديراك δ_a المعرف بـ

$$(\forall A \subset E), \delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

نفرض أولاً أن $f(a) < \infty$ ، نلاحظ أن $\varphi = f(a)\chi_{\{a\}} \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{P}(E))$ وتحقق $\varphi \leq f$ ، وعليه فإن

$$\int_E \varphi d\delta_a = f(a)\delta_a(\{a\}) = f(a) \leq \int_E f d\delta_a$$

لتكن الآن $\theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{P}(E))$ بحيث $\theta \leq f$ ، يوجد إذن مؤشر وحيد i_0 ، $1 \leq i_0 \leq n$ ، بحيث $a \in E_{i_0}$ ، ومنه

$$\theta(a) = \alpha_{i_0} \leq f(a)$$

لدينا من جهة أخرى،

$$\int_E \theta d\delta_a = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_a(E_i) = \alpha_{i_0} \leq f(a)$$

ينتج عن كون θ اختياريًا أن

$$\int_E f d\delta_a = \sup \left\{ \int_E \theta d\delta_a, \theta \leq f, \theta \in \mathfrak{S}^+ \right\} \leq f(a)$$

إذن

$$(\forall f \in \mathfrak{M}^+(E, \mathcal{P}(E)): f(a) < \infty), \int_E f d\delta_a = f(a)$$

$$(f(a) = \infty \text{ عندما } \int_E f d\delta_a = f(a) = \infty \text{ نحصل كذلك على})$$

نعلم أنّ كل دالة قابلة للقياس f هي نهاية لمتتالية من الدوال البسيطة القابلة للقياس $\{\theta_n\}_n$ حسب المبرهنة الأساسية للتقريب 33.4، وعليه فإنه بإمكاننا تعريف تكامل لوبيغ كالتالي: $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \theta_n d\mu$. علينا كذلك إثبات أنّ هذا التعريف هو تعريف "جيد"، بمعنى أنّ قيمة التكامل ليست مرتبطة بالمتتالية $\{\theta_n\}_n$ ، فضلا على أنّ هذه القيمة تساوي قيمة التكامل (2). يستعمل بعض المؤلفين هذا كتعريف لتكامل لوبيغ، أمّا فيما يخصنا فهي نتيجة مباشرة لمبرهنة التقارب الرتيب التي سوف نتطرق إليها أثناء هذا الفصل.

يتضح من تعريف التكامل على مجموعة جزئية قابلة للقياس A من E أنّه يكفينا دراسة خواص التكامل على E ، ومن ثمّ نستنتج بسهولة خواص التكامل على A مع الملاحظة أنّ $\theta \chi_A$ دالة بسيطة طالما كانت θ دالة بسيطة.

نفرض فيما يلي أنّ كلّ الدوال المستعملة هي قابلة للقياس وموجبة.

خواص عامة 08.6:

$$(\forall A \in \Sigma), \int_A d\mu = \int_E \chi_A d\mu = \mu(A) \quad (أ)$$

$$(ب) \text{ إذا كانت } \theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} \text{ دالة بسيطة قابلة للقياس فإن}$$

$$(\forall A \in \Sigma), \int_A \theta d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A \cap E_i)$$

(ج) لدينا $\int_{A \cup B} \theta d\mu = \int_A \theta d\mu + \int_B \theta d\mu$ ، من أجل كلّ مجموعتين جزئيتين من E قابلتين للقياس ومنفصلتين A و B .

(د) إذا كانت θ ، φ دالتين بسيطتين قابلتين للقياس فإن

$$\int_A (\theta + \varphi) d\mu = \int_A \theta d\mu + \int_A \varphi d\mu \quad (\forall A \in \Sigma)$$

إثبات: من الواضح أن الخاصيتين (أ) و(ب) هما نتيجة مباشرة لتعريف التكامل على مجموعة جزئية قابلة للقياس والمساواة $\chi_A \cdot \chi_{E_i} = \chi_{A \cap E_i}$.

(ج) فيما يخص هذه الخاصية لدينا

$$\begin{aligned} \int_A \theta d\mu + \int_B \theta d\mu &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i \cap A) + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i \cap B) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i \cap (A \cup B)) = \int_{A \cup B} \theta d\mu \end{aligned}$$

(د) يكفي إثبات هذه الخاصية من أجل $A = E$. لنفرض أن

$$\theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} \quad \text{و} \quad \varphi = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{F_j}$$

لدينا حسب تعريف الدوال البسيطة $\bigcup_{i=1}^n E_i = E = \bigcup_{j=1}^m F_j$. إذن

$$\theta + \varphi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\alpha_i + \beta_j) \chi_{E_i \cap F_j}$$

إن الدالة $\theta + \varphi$ تأخذ القيمة $\alpha_i + \beta_j$ على $E_i \cap F_j$ ، ومنه

$$\int_{E_i \cap F_j} (\theta + \varphi) d\mu = \int_{E_i \cap F_j} \theta d\mu + \int_{E_i \cap F_j} \varphi d\mu$$

بما أن المجموعات $E_i \cap F_j$ منفصلة متتى متتى و $E = \bigcup_{i,j} E_i \cap F_j$

فإن الخاصية (د) تُستخلص فوراً من (ج). ■

مثال 09.6: نعتبر فضاء القياس $(E, \mathcal{P}(E), \mu_c)$ حيث

$$\mu_c : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, \infty]$$

قياس العد. لتكن $(N \geq 1)$ ، $A = \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \subset E$ بحيث $a_i \neq a_j$

$$\begin{aligned}
\int_A \theta d\mu_c &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_c(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_c \left(\bigcup_{k=1}^N (E_i \cap \{a_k\}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left\{ \sum_{k=1}^N \mu_c(E_i \cap \{a_k\}) \right\} = \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_c(E_i \cap \{a_k\}) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^N \int_{\{a_k\}} \theta d\mu_c = \sum_{k=1}^N \int_E \theta \chi_{\{a_k\}} d\mu_c = \sum_{k=1}^N \int_E \theta(a_k) \chi_{\{a_k\}} d\mu_c \\
&= \sum_{k=1}^N \theta(a_k) \mu_c(\{a_k\}) = \sum_{k=1}^N \theta(a_k)
\end{aligned}$$

وهكذا فإن

$$\forall N \geq 1, \forall \theta \in \mathcal{S}^+(E, \mathcal{P}(E)), \int_A \theta d\mu_c = \sum_{k=1}^N \theta(a_k)$$

خاصية الترتاب 10.6: (أ) إذا كان $0 \leq f \leq g$ فإن $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$

(ب) إذا كان $A, B \in \Sigma$ بحيث $A \subset B$ فإن $\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu$

إثبات: (أ) لدينا فوراً

$$\begin{aligned}
\int_E f d\mu &= \sup \left\{ \int_E \theta d\mu, \theta \in \mathcal{S}^+(E, \Sigma): \theta \leq f \right\} \\
&\leq \sup \left\{ \int_E \theta d\mu, \theta \in \mathcal{S}^+(E, \Sigma): \theta \leq g \right\} \\
&= \int_E g d\mu
\end{aligned}$$

(ب) يكفي الملاحظة أن $f \chi_A \leq f \chi_B$ وبالتالي

$$\int_E f \chi_A d\mu = \int_A f d\mu \leq \int_E f \chi_B d\mu = \int_B f d\mu$$

نستنتج فوراً مما سبق أن

لازمة 11.6: إذا كانت $0 \leq m \leq f \leq M$ على $A \in \Sigma$ فإن

إثبات: لدينا $m = m\chi_A \leq f \leq M = M\chi_A$ ، ومنه حسب خاصية

$$\blacksquare. m\mu(A) \leq \int_A f d\mu \leq M\mu(A) \text{ فإن}$$

قضية 12.6: (1) لدينا من أجل كل عدد موجب c ما يلي $\int_E c f d\mu = c \int_E f d\mu$

(2) إذا كانت A مجموعة جزئية مهملة فإن $\int_A f d\mu = 0$

إثبات: إذا كان $c = 0$ فإن الخاصية بديهية. نفرض إذن أن $c > 0$. لتكن

$$\theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} \text{ دالة بسيطة بحيث } \theta \leq f, \text{ عندئذ } c\theta \leq cf, \text{ ولدينا}$$

$$\int_E c\theta d\mu = \sum_{i=1}^n c\alpha_i \mu(E_i) = c \int_E \theta d\mu$$

إذن

$$\begin{aligned} \int_E c f d\mu &= \sup \left\{ \int_E \theta d\mu, 0 \leq \theta \leq cf \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_E c\theta d\mu, 0 \leq \theta \leq f \right\} \\ &= \sup \left\{ c \int_E \theta d\mu, 0 \leq \theta \leq f \right\} \\ &= c \sup \left\{ \int_E \theta d\mu, 0 \leq \theta \leq f \right\} = c \int_E f d\mu \end{aligned}$$

(2) إذا كانت $\theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ دالة بسيطة قابلة للقياس وموجبة فإن

$$\begin{aligned} \int_A \theta d\mu &= \int_E \theta \chi_A d\mu = \int_E \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{A \cap E_i} d\mu \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A \cap E_i) = 0 \end{aligned}$$

(لأن $\mu(A) = 0$)، وعليه فإن

$$\begin{aligned} \int_A f d\mu &= \int_E f \chi_A d\mu = \sup \left\{ \int_E \theta d\mu : \theta \in \mathfrak{S}^+(E, \Sigma), \theta \leq f \chi_A \right\} \\ &= \sup \left\{ \int_A \theta d\mu + \int_{A^c} \theta d\mu : \theta \in \mathfrak{S}^+(E, \Sigma), \theta \leq f \chi_A \right\} = 0 \\ &\quad \text{لأن } \int_A \theta d\mu = 0 \text{ و } \int_{A^c} \theta d\mu = 0 \text{ لكون } \theta \leq f \chi_A. \\ \blacksquare. 0. (+\infty) &= 0 \text{ إذا كان } f = +\infty \text{ فيكفي استعمال الاصطلاح} \end{aligned}$$

نقدّم الآن هذه الخاصية الهامة جدًا:

قضية 13.6: يكون التكامل $\int_A f d\mu = 0$ إذا وإذا فقط كان $f = 0$ ، μ -تاك على $A \in \Sigma$.

إثبات: نفرض أنّ $\int_A f d\mu = 0$ ، ونضع $A_n = \left\{ x \in A : f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}$ ، $(\forall n \geq 1)$. من الواضح أنّ A_n قابلة للقياس (لأنّ A و f قابلتان للقياس)، ولدينا كذلك

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{x \in A : f(x) > 0\} \text{ و } (\forall n \geq 1), A_n \subset A_{n+1}$$

نستنتج من الخاصية الأولى للتقارب أنّ

$$\mu(\{x \in A : f(x) > 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

لدينا من جهة أخرى بمقتضى خاصية الرتبة

$$0 = \int_A f d\mu \geq \int_{A_n} f d\mu \geq \int_{A_n} \frac{1}{n} d\mu = \frac{1}{n} \mu(A_n)$$

ومنه $\mu(A_n) = 0$ ، من أجل كلّ $n \geq 1$. إذن

$$\mu(\{x \in A : f(x) > 0\}) = 0 \text{، ومن ثمّ فإنّ } f = 0 \text{، } \mu\text{-تاك على } A.$$

عكسيًا، إذا كانت $f = 0$ ، μ -تاك على A فإنّ $\int_A \theta d\mu = 0$ ، لكل دالة بسيطة θ بحيث $0 \leq \theta \leq f$ لكون $\theta = 0$ ، μ -تاك على A ، وعليه فإنّ

■. (وكذلك في الحالة $\mu(A) = +\infty$) $\int_A f d\mu = 0$

قضيه 14.6: لتكن $\theta \in \mathcal{S}^+(E, \Sigma)$ ، عندئذ الدالة $\lambda: \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$ المعرفة
 $\lambda(A) = \int_A \theta d\mu$ ، $(\forall A \in \Sigma)$ قياس موجب على Σ .

إثبات: من الواضح أن λ دالة موجبة. لدينا من جهة أخرى،
 $\lambda(\emptyset) = 0$. لنثبت أن λ تحقق خاصية التجميع القابل للعد، بالتأكيد،
 لتكن $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \Sigma$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى.

نضع $A = \bigcup_{j \geq 1} A_j$ و $\theta = \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}$ ، لدينا إذن

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \int_A \theta d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i \cap A) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu\left(E_i \cap \left(\bigcup_{j \geq 1} A_j\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_i \cap A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_i \cap A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \theta d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) \end{aligned}$$

■. وهكذا فإن λ قياس موجب على Σ .

للمبرهنة التالية تطبيقات كثيرة حيث تعطي شرطًا كافيًا لتبادل رمز التكامل مع رمز النهاية، لدينا

مبرهنة 15.6 (التقارب الرتيب): لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{K}^+(E, \Sigma)$ متتالية متزايدة

على E ، بحيث $f_n \xrightarrow{s} f$ ، عندما $n \rightarrow \infty$ ، عندئذ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

إثبات: ينتج فوراً عن رتبة المتتالية أن $f(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$ ، ومنه

$$(\forall x \in E) \text{ و } (\forall n \geq 1), 0 \leq f_n(x) \leq f(x)$$

$$\text{إذن } \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu \text{ ، } (\forall n \geq 1) \text{ ، وهذا يستلزم أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \sup_{n \geq 1} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$$

لأن $\left\{ \int_E f_n d\mu \right\}_{n \geq 1}$ متتالية متزايدة.

لإثبات المتباينة العكسية نعتبر عددًا $0 < c < 1$ و $\theta \in \mathfrak{S}^+(E, \Sigma)$ بحيث $\theta \leq f$ نضع

$$(\forall n \geq 1) \text{ ، } A_n = \{x : f_n(x) \geq c\theta(x)\}$$

لدينا فوراً $(\forall n \geq 1) \text{ ، } A_n \subset A_{n+1}$ و $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E$ لأن $\{f_n\}_{n \geq 1}$ متزايدة و $f_n \xrightarrow{s} f$. نستنتج من كون $\lambda(A) = \int_A \theta d\mu$ قياساً موجباً

على Σ وبفضل الخاصية الأولى للتقارب أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(A_n) = \lambda(E)$. إذن $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} \theta d\mu = \int_E \theta d\mu$ بالمرور إلى النهاية في المتباينة التالية

$$\int_{A_n} c\theta d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu$$

نحصل على

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} c\theta d\mu = c \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} \theta d\mu = c \int_E \theta d\mu \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

إذن ، $c \int_E \theta d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu$ ، وبجعل $c \rightarrow 1$ نجد أن

$$\int_E \theta d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu \text{ ، } \theta \in \mathfrak{S}^+(E, \Sigma) \text{ بحيث } \theta \leq f \text{ ،}$$

ومنه $\int_E f d\mu \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_E f_n d\mu$ ، حسب تعريف التكامل ، وبهذا يكتمل

■ الإثبات.

ملاحظة 16.6: 1) ينتج عن المبرهنة الأساسية للتقريب 33.4 أنه من أجل كل دالة قابلة للقياس (موجبة) f توجد متتالية متزايدة من الدوال البسيطة الموجبة القابلة للقياس $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$ بحيث $f = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n$. نستنتج إذن من مبرهنة التقارب الرتيب أن $\int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \theta_n d\mu$ ، ويُعدّ هذا تعريفاً آخر

(2) بما أن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{\int_E f_n d\mu\}_{n \geq 1}$ متتاليتان متزايدتان فبإمكاننا كتابة مبرهنة التقارب الرتيب كالآتي:

$$\sup_{n \geq 1} \int_E f_n d\mu = \int_E \sup_{n \geq 1} f_n d\mu$$

مثال مضاد 17.6: إن شرط التزايد ضروري لصحة مبرهنة التقارب الرتيب كما يبينه المثال التالي:

لتكن $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0, n]}$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، لدينا $f_n \xrightarrow{s} f = 0$ ، ومنه

لدينا من جهة أخرى $\int_{\mathbb{R}} f_n dm = 1$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، ومنه $\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dm = 0$

يعود هذا إلى كون المتتالية غير متزايدة كما نتصّل عليه المبرهنة بالرغم من أن المتتالية متقاربة بانتظام على \mathbb{R} .

مثال 18.6: نعتبر الدالة $f(x) = \frac{1}{[x]^2} : [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ ، حيث $[x]$ ترمز إلى الجزء الصحيح للعدد x . لنحسب التكامل $\int_{1, \infty[} f dm$.
نلاحظ أولاً أن

$$f = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} \chi_{[n, n+1[} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \chi_{[n, n+1[} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_N$$

وبما أن $f_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \chi_{[n, n+1[}$ قابلة للقياس ، $(\forall N \geq 1)$ ، فإن النهاية f قابلة للقياس.

نلاحظ من جهة أخرى أن $\{f_N\}_{N \geq 1}$ متتالية متزايدة، نستنتج إذن من

مبرهنة التقارب الرتيب أن

$$\begin{aligned} \int_{]1, \infty[} f dm &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{]1, \infty[} f_N dm \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{]1, \infty[} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} \chi_{[n, n+1[} dm \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} m([n, n+1[) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^2} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

مبرهنة 19.6: (1) ليكن $\{f_k\}_{k=1}^m \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ ، m منته ، عندئذ

$$\int_E \sum_{k=1}^m f_k d\mu = \sum_{k=1}^m \int_E f_k d\mu$$

(التصحيح المنتهي للدوال) ،

(2) $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ ، عندئذ

$$\int_E \sum_{k=1}^\infty f_k d\mu = \sum_{k=1}^\infty \int_E f_k d\mu$$

(التصحيح القابل للعد للدوال) .

إثبات: (1) من أجل كل k توجد $\{\theta_i^k\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{S}^+(E, \Sigma)$ بحيث

$\theta_i^k \nearrow f_k$ ، ومنه $\sum_{k=1}^m \theta_i^k \nearrow \sum_{k=1}^m f_k$. نستنتج من مبرهنة التقارب الرتيب أن

$$\int_E \sum_{k=1}^m f_k d\mu = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E \sum_{k=1}^m \theta_i^k d\mu = \sum_{k=1}^m \lim_{i \rightarrow \infty} \int_E \theta_i^k d\mu = \sum_{k=1}^m \int_E f_k d\mu$$

وعليه فإن

$$\int_E \sum_{k=1}^m f_k d\mu = \sum_{k=1}^m \int_E f_k d\mu$$

(2) بوضع $g_n = \sum_{i=1}^n f_i$ نحصل على متتالية $\{g_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$

متقاربة ببساطة إلى $g = \sum_{i=1}^\infty f_i$ على E . نستنتج فوراً من مبرهنة التقارب

الرتيب أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu = \int_E g d\mu$ باستعمال التجميع المنتهي للدوال نجد

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \sum_{k=1}^n f_k d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_E f_k d\mu \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k d\mu = \int_E g d\mu = \int_E \sum_{k=1}^{\infty} f_k d\mu \end{aligned}$$

وهذا يثبت خاصية التجميع القابل للعد للدوال. ■

نقدّم فيما يلي طريقة عمليّة لإنشاء قياسات موجبة انطلاقاً من قياس معطى. لقد تعرّضنا إلى نفس الأمر في القضية 14.6 حيث استعملنا دالة بسيطة موجبة وقابلة للقياس بينما نستعمل هنا أي دالة عددية موجبة قابلة للقياس.

قضية 20.6: لتكن $f \in \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$. نعرّف $\lambda: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ بـ

$$\lambda(A) = \int_A f d\mu \quad (\forall A \in \Sigma),$$

عندئذ λ قياس موجب على Σ .

إثبات: لدينا λ دالة موجبة و $\lambda(\emptyset) = 0$. لنثبت أن λ دالة σ -جمعية. بالتأكيد، لتكن $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \Sigma$ متتالية ذات عناصر منفصلة متتى متتى.

نضع $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ، من المبرهنة 19.6 نرى أن

$$\begin{aligned} \lambda(A) &= \int_A f d\mu = \int_E f \chi_A d\mu \\ &= \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f \chi_{A_n} d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f \chi_{A_n} d\mu \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) \end{aligned}$$

ومنه λ قياس موجب على Σ . ■

تعمّم اللازمة التالية الخاصة 08.6 (ج) على ضعيفين: أولاً، نعتبر دوال موجبة قابلة للقياس عوض دوال بسيطة موجبة قابلة للقياس، ثانياً، نعتبر الحالة القابلة للعد عوض الحالة المنتهية. لدينا

إثبات: بما أن $\lambda(A) = \int_A f d\mu$ ، $(\forall A \in \Sigma)$ ، قياس موجب و $E = \bigcup_{n \geq 1} E_n$ ،

حيث $E_m \cap E_n = \emptyset$ ، عندما $m \neq n$ ، عندئذ

$$\blacksquare. \int_E f d\mu = \lambda(E) = \lambda\left(\bigcup_{n \geq 1} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{E_n} f d\mu$$

مثال 22.6: نعتبر فضاء القياس $(E, \mathcal{P}(E), \mu_0)$ حيث $E = \bigcup_{n \geq 1} \{a_n\}$ ،

$\mu_0 : \mathcal{P}(E) \rightarrow [0, \infty]$ و $(\forall m \neq n)$ ، $a_m \neq a_n$ قياساً موجباً بحيث

$\mu_0(\{a_n\}) = \alpha_n$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، من أجل متتالية من الأعداد

$$\cdot \{\alpha_n\}_{n \geq 1} \subset]0, \infty[$$

لدينا من أجل كل $f \in \mathcal{M}^+(E, \mathcal{P}(E))$ ما يلي

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu_0 &= \int_{\bigcup_{n \geq 1} \{a_n\}} f d\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{a_n\}} f d\mu_0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f(a_n) \chi_{\{a_n\}} d\mu_0 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n) \mu_0(\{a_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(a_n) \end{aligned}$$

إذن

$$\cdot \int_E f d\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f(a_n)$$

سوف نقدّم فيما يلي أول متباينة تبين العلاقة ما بين تكامل النهاية الدنيا لمتتالية من الدوال الموجبة القابلة للقياس والنهاية الدنيا لتكامل هذه المتتالية ، تسمى بمتباينة فاتو² (Fatou) :

² بيار فاتو [Pierre Fatou] (1929-1878)

توطئة 23.6 (متباينة فانو): لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ عندئذ

$$\int_E \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu$$

إثبات: بوضع $g_n(x) = \inf \{f_k(x) : k \geq n\}$ نحصل على متتالية

$\{g_n\}_{n \geq 1}$ متزايدة في $\mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ ، ومنه

$$\liminf f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \equiv \sup_{n \geq 1} g_n(x)$$

نستنتج من مبرهنة التقارب الرتيب 15.6 أن

$$\int_E \liminf f_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu$$

وبما أن $(\forall k \geq n)$ ، $\int_E g_n d\mu \leq \int_E f_k d\mu$ فإن

$$\int_E g_n d\mu \leq \inf \left\{ \int_E f_k d\mu : k \geq n \right\} \leq \liminf \int_E f_n d\mu$$

إن

$$\int_E \liminf f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu \leq \liminf \int_E f_n d\mu$$

لازمة 24.6: لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ بحيث $f_n \xrightarrow{s} f$. نفرض وجود

$$M > 0 \text{ بحيث } \int_E f_n d\mu \leq M, (\forall n \geq 1), \text{ عندئذ } \int_E f d\mu \leq M$$

ملاحظة 25.6: لم نأخذ بعين الاعتبار في الإثباتات السابقة بما فيهم

مبرهنة التقارب الرتيب 15.6 الحالة $\int_E f d\mu = \infty$ التي تظهر عندما يكون

القياس $\mu(\{x \in E : f(x) = +\infty\}) > 0$. عمليًا إننا لا نتعامل إلا مع

صنف الدوال "القابلة للتكامل"، أي الدوال ذات تكامل منته، وبالتسبة لهذه

الدوال فإن المجموعة $\{x : f(x) = +\infty\}$ مهمة.

قضية 26.6: لتكن $\{f, g\} \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ بحيث $f = g$ ، $\mu - \nu$ ، عندئذ

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$$

إثبات: من الواضح أنّ المجموعة $A = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ قابلة للقياس وأنّ $\mu(A) = 0$ لدينا إذن

$$\begin{aligned} \int_E f d\mu &= \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{A^c} g d\mu \\ &= 0 + \int_{A^c} g d\mu = \int_A g d\mu + \int_{A^c} g d\mu = \int_E g d\mu \end{aligned}$$

وهو المطلوب. ■

ملاحظة 27.6: يمكن للقارئ مقارنة القضية 26.6 بالقضية 13.6 السابقة بأخذ $h = f - g$. في الواقع تهدف هذه الصيغة إلى الفكرة التالية: يمكننا أن نستبدل بفضل هذه القضية التقارب النقطي بالتقارب "تقريباً أينما كان" ومفهوم "المعرّف على E " "بالمعرّف أينما كان تقريباً على E " في مبرهنة التقارب الرتيب. وبكلّ بساطة يعود السبب إلى عدم تأثر التكامل بتغيير قيم الدالة على مجموعة مهمة.

نختم هذا المقطع بإعطاء نتيجة مماثلة لمبرهنة التقارب الرتيب الخاصة بالمتتاليات المتناقصة.

مبرهنة 28.6: لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}^+(E, \Sigma)$ متتالية متناقصة على E بحيث

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow{s} f, \text{ عندما } n \rightarrow \infty. \text{ إذا كان } \int_E f_1 d\mu < \infty \text{ فإن} \\ \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \end{aligned}$$

إثبات: نضع $g_n = f_1 - f_n$. إنّ $\{g_n\}_{n \geq 1}$ معرفة تعريفاً جيّداً لأنّ الدالة f_1 منتهية تقريباً أينما كانت، وبالتالي فإنّ المجموعة

$$A = \{x \in E : g_n(x) = \infty - \infty\}$$

مهمة. نلاحظ كذلك أنّ g_n قابلة للقياس تقريباً أينما كانت و $\{g_n\}_{n \geq 1}$ متتالية متزايدة على E .

نستنتج من مبرهنة التقارب الرتيب أنّ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu = \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} g_n d\mu = \int_E (f_1 - f) d\mu$$

أي

$$\int_E f_1 d\mu - \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \int_E f_1 d\mu - \int_E f d\mu$$

$$\blacksquare. \int_E f_1 d\mu < \infty \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \text{ ومنه}$$

ملاحظة 29.6: يتضح من الإثبات أنه بإمكاننا وضع الشرط

$$\int_E f_1 d\mu < \infty \text{ عوض } \int_E f_{n_0} d\mu < \infty \text{ من أجل أي مؤشر } n_0 \geq 1 \text{، عوض}$$

2- مكاملة الدوال العددية

ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس اختياريًا.

على غرار النتائج المحصل عليها في المقطع السابق من أجل دوال موجبة قابلة للقياس سوف نعرف فيما يلي تكامل لوبيغ من أجل دوال عددية قابلة للقياس $f: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

تعريف 30.6: لتكن $f \in \mathcal{M}(E, \Sigma)$ بحيث $\min \left\{ \int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu \right\} < \infty$

نعرف تكامل لوبيغ f على E وفق القياس الموجب μ كما يلي:

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

ملاحظة 31.6: 1) وضع الشرط $\min \left\{ \int_E f^+ d\mu, \int_E f^- d\mu \right\} < \infty$ لتفادي

حالة عدم التعيين $\infty - \infty$.

(2) إن تكامل لوبيغ يأخذ قيمه في المستقيم الموسع $\overline{\mathbb{R}}$.

تعريف 32.6: نقول عن دالة $f \in \mathcal{M}(E, \Sigma)$ إنها قابلة للمكاملة أو قابلة للجمع

بمفهوم لوبيغ على E إذا وإذا فقط كان $\int_E |f| d\mu < \infty$.

كما نقول عن f إنها قابلة للمكاملة (أو قابلة للجمع) على مجموعة جزئية قابلة للقياس $A \subset E$ إذا كانت الدالة $f \chi_A$ قابلة للمكاملة على E .

ترميز: - سوف نرسم لمجموعة كل الدوال العددية القابلة للمكاملة على E وفق القياس الموجب μ بـ $\mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$ أو $\mathcal{L}^1(E)$ إن لم يكن هنالك أي لبس، كما نضع $\mathcal{L}_+^1(E) = \{f \in \mathcal{L}^1(E) : f \geq 0\}$.

- إذا كانت f قابلة للمكاملة بمفهوم لوبيغ على E فإننا نستعمل أحياناً العبارة " f دالة (ل) قابل للمكاملة على E ".

ملاحظة 33.6: إذا كانت $f \in \mathcal{O}(\mathcal{L}(E, \Sigma))$ فإن التكافؤ التالي محقق:
 f دالة قابلة للجمع إذا وإذا فقط كانت $|f|$ قابلة للجمع. ولكن ينبغي الانتباه إلى أن كون $|f|$ قابلة للجمع (مع $f \notin \mathcal{O}(\mathcal{L}(E, \Sigma))$) لا يستلزم على الإطلاق أن f قابلة للجمع، يعود هذا إلى عدم صحة الاستلزام التالي
 $(|f| \in \mathcal{O}(\mathcal{L}(E, \Sigma)) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(\mathcal{L}(E, \Sigma)))$.

مثال 34.6: لتكن A مجموعة جزئية غير قابلة للقياس (بمفهوم لوبيغ) من الفترة $[0, 1]$ و $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $f = 1$ على A ، و $f = -1$ على A^c ، عندئذ f ليست قابلة للجمع لأن f ليست قابلة للقياس بالرغم من أن $|f| \equiv 1$ دالة قابلة للقياس.

مبرهنة 35.6: لتكن $\{f, g\} \subset \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$ و $c \in \mathbb{R}$ ، عندئذ

$$(a) \quad cf, f+g \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$$

$$(b) \quad \int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu \quad \text{و} \quad \int_E cf d\mu = c \int_E f d\mu$$

إثبات: (a) لدينا من جهة $cf \in \mathcal{O}(\mathcal{L}(E, \Sigma))$ ، ومن جهة أخرى فإن

$$cf \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu) \quad \text{و عليه فإن} \quad \int_E |cf| d\mu = |c| \int_E |f| d\mu < \infty$$

لدينا كذلك $f+g \in \mathcal{O}(\mathcal{L}(E, \Sigma))$ و $|f+g| \leq |f| + |g|$ ، وبالتالي

$$\int_E |f+g| d\mu \leq \int_E |f| + |g| d\mu = \int_E |f| d\mu + \int_E |g| d\mu < \infty$$

إذن $f+g \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$

(b) من السهل التأكد من أن

$$\int_E cf d\mu = \int_E (cf)^+ d\mu - \int_E (cf)^- d\mu$$

$$= c \int_E f d\mu$$

ومن جهة أخرى لدينا

$$f+g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) \text{ و } (f+g) = (f+g)^+ - (f+g)^- \\ \cdot (f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \text{ إذن}$$

وبمكاملة الطرفين نجد

$$\int_E (f+g)^+ d\mu + \int_E f^- d\mu + \int_E g^- d\mu \\ = \int_E (f+g)^- d\mu + \int_E f^+ d\mu + \int_E g^+ d\mu$$

أي

$$\int_E (f+g) d\mu = \int_E (f+g)^+ d\mu - \int_E (f+g)^- d\mu \\ = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu + \int_E g^+ d\mu - \int_E g^- d\mu \\ = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

وهو المطلوب. ■

ملاحظة 36.6: إذا كانت $f \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$ والتكامل $\int_E g d\mu$ موجودا فإن

$$\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

لازمة 37.6: لتكن $\{f, g\} \subset \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$ و $\{A, B\} \subset \Sigma$ بحيث $A \cap B = \emptyset$ ، عندها

$$\int_{A \cup B} f d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu \quad (أ)$$

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu \text{ يستلزم } f \leq g \text{ } \mu\text{-ت.ك} \quad (ب)$$

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu \quad (ج)$$

(إثبات: أ) لدينا بمقتضى المبرهنة 35.6 (ب) ما يلي

$$\begin{aligned}\int_{A \cup B} f d\mu &= \int_E f \chi_{A \cup B} d\mu = \int_E f (\chi_A + \chi_B) d\mu \\ &= \int_E f \chi_A d\mu + \int_E f \chi_B d\mu = \int_A f d\mu + \int_B f d\mu\end{aligned}$$

(ب) إن $f \leq g$ ، μ -تاك يستلزم أن $0 \leq g - f$ ، μ -تاك، ومنه $\int_E (g - f)^- d\mu = 0$ ، إذن $(g - f)^- = 0$ ، μ -تاك، ومن ثم فإن

$$\begin{aligned}\int_E g d\mu &= \int_E (f + (g - f)) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E (g - f) d\mu \\ &= \int_E f d\mu + \int_E (g - f)^+ d\mu \geq \int_E f d\mu\end{aligned}$$

(ج) واضح أن

$$\begin{aligned}\left| \int_E f d\mu \right| &= \left| \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \right| \leq \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu \\ &\leq \int_E (f^+ + f^-) d\mu = \int_E |f| d\mu\end{aligned}$$

لكن $f \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$.

ملاحظة 38.6: في الواقع تبقى المتباينة (ج) صحيحة طالما كان التكامل $\int_E f d\mu$ موجودًا.

قضيه 39.6: لنكن $f \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$ ، عندئذ f منتهية μ -تاك على E .

إثبات: نضع $A = \{x \in E : |f(x)| = \infty\}$. نحصل بفضل مبرهنة التقارب الرتيب على

$$\begin{aligned}\infty > \int_E |f| d\mu &\geq \int_A |f| d\mu = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} (n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A n d\mu = \infty \cdot \mu(A)\end{aligned}$$

ومنه $\mu(A) = 0$ ، وهذا يعني أن f دالة منتهية μ -تاك على E .

هذا الآن تعميم لمبرهنة التقارب الرتيب من أجل متتاليات من الدوال ذات إشارة اختيارية.

مبرهنة 40.6: لتكن $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$ متتالية متزايدة على E بحيث
 $f_n \xrightarrow{s} f$ ، عندما $n \rightarrow \infty$ ، عندئذ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

إثبات: بما أن f_1 دالة قابلة للمكاملة فهي منتهية تقريبًا أينما كانت.
 بوضع $g = f - f_1$ و $g_n = f_n - f_1$ نحصل على متتالية متزايدة من
 الدوال الموجبة بحيث $g_n \xrightarrow{s} g$. نستنتج من مبرهنة التقارب الرتيب
 15.6 أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E g_n d\mu = \int_E g d\mu$$

ومنه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_E f_n d\mu - \int_E f_1 d\mu \right) = \int_E f d\mu - \int_E f_1 d\mu$$

وهذا يؤدي إلى النتيجة المطلوبة لأن $\int_E f_1 d\mu < \infty$.

مبرهنة 41.6 (الاتصال المطلق للتكامل): إذا كان (E, Σ, μ) فضاء قياس و f
 دالة قابلة للجمع، فإن

$$\lim_{\substack{\mu(A) \rightarrow 0 \\ A \in \Sigma}} \int_A |f| d\mu = 0$$

إثبات: نعتبر المتتالية المتزايدة $(\forall n \geq 1), f_n(x) = \min\{|f(x)|, n\}$
 بتطبيق مبرهنة التقارب الرتيب نحصل على

$$\forall A \in \Sigma, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A |f| d\mu$$

إن، يوجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ مؤشر n_0 بحيث، مهما تكن $A \in \Sigma$
 و $n \geq n_0$ ، فإن

$$\int_A |f| d\mu \leq \int_A f_{n_0} d\mu + \frac{\varepsilon}{2} \leq \int_A n_0 d\mu + \frac{\varepsilon}{2} = n_0 \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

من أجل كل $A \in \Sigma$.

باختيار المجموعة A بحيث $\mu(A) \leq \frac{\varepsilon}{2n_0}$ نرى أن

$$\int_A |f| d\mu < n_0 \frac{\varepsilon}{2n_0} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

إذن، لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\eta \leq \frac{\varepsilon}{2n_0}$ بحيث $\int_A |f| d\mu < \varepsilon$ ، من أجل كل

■. $\lim_{\substack{\mu(A) \rightarrow 0 \\ A \in \Sigma}} \int_A |f| d\mu = 0$ وهذا يبين أن $\mu(A) \leq \eta$ يحقق $A \in \Sigma$

مبرهنة 42.6 (التقارب المحدود): ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس، $A \in \Sigma$ بحيث

$$0 < \mu(A) < \infty \text{ و } \{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathfrak{M}(A, \Sigma)$$

$$(أ) \quad f_n \xrightarrow{s} f \text{ على } A$$

(ب) $|f_n(x)| \leq M$ ، $(\forall x \in A)$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، أي $\{f_n\}_{n \geq 1}$ محدودة بانتظام على A ، عندئذ، النهاية f قابلة للجمع على A ، إضافة إلى أن

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |f_n - f| d\mu = 0$$

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu \quad \text{و}$$

إثبات: ينتج فوراً عن (ب) أن $\int_A |f_n| d\mu \leq M\mu(A)$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، ومنه

نحصل بفضل متباينة فانو على

$$\int_A |f| d\mu \leq \liminf_A \int_A |f_n| d\mu \leq M\mu(A) < \infty$$

إن f دالة قابلة للجمع على A . بما أن $\mu(A) < \infty$ فإمكاننا تطبيق مبرهنة اغوروف 34.4 لنجد من أجل كل $\varepsilon > 0$ مجموعة جزئية $A_\varepsilon \subset A$ بحيث $\mu(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{4M}$ و f_n متقاربة بانتظام على $A \setminus A_\varepsilon$.
إن يوجد من أجل نفس العدد ε مؤشر $n_0 \geq 1$ بحيث، مهما يكن n ($n_0 \leq$) فإن

$$\sup_{A \setminus A_\varepsilon} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(A)}$$

وبما أن $(\forall x \in A)$ ، $|f_n(x) - f(x)| \leq 2M$ عندئذ

$$\begin{aligned} \int_A |f_n - f| d\mu &= \int_{A \setminus A_\varepsilon} |f_n - f| d\mu + \int_{A_\varepsilon} |f_n - f| d\mu \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2\mu(A)} \mu(A \setminus A_\varepsilon) + 2M\mu(A_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

وهكذا فإن النتيجة (3) محققة، ومنها نحصل على (4) بفضل المتباينة
ج) من اللزمة 36.6 ■

ملاحظة 43.6: إذا كان القياس μ منتهياً فيكفي أخذ $A = E$ ومنتالية $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{M}(E, \Sigma)$ تحقق الشرطين (أ) و(ب).

إن مبرهنة التقارب المحدود هي حالة خاصة لمبرهنة التقارب المرجح (*dominated convergence theorem*) حيث نعوض شرط محدودية قياس المجموعة الجزئية A والشرط (ب) بشرط الترجيح بدالة مناسبة قابلة للمكاملة. تعد مبرهنة التقارب المرجح من أهم المبرهنات في التحليل الرياضي ولها تطبيقات عديدة في ميادين كثيرة.

مبرهنة 44.6 (التقارب المرجح): لتكن $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}(E, \Sigma)$ بحيث

(أ) $f_n \rightarrow f$ ، μ -تاك (ب) توجد دالة قابلة للجمع $g: E \rightarrow [0, \infty]$ بحيث
($\forall n \geq 1$)، $|f_n(x)| \leq g(x)$ ، $(\mu$ -تاك)، عندئذ، النهاية f قابلة للجمع على E ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$$

نسمي الشرط ب) بشرط الترجيح، كما نسمي g بالدالة المرَّجحة للمتتالية $\{f_n\}$.

إثبات: نضع

$$B = \bigcup_{n \geq 1} \{x \in E : |f_n(x)| > g(x)\} \text{ و } A = \{x \in E : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$$

إن المجموعتين A و B مهملتان، وبالتالي $A \cup B$ هي بدورها مجموعة مهملة. نعرف المتتالية $\{g_n\}_{n \geq 1} \rightarrow g_n = f_n \chi_{(A \cup B)^c}$

$(\forall n \geq 1)$. لدينا $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(E, \Sigma)$ لأن g_n هي عبارة عن ضرب دالتين قابلتين للقياس، بالإضافة إلى أن

$$g_n \xrightarrow{s} \bar{f} = f \chi_{(A \cup B)^c} \text{ و } (\forall x \in E), |g_n(x)| \leq g(x)$$

لاحظ أن $\bar{f} \in \mathcal{M}(E, \Sigma)$ و $|\bar{f}(x)| \leq g(x)$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} |g_n(x)| = |\bar{f}(x)|$ ، $(\forall x \in E)$

ومنه $\int_E |\bar{f}| d\mu \leq \int_E g d\mu < \infty$. نستنتج من كون $|\bar{f}| = |f|$ ، μ -تاك، أن $\int_E |f| d\mu = \int_E |\bar{f}| d\mu < \infty$ ، أي أن الدالة f قابلة للجمع على E . لدينا من جهة أخرى، $\int_E |g_n| d\mu \leq \int_E g d\mu < \infty$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، إذن كل عناصر المتتالية $\{g_n\}_{n \geq 1}$ قابلة للجمع على E .

بوضع $h_n = 2g - |g_n - \bar{f}|$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، نحصل على

$$\{h_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$$

بإمكاننا الآن تطبيق متباينة فاتو على $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ للحصول على

$$\begin{aligned} \int_E \liminf h_n d\mu &= \int_E 2g d\mu \leq \liminf \int_E (2g - |g_n - \bar{f}|) d\mu \\ &= 2 \int_E g d\mu - \overline{\lim} \int_E |g_n - \bar{f}| d\mu \end{aligned}$$

وهذا يستلزم أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |g_n - \bar{f}| d\mu = 0$

من المساواة $|g_n - \bar{f}| = |f_n - f|$ ، μ -تاك، ومن كون

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_E (f_n - f) d\mu \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$$

نستخلص أن

$$\blacksquare. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f_n - f| d\mu = 0$$

ملاحظة 45.6: إن شرط الترجيح ضروري لصحة مبرهنة التقارب المرجح كما يتضح في المثال المضاد التالي:

مثال مضاد 46.6: نعتبر المتتالية $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}^+(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ المعرفة $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[0, n]}$ لدينا $f_n \xrightarrow{u} 0$ (تقارب منتظم)، على \mathbb{R}^+ ، غير أن

$$\int_{\mathbb{R}^+} f_n dm = 1 \not\rightarrow \int_{\mathbb{R}^+} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dm = 0$$

يعود هذا الخلل إلى عدم وجود دالة قابلة للجمع $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, \infty]$ تحقق $(\forall n \geq 1), |f_n(x)| \leq g(x)$ ، $(x \geq 0)$ ، $(\text{تاك} - m)$.

مبرهنة 47.6: ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(E, \Sigma)$ بحيث

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty$$

عندئذ تتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ مطلقاً تقريباً أينما

كانت إلى دالة قابلة للجمع f ، ولدينا

$$\int_E f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

إثبات: نستنتج من المبرهنة 19.6 أن $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty$ ،

أي أن الدالة $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ قابلة للجمع على E ، وبالتالي فهي

μ -تاك منتهية على E ، إذن تتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ مطلقاً

تقريباً أينما كانت إلى دالة f . نرى فوراً من المتباينة

$$|f| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n| = g$$

أن f دالة قابلة للجمع على E .

نعرف الآن المتتالية $\{g_m\}_{m \geq 1} \rightarrow g_m = \sum_{n=1}^m f_n$ ، $(\forall m \geq 1)$. من

الواضح أن $\{g_m\}_{m \geq 1} \subset \mathcal{G}(E, \Sigma)$ و $(\forall m \geq 1)$ ، $|g_m(x)| \leq g(x)$ ،

μ -تاك، إضافة إلى أن $f \rightarrow g_m$ ، μ -تاك.

نستنتج من مبرهنة التقارب المرجح 44.6 أن

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \int_E f_n d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E \sum_{n=1}^m f_n d\mu \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_E g_m d\mu = \int_E f d\mu \end{aligned}$$

وبهذا يكتمل الإثبات. ■

ملاحظة 48.6: بإمكاننا تعويض الفرضية $\sum_{n=1}^{\infty} \int_E |f_n| d\mu < \infty$ بالشرط

التالي: توجد دالة g قابلة للجمع على E بحيث

$$(\forall n \geq 1) , (\mu\text{-تاك}, x \in E) , \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| \leq g(x)$$

نظرًا لأهميتها التطبيقية في الاحتمالات والمعادلات التكاملية سوف نقدم ونثبت متباينة جيسان في حالتها العامة إذ أنه بإمكاننا استنتاج العديد من المترجمات وذلك حسب اختيار فضاء القياس والدالة المحدبة المستعملة. نستهل دراستنا بتعريف الدوال المحدبة التي تتميز بخاصية الاتصال إضافة إلى قابلية اشتقاقها باستثناء متتالية من نقاط مجموعة التعريف.

تعريف 49.6: نقول عن دالة $f: I =]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ ، $(-\infty \leq a < b \leq \infty)$ ،

إنها محدبة في I إذا حققت المتباينة التالية

$$f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$$

$$(\forall x_1, x_2 \in I), (\forall \alpha, \beta \geq 0: \alpha + \beta = 1)$$

هندسياً، نستطيع القول بأن الدالة f محدبة إذا كان من أجل كل $x_1, x_2 \in I$ فإن القطعة المستقيمة التي تربط النقطة $M_1(x_1, f(x_1))$ — $M_2(x_2, f(x_2))$ تقع فوق منحنى f ما بين النقطتين M_1 و M_2 .

امثلة 50.6: الدوال التالية محدبة:

$$f(x) = e^{\alpha x} \text{ على } \mathbb{R}, \text{ من أجل } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

$$g(x) = x^\alpha \text{ على } I =]0, \infty[\text{ من أجل } \alpha \geq 1$$

$$h(x) = -\ln x \text{ على } I =]0, \infty[$$

$$k(x) = x \ln x \text{ على } I =]0, \infty[$$

هذه بعض الخواص التي تتمتع بها الدوال المحدبة:

خواص عامة 51.6:

(1) تكون دالة قابلة للاشتقاق f على I محدبة إذا وإذا فقط كانت مشتقتها الأولى متزايدة، وبالخصوص إذا كانت f قابلة للاشتقاق إلى المرتبة الثانية على I بحيث $f''(x) \geq 0$ ، إذا $(\forall x \in I)$ ، عندئذ f دالة محدبة في I ،

(2) كل دالة محدبة $f: I =]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ هي متصلة على I ،

(3) تكون دالة متصلة $f: I =]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ محدبة على I ، إذا وإذا فقط حققت

$$(\forall x_1, x_2 \in I), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

قضية 52.6: لكن $f: I =]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدبة على I ، عندئذ من أجل كل $t \in I$ يوجد ثابت $\gamma = \gamma(f, t) \in \mathbb{R}$ بحيث

$$. (\forall x \in I), f(x) \geq \gamma(x-t) + f(t)$$

إثبات: نثبت أولاً t في I ونعتبر $x_1, x_2 \in I$ بحيث $x_1 < t < x_2$.
نضع

$$. \beta = \frac{t-x_1}{x_2-x_1} \text{ و } \alpha = \frac{x_2-t}{x_2-x_1}$$

من الواضح أن $\alpha + \beta = 1$ و $\alpha, \beta \geq 0$ ، وبالتالي

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + \beta x_2) &= f(t) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2) \\ &\leq \frac{x_2-t}{x_2-x_1} f(x_1) + \frac{t-x_1}{x_2-x_1} f(x_2) \end{aligned}$$

ومن ثم فإن

$$. \frac{f(t) - f(x_1)}{t-x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2-t}$$

بأخذ الحد الأعلى للطرف الأيسر على $z \in]a, t[$ نجد

$$. \frac{f(t) - f(x_1)}{t-x_1} \leq \gamma := \sup_{a < z < t} \frac{f(t) - f(z)}{t-z} \leq \frac{f(x_2) - f(t)}{x_2-t}$$

ومنه نستخلص أن $(\forall x_2 \in]t, b[)$

$$. (\forall x \in]a, t[), f(x) \geq \gamma(x-t) + f(t)$$

$$. (\forall x \in]t, b[), f(x) \geq \gamma(x-t) + f(t) \text{ و}$$

مع الإشارة إلى أن المتباينة هي كذلك صحيحة من أجل $x=t$ ، وهو

المطلوب. ■

متباينة جنسان³ [Jensen] 53.6 : ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس منتهيا

³ (Johan William Jensen) [1859-1925]

$$\cdot \varphi \left(\frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \right) \leq \frac{1}{\mu(E)} \int_E \varphi \circ f d\mu$$

إثبات: نلاحظ أولاً أن $a < \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu < b$ بوضع

$$t = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f d\mu \quad \text{وتطبيق القضية 52.6 نجد } \gamma \in \mathbb{R} \text{ (متعلق بـ } t \text{ و } \varphi \text{) بحيث}$$

$$\cdot (\forall x \in I), \varphi(x) \geq \gamma(x-t) + \varphi(t)$$

وبتعويض x بـ $f(z)$ ، $(z \in E)$ ، نحصل على

$$\cdot (\forall z \in E), \varphi(f(z)) = \varphi \circ f(z) \geq \gamma(f(z)-t) + \varphi(t)$$

ينتج عن كون φ محدبة أنها متصلة، وبالتالي فإنها قابلة للقياس. إذن، $\varphi \circ f$ دالة قابلة للقياس. بمكاملة طرفي المتباينة الأخيرة على E وفق القياس μ نحصل على

$$\int_E \varphi \circ f(z) d\mu(z) \geq \underbrace{\gamma \left(\int_E f(z) d\mu(z) - t\mu(E) \right)}_0 + \varphi(t)\mu(E)$$

أي $\int_E \varphi \circ f(z) d\mu(z) \geq \varphi(t)\mu(E)$ ، وبالتعويض t بعبارته نجد المتباينة المطلوبة. ■

نستطيع بفضل اللازمة التالية إزالة شرط محدودية القياس بإضافة دالة قابلة للجمع يتكفل بهذا الشرط، لدينا

لازمة 54.6: ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس اختياريًا، $\mathbb{R} \rightarrow]a, b[= I$ دالة

محدبة و $f \in \mathcal{M}(E, \Sigma)$ بحيث $f(E) \subset I$. عندئذ، من أجل كل دالة

μ -قابلة للجمع $p: E \rightarrow [0, \infty]$ بحيث $pf \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$

و $\int_E p d\mu > 0$ فإن

$$\cdot \varphi \left(\frac{1}{\int_E p d\mu} \int_E p f d\mu \right) \leq \frac{1}{\int_E p d\mu} \int_E p (\varphi \circ f) d\mu$$

إثبات: نعرّف القياس الموجب $\nu: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$ بـ

$$\cdot (\forall A \in \Sigma), \nu(A) = \int_A p d\mu$$

بما أنّ $\int_E p f d\mu = \int_E f d\nu < \infty$ و $0 < \nu(E) = \int_E p d\mu < \infty$ حسب التمرين 12.6، السؤال (2)، عندئذ $f \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \nu)$. بتطبيق متباينة Jensen في فضاء القياس (E, Σ, ν) نجد

$$\cdot \varphi \left(\frac{1}{\nu(E)} \int_E f d\nu \right) \leq \frac{1}{\nu(E)} \int_E \varphi \circ f d\nu$$

وباستعمال التمرين 12.6، السؤال (2) مرّة أخرى وتعويض $\nu(E)$ بـ $\int_E p d\mu$ نحصل على المتباينة المطلوبة. ■

تطبيق 55.6: لتكن $E = \{a_1, \dots, a_n\}$ و μ قياسًا موجبًا على $\mathcal{P}(E)$

معرّفًا بـ $\mu(\{a_i\}) = p_i > 0$ ، من أجل $i = 1, \dots, n$ بحيث $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. باعتبار الدالة المحدّبة $\varphi:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ودالة قابلة للجمع $f: E \rightarrow]0, \infty[$ نجد أنّ

$$\cdot \mu(E) = \sum_{i=1}^n \mu(\{a_i\}) = \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

وبتطبيق متباينة Jensen نرى أنّ

$$\begin{aligned} \varphi \left(\int_E f d\mu \right) &= e^{\sum_{i=1}^n p_i f(a_i)} = \prod_{i=1}^n \left(e^{f(a_i)} \right)^{p_i} \\ &\leq \int_E \varphi \circ f d\mu = \int_E e^{f(x)} d\mu(x) = \sum_{i=1}^n p_i e^{f(a_i)} \end{aligned}$$

(1) بوضع $y_i = e^{f(a_i)}$ ، من أجل $i = 1, \dots, n$ ، تأخذ المتباينة الأخيرة الشكل التالي:

$$(5) \quad \prod_{i=1}^n y_i^{p_i} = y_1^{p_1} \cdot y_2^{p_2} \dots y_n^{p_n} \leq \sum_{i=1}^n p_i y_i$$

بما أن الدالة f اختيارية فإن المتباينة (5) محققة من أجل كل جملة من الأعداد الموجبة $\{y_1, \dots, y_n\}$.

(2) بوضع $z_i = y_i^{p_i}$ و $q_i = 1/p_i$ ، من أجل $i = 1, \dots, n$ ، في (5) نحصل على

$$(6) \quad \prod_{i=1}^n z_i = z_1 \cdot z_2 \dots z_n \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} z_i^{q_i}$$

فهي إذن محققة من أجل كل جملة من الأعداد الموجبة $\{z_1, \dots, z_n\}$.

تسمى المتباينة (6) بمتباينة يونغ⁴ (Young)، مع التنكير أن $\sum_{i=1}^n \frac{1}{q_i} = 1$.

حالة خاصة: بأخذ $i = 1, \dots, n$ ، $p_i = 1/n$ ، في (5) فإننا نحصل على

$$\forall y_i \geq 0, (y_1 y_2 \dots y_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n)$$

وهذا يثبت أن الوسط الهندسي هو دوماً أصغر من الوسط الحسابي.

نعود الآن لمبرهنة التقارب المرجح، لنقدّم تطبيقين عمليين هامّين، وهما اشتقاق واتصال التكامل المتعلق بوسيط (*parameter*) معين y . نلفت انتباه القارئ أنه في هاتين المبرهنتين بإمكاننا تعريض العبارة "أينما كان" بـ "تقريباً أينما كان". لدينا

مبرهنة 56.6 (اتصال التكامل): ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس و (F, d) فضاء مترياً و $f: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ دالة تتمتع بالشروط التالية:

(أ) $(\forall y \in F)$ دالة $x \mapsto f^y(x) := f(x, y)$ قابلة للقياس، $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -

(ب) $(\forall x \in E)$ ، $y_0 \in F$ دالة منصلة عند نقطة $y \mapsto f_x(y) := f(x, y)$.

(ج) توجد دالة قابلة للجمع $g: E \rightarrow [0, \infty]$ بحيث

⁴ وليام هنري يونغ [William Henry Young] (1863-1942)

$$\cdot (\forall (x, y) \in E \times F), |f(x, y)| \leq g(x)$$

عندئذ الدالة $(\forall y \in F), f^y \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$ ، إضافة إلى أن

$$\cdot \lim_{y \rightarrow y_0} \int_E f(x, y) d\mu(x) = \int_E f(x, y_0) d\mu(x)$$

(أي أن الدالة $y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$ متصلة عند النقطة y_0).

إثبات: ينتج فوراً عن الشرط (ج) أن $(\forall y \in F), f^y \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$

لنثبت أن الدالة $y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$ متصلة عند النقطة y_0 .

بالتأكيد، لتكن $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset F$ بحيث $y_n \rightarrow y_0$ ، عندما $n \rightarrow \infty$. تحقق

المتتالية $\{f(x, y_n)\}_{n \geq 1}$ ما يلي:

$$(1) \{f^{y_n}\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}(E, \Sigma) \quad (2) f^{y_n} \xrightarrow{s} f^{y_0} \quad \text{عندما } n \rightarrow \infty,$$

$$(3) (\forall (x, n) \in E \times \mathbb{N}^*) , |f^{y_n}(x)| \leq g(x)$$

نستنتج من مبرهنة التقارب المرجح أن

$$\cdot \int_E f(x, y_0) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f(x, y_n) d\mu(x)$$

وهذا يثبت اتصال الدالة $y \mapsto \int_E f(x, y) d\mu(x)$ لكون المتتالية

$\{y_n\}_{n \geq 1}$ اختيارية. ■

مبرهنة 57.6 (قابلية الاشتقاق لدى التكامل): ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس،

$]a, b[= J$ فترة مفتوحة من \mathbb{R} و $f: E \times J \rightarrow \mathbb{R}$ دالة تتمتع بالشروط

التالية:

(أ) $(\forall y \in J)$ ، دالة $x \mapsto f^y(x) := f(x, y)$ $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -قابلة للقياس،

(ب) توجد نقطة $y_0 \in J$ بحيث تكون الدالة $x \mapsto f^{y_0}(x) := f(x, y_0)$ قابلة

للجمع على E ،

(ج) المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ موجودة على $E \times J$ ،

هـ) توجد دالة قابلة للجمع $g: E \rightarrow [0, \infty]$ بحيث

$$(\forall (x, y) \in E \times J), \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq g(x)$$

عندئذ الدالة $f^y \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$ ، إضافة إلى أن الدالة $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـ $h(y) = \int_E f(x, y) d\mu(x)$ قابلة للاشتقاق على J ،

ولدينا

$$h'(y) = \frac{d}{dy} \int_E f(x, y) d\mu(x) = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) d\mu(x)$$

إثبات: نستنتج من مبرهنة القيمة الوسطى أن

$$(\forall (x, y) \in E \times J), |f(x, y)| \leq |f(x, y_0)| + |y - y_0|g(x)$$

وعليه فإن $f^y \in \mathcal{L}^1(E, \Sigma, \mu)$

ليكن الآن $z_0 \in J$ و $\{z_n\}_{n \geq 1} \subset J$ بحيث $z_n \neq z_0$ ($\forall n \geq 1$)

و $z_n \rightarrow z_0$ عندما $n \rightarrow \infty$. بوضع

$$(\forall n \geq 1), F_n(x) = \frac{f(x, z_n) - f(x, z_0)}{z_n - z_0}$$

نجد أن $\{F_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}(E, \Sigma)$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0)$

إذن $(\forall x \in E)$ ، دالة قابلة للقياس. نستنتج مرة أخرى

من مبرهنة القيمة الوسطى أن $F_n(x) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \theta_n)$ من أجل

$$\min(z_0, z_n) < \theta_n < \max(z_0, z_n)$$

$$(\forall (x, n) \in E \times \mathbb{N}^*), |F_n(x)| \leq g(x)$$

أخيراً، لدينا بفضل مبرهنة التقارب المرجح ما يلي

$$\begin{aligned} h'(z_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(z_n) - h(z_0)}{z_n - z_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E F_n(x) d\mu \\ &= \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) d\mu = \int_E \frac{\partial f}{\partial y}(x, z_0) d\mu \end{aligned}$$

وبما أن z_0 اختياري في J فإننا نحصل على النتيجة المطلوبة. ■

هذا الآن تعميم لمبرهنة إغوروف 34.4 إلى فضاءات قياس غير منتهية:

مبرهنة [إغوروف] 58.6: ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس اختياريًا و $\{f_n\}_{n \geq 1}$ متتالية من الدوال القابلة للقياس من E نحو \mathbb{R}^N ، متقاربة تقريبًا أينما كانت إلى f . نفرض وجود $g \in \mathcal{L}_+^1(E)$ بحيث $\|f_n\| \leq g$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، $\mu - \text{ت.ك.}$ عندئذ $f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$. $\|\cdot\|$ هو المعيار الإقليدي في \mathbb{R}^N ، وتعني a.u. تقريبًا بانتظام).

إثبات: نعرّف من أجل كل m و n في \mathbb{N}^* المجموعات

$$A_{mn} = \bigcap_{k \geq n} \left\{ x \in E : \|f_k(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{m} \right\}$$

ليكن $x \in E$ ، لدينا $f_n(x) \rightarrow f(x)$ ، عندما $n \rightarrow \infty$ ، إذا وإذا فقط وجد

$m \in \mathbb{N}^*$ بحيث مهما يكن $n \in \mathbb{N}$ يوجد مؤشر $k \geq n$

و $\|f_k(x) - f(x)\| > \frac{1}{m}$ ، إذا وإذا فقط وجد $m \in \mathbb{N}^*$ بحيث

$$x \in \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} \left\{ x \in E : \|f_k(x) - f(x)\| > \frac{1}{m} \right\}$$

$$x \in \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 0} A_{mn}^c$$

إذن،

$$N_0 := \{x \in E : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\} = \bigcup_{m \geq 1} \bigcap_{n \geq 0} A_{mn}^c$$

وهي مجموعة مهملة. نرى من الاحتواء $\bigcap_{n \geq 0} A_{mn}^c \subset N_0$ أن

$$\mu \left(\bigcap_{n \geq 0} A_{mn}^c \right) = 0$$

$$(\forall m \geq 1, \forall n \geq 0), A_{m(n+1)}^c \subset A_{mn}^c$$

وبالتالي، $(\forall m \geq 1, \forall n \geq 0)$ ، أي أن المتتالية $\{A_{m(n+1)}^c\}_{n \geq 0}$ متناقصة. يبقى الآن التأكد من وجود

مؤشر $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث $\mu(A_{mn_0}^c) < \infty$ ، من أجل كل $m \in \mathbb{N}^*$. بالتاكيد،

ينتج عن المتباينة $\|f_n\| \leq g$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، $\mu - \text{ت.ك.}$ أن $\|f\| \leq g$ ، $\mu - \text{ت.ك.}$

وعليه فإن $\|f_n - f\| \leq 2g$ ، $(\forall n \geq 1)$ ، $\mu - \text{ت.ك.}$ إذن

ومن ثمّ

$$\mu(A_{mn}^c) \leq \mu(\{x \in E : 2g > \frac{1}{m}\}) = \int_{\{2mg > 1\}} 1d\mu$$

$$\leq \int_E 2mgd\mu = 2m \int_E gd\mu < \infty$$

إذن $\mu(A_{mn}^c) < \infty$ ، $(\forall m \geq 1, \forall n \geq 0)$. بتطبيق الخاصية الثانية للتقارب نحصل على

$$\cdot \mu\left(\bigcap_{n \geq 0} A_{mn}^c\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{mn}^c) = 0$$

إذن، يوجد من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ و $m \in \mathbb{N}^*$ مؤشر $n_{\varepsilon, m} \in \mathbb{N}^*$ بحيث

$$\cdot \mu(A_{mn_{\varepsilon, m}}^c) < \varepsilon/2^{m+1}$$

أخيراً، بوضع $A = \bigcap_{m \geq 1} A_{mn_{\varepsilon, m}}$ ، نجد أنّ $A \in \Sigma$ و

$$\cdot \mu(A^c) \leq \sum_{m \geq 1} \mu(A_{mn_{\varepsilon, m}}^c) < \varepsilon$$

فيما يخصّ التقارب المنتظم على المجموعة الجزئية A نلاحظ أنّ من أجل كلّ $m \in \mathbb{N}^*$ وكلّ $n_{\varepsilon, m} \leq k$ (المعرّف أعلاه) فإنّ

$$\cdot (\forall x \in A), \|f_k(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{m}$$

(لأنّ $x \in A$ يستلزم أنّ $x \in A_{mn_{\varepsilon, m}}$ ، مهما يكن $m \in \mathbb{N}^*$).

وهذا يثبت أنّ $f_n \xrightarrow{u} f$ على A . ■

3- مكاملة الدوال المركبة

لتكن $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ دالة ذات قيم مركبة معرفة على مجموعة E . توجد

دالتان حقيقيتان $f_1, f_2: E \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث $f = f_1 + if_2$ ، (أي $f_1 = \text{Re } f$ و

$f_2 = \text{Im } f$).

تعريف 59.6: ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس، نقول عن دالة مركبة $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ إنها $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ -قابلة للقياس إذا وإذا فقط كانت f_1 و f_2 دالتين $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ -قابلتين للقياس.

تعريف 60.6: ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس و $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ دالة مركبة قابلة للقياس، نعرف تكامل f وفق القياس الموجب μ على E بـ

$$\int_E f d\mu = \int_E f_1 d\mu + i \int_E f_2 d\mu$$

بشرط وجود التكاملين الحقيقيين $\int_E f_1 d\mu$ و $\int_E f_2 d\mu$.

نقول عن f إنها قابلة للجمع (أو قابلة للمكاملة) على E إذا وإذا فقط كانت $Re f$ و $Im f$ قابلتين للجمع على E .

ترميز: سوف نرمز لمجموعة الدوال المركبة القابلة للجمع بالنسبة إلى فضاء قياس (E, Σ, μ) بـ $\mathcal{L}_\mathbb{C}^1(E, \Sigma, \mu)$ أو $\mathcal{L}_\mathbb{C}^1(E)$ إن لم يكن هنالك أي لبس.

نشير إلى أن كل ما تطرقنا إليه في الحالة الحقيقية يبقى صحيحاً في الحالة المركبة. لدينا

خواص عامة 61.6:

(1) ليكن $f, g \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(E, \Sigma, \mu)$ و $c \in \mathbb{C}$ ، عندئذ $cf, f+g \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(E, \Sigma, \mu)$.

(2) لدينا من أجل كل $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(E, \Sigma, \mu)$ المتباينة التالية:

$$\left| \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu$$

(3) (التقارب المنتظم): ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس منتهياً و $\{f_n\}_{n \geq 1}$ متتالية

من الدوال الـ $(\Sigma, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ -قابلة للقياس والمحدودة على E بحيث

$f_n \xrightarrow{u} f$ على E . عندئذ

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

(4) (التقارب المرجح): لتكن $\{f_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(E, \Sigma, \mu)$ متتالية متقاربة تقريباً

أيما كانت إلى دالة f على E . نفرض وجود دالة قابلة للجمع

$$g: E \rightarrow [0, \infty]$$

$$\cdot (x \in E, (\forall n \in \mathbb{N}^*), |f_n(x)| \leq g(x))$$

عندئذ $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(E, \Sigma, \mu)$ ولدينا:

$$\cdot \int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$$

إثبات: الخاصيتان (1) و(2) واضحتان (تمرين).

(3) ينتج عن كون f نهاية منتظمة لمتتالية من الدوال المحدودة على

E ذات القياس المنتهي أنها دالة قابلة للجمع (مع الملاحظة أن كل

عناصر المتتالية هي دوال قابلة للجمع). لدينا إذن

$$\begin{aligned} \left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right| &= \left| \int_E (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| d\mu \\ &\leq \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \mu(E) \end{aligned}$$

وبالمزور إلى النهاية نجد أن

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \mu(E) \right\} = 0$$

(4) أولاً، لدينا f دالة قابلة للقياس كنهاية (تاك) لدوال قابلة للقياس. من

جهة أخرى، لدينا $|f_n - f| \rightarrow 0$ ، μ -تاك و $|f_n(x) - f(x)| \leq 2g(x)$

($\forall n \geq 1$)، (μ -تاك $x \in E$)، عندئذ نحصل بفضل مبرهنة التقارب

المرجح (الصيغة الحقيقية) على

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_E (f_n - f) d\mu \right| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E |f - f_n| d\mu \\ &= \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} |f - f_n| d\mu = 0 \end{aligned}$$

وهو المطلوب. ■

ملاحظة 62.6: يتضح من الخواص السابقة أن $(\mathcal{L}_C^1(E, \Sigma, \mu), +, \cdot)$ فضاء متجهات على الحقل \mathbb{C} .

تطبيق 63.6: لنكن $f \in \mathcal{L}_C^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$. لنثبت أن مُحوِّلة فورييه⁵ (Fourier transform) للدالة f المعطاة بـ .

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-iwx} f(x) dm(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

دالة متصلة على \mathbb{R} .

بالتأكيد، ينتج عن كون f قابلة للجمع على \mathbb{R} أن $e^{-iwx} f(x)$ هي بدورها قابلة للجمع على \mathbb{R} .

لنكن $\{w_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}$ بحيث $w_n \rightarrow w_0$ ، عندما $n \rightarrow \infty$. نضع

$$f_0(x) = e^{-iw_0 x} f(x) \text{ و } f_n(x) = e^{-iw_n x} f(x)$$

من الواضح أن $f_n \xrightarrow{s} f_0$ ، عندما $n \rightarrow \infty$ و $|f_n| = |f_0| = |f|$

($\forall n \geq 1$)، إذن كل عناصر المتتالية قابلة للجمع على \mathbb{R} . نستنتج من مبرهنة التقارب المرجح (الصيغة المركبة) أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm = \int_{\mathbb{R}} f_0 dm$$

وهذا يؤكد أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}(w_n) = \hat{f}(w_0)$ ، أي \hat{f} متصلة عند النقطة

w_0 ، وبما أن w_0 اختياري في \mathbb{R} فإن \hat{f} متصلة على \mathbb{R} . ■

4- مقارنة تكامل لوبيغ بتكامل ريمان

نشير أولاً بـ J للفترة المغلقة والمحدودة $J = [a, b]$ ، حيث

⁵ جوزيف فورييه [Jean Baptiste Joseph Fourier] (1768-1830)

كما نذكر أن دالة حقيقية $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ هي (ر)-قابلة للمكاملة على J (أي $f \in \mathcal{R}(J)$) إذا وإذا فقط كان

$$(7) \quad \inf_{P \in \mathcal{P}_J} \{S(f, P)\} = \sup_{P \in \mathcal{P}_J} \{s(f, P)\}$$

حيث $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ تقسيم للفترة J ، أسرة كل تقسيمات الفترة J و $s(f, P)$ (على الترتيب، $S(f, P)$ مجموع داربو الأدنى (على الترتيب، الأعلى) للدالة f الموافقة للتقسيم P . إذن، حسب التعريف، فالقيمة المشتركة (7) تمثل تكامل ريمان f على J .

قد يتساءل القارئ عن العلاقة التي تربط تكامل لوبيغ بتكامل ريمان، والإجابة الجزئية عن هذا التساؤل تحملها المبرهنة التالية حيث تنص على أن كل دالة محدودة على J و (ر)-قابلة للمكاملة هي (ل)-قابلة للمكاملة وكلا التكاملين متساويين على J . لدينا

مبرهنة 64.6: كل دالة حقيقية f محدودة على الفترة المترابطة $J = [a, b]$ و (ر)-قابلة للمكاملة هي (ل)-قابلة للمكاملة، ولدينا

$$\int_J f dm = \int_a^b f dx$$

إثبات: لتكن $\{P_n\}_{n \geq 1}$ متتالية متزايدة من التقسيمات للفترة J . نضع

$$\sigma_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n) \quad \text{و} \quad \sigma_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$$

ينتج عن كون f (ر)-قابلة للمكاملة أن $\int_a^b f dx = \sigma_1 = \sigma_2$ (حسب

(7)). نضع

$$v_n(x) = \sum_{i=1}^n \sup\{f(t)\} \chi_{J_i}(x) \quad \text{و} \quad u_n(x) = \sum_{i=1}^n \inf\{f(t)\} \chi_{J_i}(x)$$

لدينا فوراً من أجل كل $n \geq 1$:

$$\cdot \int_J v_n dm = S(f, P_n) \text{ و } \int_J u_n dm = s(f, P_n) \text{ ث.}$$

ينتج عن كون f محدودة وجود ثابت $0 < M < \infty$ بحيث $|f(x)| \leq M$ ،
 $(\forall x \in J)$ ، ومنه $|u_n(x)| \leq 2M$ و $|v_n(x)| \leq 2M$ ،
 $(\forall n \geq 1)$. نستنتج من الخاصيتين (أ) و(ب) وجود دالتين قابلتين للقياس
 (بمفهوم لوبيغ) $u, v: J \rightarrow \mathbb{R}$ بحيث $u_n \xrightarrow{s} u$ و $v_n \xrightarrow{s} v$ ، وعليه
 فإن من أجل كل $n \geq 1$ لدينا

$$\cdot |v_n - u_n| \leq 4M \text{ و } v_n - u_n \xrightarrow{s} v - u \text{، (حسب ب) ، } u \leq f \leq v$$

بتطبيق مبرهنة التقارب المحدود 42.6 نحصل على

$$\begin{aligned} \int_J (v - u) dm &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J (v_n - u_n) dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_J v_n dm - \int_J u_n dm \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n) = 0 \end{aligned}$$

وهكذا فإن $u = v$ ، m -تاك، (مع التذكير أن $u \leq f \leq v$)، وعليه فإن
 $f = v$ ، m -تاك، إذن f قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ. لدينا من جهة
 أخرى،

$$\cdot \int_J |f| dm \leq \int_J M dm = M(\sup J - \inf J) < \infty$$

ومنه $f \in \mathcal{L}^1(J, J \cap \mathcal{L}, m)$. بتطبيق مبرهنة التقارب المحدود مرة ثانية
 للمتتالية $\{v_n\}_{n \geq 1}$ نجد أن $v \in \mathcal{L}^1(J, J \cap \mathcal{L}, m)$ ، إضافة إلى أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_J v_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \int_J v dm = \int_J f dm = \int_a^b f(x) dx$$

$$\blacksquare \cdot \int_J f dm = \int_a^b f(x) dx \text{ وهذا يثبت تساوي التكاملين، أي}$$

لدينا النتيجة التالية:

مبرهنة 65.6: لتكن f دالة حقيقية معرفة على فترة $I \subset \mathbb{R}$.

(1) إذا كانت f (ر)-قابلة للمكاملة على I فإنها قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ.

(2) إذا كانت f و $|f|$ (ر)-قابلتين للمكاملة على I فإن $f \in \mathcal{L}^1(I, I \cap \mathcal{L}, m)$ ، إضافة إلى أن

$$\int_I f dm = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \quad (\text{حيث } \alpha = \inf I \text{ و } \beta = \sup I).$$

إثبات: نفرض على سبيل المثال أن $I =]\alpha, \beta[$.

(1) ينتج عن كون f (ر)-قابلة للمكاملة على I أنها (ر)-قابل للمكاملة على كل فترة متراصة من I ، وبالتالي فهي قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ على I .

(2) لتكن $\{\alpha_n\}_{n \geq 1}$ و $\{\beta_n\}_{n \geq 1}$ متتاليتين من I بحيث $\alpha \searrow \alpha_n$ و $\beta \nearrow \beta_n$. لدينا بمقتضى المبرهنة 64.6 ما يلي

$$\begin{aligned} +\infty > A &= \int_{\alpha}^{\beta} |f| dx \geq \int_{\alpha_n}^{\beta_n} |f|(x) dx \\ &= \int_{[\alpha_n, \beta_n]} |f| dm = \int_I |f| \chi_{[\alpha_n, \beta_n]} dm \end{aligned}$$

بوضع $f_n = |f| \chi_{[\alpha_n, \beta_n]}$ ، ($\forall n \geq 1$)، ثم استعمال متباينة فانو نجد

$$\int_I |f| dm = \int_I \liminf f_n dm \leq \liminf \int_I f_n dm \leq A < \infty$$

ومنه $f \in \mathcal{L}^1(I, I \cap \mathcal{L}, m)$.

لدينا من جهة أخرى بفضل الصيغة المتصلة لمبرهنة التقارب المرجح (انظر تمرين 23) ما يلي

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f dx &= \lim_{\substack{a \rightarrow \alpha^+ \\ b \rightarrow \beta^-}} \int_a^b f dx = \lim_{\substack{a \rightarrow \alpha^+ \\ b \rightarrow \beta^-}} \int_{[a, b]} f dm \\ &= \lim_{b \rightarrow \beta^-} \left\{ \lim_{a \rightarrow \alpha^+} \int_{[\alpha, b]} f \chi_{[a, \beta]} dm \right\} = \lim_{b \rightarrow \beta^-} \int_{[\alpha, b]} f dm \\ &= \lim_{b \rightarrow \beta^-} \int_{[\alpha, \beta]} f \chi_{[\alpha, b]} dm = \int_I |f| dm \end{aligned}$$

وهو المطلوب. ■

ترميز: إذا كانت f دالة (ر)- قابلة للمكاملة على فترة $J \subset \mathbb{R}$ وفق قياس لوبيغ m فإننا نكتب $\int_a^b f dx$ ($a = \inf J$ و $b = \sup J$) بدلا من $\int_J f dm$.

تميز المبرهنة التالية الدوال (ر)-قابلة للمكاملة عن غيرها على فترة منتهية. لدينا

مبرهنة 66.6 [لوبيغ]: لتكن f دالة حقيقية محدودة على فترة متراسة $J = [a, b]$. عندئذ، تكون f (ر)-قابلة للمكاملة إذا وإذا فقط كانت متصلة m -تاك.

إثبات: نذكر أولاً أن مجموعة نقاط تقطع الدالة f هي قابلة للقياس بمفهوم لوبيغ لأن متمماتها مجموعة من نمط G_δ ، وبالتالي فهي مجموعة بوريلية.

سوف نستعمل نفس الرموز الواردة في بيان المبرهنة 64.6. لقد رأينا أن كون f (ر)-قابلة للمكاملة يستلزم أن $u = f = v$ تقريباً أينما كان. نضع الآن

$$\Gamma = \{x \in J : u(x) = f(x) = v(x) \text{ \& } x \notin P_n, \forall n \geq 1\}$$

لتكن $x_0 \in \Gamma$ ، نفرض أن f غير متصلة عند x_0 ، عندئذ يوجد $\varepsilon > 0$ وتوجد $\{x_n\}_{n \geq 1}$ بحيث $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ و $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ ، ومنه $(\forall n \geq 1)$ $v(x_0) - u(x_0) \geq \varepsilon > 0$ ، وهذا تناقض.

إذن f دالة متصلة تقريباً أينما كان على J ، وذلك لكون المجموعة $J \setminus \Gamma$ مهمة.

عكسياً، لتكن نقطة اتصال لـ f ، عندئذ من أجل كل $\varepsilon > 0$ توجد فترة $J_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset J$ بحيث $\sup_{t \in J_\delta} f(t) - \inf_{t \in J_\delta} f(t) < \varepsilon$.

من أجل العدد δ و n_0 كبير بقدر كاف، يوجد تقسيم P_{n_0} بحيث x تنتمي إلى فترة جزئية $]t_{i-1}, t_i[$ من J_δ . نختار من أجل كل $n > n_0$

تقسيم P_n بحيث $P_{n_0} \subset P_n$ لنحصل على

$$, (\forall n \geq n_0) , 0 \leq v_n(x_0) - u_n(x_0) < \varepsilon$$

$$. u(x_0) = v(x_0) \text{ ومنه}$$

بما أن f متصلة تقريبًا أينما كانت فإننا نحصل على $u = v$ ، m -تاك،
ومن ثم فإن $\int_J u dm = \int_J v dm$. نستنتج من مبرهنة التقارب المحدود أن

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J u_n dm = \int_J u dm$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_J v_n dm = \int_J v dm$$

إذن $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f, P_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S(f, P_n)$ ، ومنه f (ر)-قابلة للمكاملة على

$$\blacksquare. \int_a^b f(x) dx = \int_J u dm = \int_J v dm \text{ ولدينا}$$

مثال 67.6: نعتبر الدالة $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـ

$$, f = 1 - \chi_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$$

لدينا $f = 1$ ، m -تاك، وبالتالي تكاملها بمفهوم لوبيغ يساوي 1 ، بينما
مجموعي داربو الأدنى والأعلى هما 0 و 1 ، على الترتيب. ومن ثم
فإنها ليست (ر)-قابلة للمكاملة على $[0, 1]$.

يكن الخلل في كون مجموعة نقاط تقطع f هي الفترة $[0, 1]$ باكملها،
وهي غير مهملة.

ملاحظة 68.6: إن فرضية $|f|$ دالة (ر)-قابلة للمكاملة هي ضرورية للغاية
وإلا فلا معنى لتكامل لوبيغ في مثل هذه الحالة، ويعود السبب إلى أن
كون f (ل)-قابلة للمكاملة يستلزم أن $|f|$ (ل)-قابلة للمكاملة. نشير إلى
أن هذه الحالة لا تظهر إلا عندما تكون f ذات إشارة اختيارية.

يبين المثال التالي أهمية هذا الشرط:

مثال 69.6: نعتبر الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـ

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

إن f ليست (ل) - قابلة للمكاملة لعدم تحقيقها للشرط
 $\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty$ ، بينما تكامل ريمان المعتل موجود، ولدينا
 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$. نقول حينئذ أن التكامل $\int_{-\infty}^{+\infty} f dx$ هو نصف متقارب.

ملاحظة 70.6: في الواقع كل الخصائص المحصل عليها بفضل تكامل لوبيغ تبقى صحيحة بالنسبة إلى تكامل ريمان بما فيها متباينة فانو ومبرهنة التقارب الرتيب غير أن قابلية المكاملة لدى النهاية ليست على العموم مضمونة إن لم تُفرض في المعطيات. فعلى سبيل المثال، توجد متتاليات من الدوال الـ (ر) -قابلة للمكاملة والرتبية بحيث تكون نهاياتها غير قابلة للمكاملة، يعود هذا لعدم تمام فضاء الدوال (ر) -القابلة للمكاملة بالنسبة إلى نصف المعيار

$$\|f\|_1 = \int_{[a,b]} |f| dm$$

مثال 71.6: نعتبر مجموعة كانفور من المرتبة $0 < \alpha < 1$:

$C_\alpha = \bigcup_{n \geq 1} J_0 \cup \emptyset_n$ ، حيث $J_0 = [0, 1]$. نعرّف من أجل كل $n \geq 1$ الدالة

$f_n = \chi_{G_n}$ ، حيث $G_n = \bigcup_{k=1}^n \emptyset_k$. من السهل التأكد من أن

$$f_n \xrightarrow{s} f = 1 - \chi_{C_\alpha}$$

إن النهاية f غير متصلة على C_α . لإثبات هذه القضية نفرض العكس، لتكن نقطة اتصال لـ f . بأخذ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث

من أجل كل $x \in J_0$ يحقق $|x - x_0| < \delta$ فإن $|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2}$.

بما أن $C_\alpha^o = \emptyset$ ، فإنه توجد $x \in J_0$ بحيث $|x - x_0| < \delta$ و $x \notin C_\alpha$ ، ولدينا إذن $f(x) = 1$ ، ومنه $|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| < \frac{1}{2}$ ، وهذا تناقض.

نستنتج فوراً من المبرهنة 66.6 أن f ليست (ر) - قابلة للمكاملة لأن

$$. m(C_\alpha) = 1 - \alpha \neq 0$$

لنثبت الآن أن المتتالية $\{f_n\}_{n \geq 1}$ كوشية بالنسبة لنصف المعيار $\|f\|_1 = \int_{J_0} |f| dx$. يكفي الملاحظة أن $\{f_n\}_{n \geq 1}$ محدودة بانتظام

و $f_n \xrightarrow{s} f$ لنحصل بفضل مبرهنة التقارب المحدود على $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ ، وبالتالي فهي متتالية كوشية على J_0 .

لدينا من جهة

$$\begin{aligned} \int_{J_0} |f| dm &= \int_{J_0} |1 - \chi_{C_\alpha}| dm = \int_{J_0} (1 - \chi_{C_\alpha}) dm \\ &= 1 - (1 - \alpha) = \alpha < \infty \end{aligned}$$

أي دالة f دالة (ر) قابلة للتكاملة على J_0 . ومن جهة أخرى، فإن كل حدود المتتالية f_n هي (ر) قابلة للتكاملة لأن مجموعة نقاط تقطع f_n مهملة. نشير في الأخير أنه لا توجد دالة (ر) قابلة للتكاملة g بحيث

$$\int_0^1 |f_n - g| dx \rightarrow 0 \text{ وإلا وجدنا}$$

$$، \int_0^1 |f - g| dx \leq \int_0^1 |f - f_n| dx + \int_0^1 |f_n - g| dx \rightarrow 0$$

أي $\int_0^1 (f - g) dx = 0$ ، ومنه $\int_0^1 f dx = \int_0^1 g dx$ ، وهذا يعني أن f

دالة (ر) قابلة للتكاملة، وهو تناقض مع ما بينا أعلاه.

المبرة: فضاء الدوال (ر) قابلة للتكاملة والمحدودة على $J_0 = [0, 1]$

ليس تمامًا بالنسبة إلى نصف المعيار $\|f\|_1 = \int_{J_0} |f| dm$.

مسألة محلولة

لتكن $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ دالة متصلة و T -دورية، ولتكن $A \in \mathcal{L}$ بحيث

$$. m(A) < \infty$$

أحسب النهاية التالية: $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_A f(px) dx$

تطبيق: أحسب هذه النهاية من أجل الدوال الدورية التالية:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \cos \alpha \cos x} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{1}{\cos x + \sin x + 2}$$

حيث $\alpha \neq 0 \pmod{[\pi]}$.

الحل:

إذا كانت A مجموعة جزئية مهملة فإن $\lim_{p \rightarrow \infty} \int_A f(px) dx = 0$.

ن افرض إذن أن $0 < m(A) < \infty$ ولنحسب النهاية من أجل فترة

مفتوحة $A =]a, b[$. ليكن $\left[\frac{3T}{b-a} \right] \leq p$ ، مثبًتًا، يوجد عدنان طبيعيان

m و n بحيث

$$\frac{m}{p}T \leq a < \frac{m+1}{p}T \leq \frac{n}{p}T \leq b < \frac{n+1}{p}T$$

ومنه

$$\begin{aligned} \int_{]a, b[} f(px) dx &= \int_{]a, \frac{m+1}{p}T[} f(px) dx \\ &+ \sum_{k=1}^{n-m-1} \int_{] \frac{m+k}{p}T, \frac{m+k+1}{p}T[} f(px) dx + \int_{] \frac{n}{p}T, b[} f(px) dx \\ &= \int_a^{\frac{m+1}{p}T} f(px) dx + \int_{\frac{n}{p}T}^b f(px) dx + \frac{n-m-1}{p} \int_0^T f(y) dy \end{aligned}$$

نضع $M = \sup_{x \in [0, T]} |f(x)|$ ، عندئذ

$$\left| \int_{]a, b[} f(px) dx - \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x) dx \right| \leq \int_{\frac{m}{p}T}^{\frac{m+1}{p}T} |f(px)| dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{n}{p}}^{\frac{n+1}{p}} |f(px)| dx + \left| \frac{b}{T} - \frac{a}{T} - \frac{n-m-1}{p} \right| \int_0^T f(x) dx \\
& \leq \frac{M}{p} + \frac{M}{p} + \left\{ \left(\frac{b}{T} - \frac{n}{p} \right) + \left(\frac{a}{T} - \frac{m}{p} \right) + \frac{1}{p} \right\} MT \leq 5 \frac{M}{p}
\end{aligned}$$

و هكذا فإنّ

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f(px) dx = \frac{b-a}{T} \int_0^T f(x) dx$$

الحالة العامة:

ينتج عن كون A قابلة للقياس أنّ من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ توجد مجموعة مفتوحة $V \subset \mathbb{R}$ تحوي A بحيث $m(V \setminus A) < \varepsilon$. نعلم أنّ كلّ مفتوحة من \mathbb{R} تكتب على شكل اتحاد قابل للعد لفترات مفتوحة ومنفصلة مثنى مثنى، وعليه فإنّ $V = \bigcup_{n \geq 1}]a_n, b_n[$. لدينا من جهة،

$$\begin{aligned}
(\#) \quad \left| \int_V f(px) dx - \int_A f(px) dx \right| &= \left| \int_{V \setminus A} f(px) dx \right| \\
&\leq M m(V \setminus A) < \varepsilon M
\end{aligned}$$

و من جهة أخرى فإنّ

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow \infty} \int_V f(px) dx &= \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n \geq 1} \int_{a_n}^{b_n} f(px) dx = \sum_{n \geq 1} \left(\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(px) dx \right) \\
&= \sum_{n \geq 1} \left(\frac{b_n - a_n}{T} \int_0^T f(x) dx \right) \\
&= \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx \right) \sum_{n \geq 1} (b_n - a_n) = \frac{m(V)}{T} \int_0^T f(x) dx
\end{aligned}$$

ينتج عن (#) ومما سبق أنّ

$$\begin{aligned}
\lim_{p \rightarrow \infty} \left| \int_V f(px) dx - \int_A f(px) dx \right| &= \left| \lim_{p \rightarrow \infty} \int_A f(px) dx - \frac{m(V)}{T} \int_0^T f(x) dx \right| \\
&= \left| \lim_{p \rightarrow \infty} \int_A f(px) dx - \frac{m(A)}{T} \int_0^T f(x) dx - \frac{m(V \setminus A)}{T} \int_0^T f(x) dx \right| \leq \varepsilon M
\end{aligned}$$

وهذا يؤدي إلى

$$\left| \lim_{p \rightarrow \infty} \int_A f(px) dx - \frac{m(A)}{T} \int_0^T f(x) dx \right| \leq \varepsilon M + \frac{m(V \setminus A)}{T} \int_0^T |f(x)| dx$$

$$\leq \varepsilon M + \varepsilon M = 2\varepsilon M$$

إذن

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_A f(px) dx = \frac{m(A)}{T} \int_0^T f(x) dx$$

لكون ε اختياريًا.

تطبيق:

(1) إن الدالة $f(x) = \frac{1}{\cos x + \sin x + 2}$ متصلة و -2π -دورية على المستقيم الحقيقي.

يكفينا حساب التكامل $J = \int_0^{2\pi} f(x) dx$. بتعويض x بـ $\pi - y$ ، ثم y بـ 2Arctant نحصل على

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{3t^2 + 2t + 1} dt = \frac{2}{3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t + 1/3)^2 + 2/9} dt$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \pi\sqrt{2}$$

و منه فإن

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_A f(px) dx = \frac{m(A)}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{m(A)}{2\pi} \cdot \pi\sqrt{2} = \frac{m(A)}{\sqrt{2}}$$

(2) إن الدالة $f(x) = \frac{1}{1 - \cos \alpha \cos x}$ متصلة و -2π -دورية على

المستقيم الحقيقي. يكفي إذن حساب التكامل

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \cos \alpha \cos x} dx$$

بتعويض x بـ $\pi - y$ ، ثم y بـ 2Arctant نحصل على

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{(1 - \cos \alpha)t^2 + 1 + \cos \alpha} dt$$

$$= \frac{2}{\sin \alpha} \left[\operatorname{Arctan} \left(t \cdot \tan \frac{\alpha}{2} \right) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{2\pi}{|\sin \alpha|}$$

إذن، لدينا من أجل $\alpha \neq 0 \pmod{[\pi]}$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_A f(px) dx = \frac{m(A)}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{m(A)}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{|\sin \alpha|} = \frac{m(A)}{|\sin \alpha|}$$

تمارين مقترحة

01 ليكن $\{a_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{C}$ و $\varphi: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ دالة متصلة الاشتقاق على

$$[1, +\infty[. \text{ نضع } A(x) = \sum_{n \leq x} a_n, (\forall x \geq 1).$$

(1) أثبت صحة العلاقة التالية من أجل كل $1 < x$:

$$\sum_{n \leq x} a_n \varphi(n) = A(x) \varphi(x) - \int_1^x A(t) \varphi'(t) dt$$

(2) أحسب التكاملين $\int_1^{\infty} \frac{[x]^s}{x^s} dx$ و $\int_1^{\infty} \frac{[x]^s}{x^2} dx$ من أجل $s < 2$ ، حيث

$$[x]^s = x - [x] \text{ (الجزء العشري للعدد } x \text{).}$$

(3) استنتج مما سبق أن

$$(\forall s > 2), \frac{1}{s-1} < \zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s} < \frac{s}{s-1}$$

02 ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس و $f \in \mathfrak{M}(E, \Sigma)$

(1) أثبت أن $\int_E |f| d\mu = 0$ إذا و إذا فقط كان $f = 0$ ، μ -تاك.

أثبت أن $f=0$ ، μ -تاك.

(2) ليكن λ عددا حقيقيا، $J=]a,b[$ فترة مفتوحة و $f \in \mathcal{L}^1(J)$ يحقق العلاقة

$$(\forall y \in J), \frac{1}{y-a} \int_{]a,y[} f(x)dx = \lambda$$

أثبت أن $f = \lambda$ - m تاك J .

04 ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس، A و B مجموعتين قابلتين للقياس

و $f \in \mathcal{L}^1(A, A \cap \Sigma, \mu)$. إذا كان $\mu(A \Delta B) = 0$ بين أن

$$\int_A f d\mu = \int_B f d\mu \quad \text{و} \quad f \in \mathcal{L}^1(B, B \cap \Sigma, \mu)$$

05 ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس، A و B مجموعتين قابلتين للقياس. ليكن

a و b عددين موجبين تماما. نعرف المتتالية $\{f_n\}_{n \geq 1}$ كالآتي

$f_n = a \chi_A$ إذا كان n فرديا، و $f_n = b \chi_B$ إذا كان n زوجيا.

أحسب $\int_E \lim f_n d\mu$ و $\lim \int_E f_n d\mu$. ماذا تستنتج ؟

06 (تعميم متباينة فانو): لتكن $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$

و $h \in \mathcal{L}_+^1(E, \Sigma, \mu)$ بحيث: $f_n + h \geq 0$ ، $(\forall n \geq 1)$. أثبت أن

$$\int_E \lim f_n d\mu \leq \lim \int_E f_n d\mu$$

07 لتكن $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ بحيث $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ ، μ -تاك

$$\text{و} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu < \infty$$

أثبت أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n d\mu = \int_A f d\mu$ ، من أجل كل $A \in \Sigma$.

08 أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n dx$ من أجل $E = [0, 1]$ و

$$. (\forall n \geq 1), f_n = \frac{1}{\sqrt{x}} \chi_{\left[\frac{1}{n}, 1\right]}$$

09 ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس و $\{E_n\}_{n \geq 1} \subset \Sigma$ متتالية متزايدة بحيث

$$. E = \bigcup_{n \geq 1} E_n \text{ . أثبت أن}$$

$$. \int_E f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} f d\mu$$

من أجل كل $f \in \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$

10 لتكن $f \in \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ و $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^+$ متتالية متزايدة . نعرف

$$. (\forall n \geq 1), f_n = \min(f, u_n)$$

أحسب النهاية التالية $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu$

11 لتكن $\{f_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ متتالية متزايدة إلى دالة μ -قابلة للجمع

وموجبة تماماً f على E . أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \sqrt[n]{f_n} d\mu$

12 ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس، (E', Σ') فضاء قابلاً للقياس

و $\omega: E \rightarrow E'$ دالة (Σ, Σ') -قابلة للقياس .

(1) نعرف القياس الموجب $\mu_\omega: \Sigma' \rightarrow [0, \infty]$:

$$. (\forall B \in \Sigma'), \mu_\omega(B) = \mu(\omega^{-1}(B))$$

• أثبت أن $\int_E f d\mu_\omega = \int_E f \circ \omega d\mu$ ، من أجل كل $f \in \mathcal{M}^+(E', \Sigma')$

(2) نفرض الآن أن $\omega \in \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ ونعرف القياس الموجب

$$. (\forall A \in \Sigma), \nu(A) = \int_A \omega d\mu \quad \text{و} \quad \nu: \Sigma \rightarrow [0, \infty]$$

• أثبت أن $\int_E f d\nu = \int_E f \omega d\mu$ ، $(\forall f \in \mathcal{M}^+(E, \Sigma))$

13 (1) أثبت أن من أجل كل $f \in \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ و $a > 0$ لدينا المتباينة التالية

$$. \mu(\{x \in E: f(x) \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \int_E f d\mu$$

(2) إذا فرضنا أن $\mu \equiv \mu_c$ (قياس العدّ) و $\int_E f d\mu_c < \infty$ ، استنتج من (1) أن المجموعة $\{x \in E, f(x) > 0\}$ قابلة للعد.

(3) نعرّف من أجل كل مجموعة جزئية $A \subset E$ المجموع

$$\cdot \sum_{x \in A} f(x) := \sup \left\{ \sum_{x \in J} f(x) : J \subset A, |J| < \infty \right\}$$

$$\cdot \sum_{x \in E} f(x) = \int_E f d\mu_c \quad \text{أثبت أن}$$

14 ليكن $J =]0, 1[$ و p عدداً طبيعياً بحيث $0 \leq p \leq 8$ ، نرمز بـ P_n للعدد الطبيعي $pp\dots p$ حيث p يتكرّر n مرّة. نعرّف الدالة $f: J \rightarrow \mathbb{R}^+$ بـ

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in J \cap \mathbb{Q} \\ m = \max \{ n \in \mathbb{N} : [10^n x] = P_n \}, & x \notin J \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

(أي أن m هو عدد تكرار p مباشرة بعد الفاصلة عند كتابة x على الشكل العشري)

(1) أثبت أن الدالة $\hat{f}: J \rightarrow \mathbb{R}^+$ المعرفة بـ $\hat{f}(x) = \sum_{n \geq 1} n \chi_{J_n}(x)$ تساوي f ، حيث

m -تقريباً أينما كانت في J ، حيث

$$P_0 = 0 \quad \text{مع } (\forall n \geq 0), J_n = [(P_{n+1} + 1) \cdot 10^{-n-1}, (P_n + 1) \cdot 10^{-n}[$$

(2) أحسب قيمة التكامل $\int_J f dx$.

15 لتكن $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ و $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathcal{L})$ بحيث

$$\cdot (\forall x \in \mathbb{R}), |f(x)| \leq |g(x)| \quad \text{و} \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |g(x)| = +\infty$$

أثبت أن الدالة $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ المعرفة بـ

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)}, & g(x) \neq 0 \\ 0, & g(x) = 0 \end{cases}$$

عنصر من $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$.

16 هل الدوال التالية قابلة للتكامل للمكاملة على مجموعة التعريف المرافقة لها؟

أ. $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $f(x) = \frac{\sin x}{x^\alpha}$ حيث $0 < \alpha \leq 1$.

ب. $g:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $g(x) = e^{-ax}$ حيث $a > 0$.

ت. $h: [1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $h(x) = x^{-\alpha}$ حيث $0 < \alpha \leq 1$.

ث. $k: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $k(x) = c\chi_{\{0\}}(x) + x^{-\alpha}\chi_{]0,1]}(x)$

حيث $0 < \alpha < 1$ و $c \geq 0$.

17 أحسب التكاملات التالية

1. $J_p = \int_{]0,1[} \frac{|\ln x|^p}{(1-x)^2} dx$ من أجل عدد حقيقي $p > 1$.

2. $\int_{\mathbb{R}} a^{-[x]} dx$ حيث $a > 1$.

3. $\int_{]0, \sqrt{3}] } \chi_{\mathbb{Q}^c}(x) \operatorname{Arctan} x dx$.

18 لتكن $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة بـ

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \notin \mathbb{Q} \cap [a, b] \\ \frac{1}{q^3} + pq, & x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap [a, b] \end{cases}$$

أحسب قيمة التكامل $\int_{[a,b]} f dm$.

19 أحسب النهايات التالية:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{cn}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{2n}\right)^n 2^{-x} dx$ حيث $c \geq 0$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[-1,5]} \left(\frac{2}{3}e^{-3ix} + \frac{1}{5}e^{4ix}\right)^n dx$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{]0,1]} \frac{\ln(x+n)}{(x+n)^\alpha} \sin\left(3e^{nx} + \frac{x^2}{n}\right) dx$ من أجل $\alpha > 0$.

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a,b]} f_n dx \quad \text{حيث } (0 < a < b) \text{، } f_n(x) = \frac{\sqrt[n]{x}}{x} \text{، ثم استنتج أن}$$

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{b} - \sqrt[n]{a}) = \ln \frac{b}{a}$$

20 ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس و $\{A_n\}_{n \geq 1} \subset \Sigma$ متتالية متزايدة بحيث

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \infty \text{ و } \mu(A_1) \neq 0$$

أثبت أن المتتالية $f_n(x) = \frac{1}{\mu(A_n)} \chi_{A_n}(x)$ متقاربة بانتظام على E إلى

$$f = 0 \text{ بينما } \int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = 0 \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu \text{ . أين يكمن الخلل؟}$$

21 ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس و $f \in \mathcal{M}^+(E, \Sigma)$ بحيث

$$\cdot \int_E f^p d\mu < \infty \text{، حيث } 0 < p > 0$$

ناقش حسب قيم العدد $q \geq 0$ النهايتين:

$$\cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E n^p \ln \left(1 + \left(\frac{f}{n} \right)^q \right) d\mu \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E n^p \text{Arctan} \left(\frac{f}{n} \right)^q d\mu$$

22 (الصيغة المتصلة لمبرهنة التقارب الرتيب) ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس،

$$\Gamma = [\beta, \gamma] \subset \mathbb{R} \text{ و } \{f_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset \mathcal{M}^+(E, \Sigma) \text{ متتالية متزايدة بحيث}$$

$f_\alpha \xrightarrow{s} f$ ، عندما $\alpha \rightarrow \alpha_0$ ، حيث $\alpha_0 \in \Gamma$. أثبت أن f قابلة للمكاملة على E وأن

$$\cdot \lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_E f_\alpha d\mu = \int_E f d\mu$$

23 (الصيغة المتصلة لمبرهنة التقارب المرجح) ليكن (E, Σ, μ) فضاء

$$\text{قياس، } \Gamma = [\beta, \gamma] \subset \mathbb{R} \text{ و } \{f_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma} \subset \mathcal{M}(E, \Sigma) \text{ بحيث } f_\alpha \xrightarrow{s} f \text{،}$$

عندما $\alpha \rightarrow \alpha_0$ ، حيث $\alpha_0 \in \Gamma$. نفرض وجود دالة قابلة للجمع

$$g: E \rightarrow [0, \infty] \text{ تحقق } g(x) \geq |f_\alpha(x)| \text{، } (\forall \alpha \in \Gamma) \text{، } (\forall x \in E)$$

أثبت أن f قابلة للجمع على E وأن $\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} \int_E f_\alpha d\mu = \int_E f d\mu$

24 ليكن r عدداً مثبتاً في $[-1, 1]$.

(1) أحسب بدلالة r و $\cos x$ العبارة التالية:

$$\frac{1}{1-re^{-ix}} + \frac{1}{1-re^{ix}}$$

(2) أحسب بطريقتين مختلفتين التكامل:

$$J = \int_{[0, \pi/2]} \frac{1}{1-2r \cos x + r^2} dm(x)$$

25 ليكن $a > 0$ و $f:]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ معرفة بـ $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ حيث

$$(\forall n \geq 1), f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{1+(nx)^2}$$

(1) أثبت أن f دالة m -قابلة للجمع على $]a, \infty[$.

(2) أحسب

$$\int_{]a, \infty[} f dx \quad \text{و} \quad \sum_{n \geq 1} \int_{]a, \infty[} f_n dx, \quad \sum_{n \geq 1} \int_{]a, \infty[} |f_n| dx$$

(3) ماذا تستنتج في حالة ما إذا كان $a = 0$ ؟

26 (1) لتكن $\varphi, \psi: I =]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ دالتين محدبتين. أثبت أن $\varphi + \psi$

و $c\varphi$ ($c > 0$) دالتان محدبتان في I .

(2) أثبت أنه إذا كانت $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ متتالية من الدوال المحدبة في I بحيث

$$\varphi_n \xrightarrow{s} \varphi \quad \text{في } I \quad \text{فإن } \varphi \text{ دالة محدبة في } I.$$

27 لتكن $\varphi: I =]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ دالة محدبة. استنتج من متباينة جيسان أن

من أجل كل $\{x_i\}_{i=1}^n \subset I$ و $\{\alpha_i\}_{i=1}^n \subset]0, \infty[$ بحيث $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ فإن

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x_i)$$

28 باستعمال متباينة جيسان أثبت أنه من أجل $\{\alpha_i\}_{i=1}^m \subset]0, \infty[$ (m منته)

و $1 \leq p < \infty$ فإن

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i \right)^p \leq m^{p-1} \left(\sum_{i=1}^m a_i^p \right)$$

29 ليكن (E, Σ, μ) فضاء قياس بحيث $\mu(E) = 1$ و $f: E \rightarrow [0, +\infty[$ دالة قابلة للقياس. أثبت أن

$$\ln \int_E f d\mu \geq \int_E \ln f d\mu$$

ظالما كان الطرف الأيمن معرفاً جيداً.

30 لتكن $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة بـ

$$f(x, t) = \frac{\sin x}{x} e^{-tx} \chi_{]0, \infty[}(x)$$

(1) أثبت أن، من أجل كل $t > 0$ ، $f(\cdot, t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$

(2) إذا عرفنا الدالة $F:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ بـ $F(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, t) dx$ ، برهن أن

$F(t)$ قابلة للاشتقاق من أجل كل $t > 0$ ، ثم أوجد $F'(t)$.

(3) استنتج عبارة $F(t)$.

31 لتكن $f: [0, 1] \times [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ دالة معرفة بـ

$$f(x, t) = \frac{1}{1+x^2} e^{-t^2(1+x^2)}$$

ضع $F(t) = \int_{]0, 1]} f(x, t) dx$

(1) أحسب $F(0)$ و $\lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$

(2) أوجد عبارة الدالة المشتقة $F'(t)$ ، ثم استنتج قيمة الكامل

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

32 أثبت أن

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{x^q + 1} dx = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{p+2nq} - \frac{1}{p+(2n+1)q} \right)$$

من أجل $p > 0$ و $q > 0$ ، ثم استنتج مجموعي السلسلتين التاليتين

$$\sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{1+2n} - \frac{1}{2+2n} \right) \quad \text{و} \quad \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{1+4n} - \frac{1}{3+4n} \right)$$

33 ليكن $f, g \in \mathcal{L}_C^1(E, \Sigma, \mu)$ و $c \in \mathbb{C}$. أثبت أن

$$cf, f+g \in \mathcal{L}_C^1(E, \Sigma, \mu) \quad (1)$$

$$\left| \int_E cf d\mu \right| \leq \int_E |f| d\mu \quad (2)$$