3

الفصل الثالث

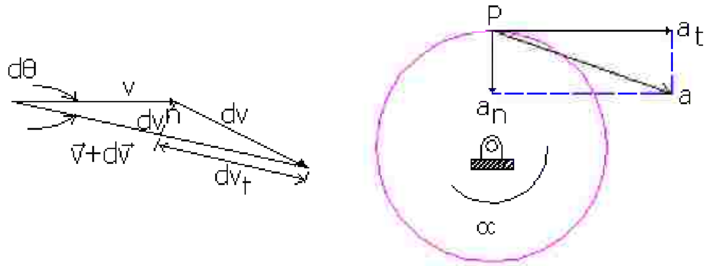
Acceleration in mechanisms العجلات

1.3 مقدمة

عند حركة نقطة P بعجلة زاوية α فإن العجلة اللحظية للنقطة P يمكن تقسيمها إلى مركبتين، مركبة مماسية a_t وأخرى عمودية a_n حيث تساوي العجلة اللحظية للنقطة P $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$ (شكل 3-1) أ.

المركبة العمودية للعجلة:

$$a_n = V\,\omega = \frac{V^2}{r} = r\,\omega^2$$



شكل (3-1)

حيث:

a_n : المركبة العمودية للعجلة، قدم / ث^2 أو م / ث^2.

V : السرعة اللحظية، قدم / ث أو م / ث.

r : نصف القطر، قدم أو م.

ω : السرعة الزاوية، rad/sec.

المركبة المماسية للعجلة:

$$a_t = r\,\alpha$$

حيث :

α : العجلة الزاوية rad / sec^2.

$$1\,rev = 2\,\pi\,rad$$

$$\omega = \frac{2\pi\,n}{60}$$

حيث:

ω : السرعة الزاوية rad/sec.

n : السرعة الزاوية rpm (دورة لكل دقيقة)

$$V = \frac{2\pi\ r\,n}{60}$$

حيث :

V : السرعة اللحظية ft/sec، أو م/ ث.

r : نصف القطر ft، أو م.

n : السرعة الزاوية للجسم rpm.

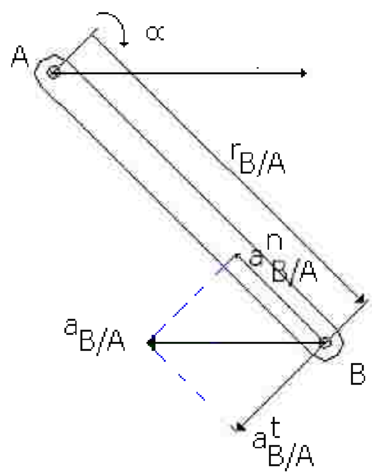
من المهم جداً دراسة العجلة في الآليات، فالإجهادات المتولدة تتناسب خطياً مع هذه العجلة (F=ma). فعلى سبيل المثال وجد أن الإجهادات المتولدة على ذراع التوصيل والمحامل نتيجة العجلة أكبر من تلك المتولدة نتيجة ضغط الغازات المحترقة في آلات الاحتراق الداخلي. وبالتالي من المهم التحليل الشامل للعجلات في الآليات عند دراسة هذه الإجهادات.

سيتم هنا دراسة طريقة العجلة النسبية والتي تركز على الافتراضيات التالية:

- جميع الحركات لحظية.
- يمكن افتراض الحركة اللحظية كحركة دورانية خالصة.

- يمكن تحليل العجلة بشكل سهل عند تحويلها إلى مركبتين أفقية وعمودية.
- يمكن حساب السرعة المطلقة والنسبية للنقاط المختلفة.

يوضح الشكل (2-3) وصلة بها نقطتين B, A غير ثابتتين. وتدور بعجلة زاوية α لهذه الوصلة؛ وبالتالي فإن العجلة اللحظية $a_{B/A}$ موضحة بالشكل.



شكل (2-3)

العجلة العمودية $a^n_{B/A}$ تكون في اتجاه النقطة A، $a^t_{B/A}$ عمودية على الخط الواصل بين النقطتين.

$$a^n_{B/A} = \frac{\left(V_{B/A}\right)^2}{r_{B/A}}$$

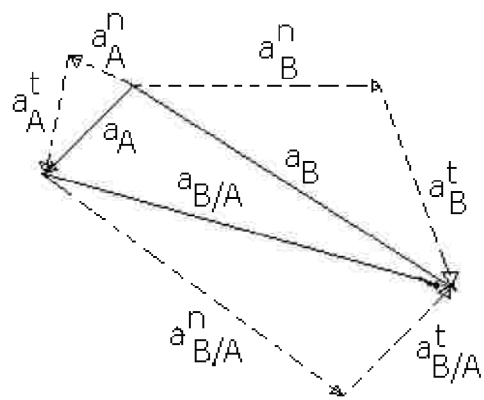
$$a^t_{B/A} = r_{B/A}\ \alpha$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}^n_B + \vec{a}^t_B = \vec{a}^n_A + \vec{a}^t_A + \vec{a}^n_{B/A} + \vec{a}^t_{B/A}$$

2-3 خطوات الحل

يمكن استخدام المعادلة السابقة في حل مسائل العجلة، وعادة يمثل الطرف الأيسر للمعادلة الجزء المجهول بينما الطرف الأيمن معلوم أو يمكن حسابه ويمكن تمثيل هذه المعادلة في الشكل (3-3).



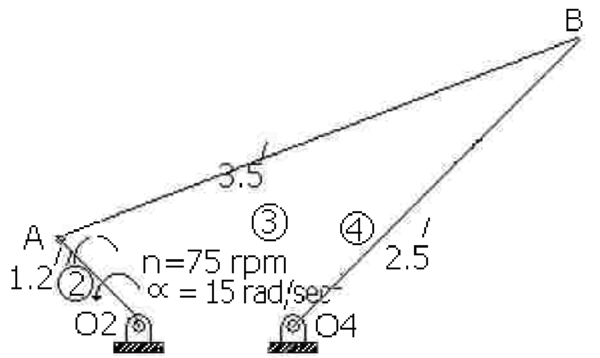
شكل (3-3)

إن الخطوط الرئيسية هي إعادة ترتيب لمخطط السرعة. غالباً، الاتجاه يكون معلوماً لجميع المركبات كما يمكن حساب قيم هذه المركبة للعجلة المعلومة.

وسيتم توضيح خطوات الحل ببعض الأمثلة.

مثال 3-1

يوضح الشكل (3-4) آلية رباعية القضبان، المرفق 2 يدور عكس عقارب الساعة بمعدل 75rpm وعجلته تتناقص بمعدل $15 rad/sec^2$. أوجد عجلة النقطتين B,A والسرعة والعجلة الزاويتين للوصلتين 3، 4.



شكل (4-3)

الحل :

- ارسم مخطط السرعة كما موضح بالشكل (5-3)أ.

لرسم مخطط السرعة احسب السرعة الخطية للنقطة A.

$$\omega_2 = \frac{2\pi\ n}{60} = \frac{6.26 \times 75}{60} = 7.85 \quad rad/_{\sec}$$

$$V_A = r_A \omega_2 = 1.2 \times 7.85 = 9.4 \quad ft/_{\sec}$$

- ✧ ارسم V_A من نقطة الأصل o.
- ✧ ارسم V_B (اتجاهها) من الأصل ($\perp$ 4).
- ✧ ارسم اتجاه $V_{B/A}$ من نهاية المتجه V_A ($\perp$ 3).
- ✧ التقاطع يوضح قيمة كل سرعة.

- اكتب معادلة العجلة للنقطة B.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,t} = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,t} + \vec{a}_{B/A}^{\,n} + \vec{a}_{B/A}^{\,t}$$

- احسب مقدار واتجاه كل متجه.

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{r_B} = \frac{15^2}{2.5} = 90 \quad {ft}/{sec^2} \qquad (// \quad link\ 4)$$

$a_B^t = r_B \alpha_4$ (معلومة الاتجاه فقط ⊥ الوصلة 4)

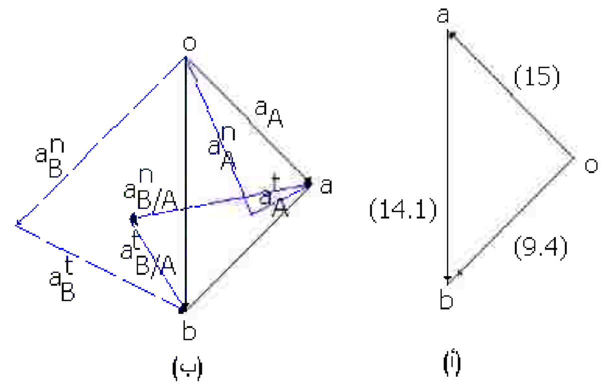
$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_A} = \frac{9.4^2}{1.2} = 73.7 \quad {ft}/{sec^2} \qquad (// \quad link\ 2)$$

$$a_A^T = r_A \alpha_2 = 1.2 \times 15 = 18 \quad {ft}/{sec^2} \qquad (\perp \quad link\ 2)$$

$$a_{B/A}^n = \frac{\left(V_{B/A}\right)^2}{r_{B/A}} = \frac{(14.1)^2}{3.5} = 56.8 \quad {ft}/{sec^2} \qquad (// \quad link\ 3)$$

$a_{B/A}^t = r_{B/A} \alpha_3$ (معلومة الاتجاه فقط ⊥ الوصلة 3)

- أنشئ مخطط العجلة شكل (3-5) ب لإيجاد قيمة a_B .
  - ✧ ارسم a_B^n من النقطة o (// الوصلة 4).
  - ✧ من نهاية a_B^n ارسم خطاً عمودياً بطول غير معلوم يمثل اتجاه a_B^t مجهول القيمة.
  - ✧ من النقطة o، ارسم a_A^n (// للوصلة 2).
  - ✧ من نهاية a_A^n وعمودياً عليه، ارسم a_A^t . يمكن الآن إيجاد السرعة a_A ؛ وتساوي 76 قدم/ ث.
  - ✧ من نهاية المتجه a_A ارسم المتجه $a_{B/A}^n$.
  - ✧ من نهاية المتجه $a_{B/A}^n$ وعمودياً عليه ارسم المتجه $a_{B/A}^t$ بطول غير محدد.
  - ✧ أوجد قيمة a_B والمساوية لـ 120 قدم / ث^2 .
  - ✧ تقاطع المتجهين يعطي قيمة a_B .



شكل (5-3)

- احسب العجلات والسرعات الزاوية المطلوبة.

$$\omega_3=\frac{V_{B/A}}{r_{B/A}}=\frac{14.1}{3.5}=4.03\quad rad/sec$$

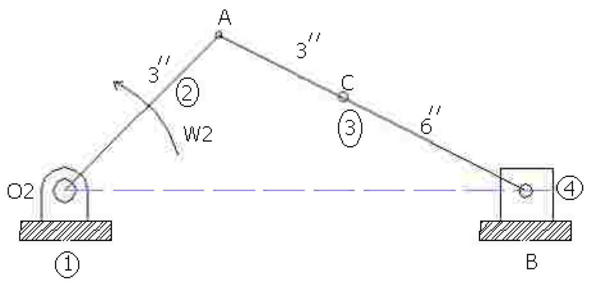
$$\alpha_3=\frac{a^t_{B/A}}{r_{B/A}}=\frac{51}{3.5}=14.6\quad rad/sec^2$$

$$\omega_4=\frac{V_B}{r_B}=\frac{15}{2.5}=6\quad rad/sec$$

$$\alpha_4=\frac{a^t_B}{r_B}=\frac{79}{2.5}=31.6\quad rad/sec^2$$

مثال 2-3

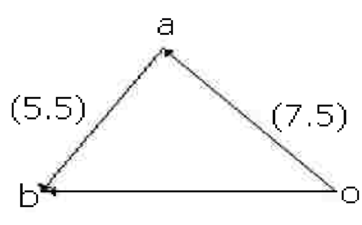
في الشكل (3–6)، المرفق 2 يدور عكس عقارب الساعة بسرعة زاوية منتظمة 30rad/sec. أوجد العجلة الخطية للنقاط C, B, A وكذلك السرعة والعجلة الزاويتين للوصلة 3.



شكل (6-3)

الحل

- ارسم مخطط السرعة، شكل (7-3).



شكل (7-3)

$$V_A = r_A\omega_2 = \frac{3}{12}\times 30 = 7.5 \quad {ft}\!\!\diagup_{sec} \quad (\perp 2)$$

$$V_B \quad (// \, 4)$$

$V_{B/A}$ معلومة الاتجاه $(\perp BA)$

- اكتب معادلة العجلة للنقطة B.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,t} + \vec{a}_{B/A}^{\,n} + \vec{a}_{B/A}^{\,t}$$

النقطة B على المنزلق وعجلتها a_B معلومة الاتجاه

$$a_B^n = \frac{V^2}{r} = \frac{V^2}{\infty} = 0$$

وبالتالي : $a_B = a_B^t$.

- احسب قيم واتجاهات مركبات العجلة.

معلومة الاتجاه (// مسار المنزلق) = a_B

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_A} = \frac{(7.5)^2}{3/12} = 225 \quad ft/\sec^2 \qquad (// \quad link\ 2)$$

$$a_A^t = r_A \alpha_2 = \left(3/12\right) \times 0 = 0$$

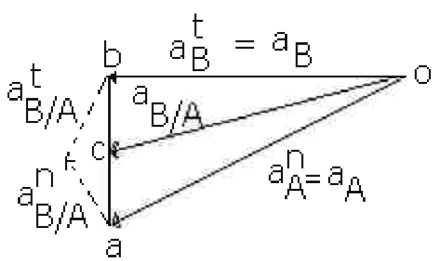
$$\therefore a_n = a_A^n$$

$$a_{B/A}^n = \frac{\left(V_{B/A}\right)^2}{r_{B/A}} = \frac{(5.5)^2}{9/12} = 40.3 \quad ft/\sec^2 \qquad (// \quad link\ 3)$$

$$\alpha_3 = \frac{a_{B/A}^t}{r_{B/A}} = \frac{51}{3.5} = 14.6 \quad rad/\sec^2 \qquad c\ w$$

معلومة الاتجاه (// للوصلة 3) $a_{B/A}^n = r_{B/A}\alpha_3$.

- أنشئ مخطط العجلة الموضح بالشكل (2-8) لإيجاد a_B .



شكل (3-8)

✧ حدد اتجاه a_B ($a_B = a_B^t$) من خلال نقطة الأصل o.

✧ مجدداً، من نقطة الأصل ارسم a_A ($a_A = a_A^n$).

✧ من نهاية a_A ، ارسم $a_{B/A}^n$.

✧ من نهاية $a^n_{B/A}$ وعمودياً عليها ، رسم اتجاه $a^t_{B/A}$ ، نقطة تقاطع هذا الخط مع اتجاه a_B يعطي a_B .

✧ حدد موقع النقطة C كما تم توضيحه في السابق، حيث تقع النقطة C على صورة سرعة الوصلة 3، $\frac{ac}{ab}=\frac{AC}{AB}$.

- احسب السرعة والعجلة الزاويتين للوصلة 3.

$$\omega_3=\frac{V_{B/A}}{r_{B/A}}=\frac{5.5}{9/12}=7.3\quad rad/\sec\qquad (c\ w)$$

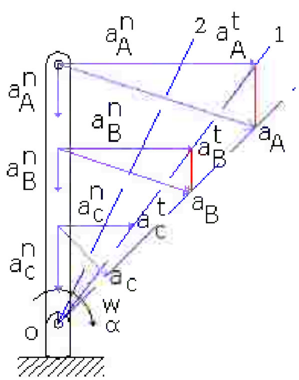
$$\alpha_3=\frac{a^t_{B/A}}{r_{B/A}}=\frac{153}{9/12}=204\quad rad/\sec^2\qquad (c\,c\,w)$$

3-3 تناسب العجلة proportionality of acceleration

من المهم توضيح أن عجلة نقطة تدور حول جسم تتناسب مع القطر. يمكن ملاحظة ذلك من معادلة مركبتي العجلة:

$$a^n=r\,\omega^2\quad ,\quad a^t=r\,\alpha$$

ويوضح الشكل (9-3) تناسب العجلة مع نصف القطر.



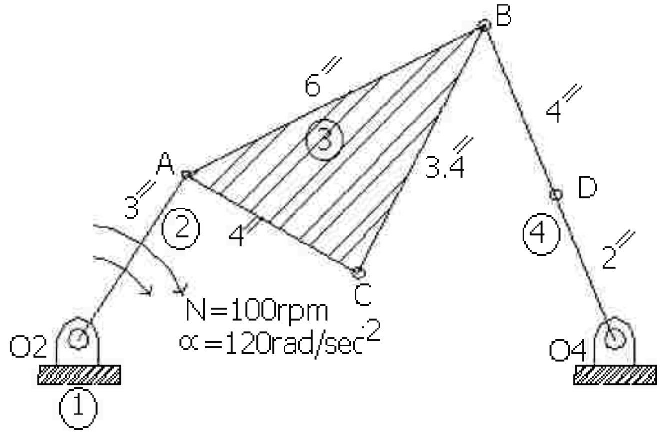
شكل (9-3)

يمثّل الخط 1 خط التناسب للمركبات المماسية للعجلة عند النقاط المختلفة الموجودة على الوصلة (النقاط A,B,C تناظرها المركبات a_C^t , a_B^t , a_A^t) بينما الخط 2 يمثّل خط التناسب للمركبات العمودية للعجلة عند النقاط المختلفة A,B,C.

للوصلات القائمة، المركز اللحظي للعجلة يختلف عن المركز اللحظي للسرعة. والطرق المتبعة لإيجاد المركز اللحظي للعجلة تختلف عن تلك المثبتة لإيجاد المركز اللحظي للسرعة.

مثال 3-3

في الشكل (3-10)، المرفق 2 يدور في اتجاه عقارب الساعة بمعدل 100rpm؛ وسرعته تتزايد بمعدل 120rad/sec^2. أوجد العجلة الخطية للنقاط C,B,A وكذلك السرعة الزاوية للوصلة 3، 4.



شكل (3-10)

الحل:

- ارسم مخطط السرعة شكل (3-11)أ.

$$\omega_2 = \frac{2\pi n}{60} = \frac{6.28 \times 100}{60} = 10.5 \ \text{rad}/\text{sec}$$

$$V_A = r_A \omega_2 = \frac{3}{12} \times 10.5 = 2.62 \ \text{ft}/\text{sec}$$

$$V_B \quad (\perp \text{link } 4)$$
$$V_{B/A} \quad (\perp BA)$$
$$V_{C/A} \quad (\perp CA)$$
$$V_{C/B} \quad (\perp CB)$$

- اكتب معادلة عجلة النقطة B.

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$
$$\vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,t} = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,t} + \vec{a}_{B/A}^{\,n} + \vec{a}_{B/A}^{\,t}$$

- احسب قيم واتجاهات المقادير الموجودة في المعادلة.

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{r_B} = \frac{(1.3)^2}{6/12} = 3.38 \quad ft/sec^2 \qquad (// \quad \text{link } 4)$$

$$a_B^t = r_B \alpha_4 \qquad (\perp \quad \text{link } 4)$$

$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_A} = \frac{(2.62)^2}{3/12} = 27.44 \quad ft/sec^2 \qquad (// \quad \text{link } 2)$$

$$a_A^t = r_A \alpha_2 = \left(3/12\right)(120) = 30 \quad ft/sec^2 \qquad (\perp \quad link\ 2)$$

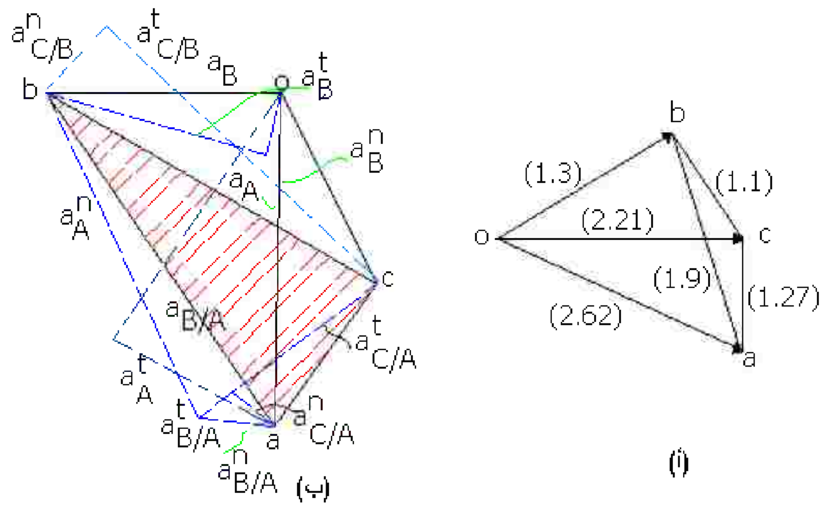
$$a_{B/A}^n = \frac{\left(V_{B/A}\right)^2}{r_{B/A}} = \frac{(1.9)^2}{6/12} = 7.22 \quad ft/sec^2 \qquad (// \quad to \quad BA)$$

$$a_{B/A}^t = r_{B/A} \alpha_3 \qquad (\perp \quad BA)$$

- أنشئ مخطط العجلة لإيجاد a_B ؛ شكل (3-11) ب بإتباع الخطوات التالية:

  ✧ ارسم a_B^n من نقطة الأصل o (// للوصلة 4).

  ✧ من نهاية a_B^n ، ارسم خطاً عمودياً بطول غير محدد ليمثل a_B^t .



شكل (11-3)

- ✧ مرة أخرى، ومن النقطة o، ارسم a_A^n (//) للوصلة 2).
- ✧ من نهاية a_A^n وعمودياً عليها أرسم a_A^t، وبالتالي أوجدت a_A.
- ✧ من نهاية a_A، ارسم $a^n_{B/A}$ (// لـ BA).
- ✧ من نهاية $a^n_{B/A}$ وعمودياً عليها ارسم خطاً بطول غير محدد يمثل $a^t_{B/A}$، تقاطع هذا الخط مع a_B^t يعطي a_B.

- اكتب معادلة عجلة النقطة C.

$$\vec{a}_c = \vec{a}_A + \vec{a}_{c/A}$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_B + \vec{a}_{c/B}$$

أو

$$\vec{a}_c = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{c/A} + \vec{a}^t_{c/A}$$

- احسب قيم واتجاهات المقادير الموجودة بمعادلة العجلة.

$$a^{n}_{C/A} = \frac{\left(V_{C/A}\right)^2}{r_{C/A}} = \frac{(1.27)^2}{4/12} = 4.83 \quad ft/sec^2 \qquad (// \quad to \quad CA)$$

$$a^{t}_{C/A} = r_{C/A}\,\alpha_3 = r_{C/A}\left(\frac{a^{t}_{B/A}}{r_{B/A}}\right) = \left(4/12\right)\left(\frac{41.5}{4/12}\right) = 27.8 \quad ft/sec^2 \qquad (\perp \quad BA)$$

- أنشئ مخطط الإزاحة لهذه العجلات.
- عجلة النقطة D على الوصلة 4 يمكن إيجادها من العلاقة:

$$\frac{O_4 D}{O_4 B} = \frac{od}{ob}$$

- احسب السرعة والعجلة الزاويتين للوصلة 3.

$$\omega_3 = \frac{V_{B/A}}{r_{B/A}} = \frac{1.9}{6/12} = 3.8 \quad rad/sec \qquad (c\,w)$$

$$\alpha_3 = \frac{a^{t}_{B/A}}{r_{B/A}} = \frac{41.5}{6/12} = 83 \quad rad/sec^2 \qquad (c\,c\,w)$$

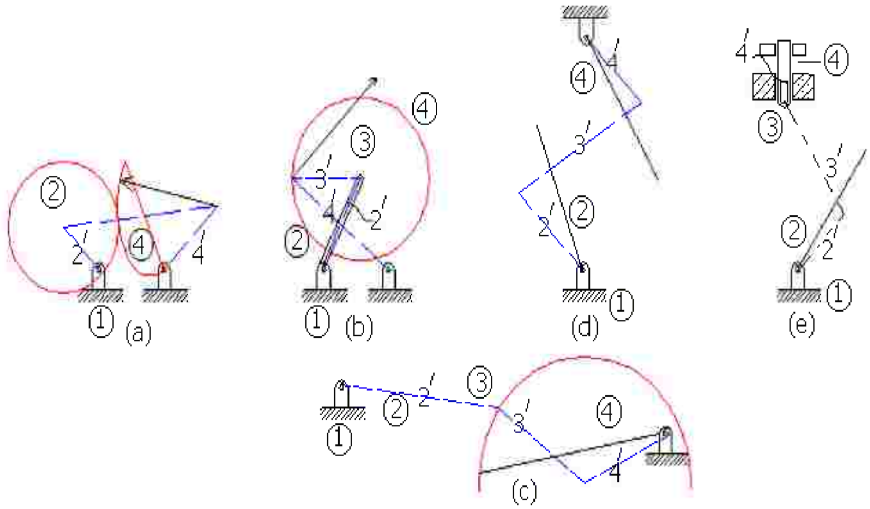
$$\omega_4 = \frac{V_B}{r_B} = \frac{1.3}{6/12} = 2.6 \quad rad/sec \qquad (c\ w)$$

$$\alpha_4 = \frac{a^{t}_{B}}{r_B} = \frac{17.2}{6/12} = 34.4 \quad rad/sec^2 \qquad (c\,c\,w)$$

4-3 الوصلات المكافئة Equivalent linkages

إن تحليل العجلة للعديد من الوصلات المتدحرجة يمكن تبسيطه بشكل كبير عن طريق إنشاء ما يسمى بالوصلات المكافئة؛ والتي تقوم بتحويل طور لحظي معين لمثل هذه الآلية إلى وصلات مسمارية يكون فيها النقاط المعلومة والمجهولة على نفس الوصلة.

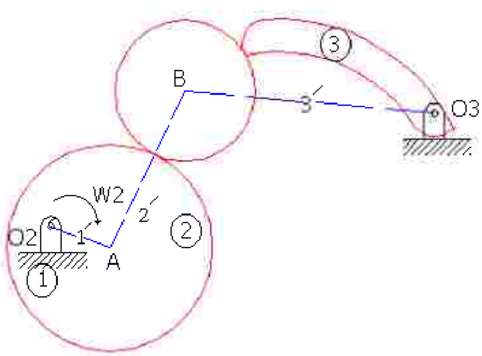
يوضح الشكل (12-3) بعض الأمثلة لهذه الوصلات والوصلات المكافئة لها والموضحة بخط متقطع. لاحظ أنه في كل حالة الوصلة الحرة للوصلات المكافئة ترسم على امتداد العمودي المشترك للسطحين المتلامسين ويمتد حتى مركز منحني كلا السطحين.



شكل (12-3)

مثال 4-3

في الشكل (13-3) a الحدبة (الوصلة 2) تدور عكس عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة مقدارها 120rad/sec. احسب السرعة والعجلة الزاويتين للوصلة 3.



شكل (13-3)

الحل:

$$r_A = 1' \quad , \quad r_{B/A} = 2' \quad , \quad r_B = 3'$$

- ارسم الوصلة المكافئة، شكل (3-13).
- ارسم مخطط السرعة، شكل (3-14)أ.

$$V_A = r_A \omega_2 = \frac{1}{12} \times 120 = 10 \quad ft/\sec \quad (\perp\ link\ 2')$$

$$V_B \quad (\perp\ link\ 3')$$

$$V_{B/A} \quad (\perp\ link\ 4')$$

- اكتب معادلة العجلة a_B .

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$

$$\vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,t} = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,t} + \vec{a}_{B/A}^{\,n} + \vec{a}_{B/A}^{\,t}$$

- احسب قيمة واتجاه كل متغير.

$$a_B^n = \frac{V_B^2}{r_B} = \frac{6.7^2}{3/12} = 179.6 \quad ft/\sec^2 \qquad (\perp \quad link\ 3')$$

$$a_B^t \qquad (\perp \quad link\ 3')$$

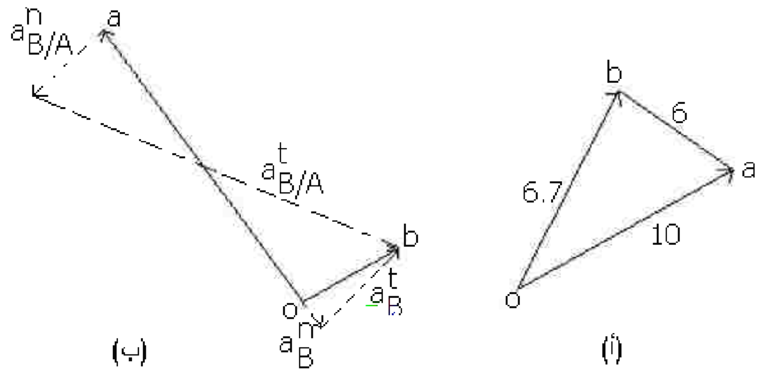
$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_A} = \frac{10^2}{1/12} = 1200 \quad ft/\sec^2 \qquad (// \quad link\ 2')$$

$$a_A^t = 0 \quad (\alpha_2 = 0) \Rightarrow a_A = a_A^n$$

$$a_{B/A}^n = \frac{\left(V_{B/A}\right)^2}{r_{B/A}} = \frac{6^2}{2/12} = 216 \quad ft/\sec^2 \qquad (// \quad link \quad 2')$$

$$a_{B/A}^t \qquad (\perp \quad link\ 4')$$

- أنشئ مخطط العجلة، شكل (3–14) ب.



شكل (3-14)

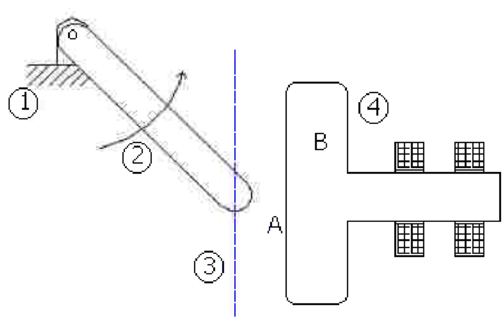
- احسب السرعة والعجلة الزاويتين للوصلة 3.

$$\omega_3 = \frac{V_B}{r_B} = \frac{6.7}{3/12} = 26.8 \quad rad/sec \qquad (c\,w)$$

$$\alpha_3 = \frac{a_B^t}{r_B} = \frac{70}{3/12} = 280 \quad rad/sec^2 \qquad (c\,c\,w)$$

مثال 3-5

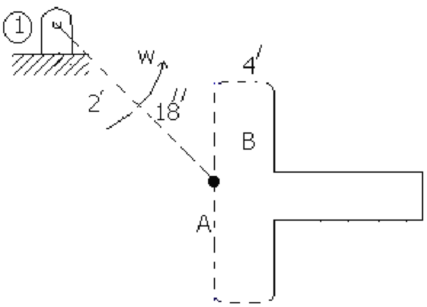
في الشكل (3-15) المرفق يدور عكس عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة مقدارها 20rad/sec. المطلوب إيجاد سرعة التابع وعجلته.



شكل (3-15)

الحل:

- أنشئ الوصلة المكافئة. النقطة A على الوصلة 2 ترسم موازياً على الخط المتقطع شكل (3-16).



شكل (3-16)

- ارسم مخطط السرعة؛ شكل (3-17) أ.

$$V_A = r_A\omega_2 = 1.5 \times 20 = 30 \quad {ft}/{sec}$$
$$V_B \quad (// \; part\ of\ link\ 4)$$
$$V_{B/A} \quad (// \; face\ of\ 4')$$

- اكتب معادلة العجلة .

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$$
$$\vec{a}_B^{\,n} + \vec{a}_B^{\,t} = \vec{a}_A^{\,n} + \vec{a}_A^{\,t} + \vec{a}_{B/A}^{\,n} + \vec{a}_{B/A}^{\,t}$$

- احسب قيمة واتجاهات المتغيرات.

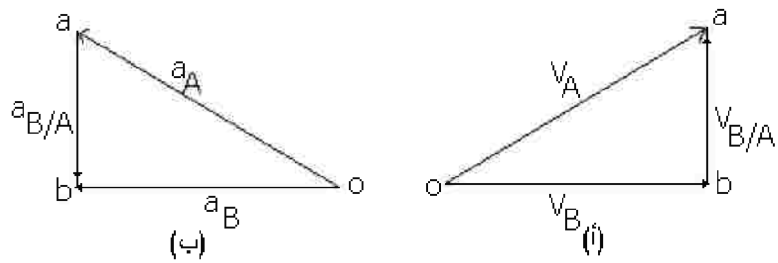
$$a_A^n = \frac{V_A^2}{r_A} = \frac{30^2}{1.5} = 600 \quad {ft}/{sec^2} \qquad (// \quad link\ 2)$$
$$a_A^t = 0 \quad (\omega_2\ \mathrm{constant})$$
$$\Rightarrow a_A = a_A^n$$

$a_{B/A}^n = 0$ (لا توجد حركة في الاتجاه العمودي)

$a_{B/A}^t$ (اتجاه رأسي)

$$a_{B/A} = a_{B/A}^t$$

- ارسم مخطط العجلة، شكل (3-17) ب.



شكل (3-17)

3-5 مركبة كوريوليس للعجلة Coriolis Acceleration Component

جميع الأمثلة التي تم تحليلها سابقاً تتضمن نقطتين منفصلتين على نفس الوصلة الجاسئة؛ وتم إيجاد العجلة باستخدام العلاقة $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$. وتجدر الإشارة إلى أن هذه العلاقة تستخدم لإيجاد العجلة النسبية بين أي نقطتين.

ولكن عندما تكون النقطتين محل الدراسة متطابقتين على وصلتين مختلفتين وإحدى هاتين النقطتين، والموجودة على وصلة، يمكن أن تأخذ مساراً على الوصلة الأخرى وهذه الوصلة تدور فإنه يجب إضافة مركبة أخرى للعجلة يطلق عليها Coriolis of acceleration Component. والعجلة النسبية بين النقطتين في هذه الحالة تعطى بالعلاقة:

$$a_{B/A} = a^n_{B/A} + a^t_{B/A} + 2\, V_{B/A}\,\omega$$

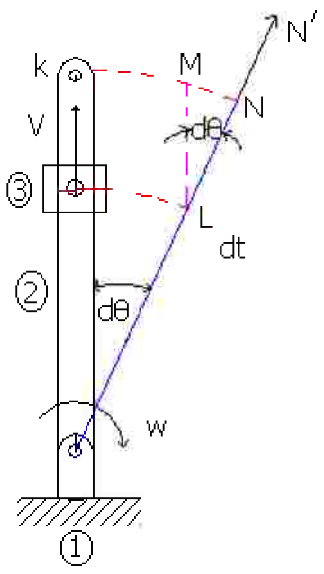
ومن المهم هنا الإشارة إلى القاعدتين المهمتين التاليتين :

- قاعدة 1: اتجاه مركبة كوريوليس هو نفس اتجاه السرعة النسبية $V_{B/A}$ بعد إدارته 90° في اتجاه السرعة الزاوية للوصلة المرتبطة بالمسار .
- قاعدة 2: اكتب معادلة العجلة للنقطة التي تصنع مساراً .

3-5-1 اشتقاق معادلة مركبة كوريوليس Derivatim of the Coriolis Component

في الشكل (3-18) الوصلة 2 تدور مع عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة مقدارها ω، وفي نفس الوقت الوصلة 3 تنزلق على امتداد الوصلة 2 بسرعة خطية ثابتة مقدارها V. بعد فترة زمنية متناهية في الصغر dt ستكون الوصلة 2 قد غيرت موضعها بمقدار dθ. الإزاحة الزاوية للوصلة 2 وحدها تغير موضع الوصلة 3 إلى النقطة L ، بينما تغير الإزاحة الخطية للوصلة 3 وحدها موضع الوصلة 3 إلى النقطة k، هاتين الإزاحتين ينتج عنهما وصول الوصلة 3 إلى الموضع M.

ولكن في الحقيقة، فإن الوصلة 3 بعد مرور زمن dt ستكون قد وصلت إلى النقطة N، وهذا نتج عن عجلة إضافية تسببت في الإزاحة MN، مثل هذه الإزاحة ستكون عمودية على مسار الوصلة 3 وفي اتجاه الدوران، ويطلق على هذه المركبة ((مركبة كوريوليس))؛ وقيمتها 2Vω.



شكل (3-18)

يمكن إيجاد هذه القيمة من العلاقة:

$$d\theta = {ds}/{r}$$
$$or \quad ds = r\ d\theta$$
$$MN = LM\ d\theta$$
$$but \quad ds = \frac{1}{2} a(dt)^2$$
$$or \quad MN = \frac{1}{2} a(dt)^2$$

الحركة الخطية للوصلة 3 نتيجة السرعة الخطية V يمكن إيجادها من العلاقة:

$$\mathrm{LM = V\ dt}$$

بينما الإزاحة الزاوية للوصلة 3 يمكن إيجادها من العلاقة:

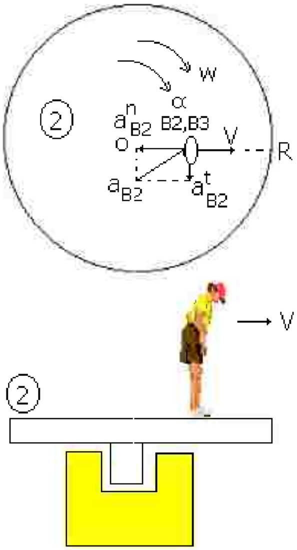
$$d\theta = \omega \quad dt$$

بالتعويض

$$\frac{1}{2} a\ (dt)^2 = V\ dt\ \omega \quad dt$$
$$or \quad a = 2\ V\ \omega$$

ولتخيل هذه المركبة بشكل أكبر، تخيل طفلاً يقف على طاولة دوارة كما موضح بالشكل (19-3)، فإذا كان الطفل B_3 يقف عند النقطة B_2 فإنه سيشعر بعجلة النقطة B_2، و بالتالي فإنه يجب أن يميل عكس اتجاه العجلة a_{B2} ليحمى نفسه من السقوط، وبمعنى آخر فإن العجلة B_3 هي نفس عجلة النقطة B_2 المنطبقة معها.

في حالة بدء الطفل في المشي على امتداد الخط OR في اتجاه النقطة R بسرعة خطية $V_{B3/B2}$ ، فإنه سيشعر بعجلة إضافية تتجه بزاوية °90 على مسار حركته وفى اتجاه الدوران كتعويض لهذه العجلة المضافة، من المفترض أن يميل أكثر في اتجاه الدوران ليمنع سقوطه .

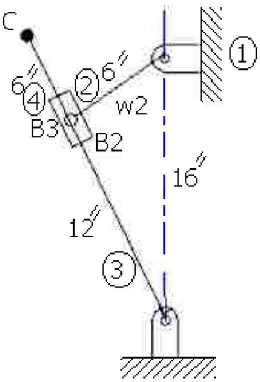


شكل (3-19)

وسيتم توضيح طريقة الحل في مثل هذه المسائل عن طريق المثال التالي.

مثال 3-6

يوضح الشكل (3-20) آلية بها مرفق 2 يدور عكس عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة ω_2 مقدارها 20rad/sec . أوجد عجلة الوصلة 3.

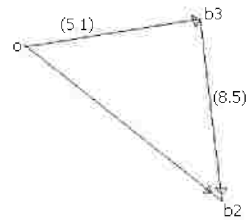


شكل (3-20)

الحل:

اختر نقطة متطابقة B_2 و B_3 على المنزلق حيث تقع النقطة B_3 على الوصلة 3 والنقطة B_2 على الوصلة 2. و بالتالي يمكن التفكير في النقطة B_2 كمسار على الوصلة 3.

- ارسم مخطط السرعة كما موضح بالشكل (3-21).



شكل (3-21)

$$V_{B2} = r_{B2}\omega_2 = \left(\frac{6}{12}\right)(20) = 10 \quad {}^{ft}\!/\!_{sec} \quad (\perp\ link\ 2)$$
$$V_{B3} \quad (\perp\ link\ 3)$$
$$V_{B2/B3}$$

(موازٍ للمسار المتخذ بواسطة B_2 على الوصلة 3)

- أكتب معادلة العجلة بحيث تكون B_2 في الطرف الأيسر للمعادلة. B_2 تنشئ المسار على الوصلة 3.

$$\vec{a}_{B2} = \vec{a}_{B3} + \vec{a}_{B2/B3}$$
$$\vec{a}^{\,n}_{B2} + \vec{a}^{\,t}_{B2} = \vec{a}^{\,n}_{B3} + \vec{a}^{\,t}_{B3} + \vec{a}^{\,n}_{B2/B3} + \vec{a}^{\,t}_{B2/B3} + 2\vec{V}_{B2/B3}\,\omega_3$$

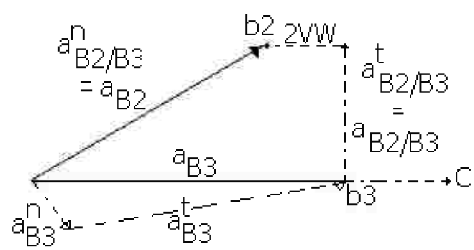
- احسب مقدار و اتجاه كل حد من حدود المعادلة السابقة

$$a^{n}_{B2} = \frac{(V_{B2})^2}{r_{B2}} = \frac{10^2}{6/12} = 200 \quad {}^{ft}\!/\!_{sec^2} \qquad (//\quad link\ 2)$$

$$a^t_{B2}=0\quad(\alpha_2=0)$$
$$\therefore a_{B2}=a^n_{B2}$$
$$a^n_{B3}=\frac{(V_{B3})^2}{r_{B3}}=\frac{5.1^2}{1}=26\quad ft/sec^2\qquad(//\quad link\ 3)$$
$$a^t_{B3}=r_{B3}\alpha_3\qquad(\perp\quad link\ 3)$$
$$a^n_{B2/B3}=\frac{\left(V_{B2/B3}\right)^2}{r_{B2/B3}}=0\qquad\left(r_{B2/B3}=\infty\right)$$
$$a^t_{B2/B3}=r_{B2/B3}\,\alpha_{B2/B3}$$
$$\left(V_{B2/B3}\ \omega_3\right)=2(8.5)(5.1)=86.7\quad ft/sec^2$$
$$\omega_3=\frac{V_{B3}}{r_{B3}}=\frac{5.1}{1}\quad rad/sec\qquad \text{حيث}$$

إن اتجاه مركبة كوريوليوس هو نفس اتجاه السرعة $V_{B2/B3}$ ، و الموازي للمسار الخاص بالنقطة B2 بالنسبة لـ B3 (↘) مداراً بزاوية 90° في اتجاه ω3 أي (↻).

- أنشئ مخطط العجلة، كما موضح بالشكل (3-22) بإتباع الخطوات التالية:



شكل (3-22)

⌘ حدد a_{B2} من النقطة 0.

⌘ من النقطة 0 مجدداً ارسم a^n_{B3} .

⌘ من نهاية a^n_{B3} ارسم اتجاه a^t_{B3} .

※ حيث أن المتجه الأخير غير محدد ، فبالتالي لا يمكن استكمال الحل بنفس الطريقة المستخدمة في الأمثلة السابقة و سيتم الرجوع من النقطة B_2.

※ من نهاية المتجه B_2 ارسم المتجه $2V\omega$.

※ من نهاية المتجه $2V\omega$ ارسم المركبة $a^t_{B2/B3}$ ، نقطة التقاطع ستحدد قيمة a^t_{B3} وبالتالي a_{B3} .

※ أحسب العجلة الزاوية للوصلة 3 من العلاقة:

$$\alpha_3 = \frac{a^t_{B3}}{r_{B3}} = \frac{258}{1} = 258 \quad rad/\sec^2$$

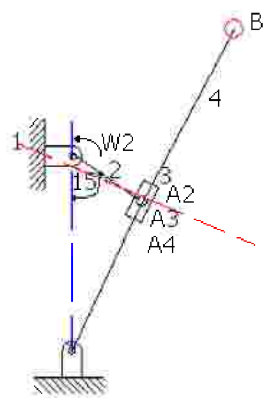
※ يمكن استخدام المتجه ob_3 لإيجاد عجلة النقطة C و ذلك عن طريق امتداد هذا الخط و من العلاقة

$$oc/ob_3 = OC/O_3B_3$$

مثال 3-7

في الشكل (3-23) المرفق 2 يدور بسرعة 60 rpm عكس عقارب الساعة

- أوجد سرعة وعجلة النقطة B.
- أوجد السرعة والعجلة الزاوية للوصلة 4.



شكل (3-23)

الحل:

$$V_{A4} = V_{A2} + V_{A42}$$

- اتجاه V_{A4} عمودي على $A_4 O_4$
- $V_{A2} = \omega_2 (O_2 A_2)$ معلومة القيمة و الاتجاه
- $V_{A4\,A2}$ اتجاهها موازٍ لـ $O_4 A_4$

عن طريق رسم مضلع السرعات يمكن حساب

$$V_{A4} \quad , \quad V_{A4\,A2}$$

وبالتالي حساب سرعة النقطة B و كذلك السرعة الزاوية ω_4 من العلاقة:

$$\omega_4 = \frac{V_{A4}}{O_4 A_4}$$

لحساب العجلات

$$a_{A2} = a_{A4} + a_{A2\,A4}$$
$$a^n_{A2} + a^t_{A2} = a^n_{A4} + a^t_{A4} + a^n_{A2\,A4} + a^t_{A2\,A4} + 2\omega_4 \times V_{A2\,A4}$$

$$\alpha_4 = \frac{a^t_{A4}}{O_4 A_4}$$

الطرق التحليلية لحساب السرعة و العجلة

6-3 الطرق التحليلية لحساب العجلة

بافتراض نقطة تتحرك على امتداد منحنى في فضاء ويعطي موضعها بالمتجه a يمكن إيجاد عجلة هذه النقطة بالعلاقة:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\vartheta}}{dt} = \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$
$$\vec{a} = \ddot{R}_x\,\vec{i} + \ddot{R}_y\,\vec{j} + \ddot{R}_z\,\vec{k}$$

وتعطى العجلة الزاوية بالعلاقة:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\omega}{dt} = \alpha_x \, \vec{i} + \alpha_y \, \vec{j} + \alpha_z \, \vec{k}$$

وعند حركة جسم جاسئ حول نقطة ثابتة فإنه يمكن إيجاد سرعة نقطة على هذا الجسم بالعلاقة:

$$\dot{\vec{R}} = \vec{\vartheta} = \vec{\omega} \times \vec{R}$$

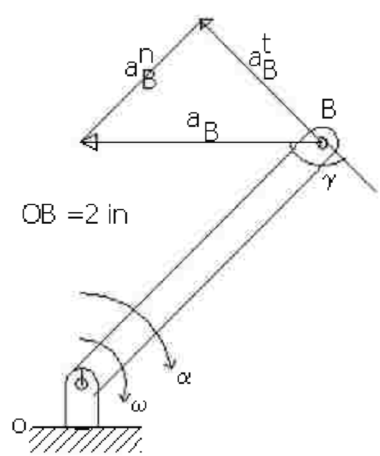
حيث $\vec{R}$ هو متجه من النقطة الثابتة حتى النقطة المراد قياس سرعتها لإيجاد العجلة :

$$\dot{\vec{\vartheta}} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{R}}$$
$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{R} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R})$$

الحد الأول للمعادلة السابقة يمثل العجلة المماسة بينما الحد الثاني يمثل العجلة العمودية.

مثال 3-8

وصلة بطول 2 in تدور بسرعة زاوية 1000 rad/s مع عقارب الساعة، وعجلتها الزاوية $750{,}000 rad/s^2$ عكس عقارب الساعة. أوجد عجلة النقطة B الموضحة على الوصلة، شكل (3-24).



شكل (3-24)

الحل:

$$a_B^n = \omega \times (\omega \times R) = (1000)^2(2) = 2{,}000{,}000 \quad {in}/{s^2} \qquad (O \text{ نحو })$$

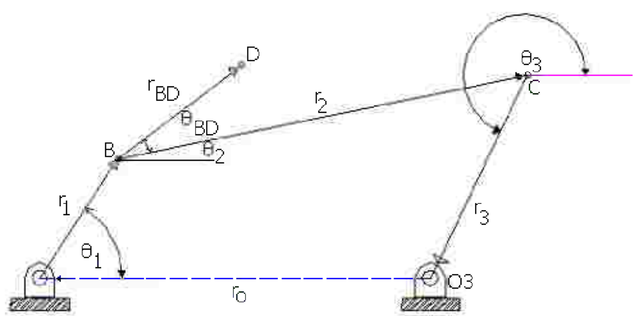
$$a_B^t = \dot{\omega} \times R = -(750{,}000) \times (2) = 1{,}500{,}000 \quad {in}/{s^2} \quad (\perp O)$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^t + \vec{a}_B^n = \sqrt{(a_B^t)^2 + (a_B^n)^2} = 2{,}500{,}000 \quad {in}/{s^2}$$

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{a_B^n}{a_B^t}\right) = 126{,}87^o$$

للآلية رباعية القضبان الموضحة بالشكل (25-3) يمكن كتابة معادلة المتجهات على النحو التالي:

$$\vec{r}_o + \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = 0$$



شكل (25-3)

بالتفاضل يمكن الحصول على العلاقة التالية:

$$\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3 = 0$$

بتفاضل المعادلة السابقة، مع ملاحظة أن أطوال الوصلات ستظل ثابتة يمكن الحصول على :

$$\vec{\alpha}_1 \times \vec{r}_1 + \vec{\omega}_1 \times (\vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1) + \vec{\alpha}_2 \times \vec{r}_2 + \vec{\omega}_2 \times (\vec{\omega}_2 \times \vec{r}_2) + \vec{\alpha}_3 \times \vec{r}_3 + \vec{\omega}_3 \times (\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_3) = 0$$

وهي تكافئ المعادلة:

$$\vec{a}_C^n + \vec{a}_C^t = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^t + \vec{a}_{C/B}^n + \vec{a}_{C/B}^t$$

بافتراض الحركة ستقع في المستوى xy، فإن السرعة الزاوية والعجلة الزاوية سيكون اتجاههما في مستوى z. وبالتالي يمكن كتابة :

$$\vec{\alpha} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \alpha \\ r_x & r_y & 0 \end{vmatrix} = \alpha\left(r_x \vec{j} - r_y \vec{i} \right)$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ r_x & r_y & 0 \end{vmatrix} = \omega \left(r_x \vec{j} - r_y \vec{i} \right)$$

$$\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r} \right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{J} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ \omega\, r_x & \omega\, r_y & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 \left(r_x \vec{j} + r_y \vec{i} \right)$$

وبالتالي من المعادلات السابقة يمكن الحصول على المعادلة:

$$\alpha_1\left(- r_{1y}\vec{i} + r_{1x}\vec{J}\right) - \omega_1^2\left(r_{1x}\vec{i} + r_{1y}\vec{J}\right) + \alpha_2\left(- r_{2y}\vec{i} + r_{2x}\vec{J}\right) - \omega_2^2\left(r_{2x}\vec{i} + r_{2y}\vec{J}\right)$$
$$+ \alpha_3\left(- r_{3y}\vec{i} + r_{3x}\vec{J}\right) - \omega_3^2\left(r_{3x}\vec{i} + r_{3y}\vec{J}\right) = 0$$

ويجب تحقيق المعادلة السابقة بشكل مستقل لكل من $\vec{i}$, $\vec{j}$. بافتراض أن متجه الموضع والسرعة الزاوية والعجلة الزاوية للمرفق 1 معلومة، فإنه يمكن حل معادلات السرعة كما تم إيضاحه سابقاً للحصول على السرعة الزاوية لباقي الوصلات. وبالتالي يمكن كتابة:

$$\alpha_2\ r_{2y} + \alpha_3 r_{3y} = -\alpha_1\ \ r_{1y} - \omega_1^2\ r_{1x} - \omega_2^2\ r_{2x} - \omega_3^2\ r_{3x}$$

وكذلك للمتجه y يمكن كتابة:

$$\alpha_2\ r_{2x} + \alpha_3 rx = -\alpha_1\ \ r_{1x} - \omega_1^2\ r_{1y} - \omega_2^2\ r_{2y} - \omega_3^2\ r_{3y}$$

ويمكن حل هذه المعادلات بواسطة أحد الطرق؛ فمثلاً يمكن استخدام المصفوفة التالية في الحل:

$$\begin{bmatrix} r_{2y} & r_{3y} \\ r_{2x} & r_{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

حيث يمثل a الحد الأيمن للمعادلة الأولى و b الحد الأيمن للمعادلة الثانية في المعادلتين السابقتين.

أخيراً، يمكن حساب العجلة الزاوية لذراع التوصيل والتابع من العلاقات التالية:

$$\alpha_2 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & r_{3y} \\ b & r_{3x} \end{vmatrix} = \frac{a\ r_{3x} - b\ r_{3y}}{D}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} r_{2y} & a \\ r_{2x} & b \end{vmatrix} = \frac{a\ r_{2y} - b\ r_{2x}}{D}$$

حيث:

$$D = \begin{vmatrix} r_{2y} & r_{3y} \\ r_{2x} & r_{3x} \end{vmatrix} = r_{2y}\ r_{3x} - r_{2x}\ r_{3y}$$