الفصل السابع

فضاءات قياس الضرب ومبرهنة فوبنيه

الفصل السابع
فضاءات قياس الضرب
ومبرهنة فوبنيه

لقد تعاملنا في الفصول السابقة مع فضاء قياس وحيد ودوال ذات متغيّر وحيد، بينما سنتعامل في هذا الفصل مع ضرب فضائين أو أكثر من ذلك وسوف نتّبع نفس الترتيب: تعريف المجموعات القابلة للقياس، قياس الضرب، ثمّ الدوال القابلة للقياس وأخيرًا تعريف تكامل الدوال القابلة للقياس بالنسبة إلى قياس الضرب. ستكون نقطة الانطلاق فضائي قياس σ-منتهيين (E,Σ,μ) و (E',Σ',μ'). تجدر الإشارة أوّلاً إلى أنّ الأسرة $\{A\times B:\ A\in\Sigma, B\in\Sigma'\}$ ليست على العموم عشيرة ولا جبرًا لأنّها غير مستقرّة بالنّسبة إلى مبدأ التتميم. لذلك ينبغي لنا تعريف عشيرة مناسبة على الضرب الديكارتي $E\times E'$، نرمز لها بـــ $\Sigma\otimes\Sigma'$، ثمّ نعرّف على هذه الأخيرة قياسًا موجبا $\mu\otimes\mu'$ يعمّم مفهوم قياس مساحة المستطيل، أي يمتاز بالخاصية التالية:

$$(\forall\ A\in\Sigma,\ B\in\Sigma'),\ (\mu\otimes\mu')(A\times B)=\mu(A)\mu'(B).$$

أخيرًا، نعرّف التكامل المزدوج لدالة قابلة للقياس $f(x,y):E\times E'\to\overline{\mathbb{R}}$ على $E\times E'$ بـــ $\int_{E\times E'}f\,d(\mu\otimes\mu')$، الذي يكتب تحت شروط معيّنة على f والقياسين μ و μ' كالآتي:

$$\int_E\int_{E'}f(x,y)\,d\mu'(y)\,d\mu(x) \quad \text{أو} \quad \int_{E'}\int_E f(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu'(y).$$

هذا ما تتناوله مبرهنة فوبنيه[1] (Fubini) التي تعتبر من إحدى المبرهنات الرّئيسة لهذا الفصل فهي تنصّ أساسًا على أنّ التكامل بالنسبة إلى قياس الضرب يمكن حسابه عن طريق تكامل لوبيغ المعرّف في الفصل السادس وذلك بمكاملة أوّلاً الدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغيّر x على E،

---

[1]) غيدو فوبنيه [Guido Fubini] (1879-1943)

ثمّ نكامل النتيجة المحصّل عليها (بالنسبة للمتغيّر y) على E'. كما نحصل على نفس النتيجة إذا ما كاملنا الدالة $f(x,y)$ بالنسبة للمتغيّر y على E'، ثمّ نكامل العبارة المحصّل عليها (بالنسبة للمتغيّر x) على E. في الواقع هذه النتيجة مألوفة في المقرّرات التمهيديّة للحساب من أجل دوال متّصلة على $E\times E'$.

لأجل هذه الدّراسة نقدّم التعاريف والمبرهنات التالية:

1- فضاءات قياس الضرب

ليكن (E,Σ,μ) و (E',Σ',μ') فضائي قياس σ-منتهيين اختياريين. نستهلّ بالتعريف التالي:

تعريف 01.7: نسمّي مستطيلاً قابلاً للقياس في $E\times E'$ كلّ مجموعة من الشكل $A\times B$ بحيث $A\in\Sigma$ و $B\in\Sigma'$. كما نسمّي مجموعة أوّلية كلّ اتحاد منته من المستطيلات القابلة للقياس والمنفصلة مثنى مثنى.

سوف نرمز لأسرة كلّ المجموعات الأوّليّة بـــ $\mathcal{E}$.

إنّ الأسرة $\mathcal{E}$ جبر مجموعات على $E\times E'$ كما تبيّنه القضيّة التالية:

قضية 02.7: إنّ $\mathcal{E}$ جبر مجموعات على $E\times E'$.

إثبات: نلاحظ أوّلاً أنّ $E\times E'\in\mathcal{E}$، ومنه $\mathcal{E}\neq\emptyset$.

ليكن A و B عنصرين من $\mathcal{E}$، توجد مستطيلات قابلة للقياس ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى $\{P_i\}_{i=1}^{m}$ و $\{Q_j\}_{j=1}^{n}$ بحيث $A=\bigcup_{i=1}^{m}P_i$ و $B=\bigcup_{j=1}^{n}Q_j$. وعليه فإنّ

$$A\cap B=\bigcup_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}\left(P_i\cap Q_j\right)\in\mathcal{E}\text{،}$$

مع الملاحظة أنّ $\{P_i \cap Q_j\}$ مستطيلات قابلة للقياس ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى.

لتكن الآن $C \in \mathcal{E}$، يوجد عدد منته من المستطيلات القابلة للقياس والمنفصلة مثنى مثنى $P_i = R_i \times S_i$، $(1 \le i \le m)$، بحيث $C = \bigcup_{i=1}^{m} P_i$، ومنه $C^c = \bigcap_{i=1}^{m} P_i^c$.

لاحظ أنّ $P_i^c = (R_i \times S_i)^c = (R_i^c \times E') \cup (R_i \times S_i^c)$، و $(R_i^c \times E') \cap (R_i \times S_i^c) = \varnothing$، إذن $P_i^c \in \mathcal{E}$، وبالتالي $A^c \in \mathcal{E}$. نستنتج من هذا أنّ $\mathcal{E}$ جبر على $E \times E'$.■

ترميز: سوف نرمز بـــ $\Sigma \otimes \Sigma'$ للعشيرة المولدة بـــ $\mathcal{E}$ على $E \times E'$.

نقدّم فيما يلي بعض الخواص التي تتمتّع به العشيرة $\Sigma \otimes \Sigma'$، وكحالة خاصّة سوف ندرس ضرب عشيرتين بوريليتين $\mathcal{B}(E)$ و $\mathcal{B}(E')$.

قضية 03.7: لـــيكن (E,Σ) و (E',Σ') فـــضائين اختياريين قابلين للقياس و $p_1 : E \times E' \to E$، $p_2 : E \times E' \to E'$ الإسقاطين المعياريين على E و E'، على الترتيب، المعرّفين بـــ

$$p_1(x,y) = x \text{ و } p_2(x,y) = y \text{، } \forall (x,y) \in E \times E'.$$

عندئذ،

2) الدالتان p_1 و p_2 هـــما $(\Sigma \otimes \Sigma', \Sigma)$ و $(\Sigma \otimes \Sigma', \Sigma')$–قابلتان للقياس، على الـترتيب.

2) العشيرة $\Sigma \otimes \Sigma'$ هي أصغر عشيرة على المجموعة $E \times E'$ تجعل الإسقاطين p_1 و p_2 قابلين للقياس.

إثبات: 1) ليكن $A \in \Sigma$. من الواضح أنّ

$$\begin{aligned} p_1^{-1}(A) &= \{(x,y) \in E \times E' : p_1(x,y) = x \in A\} \\ &= A \times E' \in \Sigma \otimes \Sigma' \end{aligned}$$

أي أنّ $p_1^{-1}(\Sigma)\subset\Sigma\otimes\Sigma'$، وعليه فإنّ p_1 دالة $(\Sigma\otimes\Sigma',\Sigma)$-قابلة للقياس. كما نبرهن بنفس الكيفية على أنّ p_2 دالة $(\Sigma\otimes\Sigma',\Sigma')$-قابلة للقياس.

2) لتكن Γ عشيرة على $E\times E'$ تجعل الإسقاطين p_1 و p_2، على الترتيب، (Γ,Σ) و (Γ,Σ')-قابلين للقياس. عندئذ، من أجل كلّ $A\in\Sigma$ و $B\in\Sigma'$ فإنّ

$$p_1^{-1}(A)\cap p_2^{-1}(B)=(A\times E')\cap(E\times B)\in\Gamma .$$

بملاحظة أنّ $(A\times E')\cap(E\times B)=A\times B$ نحصل فورًا على

$$\{A\times B,\ A\in\Sigma,\ B\in\Sigma'\}\subset\Gamma ،$$

وهكذا فإنّ $\Sigma\otimes\Sigma'\subset\Gamma$. إذن $\Sigma\otimes\Sigma'$ هي أصغر عشيرة على $E\times E'$ تجعل p_1 و p_2 قابلين للقياس.■

ليكن $(E,\mathcal{T})$ و $(E',\mathcal{T}')$ فضائين طبولوجيين. نسمّي **مستطيلاً مفتوحًا** في $E\times E'$ كلّ مجموعة جزئية $P\subset E\times E'$ تكتب على الشكل $P=A\times B$ حيث $A\in\mathcal{T}$ و $B\in\mathcal{T}'$. سوف نرمز بـ $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$ لأسرة كلّ اتحادات المستطيلات المفتوحة في $E\times E'$. هذا يعني أنّ أسرة المستطيلات المفتوحة في $E\times E'$ تشكل قاعدة للطبولوجيا $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$. بإمكاننا أيضًا إثبات أنّ $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$ هي أصغر طبولوجيا على $E\times E'$ تجعل الإسقاطين المعياريين p_1 و p_2 متّصلين. لدينا المبرهنة التالية:

مبرهنة 04.7: ليكن $(E,\mathcal{T})$ و $(E',\mathcal{T}')$ فضائين طبولوجيين بحيث تكتب كلّ مجموعة مفتوحة من $E\times E'$ (المزوّد بالطبولوجيا $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$) على شكل اتحاد قابل للعد من المستطيلات المفتوحة، عندئذ

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'}(E\times E')=\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)\otimes\mathcal{B}_{\mathcal{T}'}(E') .$$

إثبات: لنثبت أوّلاً الاحتواء التالي

$$\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E')\subset\mathcal{B}(E\times E') .$$

بما أنّ الإسقاطين $p_1:E\times E'\to E$ و $p_2:E\times E'\to E'$ متّصلان (لأنّ على سبيل المثال، لكل مفتوحة V في E لدينا

$p_1^{-1}(V)=V\times E'\in\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$، وهذا يثبت اتّصال الدالة p_1) فإنّ الدالتين p_1 و p_2 بوريليتان، بمعنى أنّهما $(\mathcal{B}(E\times E'),\mathcal{B}(E))$ و $(\mathcal{B}(E\times E'),\mathcal{B}(E'))$-قابلتان للقياس، على الترتيب. نرى من القضية السابقة 2) أنّ

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)\otimes\mathcal{B}_{\mathcal{T}'}(E')\subset\mathcal{B}_{\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'}(E\times E').$$

لإثبات الاحتواء العكسي يكفي التأكد من أنّ

$$\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'\subset\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E').$$

ليكن $W\in\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$، توجد عندئذ متتالية من المستطيلات المفتوحة $\{V_n\times V'_n\}_{n\geq1}$ بحيث $W=\bigcup_{n\geq1}(V_n\times V'_n)$. ينتج عن الانتماء

$$V_n\times V'_n\in\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E'),\quad(\forall n\geq1)،$$

أنّ $W\in\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E')$، ومنه $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'\subset\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E')$.

إذن، $\mathcal{B}(E\times E')\subset\mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E')$. ■

ملاحظة 05.7: 1) تبقى المبرهنة محققة إذا كان لأحد الفضائين الطبولوجيين $(E,\mathcal{T})$ أو $(E',\mathcal{T}')$ قاعدة قابلة للعد.

2) إذا كان (E,d) و (E',d') فضائين متريين قابلين للفصل فإنّ

$$\mathcal{B}_{\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'}(E\times E')=\mathcal{B}_{\mathcal{T}}(E)\otimes\mathcal{B}_{\mathcal{T}'}(E')،$$

حيث أن $\mathcal{T}$ و $\mathcal{T}'$ الطبولوجيتان المستخلصتان من المتريتين d و d'، على الترتيب. وكتطبيق مباشر لدينا من أجل $\mathrm{K}=\mathbb{R}$، $\mathrm{K}=\overline{\mathbb{R}}$ أو $\mathrm{K}=\mathbb{C}$ (كلها فضاءات قابلة للفصل):

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathrm{K}^m\times\mathrm{K}^n)&=\mathcal{B}(\mathrm{K}^{m+n})\\&=\mathcal{B}(\mathrm{K}^m)\otimes\mathcal{B}(\mathrm{K}^n)\\&=\underbrace{\mathcal{B}(\mathrm{K})\otimes\ldots\otimes\mathcal{B}(\mathrm{K})}_{(m+n)-times}\end{aligned}\quad،\quad(\forall m,n\in\mathbb{N}^*).$$

سوف نعرّف من خلال المبرهنة التالية ضرب قياسين σ-منتهيين μ و μ' على $\Sigma\otimes\Sigma'$. في الواقع سنعرّف أوّلاً هذا الضرب على الجبر $\mathcal{E}$ ثمّ نمدّده إلى العشيرة $\Sigma\otimes\Sigma'$. فيما يخصّ كيفية حساب هذا الضرب عمليًّا سوف نتطرّق لها لاحقًا في **التعريف 19.7**.

مبرهنة 06.7: ليكن (E,Σ,μ) و (E',Σ',μ') فضائي قياس σ-منتهيين. إنّ الدالة $\nu:\mathcal{E}\to[0,\infty]$ المعرّفة بـ .

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{m}P_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\mu(A_i)\mu'(B_i)\text{،}$$

من أجل كلّ جملة $\{P_i=A_i\times B_i\}_{i=1}^{m}\subset\mathcal{E}$ ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى، قياس موجب و σ-منته على $\mathcal{E}$ ويقبل تمديدًا وحيدًا إلى $\Sigma\otimes\Sigma'$.

نرمز لهذا التمديد الـσ-منته (الوحيد) إلى $\Sigma\otimes\Sigma'$ بـ $\mu\otimes\mu'$.

إثبات: نلاحظ أوّلاً أنّ ν دالة موجبة تحقق

$$\nu(\varnothing)=\nu(\varnothing\times\varnothing)=\mu(\varnothing).\mu'(\varnothing)=0\text{.}$$

لتكن $\{Q_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{E}$ متتالية ذات عناصر منفصلة مثنى مثنى بحيث

$$S=\bigcup_{n\geq 1}Q_n\in\mathcal{E}\text{.}$$

نضع

$$Q_n=\bigcup_{i=1}^{k_n}(A_i\times B_i)\text{، }(\forall n\geq 1)\text{،}$$

حيث $1\leq k_n<\infty$ و $(A_i\times B_i)\cap(A_j\times B_j)=\varnothing$، عندما $i\neq j$.

ينتج عن انتماء S إلى $\mathcal{E}$ وجود جملة منتهية من المستطيلات القابلة للقياس المنفصلة مثنى مثنى $\{C_i\times D_i\}_{i=1}^{m}$ بحيث $S=\bigcup_{i=1}^{m}(C_i\times D_i)$.

نستنتج ممّا سبق أنّ من أجل كلّ $(x,y)\in E\times E'$ ولدينا

$$\chi_S(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{C_i\times D_i}(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{C_i}(x)\chi_{D_i}(y)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_{Q_n}(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\chi_{A_i}(x)\chi_{B_i}(y)$$

نُثبّت الآن x في E ونكامل بالنسبة إلى $y\in E'$، نستنتج فورًا من المبرهنة 19.6 أنّ

$$\sum_{i=1}^{m}\mu'(D_i)\chi_{C_i}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k_n}\mu'(B_i)\chi_{A_i}(x)\text{.}$$

ثمّ بالمكاملة بالنسبة إلى $x\in E$ نحصل على

$$\cdot \sum_{i=1}^{m}\mu(C_i)\mu'(D_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{k_n}\mu(A_i)\mu'(B_i)\right)$$

إذن

$$\text{،}\ \nu(S)=\nu\left(\bigcup_{n\geq 1}Q_n\right)=\sum_{n\geq 1}\nu(Q_n)$$

وهذا يثبت أنّ ν قياس موجب على $\mathcal{E}$. لنثبت الآن أنّ ν قياس σ-منته. ينتج عن كون القياسين μ و μ' σ-منتهيين وجود متتاليتين $\{E_n\}_{n\geq 1}\subset\Sigma$ و $\{E'_m\}_{m\geq 1}\subset\Sigma'$ بحيث

$$\text{،}(\forall m,n\geq 1)\ \text{،}\ \mu'(E'_m)<\infty \text{ و } \mu(E_n)<\infty$$

إضافة إلى أنّ $E=\bigcup_{n\geq 1}E_n$ و $E'=\bigcup_{m\geq 1}E'_m$. نلاحظ من جهة أخرى أنّ المتتالية $\{E_n\times E'_m\}_{n,m\geq 1}\subset\Sigma\otimes\Sigma'$ تحقق

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq 1}(E_n\times E'_m)&=\bigcup_{n\geq 1}\left[\bigcup_{m\geq 1}(E_n\times E'_m)\right]\\&=\bigcup_{n\geq 1}\left[E_n\times\left(\bigcup_{m\geq 1}E'_m\right)\right]\\&=\bigcup_{n\geq 1}(E_n\times E')=E\times E'\end{aligned}$$

بالإضافة إلى أنّ

$$\text{،}(\forall m,n\geq 1)\ \text{،}\ \nu(E_n\times E'_m)=\mu(E_n)\mu'(E'_m)<\infty$$

وهكذا فإنّ ν قياس σ-منته. نستنتج من مبرهنة هان **25.3** أنّ ν يقبل تمديدًا σ-منتهيًا وحيدًا (ألا وهو $\mu\otimes\mu'$) إلى $\sigma(\mathcal{E})=\Sigma\otimes\Sigma'$.■

ملاحظة 07.7: 1) يتّضح من التعريف وخلاصة المبرهنة السابقة أنّ قياس الضرب هو عبارة عن تعميم لمفهوم قياس المساحة الهندسية.

2) إنّ خاصيّة تمام قياسين لا تنتقل إلى القياس $\mu\otimes\mu'$ كما يتبيّن في المثال المضاد المعطى في **التطبيق 15.7**. يمكن في الواقع الحصول على تتمّة لـــ $\mu\otimes\mu'$ عن طريق التمديد إلى قياس خارجي على $E\times E'$، نستعمل بعد ذلك مبرهنة **كراتيودوري**، وأخيرًا نعتبر اختصار هذا الأخير

على عشيرة المجموعات $(\mu\otimes\mu')^*$-قابلة للقياس. نحصل بهذه الطريقة على قياس موجب متمّم لـ $\mu\otimes\mu'$.

تعريف 08.7: نسمّي القياس الموجب $\mu\otimes\mu':\Sigma\otimes\Sigma'\to[0,\infty]$ بقياس الضرب لِـ μ و μ'، كما تدعى الثلاثية $(E\times E',\Sigma\otimes\Sigma',\mu\otimes\mu')$ فضاء قياس الضرب لِـ (E,Σ,μ) و (E',Σ',μ').

ملاحظة 09.7 : إذا كانت μ، μ' و μ'' ثلاثة قياسات σ-منتهية عندئذ

$$(\mu\otimes\mu')\otimes\mu''=\mu\otimes(\mu'\otimes\mu'')=\mu\otimes\mu'\otimes\mu''.$$

وبالاستدلال بالاستقراء نستطيع تعريف ضرب القياس

$$\mu_1\otimes\mu_2\otimes\ldots\otimes\mu_n$$

لـ n قياسًا σ-منتهيًا.

تطبيق 10.7 : يوجد قياس موجب وتام λ_n (قياس لوبيغ) على العشيرة $\mathcal{L}_n$ (عشيرة المجموعات القابلة للقياس بمفهوم لوبيغ على $\mathbb{R}^n$) المؤلفة من المجموعات الجزئية $A\subset\mathbb{R}^n$ بحيث توجد $H\subset\mathbb{R}^n$ من نمط F_σ، وتوجد $G\subset\mathbb{R}^n$ من نمط G_δ بحيث $H\subset A\subset G$ و $\lambda_n(G\setminus H)=0$.

يحقق قياس لوبيغ λ_n خاصيّة الصمود بالانزياح التالية:

$$\lambda_n(A+x)=\lambda_n(A)\text{، }\forall A\in\mathcal{L}_n\text{، }\forall x\in\mathbb{R}^n.$$

(راجع والتر رودين [40]، المبرهنة 2.20، ص. 52).

ملاحظة 11.7 : 1) نضع $m=\lambda_1$ عندما $n=1$.

2) لدينا $\lambda_2\neq m\otimes m$ (λ_2 هي تتمّة القياس غير التام $m\otimes m$).

3) إذا كان $n=k+j$، $(k,j\geq 1)$ فإنّ λ_n تتمّة لـقياس الـضرب $\lambda_k\otimes\lambda_j$، ولدينا $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\subset\mathcal{L}_k\otimes\mathcal{L}_j\subset\mathcal{L}_n$. (راجع والتر رودين [40]، المبرهنة 7.11، ص. 153).

تعريف 12.7: نعرّف من أجل كلّ $A\subset E\times E'$ مقطع A وفق $x\in E$ بـ

$$A_x=\{z\in E':(x,z)\in A\}،$$

كما نعرّف مقطع A وفق $y\in E'$ بـ

$$A^y=\{z\in E:(z,y)\in A\}.$$

مثال 13.7: نعتبر في المستوي $\mathbb{R}^2$ المستطيل $A=[-1,2[\times]1,3]$ (إنّها مجموعة بوريلية)، لدينا من أجل كلّ $x\in\mathbb{R}$ ما يلي

$$A_x=\{z\in\mathbb{R}:(x,z)\in A\}=\begin{cases}\varnothing, & if\ x\notin[-1,2[\\ ]1,3], & if\ x\in[-1,2[\end{cases}،$$

ولدينا من أجل كلّ $y\in\mathbb{R}$:

$$A^y=\{z\in\mathbb{R}:(z,y)\in A\}=\begin{cases}\varnothing, & if\ y\notin]1,3]\\ [-1,2[, & if\ y\in]1,3]\end{cases}.$$

لاحظ أنّ المقطعين A_x و A^y ليسا بالضرورة قابلين للقياس، لكنّ في حالة ما إذا كانت A قابلة للقياس فإنّهما حتما مجموعتان جزئيتان قابلتان للقياس. هذا ما تنصّ عليه القضيّة التالية:

قضيّة 14.7: لتكن $A\in\Sigma\otimes\Sigma'$، عندئذ من أجل كلّ $x\in E$ و $y\in E'$ فإنّ $A_x\in\Sigma'$ و $A^y\in\Sigma$.

إثبات: نضع $\mathrm{P}=\{A\in\Sigma\otimes\Sigma':A_x\in\Sigma',\forall x\in E\}$. نقرّ بأنّ P عشيرة على $E\times E'$ تشمل المجموعات الأوّلية. بالتأكيد، نلاحظ أوّلا أنّ $\mathrm{P}\neq\varnothing$ لأنّ $E\times E'\in\mathrm{P}$ بموجب العلاقة $(E\times E')_x=E'\in\Sigma'$، $(\forall x\in E)$.

ليكن $A\in\mathrm{P}$، عندئذ من أجل كلّ $x\in E$، لدينا

$$\begin{aligned}(A^c)_x&=\{z\in E':(x,z)\in A^c\}=E'\setminus\{z\in E':(x,z)\in A\}\\&=E'\setminus A_x=(A_x)^c\in\Sigma'\end{aligned}$$

إذن $A^c \in \mathrm{P}$.

لتكن الآن $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathrm{P}$ و $x \in E$ ، نحصل بسهولة على

$$\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right)_x = \bigcup_{n\geq 1} (A_n)_x \in \Sigma'$$ ،

ومنه $\bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathrm{P}$. إذن، P عشيرة على $E \times E'$.

يبقى إثبات أنّ العشيرة P تشمل المستطيلات القابلة للقياس. لهذا نعتبر مستطيلاً قابلاً للقياس $A \times B$ ($A \in \Sigma$ و $B \in \Sigma'$). لدينا من أجل كلّ $x \in E$،

$$(A \times B)_x = \{z \in E' : (x,z) \in A \times B\} = \begin{cases} B, \text{ if } x \in A \\ \varnothing, \text{ if } x \notin A \end{cases}$$

ومن الاحتواء $\{\varnothing, B\} \subset \Sigma'$ نرى أنّ $A \times B \in \mathrm{P}$.

إذن، $\mathcal{E} \subset \mathrm{P} \subset \Sigma \otimes \Sigma'$، وعليه $\mathrm{P} = \Sigma \otimes \Sigma'$، وهذا يعني أنّ $A_x \in \Sigma'$، مهما يكن $A \in \Sigma \otimes \Sigma'$. وباستدلال مماثل نحصل على $A^y \in \Sigma$، مهما يكن $A \in \Sigma \otimes \Sigma'$ و $y \in E'$، وهو المطلوب.■

تطبيق 15.7: نفرض أنّ الفضائين (E, Σ, μ) و (E', Σ', μ') متطابقان مع فضاء قياس لوبيغ التام $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$. ليكن $P \subset \mathbb{R}$ بحيث $P \notin \mathcal{L}$ و $A = \{0\} \times P$. من الواضح أنّ $A \subset \{0\} \times \mathbb{R}$، إضافة إلى أنّ

$$(m \otimes m)(\{0\} \times \mathbb{R}) = m(\{0\}).m(\mathbb{R}) = 0$$.

بما أنّ $A_x = P$، عندما $x = 0$، و $A_x = \varnothing$، عندما $x \neq 0$، عندئذ $A \notin \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$، وهذا يبيّن أنّ الفضاء $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}, m \otimes m)$ ليس تامًا.

2- مبرهنة فوبنيه

تعريف 16.7: نعرف من أجل كلّ دالة عددية $f : E \times E' \to \overline{\mathbb{R}}$ مقطع f

عـند نقطة $x \in E$، ونرمز له بـ f_x، الدالة $f_x : E' \to \overline{\mathbb{R}}$ المعرّفة بـ

$$f_x(z) = f(x,z) \text{ ، } (\forall z \in E').$$

كـما نعرّف مقطع f عـند نقطة $y \in E'$، ونـرمز له بـ f^y، الدالة $f^y : E \to \overline{\mathbb{R}}$ المعرّفة بـ

$$f^y(z) = f(z,y) \text{ ، } (\forall z \in E).$$

لاحظ أنّ الدالتين f_x و f^y ليستا بالضرورة قابلتين للقياس، أمّا إذا كانت الدالة f قابلة للقياس فتصبحا قابلتين للقياس كما تؤكده القضيّة التالية:

قضيّة 17.7: لتكن $f \in \mathcal{M}(E \times E', \Sigma \otimes \Sigma')$، عـندئذ

أ) $f_x \in \mathcal{M}(E', \Sigma')$، من أجل كلّ $x \in E$،

ب) $f^y \in \mathcal{M}(E, \Sigma)$، من أجل كلّ $y \in E'$.

إثبات: أ) ينتج عن قابليّة قياس الدالة f أنّ من أجل كلّ $V \in \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ لدينا

$$f^{-1}(V) = \{(a,b) \in E \times E' : f(a,b) \in V\} \in \Sigma \otimes \Sigma'.$$

لدينا من أجل كلّ $x \in E$ المساواة التالية:

$$\left(f^{-1}(V)\right)_x = \{z \in E' : (x,z) \in f^{-1}(V)\} = \{z \in E' : f(x,z) \in V\}$$
$$= \{z \in E' : f_x(z) \in V\} = f_x^{-1}(V)$$

استنادًا إلى القضية السابقة فإنّ

$$f_x^{-1}(V) = \left(f^{-1}(V)\right)_x \in \Sigma' \text{ ، } (\forall x \in E)\text{،}$$

وهذا يثبت أنّ $f_x \in \mathcal{M}(E', \Sigma')$.

نحصل بنفس الكيفية على $f^y \in \mathcal{M}(E, \Sigma)$ ، $(\forall y \in E')$.■

مبرهنة 18.7: ليكن (E, Σ, μ) و (E', Σ', μ') فضائي قياس σ-منتهيين.

نعرّف من أجل كلّ $A \in \Sigma \otimes \Sigma'$ الدالتين:

$$\Phi : E \to [0, \infty] \text{ و } \Psi : E' \to [0, \infty]$$

كما يلي

$\Psi(y)=\mu(A^y)$ و $\Phi(x)=\mu'(A_x)$.

لدينا، $\Phi\in\mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ ، $\Psi\in\mathfrak{M}^+(E',\Sigma')$

و $$\int_E\Phi d\mu=\int_{E'}\Psi d\mu'. \qquad (1)$$

إثبات: الدالتان Φ و Ψ معرّفتان تعريفًا جيّدًا لأنّ $A_x\in\Sigma'$ و $A^y\in\Sigma$ حسب القضية **14.7**. نلاحظ من جهة أخرى أنّ

$$\Phi(x)=\int_{E'}\chi_{A_x}(\xi)d\mu'(\xi)=\int_{E'}\chi_A(x,\xi)d\mu'(\xi)\text{، }(\forall x\in E)$$

و

$$\Psi(y)=\int_E\chi_{A^y}(\xi)d\mu(\xi)=\int_E\chi_A(\xi,y)d\mu(\xi)\text{، }(\forall y\in E').$$

وعليه فإنّنا سوف ننظر إلى المساواة (1) كما يلي

$$\int_E\left(\int_{E'}\chi_A(x,y)d\mu'(y)\right)d\mu(x)=\int_{E'}\left(\int_E\chi_A(x,y)d\mu(x)\right)d\mu'(y).$$

لإثبات المبرهنة نضع

$$\mathcal{D}=\left\{A\in\Sigma\otimes\Sigma':\Phi\in\mathfrak{M}^+(E,\Sigma),\Psi\in\mathfrak{M}^+(E',\Sigma')\,\&\int_E\Phi d\mu=\int_{E'}\Psi d\mu'\right\}$$

لنتأكد أوّلاً أنّ $\mathcal{D}\neq\varnothing$. ليكن $A=R\times S$ مستطيلاً قابلاً للقياس من $\Sigma\otimes\Sigma'$، عندئذ

$$A_x=\begin{cases}S,\ if\ x\in R\\ \varnothing,\ if\ x\notin R\end{cases}\ (\in\Sigma\ )\text{، }(\forall x\in E)\text{،}$$

ومنه

$$\Phi(x)=\mu'(A_x)=\begin{cases}\mu'(S),\ if\ x\in R\\ 0,\qquad if\ x\notin R\end{cases}=\mu'(S)\chi_R(x)\geq 0\text{،}$$

واضح أنّ $\Phi\in\mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ لكون $R\in\Sigma$. نحصل بنفس الكيفية على $\Psi(y)=\mu(A^y)=\mu(R)\chi_S(y)$، وبالتالي $\Psi\in\mathfrak{M}^+(E',\Sigma')$. لدينا من جهة ثانية

$$\int_E\Phi d\mu=\int_E\mu'(S)\chi_R(x)d\mu(x)=\mu'(S)\mu(R)$$

و $$\int_{E'}\Psi d\mu'=\int_{E'}\mu(R)\chi_S(y)d\mu'(y)=\mu(R)\mu'(S)\text{،}$$

أي $\int_E\Phi d\mu=\int_{E'}\Psi d\mu'=\mu'(S)\mu(R)$، وهذا يثبت أنّ الأسرة

$\mathcal{D} \neq \varnothing$ لاحتوائها على المستطيل القابل للقياس $A = R \times S$.

نشير إلى أنّه من أجل كلّ مجموعة أوّلية $\mathcal{E} \ni (R_i \times S_i) \bigcup_{i=1}^{m} = A$ لدينا

$$\Phi(x) = \mu'(A_x) = \sum_{i=1}^{m} \mu'(S_i)\chi_{R_i}(x) \in \mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$$

و

$$\Psi(y) = \mu(A^y) = \sum_{i=1}^{m} \mu(R_i)\chi_{S_i}(y) \in \mathfrak{M}^+(E',\Sigma') ،$$

بالإضافة إلى

$$\int_E \Phi d\mu = \int_{E'} \Psi d\mu' = \sum_{i=1}^{m} \mu(R_i)\mu'(S_i) ،$$

ومن ثمّ فإنّ $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$.

سوف نثبت على مرحلتين أنّ الأسرة $\mathcal{D}$ تتطابق مع العشيرة $\Sigma \otimes \Sigma'$ على $E \times E'$.

1) نفرض أوّلا أنّ القياسين μ و μ' منتهيان ولنثبت أنّ $\mathcal{D}$ صفّ رتيب على $E \times E'$. لهذا الغرض نعتبر $\mathcal{D} \subset \{A_n\}_{n\geq 1}$ متتالية متزايدة، ونضع $A = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. لدينا فورًا

$$A_x = \bigcup_{n\geq 1} (A_n)_x \text{ و } A^y = \bigcup_{n\geq 1} (A_n)^y ،\ \forall x \in E ،\ \forall y \in E'.$$

بوضع $\varphi_n(x) = \mu'((A_n)_x)$ و $\psi_n(y) = \mu((A_n)^y)$، $(\forall n \geq 1)$، ومن انتماء A_n إلى $\mathcal{D}$ نرى أنّ

$$\varphi_n \in \mathfrak{M}^+(E,\Sigma) ،\ \psi_n \in \mathfrak{M}^+(E',\Sigma') \text{ و } \int_E \varphi_n d\mu = \int_{E'} \psi_n d\mu' ،$$
$(\forall n \geq 1)$.

نستنتج من تزايد المتتالية $\{A_n\}_{n\geq 1}$ أنّ من أجل كل $x \in E$ و $y \in E'$ المتتاليتين $\{(A_n)_x\}_{n\geq 1}$ و $\{(A_n)^y\}_{n\geq 1}$ متزايدتان، وعليه فإنّ المتتاليتين $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ و $\{\psi_n\}_{n\geq 1}$ متزايدتان، ولدينا بمقتضى الخاصية الأولى للتقارب ما يلي

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \mu'(A_x) ،\ (\forall x \in E)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(y) = \mu(A^y) ،\ (\forall y \in E').$$

نرى من كلّ هذه الحقائق أنّ الدالتين

$$y \xrightarrow{\Psi} \mu(A^y) \text{ و } x \xrightarrow{\Phi} \mu'(A_x)$$

قابلتان للقياس كنهاية لدوال عددية قابلة للقياس. نحصل أخيرًا بفضل مبرهنة التقارب الرتيب على

$$\lim_{n\to\infty} \int_E \varphi_n(x) d\mu(x) = \int_E \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) d\mu(x) = \int_E \mu'(A_x) d\mu(x)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E'} \psi_n(y) d\mu'(y) = \int_{E'} \lim_{n\to\infty} \psi_n(y) d\mu'(y) = \int_{E'} \mu(A^y) d\mu'(y).$$

وهما يشكّلان نفس المقدار، وبالتالي $A \in \mathcal{D}$.

لتكن الآن $\{B_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{D}$ متتالية متناقصة و $B = \bigcap_{n\geq 1} B_n$. لدينا فورًا

$$B_x = \bigcap_{n\geq 1} (B_n)_x \text{ و } B^y = \bigcap_{n\geq 1} (B_n)^y \text{، } \forall x \in E \text{، } \forall y \in E'.$$

بتعريف $\varphi'_n(x) = \mu'((B_n)_x)$ و $\psi'_n(y) = \mu((B_n)^y)$، $(\forall n \geq 1)$،

فإننا نحصل بفضل انتماء B_n إلى $\mathcal{D}$ على

$\varphi'_n \in \mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$، $\psi'_n \in \mathfrak{M}^+(E',\Sigma')$ و $\int_E \varphi'_n d\mu = \int_{E'} \psi'_n d\mu'$، $(\forall n \geq 1)$.

ينتج عن تناقص المتتالية $\{B_n\}_{n\geq 1}$ أنّ من أجل كل $x \in E$ و $y \in E'$ المتتاليتين $\{(B_n)_x\}_{n\geq 1}$ و $\{(B_n)^y\}_{n\geq 1}$ متناقصتان، وكذلك الشأن بالنسبة إلى المتتاليتين $\{\varphi'_n\}_{n\geq 1}$ و $\{\psi'_n\}_{n\geq 1}$، وبتطبيق **الخاصية الثانية للتقارب** (مع التذكير أنّ μ و μ' منتهيان) نجد أنّ

$$\lim_{n\to\infty} \varphi'_n(x) = \mu'(B_x) \text{، } (\forall x \in E)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} \psi'_n(y) = \mu(B^y) \text{، } (\forall y \in E').$$

إذن، الدالتان $x \xrightarrow{\Phi'} \mu'(B_x)$ و $y \xrightarrow{\Psi'} \mu(B^y)$ موجبتان وقابلتان للقياس كنهاية لدوال عددية قابلة للقياس. بالاستدلال بمبرهنة التقارب المرجّح (لأنّ

$$\varphi'_n(x) \to \Phi'(x) = \mu'(B_x) \text{، عندما } n \to \infty\text{،}$$

و

$$\varphi'_n(x) \leq \varphi'_1(x) = \mu'((B_1)_x) \leq g(x) := \mu'(E') \text{، } (\forall n \geq 1)\text{،}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_E \varphi'_n d\mu = \int_E \Phi' d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{E'} \psi'_n d\mu' = \int_{E'} \Psi' d\mu'.$$

إذن $B\in\mathcal{D}$، وبالتالي تشكل الأسرة $\mathcal{D}$ صفًّا رتيبًا على $E\times E'$ محتواة في العشيرة $\Sigma\otimes\Sigma'$ وتحوي الجبر $\mathcal{E}$، أي $\mathcal{E}\subset\mathcal{D}\subset\Sigma\otimes\Sigma'$. نستنتج من المبرهنة **31.2** أنّ

$$\mathcal{M}_{E\times E'}(\mathcal{E})=\sigma_{E\times E'}(\mathcal{E})=\Sigma\otimes\Sigma'\subset\mathcal{D}\subset\Sigma\otimes\Sigma',$$

ومنه $\mathcal{D}=\Sigma\otimes\Sigma'$.

2) نفرض الآن أنّ القياسين μ و μ' غير منتهيين. توجد متتاليتان متزايدتان $\{E_k\}_{k\geq 1}\subset\Sigma$ و $\{E'_k\}_{k\geq 1}\subset\Sigma'$ بحيث

$$E=\bigcup_{k\geq 1}E_k,\ E'=\bigcup_{k\geq 1}E'_k \text{ و } \mu(E_k)<\infty,\ \mu'(E'_k)<\infty,\ (\forall k\geq 1).$$

(لاحظ أنّه إذا كانت هاتان المتتاليتان غير متزايدتين فإنّه من السهل إنشاء متتاليتين بهذه الخاصيّة)

من أجل كلّ $A\in\Sigma\otimes\Sigma'$ نعرّف $A^k=A\cap(E_k\times E'_k)$، $(\forall k\geq 1)$.

لدينا فورًا

$$\bigcup_{k\geq 1}A^k=\bigcup_{k\geq 1}\left[A\cap(E_k\times E'_k)\right]=A\cap\bigcup_{k\geq 1}(E_k\times E'_k)=A.$$

نعرّف الأسرة

$$\mathcal{H}=\left\{A\in\Sigma\otimes\Sigma' : A^k\in\mathcal{D}, \forall k\geq 1\right\}$$

نقرّ بأنّ الأسرة $\mathcal{H}$ صفّ رتيب على $E\times E'$ يحقق $\mathcal{H}=\Sigma\otimes\Sigma'$.

بالتأكيد، لقد أثبتنا أعلاه أنّ $\mathcal{E}\subset\mathcal{D}$، وبما أنّ $\mathcal{E}$ جبر على $E\times E'$ فإنّ، من أجل كلّ $S\in\mathcal{E}$، لدينا ما يلي

$$S^k=S\cap(E_k\times E'_k)\in\mathcal{E}\subset\mathcal{D},\ (\forall k\geq 1).$$

إذن $S\in\mathcal{H}$، ومنه $\mathcal{E}\subset\mathcal{H}$.

لتكن $\{S_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{H}$ متتالية متزايدة و $S=\bigcup_{n\geq 1}S_n$، عندئذ $(S_n)^k\in\mathcal{D}$،

$(\forall k,n\geq 1)$. بتثبيت k نحصل على متتالية متزايدة:

$$\left\{(S_n)^k\right\}_{n\geq 1}\subset \mathcal{D} \quad \text{بحيث} \quad \left\{(S_n)^k\right\}_{n\geq 1}\subset E_k\times E'_k.$$

بملاحظتنا أنّ $\mu(E_k)<\infty$ و $\mu'(E'_k)<\infty$ نستخلص من المرحلة السابقة أنّ

$$\bigcup_{n\geq 1}(S_n)^k = S\cap(E_k\times E'_k)\in\mathcal{D}،$$

وبالتالي $S\in\mathcal{H}$ لكون k اختياريًّا.

نعتبر الآن متتالية $\{T_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{H}$ متناقصة و $T=\bigcap_{n\geq 1}T_n$. لدينا من أجل كلّ $k\geq 1$ الاحتواء $\left\{(T_n)^k\right\}_{n\geq 1}\subset E_k\times E'_k$، كما نحصل بفضل المرحلة الأولى وتناقص المتتالية $\left\{(T_n)^k\right\}_{n\geq 1}$ في $\mathcal{D}$، (علما أنّ $(\forall k\geq 1، (\mu\otimes\mu')(E_k\times E'_k)=\mu(E_k).\mu'(E'_k)<\infty)$ على

$$T^k=\bigcap_{n\geq 1}(T_n)^k=\bigcap_{n\geq 1}\left(T_n\cap(E_k\times E'_k)\right)\in\mathcal{D}.$$

أخيرًا، بما أنّ k اختياري فإنّنا نحصل فورًا على $T\in\mathcal{H}$. إذن الأسرة $\mathcal{H}$ صف رتيب يحوي الجبر $\mathcal{E}$، وعليه فإنّ $\Sigma\otimes\Sigma'\subset\mathcal{H}$.

فيما يخصّ الاحتواء الثاني $\mathcal{H}\subset\Sigma\otimes\Sigma'$ فإنّه ينتج مباشرةً من تعريف $\mathcal{H}$، وهذا ما يثبت أنّ $\mathcal{H}=\Sigma\otimes\Sigma'$.

3) لنثبت الآن أنّ $\mathcal{D}$ صفّ رتيب. نشير أوّلاً إلى أنّ $\mathcal{D}$ مستقرّة بالنسبة لاتحاد المتتاليات المتزايدة وذلك حسب 1) (محققة بدون شروط خاصة على القياسين)، وفيما يخصّ تقاطع المتتاليات المتناقصة نعتبر متتالية متناقصة $\{F_n\}_{n\geq 1}\subset\mathcal{D}$، ونضع $F=\bigcap_{n\geq 1}F_n$.

ينتج عن كون $F\in\Sigma\otimes\Sigma'\equiv\mathcal{H}$ أنّ $\left\{F^k\right\}_{k\geq 1}\subset\mathcal{D}$ وأنّها متزايدة، وتحقق

$$\bigcup_{k\geq 1}F^k=\bigcup_{k\geq 1}F\cap(E_k\times E_k')=F\cap\left(\bigcup_{k\geq 1}(E_k\times E_k')\right)=F،$$

وعليه فإنّ $F \in \mathcal{D}$ لكون $\mathcal{D}$ مستقرّة بالنسبة لاتحاد المتتاليات المتزايدة حسب ما سبق. وهكذا فإنّ $\mathcal{D}$ صفّ رتيب على $E \times E'$ يحوي الجبر $\mathcal{E}$، إذن $\mathcal{D} = \Sigma \otimes \Sigma'$، وبهذا يكتمل إثبات المبرهنة.■

بإمكاننا الآن إعطاء تعريف صريح وعمليّ لقياس الضرب $\mu \otimes \mu'$ كالآتي:

تعريف 19.7: ليكن (E, Σ, μ) و (E', Σ', μ') فضائي قياس σ–منتهيين. لدينا من أجل كلّ $A \in \Sigma \otimes \Sigma'$،

$$(\mu \otimes \mu')(A) = \int_E \mu'(A_x) d\mu(x) = \int_{E'} \mu(A^y) d\mu'(y).$$

ملاحظة 20.7: على العموم لا يكون قياس الضرب $\mu \otimes \mu'$ معرّفًا جيّدًا إذا فــقد أحد القياسين μ أو μ' خاصيّة الـــσ–انتهاء.

تطبيق 21.7: نفرض أنّ

$(E, \Sigma, \mu) = (E', \Sigma', \mu') = (\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$، $S, T \in \mathcal{L}$ و $A = S \times T$،

عندئذ

$$A_x = \begin{cases} T, & \text{if } x \in S \\ \varnothing, & \text{if } x \notin S \end{cases} \quad \text{و} \quad A^y = \begin{cases} S, & \text{if } y \in T \\ \varnothing, & \text{if } y \notin T \end{cases}،$$

ومنه

$$m(A_x) = m(T)\chi_S(x) \quad \text{و} \quad m(A^y) = m(S)\chi_T(y).$$

إذن

$$(m \otimes m)(A) = \int_{\mathbb{R}} m(A_x) dm(x) = \int_{\mathbb{R}} m(A^y) dm(y) = m(S)m(T).$$

نبدأ فيما يلي بعرض وإثبات مبرهنة فوبنيه–طونلي[2] (Fubini-Tonelli) الخاصة بالدوال الموجبة القابلة للقياس. تعطى هذه المبرهنة طريقة عمليّة لحساب تكامل دالة موجبة قابلة للقياس $f : E \times E' \to [0, \infty]$ وفق

---

[2]) ليونيدا طونلي [Leonida Tonelli] (1885–1946)

قياس الضرب $\mu\otimes\mu'$ عن طريق التكامل المكرّر $\int\limits_{E}\int\limits_{E'} f\,d\mu'd\mu$ أو $\int\limits_{E'}\int\limits_{E} f\,d\mu\,d\mu'$.

ترميز: سوف نكتب أحيانا التكامل المكرّر على الشكل $\int\limits_{E} d\mu \int\limits_{E'} f\,d\mu'$ عوض $\int\limits_{E}\int\limits_{E'} f\,d\mu'd\mu$ لتفادي استعمال الأقواس.

مبرهنة 22.7 [فوبنيه-طونلي]: ليكن (E,Σ,μ) و (E',Σ',μ') فضائي قياس σ-منتهيين. إذا كانت $f\in\mathfrak{M}^+(E\times E',\Sigma\otimes\Sigma')$ فإنّ

أ) الدالتين

$$\Psi(y)=\int_E f^y(x)d\mu(x) \text{ و } \Phi(x)=\int_{E'} f_x(y)d\mu'(y)$$

تحققان $\Phi\in\mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ و $\Psi\in\mathfrak{M}^+(E',\Sigma')$.

ب) لدينا المساويات التالية

$$\int_{E\times E'} f(x,y)d(\mu\otimes\mu')(x,y)=\int_E d\mu(x)\int_{E'} f(x,y)d\mu'(y)$$
$$=\int_{E'} d\mu'(y)\int_E f(x,y)d\mu(x)$$

إثبات: أ) نفرض أوّلا أنّ $f=\chi_A$ من أجل $A\in\Sigma\otimes\Sigma'$. لدينا

$$\int_{E'}\chi_A(x,y)d\mu'(y)=\int_{E'}\chi_{A_x}(y)d\mu'(y)=\mu'(A_x) \text{ ، } (\forall x\in E)$$

و

$$\int_E\chi_A(x,y)d\mu(x)=\int_E\chi_{A^y}(x)d\mu(x)=\mu(A^y) \text{ ، } (\forall y\in E').$$

نستنتج من المبرهنة السابقة أنّ الدالتين

$$x\mapsto\mu'(A_x) \text{ و } y\mapsto\mu(A^y)$$

عنصران من $\mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$ و $\mathfrak{M}^+(E',\Sigma')$ على الترتيب، وتحققان المساويات التالية

$$\int_E \mu'(A_x)d\mu(x)=\int_{E'}\mu(A^y)d\mu'(y)=(\mu\otimes\mu')(A)$$
$$=\int_{E\times E'}\chi_A(x,y)d(\mu\otimes\mu')(x,y)$$

إذا كانت $f:E\times E'\to[0,\infty]$ دالة بسيطة قابلة للقياس فإنّ الخاصيتين أ) وب) محققتان نتيجة لخطيّة التكامل.

نفرض الآن أنّ $f\in\mathfrak{M}^+(E\times E',\Sigma\otimes\Sigma')$، ونعتبر متتالية من الدوال الموجبة البسيطة القابلة للقياس $\{\theta_n\}_{n\geq 1}\subset\mathbb{S}^+(E\times E',\Sigma\otimes\Sigma')$ بحيث $\{\theta_n\}$ تؤول تزايديّا إلى f (حسب **المبرهنة الأساسية للتقريب**). لدينا كذلك بفضل **مبرهنة التقارب الرتيب**

$$\int_E f^y(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\int_E\theta_n^y(x)d\mu(x).$$

نلاحظ أوّلا أنّ الدالة $y\xrightarrow{\varphi_n}\int_E\theta_n^y(x)d\mu(x)$ قابلة للقياس لأنّها عبارة عن مجموع منته من الدوال القابلة للقياس، ومنه الدالة

$$y\mapsto\int_E f^y(x)d\mu(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(y)$$

قابلة للقياس لكونها نهاية بسيطة لمتتالية من الدوال القابلة للقياس، وبالطريقة ذاتها نحصل على قابلية قياس الدالة $x\mapsto\int_E f_x(y)d\mu'(y)$، وهذا يؤكّد صحّة الخاصيّة أ).

لإثبات الخاصيّة ب) نستعمل مجدّدًا **مبرهنة التقارب الرتيب** للحصول على

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E\times E'}\theta_n d(\mu\otimes\mu')=\int_{E\times E'}f\,d(\mu\otimes\mu')$$
$$=\lim_{n\to\infty}\int_E\int_{E'}\theta_n(x,y)d\mu'(y)d\mu(x)$$
$$=\int_E\left[\lim_{n\to\infty}\int_{E'}(\theta_n)_x(y)d\mu'(y)\right]d\mu(x)$$

$$=\int_E\left[\int_{E'}\lim_{n\to\infty}(\theta_n)_x(y)d\mu'(y)\right]d\mu(x)$$
$$=\int_E\left[\int_{E'}f_x(y)d\mu'(y)\right]d\mu(x)$$
$$=\int_E\int_{E'}f(x,y)d\mu'(y)d\mu(x)$$

إذن

$$\int_{E\times E'} f\,d(\mu\otimes\mu') = \int_E d\mu(x)\int_{E'} f(x,y)\,d\mu'(y)$$

وبنفس الكيفية نجد

$$\int_{E\times E'} f\,d(\mu\otimes\mu') = \int_{E'} d\mu'(y)\int_E f(x,y)\,d\mu(x)$$ ،

وهو المطلوب.■

ملاحظة 23.7: نشير إلى أنّ $f\in\mathfrak{M}^+(E\times E',\Sigma\otimes\Sigma')$ يستلزم أنّ التكامل يأخذ قيمه في $[0,\infty]$. إذن هذه المبرهنة مهمّة جدًّا من الناحية التطبيقية إذ تمنحنا فرصة بيان قابلية تكامل دالة موجبة وقابلة للقياس على $E\times E'$ (أي $\int_{E\times E'} f\,d(\mu\otimes\mu')<\infty$) من عدمها.

بإمكاننا تعويض قابلية قياس f بمساواة f ، f_x و f^y **تقريبًا أينما كان** بدوال قابلة للقياس لكون $(\mu\otimes\mu')(A)=0$ يتكافأ مع $\mu\left(A^y\right)=0$ و $\mu'(A_x)=0$.

يبيّن المثال المضاد التالي المنسوب إلى سربانسكي[3] (Sierpinski) أنّ شرط قابلية القياس f بالنسبة إلى العشيرة $\Sigma\otimes\Sigma'$ في مبرهنة فوبنيه-طونلي ضروري لصحّتها.

مثال 24.7: نعتبر $E=E'=[0,1]$ مع قياس لوبيغ m. نعرّف على الفترة $[0,1]$ علاقة ترتيب $>$ بحيث من أجل كلّ $x\in[0,1]$ تكون المجموعة $\{y\in[0,1]: y<x\}$ قابلة للعد. بوضع $A=\{(x,y): x<y\}$ نرى أنّ $[0,1]\setminus A_x$ و A^y مجموعتان قابلتان للعد (إذن قابلتان للقياس) غير أنّ A ليست قابلة للقياس. نعرّف الدالة $f: E\times E'\to\{0,1\}$ بـ $f=\chi_A$ (إنّها غير قابلة للقياس لأنّ A ليست قابلة للقياس)، لدينا

$$\int_{[0,1]} dy\int_{[0,1]} f(x,y)\,dx = 0 \neq \int_{[0,1]} dx\int_{[0,1]} f(x,y)\,dy = 1$$.

---

[3] واكلو سربانسكي [Wacław Franciszek Sierpiński] (1882–1969)

يكمن الخلل في عدم استيفاء f لشرط قابلية القياس.

هذا الآن تطبيق لمبرهنة فوبنيه-طونلي:

تطبيق 25.7: لنحسب التكامل التالي: $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dm(x)$.

نستطيع بفضل مبرهنة فوبيني-طونلي أن نكتب ما يلي

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(m\otimes m) = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2-y^2}\, dx\right)dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx\right)dy$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\, dxdy$$

$$= \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} e^{-x^2-y^2}\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \int_0^{n} d\theta \int_0^{2\pi} \rho e^{-\rho^2}\, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} \rho e^{-\rho^2}\, d\rho = \pi$$

حيث $D_n = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le n^2\right\}$.

إذن

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dm(x) = \sqrt{\pi}.$$

سوف نتخلى فيما يلي عن شرط الإيجاب لدى الدالة f ونعوّضه بشرط قابلية المكاملة وفق قياس الضرب $\mu\otimes\mu'$ على $E\times E'$ لنحصل على الصيغة التالية:

مبرهنة 26.7 [فوبنيه] **: ليكن** (E,Σ,μ) **و** (E',Σ',μ') **فضائي قياس** σ**-منتهيين. إذا كانت** $f\in\mathfrak{L}^1(E\times E',\Sigma\otimes\Sigma',\mu\otimes\mu')$ **فإنّ**

أ) $f_x\in\mathfrak{L}^1(E',\Sigma',\mu')$، من أجل μ-تأك $x\in E$،
و $f^y\in\mathfrak{L}^1(E,\Sigma,\mu)$، من أجل μ'-تأك $y\in E'$،

ب) الدالتين

$$\Phi(x) = \int_{E'} f_x(y)\, d\mu'(y) \quad \text{و} \quad \Psi(y) = \int_E f^y(x)\, d\mu(x)$$

تحققان $\Phi \in \mathfrak{L}^1(E,\Sigma,\mu)$ و $\Psi \in \mathfrak{L}^1(E',\Sigma',\mu')$.

ج) لدينا المساويات التالية

$$\int_{E\times E'} f(x,y)d(\mu\otimes\mu')(x,y) = \int_E d\mu(x)\int_{E'} f(x,y)d\mu'(y)$$
$$= \int_{E'} d\mu'(y)\int_E f(x,y)d\mu(x)$$

إثبات: أ) نستنتج فورًا من قابلية جمع الدالة العددية الموجبة $|f|$ على $E\times E'$ ومن مبرهنة فوبنيه-طونلي أنّ

$$\int_{E\times E'}|f|d(\mu\otimes\mu') = \int_E d\mu(x)\int_{E'}|f|(x,y)d\mu'(y)$$
$$= \int_{E'} d\mu'(y)\int_E |f|(x,y)d\mu(x) < \infty$$

وعليه فإنّ الدالتين

$$G(y) = \int_E |f^y|(x)d\mu(x) \text{ و } F(x) = \int_{E'}|f_x|(y)d\mu'(y)$$

تحققان $F \in \mathfrak{L}^1(E)$ و $G \in \mathfrak{L}^1(E')$ (مع الملاحظة أنّ $|f_x| = |f|_x$ و $|f^y| = |f|^y$). إذن F دالة منتهية μ-تاك على E، وأنّ G منتهية μ'-تاك على E'، وهذا يبيّن أنّ $f_x \in \mathfrak{L}^1(E')$ (μ-تاك $x\in E$) و $f^y \in \mathfrak{L}^1(E)$ (μ'-تاك $y \in E'$). وهكذا فإنّ الدالة $x \xrightarrow{\Phi} \int_{E'} f_x(y)d\mu'(y)$ معرّفة μ-تاك $x\in E$ و $\Phi \in \mathfrak{M}^+(E,\Sigma)$.

ب) من الواضح أنّ

$$\int_E \left|\int_{E'} f_x(x)d\mu'(y)\right|d\mu(x) \le \int_E\int_{E'}|f(x,y)|d\mu'(y)d\mu(x) < \infty .$$

ومنه الدالة $x \mapsto \int_{E'} f_x(y)d\mu'(y)$ قابلة للمكاملة على E.

وبطريقةٍ مماثلة نحصل على أنّ الدالة $y \xrightarrow{\Psi} \int_E f^y(x)d\mu(x)$ قابلة للمكاملة على E'.

ج) ينتج عن خطيّة التكامل وعن قابلية مكاملة الدوال المستعملة أنّ

$$\int_{E\times E'} fd(\mu\otimes\mu') = \int_{E\times E'}(f^+ - f^-)d(\mu\otimes\mu')$$
$$= \int_{E\times E'} f^+d(\mu\otimes\mu') - \int_{E\times E'} f^-d(\mu\otimes\mu')$$

$$= \int_E d\mu \int_{E'} f^+ d\mu' - \int_E d\mu \int_{E'} f^- d\mu' = \int_E d\mu \int_{E'} f\, d\mu'$$
$$= \int_E d\mu' \int_{E'} f^+ d\mu - \int_E d\mu' \int_{E'} f^- d\mu = \int_E d\mu' \int_{E'} f\, d\mu$$

وهو المطلوب.■

ملاحظة 27.7: يمكننا تعويض فرضية $f \in \mathfrak{L}^1(E\times E', \Sigma\otimes\Sigma', \mu\otimes\mu')$ بفرضية **وجود (أي منته) أحد التكاملات فقط**

$$\int_{E\times E'} |f| d(\mu\otimes\mu') \text{ ، } \int_E d\mu \int_{E'} |f| d\mu' \text{ أو } \int_{E'} d\mu' \int_E |f| d\mu \text{ .}$$

بطبيعة الحال يكون التكاملان الآخران منتهيين ويقبل الجميع قيمة مشتركة منتهية، وذلك بفضل **مبرهنة طونلي – فوبنيه.**
لهذه الملاحظة أهمية تطبيقية كبيرة فهي تسمح لنا في كثير من الأحيان من التحقق من قابلية تكامل f على $E\times E'$ بدون اللجوء إلى قياس الضرب $\mu\otimes\mu'$، فيكفي إذن حساب (أو تقدير) أحد التكاملين المكرّرين $\int_E d\mu \int_{E'} |f| d\mu'$ أو $\int_{E'} d\mu' \int_E |f| d\mu$ فقط.

مثال 28.7: لنحسب التكامل بطريقتين مختلفتين:

$$\int_E f(x,y)\, d(m\otimes m) \text{ ،}$$

حيث $f(x,y) = \dfrac{-3x}{(xy+1)^2}$ و $E = [1,2]\times[1,3]$. لاحظ أنّ f سالبة على E، قابلة للقياس (لأنّها متّصلة على E) ويحقق

$$\forall (x,y)\in E \text{ ، } |f(x,y)| = \frac{3x}{(xy+1)^2} \le \frac{3}{2} \text{ ،}$$

وبالتالي $\int_E |f| d(m\otimes m) \le 3 < \infty$ ، إذن f قابلة للجمع على E. بتطبيق **مبرهنة فوبنيه** نجد

$$\int_E f(x,y)\, d(m\otimes m) = \int_{[1,2]} dx \int_{[1,3]} f dy = \int_{[1,3]} dy \int_{[1,2]} f dx \text{ .}$$

لنحسب الآن قيمة التكامل الثاني، لدينا

$$\int_{[1,2]} dx \int_{[1,3]} f dy = -3\int_1^2 dx \int_1^3 \frac{x}{(xy+1)^2} dy = -3\int_1^2 \left\{ -\frac{1}{xy+1}\Big|_{y=1}^{y=3} \right\} dx$$

$$= -3\int_1^2 \left\{ \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x+1} \right\} dx = -\ln\frac{27}{14}$$

من جهة أخرى بالمكاملة بالتجزئة نحصل على

$$\int_{[1,3]} dy \int_{[1,2]} f dx = -3\int_1^3 dy \int_1^2 \frac{x}{(xy+1)^2} dx$$

$$= -3\int_1^3 \left\{ \frac{x}{y}\left(\frac{-1}{xy+1} \right)\Big|_{x=1}^{x=2} + \int_1^2 \frac{1}{y(xy+1)} dx \right\} dy$$

$$= -3\int_1^3 \left\{ \frac{1}{y(y+1)} - \frac{2}{y(2y+1)} + \frac{1}{y^2}\ln(2y+1) - \frac{1}{y^2}\ln(y+1) \right\} dy$$

$$= -3\left(\frac{1}{y}\ln(y+1) - \frac{1}{y}\ln(2y+1) \right)\Big|_{y=1}^{y=3} = -\ln\frac{27}{14}$$

وعليه فإن، $\int_E f(x,y)\, d(m\otimes m) = -\ln\frac{27}{14}$.

ملاحظة 29.7: إنّ شرط σ-انتهاء القياسين μ و μ' ضروري لصحّة مبرهنة فوبنيه كما يبيّنه المثال المضاد التالي:

مثال 30.7: نعتبر الفضائين $(J,\mathcal{B}(J),\lambda)$ و $(J,\mathcal{P}(J),\mu_c)$ حيث $J=[0,1]$ و μ_c هو قياس العدّ. ليكن $f: J\times J\to\mathbb{R}^+$ معرّفًا بـ $f(x,y)=\chi_\Delta(x,y)$ حيث Δ قطر المربّع $J\times J$، أي

$\Delta=\{(x,y)\in J\times J : x=y\}$.

إنّ الدالة f قابلة للقياس لأنّ

$\Delta\in\mathcal{B}(J)\otimes\mathcal{B}(J)\subset\mathcal{B}(J)\otimes\mathcal{P}(J)$ ،

لكونها Δ مجموعة جزئية مغلقة. لدينا إذن

$$\int_J f(x,y)d\lambda(x) = \int_J \chi_{\{y\}}(x)d\lambda(x) = \lambda(\{y\}) = 0 \text{ ، } \forall y \in J \text{ ،}$$

و $$\int_J f(x,y)d\mu_c(y) = \int_J \chi_{\{x\}}(y)d\mu_c(y) = \mu_c(\{x\}) = 1 \text{ ، } \forall x \in J .$$

وبالتالي

$$\int_J \int_J f(x,y)d\lambda(x)d\mu_c(y) = 0$$

و $$\int_J \int_J f(x,y)d\mu_c(y)d\lambda(x) = \int_J 1 d\lambda(x) = 1 \text{ ،}$$

أي التكاملان المكرّران مختلفان.

العبرة: يرجع سبب هذا التمايز لكون القياس μ_c غير σ-منته لأنّه لا توجد على الاطلاق متتالية $\{E_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{P}(J)$ بحيث

$$J = \bigcup_{n\geq 1} E_n \text{ و } \mu_c(E_n) < \infty \text{ ، } \forall n \geq 1 .$$

ملاحظة 31.7: كتطبيق لمبرهنة فوبنيه يمكننا اعتبار $E = E' = \mathbb{N}$، $\Sigma = \Sigma' = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ و $\mu = \mu' = \mu_c$، μ_c قياس العدّ.

نفرض أنّ $\int_{E'} d\mu' \int_E |f| d\mu$ منته، أي

$$\int_{E'} d\mu' \int_E |f| d\mu = \int_{\mathbb{N}} dy \int_{\mathbb{N}} |f(x,y)| dx = \int_{\mathbb{N}} \left(\sum_{n\geq 0} |f(n,y)| \right) dy$$

$$= \sum_{n\geq 0} \int_{\mathbb{N}} |f(n,y)| dy = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{m\geq 0} |f(n,m)| \right) < \infty$$

نستنتج من مبرهنة فوبنيه أنّ

$$\sum_{n\geq 0} \sum_{m\geq 0} |f(n,m)| = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{m\geq 0} |f(n,m)| \right) = \sum_{m\geq 0} \left(\sum_{n\geq 0} |f(n,m)| \right) \text{ ،}$$

وهي خاصيّة تتمتّع بها السلاسل المزدوجة مطلقة التقارب حيث نستطيع تبديل الرمزين $\sum_{n\geq 0}$ و $\sum_{m\geq 0}$ فيما بينهما.

ملاحظة 32.7: على غرار تعميم ضرب القياس إلى عدد اختياري من

القياسات الـ σ-منتهية فباستطاعتنا أيضًا تعميم مبرهنة فوبنيه بالاستقراء إلى عدد اختياري من القياسات الـ σ-منتهية.

فعلى سبيل المثال إذا كانت (E_i,Σ_i,μ_i)، $i=1,2,3$، فضاءات قياس σ-منتهية و $f\in\mathfrak{L}^1(E_1\times E_2\times E_3,\Sigma_1\otimes\Sigma_2\otimes\Sigma_3,\mu_1\otimes\mu_2\otimes\mu_3)$ فإنّ

$$\begin{aligned}\int_{E_1\times E_2\times E_3} f(x,y,z)\,d(\mu_1\otimes\mu_2\otimes\mu_3)(x,y,z)\\ &=\int_{E_2\times E_3} d(\mu_2\otimes\mu_3)(y,z)\int_{E_1} f(x,y,z)\,d\mu_1(x)\\ &=\int_{E_1} d\mu_1(x)\int_{E_2\times E_3} f(x,y,z)\,d(\mu_2\otimes\mu_3)(y,z)\end{aligned}$$

وبهذه الكيفية نستطيع حساب أي تكامل مضاعف من الشكل:

$$\int_{E_1\times E_2\times\ldots\times E_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,d(\mu_1\otimes\mu_2\otimes\ldots\otimes\mu_n)(x_1,x_2,\ldots,x_n).$$

مسألة محلولة

ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس σ-منتهيًا و $f:E\to\mathbb{R}$ دالة $(\Sigma,\mathcal{B}(\mathbb{R}))$-قابلة للقياس بحيث $\inf\{f(x):\ x\in E\}=a\in\mathbb{R}$. نضع

$$\Omega=\{(x,y)\in E\times\mathbb{R}\ :\ a\le y\le f(x)\}$$

و $\Gamma=\{(x,y)\in E\times\mathbb{R}\ :\ y=f(x)\}$ (بيان f).

استعن بالدالة $\varphi:E\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعـرّفة بـ $\varphi(x,y)=f(x)-y$ لإثبات ما يلي :

1) Ω و Γ عنصران من $\Sigma\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$،

2) $(\mu\otimes m)(\Omega)=\int_E (f-a)\,d\mu$،

3) $(\mu\otimes m)(\Gamma)=0$.

ملاحظة 33.7: نستخلص من هذه المسألة أنّه عندما $E=[\alpha,\beta]$ فإنّ التكامل 2) هو بالضبط مساحة الحيز المحدد ما بين المستقيم $y=a$، Γ (بيان f) والمستقيمين $x=\alpha$ و $x=\beta$. ومن جهة أخرى فإنّ بيان أي دالة حقيقية قابلة للقياس هو مهمل بالنسبة لقياس الضرب $\mu\otimes m$ حسب الخاصيّة 3).

الحل:

1) لتكن $\varphi_1,\varphi_2:E\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ بحيث

$\varphi_1(x,y)=y$ و $\varphi_2(x,y)=f(x)$،

عندئذ من أجل كلّ $V\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$ فإنّ

$$\begin{aligned}\varphi_1^{-1}(V)&=\{(x,y)\in E\times\mathbb{R}:\varphi_1(x,y)=y\in V\}\\&=E\times V\in\Sigma\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\varphi_2^{-1}(V)&=\{(x,y)\in E\times\mathbb{R}:\varphi_2(x,y)=f(x)\in V\}\\&=f^{-1}(V)\times\mathbb{R}\in\Sigma\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})\end{aligned}$$

هـذا معناه أنّ φ_1، φ_2، ومن ثمّ $\varphi=\varphi_2-\varphi_1$ هـي دوال $\Sigma\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$-قابلة للقياس. من جهة ثانية يمكننا التحقّق بسهولة من أنّ

$\Omega=(E\times[a,+\infty[)\cap\varphi^{-1}(\mathbb{R}^+)$ و $\Gamma=\varphi^{-1}(\{0\})$،

وعليه فإنهما $\Sigma\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$-قابلتان للقياس.

2) واضح أنّ من أجل كل (x,y) في $E\times\mathbb{R}$

$$\chi_\Omega(x,y)=\begin{cases}1 & ,y\in[a,f(x)]\\0 & ,y\notin[a,f(x)]\end{cases}=\chi_{[a,f(x)]}(y)$$

$$= \int_E \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,f(x)]}(y) dm(y) \right) d\mu(x)$$
$$= \int_E m([a,f(x)]) d\mu(x) = \int_E (f(x)-a) d\mu(x)$$

3) نلاحظ أنّ من أجل كل (x,y) في $E\times\mathbb{R}$ لدينا

$$\chi_\Gamma(x,y) = \begin{cases} 1 & ,y = f(x) \\ 0 & ,y \neq f(x) \end{cases} = \chi_{\{f(x)\}}(y) \text{،}$$

وهذا يسمح لنا الحصول على

$$(\mu\otimes m)(\Gamma) = \int_{E\times\mathbb{R}} \chi_\Gamma(x,y) dm(y) d\mu(x)$$
$$= \int_E \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f(x)\}}(y) dm(y) \right) d\mu(x)$$
$$= \int_E m(\{f(x)\}) d\mu(x) = 0$$

تمارين مقترحة

01 ليكن (E,Σ,μ) و (E',Σ',μ') فضائي قياس σ-منتهيين و $A\in\Sigma\otimes\Sigma'$ مجموعة مهملة.

أثبت أنّ $\mu'(A_x)=0$ ، (μ-تاك $x\in E$) و $\mu(A^y)=0$ ، (μ'-تاك $y\in E'$).

02 ليكن (E,Σ,μ) و (E',Σ',μ') فضائي قياس σ-منتهيين.

1) أعط مثالاً عن $A\subset E\times E'$ بحيث $A^y\times A_x\in\Sigma\otimes\Sigma'$، $\forall(x,y)\in E\times E'$، بينما $A\notin\Sigma\otimes\Sigma'$.

2) استنتج أنّ حذف شرط قابلية قياس f يُـخِلُّ بصحّة مبرهنة فوبنيه-طونلي.

03 لتكن $E=\{a,b,c\}$ و $\Sigma=\{\varnothing,\{a\},\{b,c\},E\}$. نعرّف القياس الموجب $\mu:\Sigma\to[0,+\infty]$ كالآتي

$$\mu(\varnothing)=\mu(\{a\})=0,\ \mu(\{b,c\})=\mu(E)=1.$$

أ. تأكد من أنّ القياس μ تام و σ-منته.

ب. أحسب $(\mu\otimes\mu)(\{a\}\times\{b,c\})$. هل $\{a\}\times\{b\}\in\Sigma\otimes\Sigma$ ؟ استنتج أنّ القياس $\mu\otimes\mu$ ليس تامًّا.

04 لتكن E و E' مجموعتين غير خاليتين و $P\subset E\times E'$ إذا رمزنا بـ χ_P للدالة المميّزة لـ P أثبت أنّ

$$(\chi_P)_x=\chi_{P_x} \text{ و } (\chi_P)^y=\chi_{P^y}\text{، } (\forall(x,y)\in E\times E').$$

استنتج أنّه إذا كان $P=A\times B$ فإنّ $\chi_P(x,y)=\chi_A(x)\cdot\chi_B(y)$.

05 ليكن (E,Σ,μ) و (E',Σ',μ') فضائي قياس σ-منتهيين.
أثبت أنّ $(\mu\otimes\mu')^*(A\times B)=\mu^*(A)\mu'^*(B)$ محققة من أجل كلّ مجموعة جزئية $A\times B$ $(\mu\otimes\mu')^*$-قابلة للقياس.

06 ليكن $E=E'=\mathbb{N}^*$، $\Sigma=\Sigma'=\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ و $\mu=\mu'$=قياس العدّ μ_c. نعرّف $f:\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$ كالآتي

$$f(x,y)=\begin{cases}1-e^{-x}, & y-x=1\\ -1+e^{-x}, & x-y=1\\ 0, & y-x\neq 1\ \&\ x-y\neq 1\end{cases}$$

تَحقّق من صِحّة مبرهنة فوبنيه أو من عدمها من أجل هذه المعطيات.

07 أحسب التكامل التالي

$$\int_{[0,\pi/2]}\int_{[0,\pi/2]}\frac{\sin^y x}{\sin^y x+\cos^y x}\,dxdy.$$

(نعني هنا بالكتابة $(.)^{y}$ الأس y وليس مقطع الدالة)

08 ليكن α و β عددين حقيقيين بحيث $0\le\alpha<\beta$ ولتكن

$$f:E=[0,1]\times[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$$

معرفة بـ $f(x,y)=x^{y}$. نزوّد E بالعشيرة البوريلية ونعتبر قياس الضرب $m\otimes m$ على هذه الأخيرة (حيث m قياس لوبيغ على $\mathbb{R}$).

أ. أثبت أنّ f قابلة للجمع على E،

ب. استنتج قيمة التكامل $\int_{[0,1]}\frac{x^{\beta}-x^{\alpha}}{\ln x}dx$.

09 ليكن (E,Σ,μ) فضاء قياس منتهيا و $f\in\mathcal{M}^{+}(E,\Sigma)$.

أ) أثبت أنّ $A=\{(x,y)\in E\times\mathbb{R}^{+}:f(x)\ge y\}\in\Sigma\otimes\mathcal{L}_{\mathbb{R}^{+}}$.

ب) بحساب التكامل $\int\chi_{A}d(\mu\otimes m)$ بطريقتين مختلفتين أثبت أنّ

$$\int_{E}f\,d\mu=\int_{0}^{\infty}\mu(\{f\ge y\})dy.$$

ج) نفرض الآن أنّ (E,Σ,μ) فضاء قياس اختياري، $f\in\mathcal{M}(E,\Sigma)$ و $1\le p<\infty$.

ه) أثبت أنّ $|f|^{p}$ دالة قابلة للمكاملة إذا وإذا فقط كانت الدالة $y\mapsto y^{p-1}\mu(\{|f|>y\})$ (ل)-قابلة للمكاملة على $[0,+\infty)$.

أثبت أنّ $\int_{E}|f|^{p}d\mu=p\int_{0}^{\infty}y^{p-1}\mu(\{x:|f(x)|>y\})dy$.

10 أحسب التكامل $\int_{E}f\,d(m\otimes m)$، حيث $f(x,y)=\frac{1}{(1+y)(1+x^{2}y)}$ و $E=]0,+\infty[\times]0,+\infty[$. استنتج قيمة التكامل $\alpha=\int_{0}^{\infty}\frac{\ln x}{x^{2}-1}dx$.

بملاحظة أنّ $\alpha=2\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{x^{2}-1}dx$، احسب مجموع السلسلة $\sum_{n\ge1}\frac{1}{n^{2}}$.

11 أحسب التكامل $\int_{A\times B}y\sin x\,e^{-xy}dxdy$ من أجل المجموعة التالية: $A\times B=]0,\infty[\times]0,1[$.

12 ليكن $([0,1],\mathcal{B}([0,1]),m)$ و $([0,1],\mathcal{P}([0,1]),\nu)$

حيث m قياس لوبيغ و ν قياس العدّ على $\mathcal{P}([0,1])$. نضع $\Delta=\{(x,x),\ x\in[0,1]\}$.

1) أثبت أنّ القياس ν ليس σ-منتهيا .

2) أثبت أنّ χ_Δ عنصر من

$\mathcal{M}^+\left([0,1]\times[0,1],\mathcal{B}([0,1])\otimes\mathcal{P}([0,1])\right)$.

3) بيّن أنّ

$$\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]}\chi_\Delta(x,y)d\nu(y)\right)dm(x)\neq\int_{[0,1]}\left(\int_{[0,1]}\chi_\Delta(x,y)dm(x)\right)d\nu(y)$$

أين يكمن الخلل إذن ؟

13 ليكن $J=[0,1]$، $(E,\Sigma,\mu)=(J\times J,\mathcal{B}(J\times J),m\otimes m)$ و $f:E\to\mathbb{R}$ معرّفة بـ

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0)\\ \frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}.$$

أحسب التكاملين المكرّرين. استنتج أنّ $\int_E|f|d(m\otimes m)=+\infty$.

14 ليكن $J=[-1,1]$، $(E,\Sigma,\mu)=(J\times J,\mathcal{B}(J\times J),m\otimes m)$ و $f:E\to\mathbb{R}$ دالة معرّفة بـ

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)=(0,0)\\ \frac{xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}, & (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

أ. أثبت أنّ التكاملين المكرّرين متساويان.

ب. بيّن أنّ التكامل $\int_{J\times J}f\,d(m\otimes m)$ غير موجود.

15 أثبت أنّ

$$\int_0^1\left(\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}dx\right)dy=\frac{-1}{2} \quad \text{و} \quad \int_0^1\left(\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}dy\right)dx=\frac{1}{2}.$$

أين يكمن الخلل؟

16 بيّن أنّ $xe^{-x^2(1+y^2)} \in \mathfrak{L}^1([0,+\infty[\times[0,+\infty[)$.

17 أدرس قابليّة التكامل لدى الدالة $f: E =]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ المعرّفة بـ

$$f(x,y) = \frac{1}{(ax+by)^p}،$$

حيث $a,b > 0$ و $p \in \mathbb{R}$.

أحسب التكامل $\int_E f\, d(m \otimes m)$.

18 لتكن $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ معرّفة بـ $f(x,y) = \sin x\, e^{-xy}$.

1. أثبت أنّ $\int_{]0,n[\times]0,\infty[} |f| d(m \otimes m) < +\infty$ ، $(\forall n \geq 1)$.

2. أحسب التكامل $\int_{]0,n[} \sin x\, e^{-xy}\, dm(x)$ من أجل كلّ $y \in]0,+\infty[$.

3. استنتج قيمة التكامل $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

19 لتكن $f: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ دالة معرّفة بـ $f(x,y) = \sin x\, e^{-xy^2}$.

1) تأكّد من أنّ $\int_{]0,n[\times]0,\infty[} |f| d(m \otimes m) < +\infty$ ، $(\forall n \geq 1)$.

2) أثبت أنّ $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$.

20 لتكن E مجموعة غير قابلة للعد. نضع

$\Gamma = \{A \subset E : |A| = 1\}$ و $\Lambda = \{A \times B \subset E^2 : |A| = |B| = 1\}$.

(على الترتيب، أسرتا المجموعات أحادية العنصر في E و E^2)

بيّن أنّ $\sigma(\Lambda) \subsetneq \sigma(\Gamma) \otimes \sigma(\Gamma)$.

<u>مساعدة</u>: اعتبر العنصر $\{a\} \times E$، حيث $a \in E$، مع الملاحظة أنّ

$\sigma(\Gamma) = \{A \subset E :$ قابلة للعد A^c أو $A\}$.

21 لتكن $\Sigma = \mathcal{B}([a,b])$ و $.\Sigma' = \mathcal{B}([c,d])$

أثبت أنّ من أجل كلّ دالة متّصلة $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ فإنّ

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy\,.$$

22 ليكن (E,Σ,μ) و (E',Σ',μ') فضائي قياس σ-منتهيين، ولتكن $f\in\mathcal{L}^1(E,\Sigma,\mu)$، $g\in\mathcal{L}^1(E',\Sigma',\mu')$ و $h:E\times E'\to\mathbb{R}$

بحيث $.h(x,y)=f(x)g(y)$

أثبت أنّ $h\in\mathcal{L}^1(E\times E',\Sigma\otimes\Sigma',\mu\otimes\mu')$

و $.\int_{E\times E'} h\,d(\mu\otimes\mu') = \left(\int_E f\,d\mu\right)\left(\int_{E'} g\,d\mu'\right)$