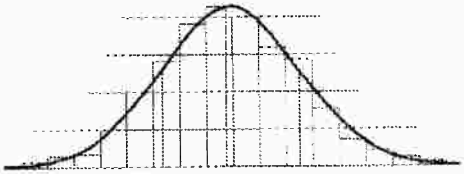

الفصـــــل

13

البدع البييزينية

كانت جمهورية البندقية الهادئة مركز قوة في منطقة البحر المتوسط من القرن الثامن إلى بداية القرن الثامن عشر. سيطرت في ذروتها على معظم الشاطئ الآدرياتيكي وجزر كريت وقبرص، واحتكرت التجارة من الشرق إلى أوروبة. كان يحكمها مجموعة من العائلات النبيلة حافظت على الديموقراطية في ما بينها، وأطلقوا لقب (دوج) doge على الحاكم. لقد حكم البندقية منذ إنشاء الجمهورية سنة 697 إلى أن تم احتلالها من قبل النمسة سنة 1797، نحو 150 حاكماً، دام حكم بعضهم سنة أو أقل، وحكم أحدهم مدة أربع وثلاثين سنة.

ومع موت الحاكم الحالي، تنشغل الجمهورية بالانتخابات المنسقة، فيتم اختيار مجموعة صغيرة مرشحة من بعض أعضاء العائلات النبيلة كبار السن.

يقوم المرشحون بضم

أعضاء إضافيين إليهم في مرحلة الانتخاب الأولى، ومن ثم يتم اختيار القليل من هذه المجموعة. ويستمر هذا لعدة مراحل حتى يتم اختيار الحاكم من قبل المجموعة النهائية من بين هؤلاء المرشحين.

قصر «الدوج» في ذروة القوة الفينيقية

وفي بداية تاريخ الجمهورية، كان يتم اختيار المتحدثين في كل مرحلة عن طريق إعداد مجموعة من الكرات الشمعية، بعضها فارغ والبعض فيه قصاصة ورق كتب عليها كلمة متحدث. وفي القرن السابع عشر، تم تنفيذ المراحل الأخيرة باستخدام كرات ذهب وفضة لها الحجم نفسه. عندما توفي الحاكم رينيري زينو Rainieri Zeno سنة 1268، كان عدد

المتحدثين في المرحلة الثانية نحو ثلاثين، وأعد لذلك ثلاثون من كرات الشمع، في تسع منها قصاصات ورقية. ثم يتقدم طفل صغير ويختار كرة من السلة، ويسلمها للمتحدث الأول، فيفتحها ليرى إذا ما كان هو من متحدثي المرحلة التالية. ومن ثم يختار الطفل كرة أخرى ويسلمها للمتحدث الثاني، الذي يقوم بفتحها وهكذا دواليك.

قبل اختيار الطفل للكرة الأولى، يكون لدى كل عضو في المجموعة احتمالية بنسبة 9/ 30 لكونه متحدثاً للمرحلة التالية. وإذا كانت الكرة الأولى فارغة، تصبح نسبة اختيار الأعضاء الباقين 9/ 29 . أما إذا احتوت الكرة الأولى على القصاصة، تصبح نسبة فرصة اختيار الأعضاء الباقين نحو 8/ 29. وبمجرد اختيار الكرة الثانية وعرض ما فيها، فإن احتمالية اختيار العضو التالي كمتحدث ستكون مماثلة في الزيادة والنقصان، معتمدة على نتائج السحب. ويستمر ذلك إلى أن يتم اختيار الكرات التسع ذات القصاصات. وتقل في هذه المرحلة فرصة اختيار متحدثٍ من الأعضاء الباقين للمرحلة التالية إلى درجة صفر.

هذا مثال للاحتمالية المشروطة. إذ تعتمد احتمالية أن يصبح عضو ما متحدثاً في المرحلة التالية على الاختيار الأسبق لاختياره. أوضح جون مينارد كينز John Maynard Keynes أن كل الاحتمالات مشروطة. وهكذا، فإن احتمالية اختيار كتاب مجلد بالقماش بطريقة عشوائية من أرفف مكتبته، مشروطة على

الكتب الموجودة فعلاً في مكتبته وتبعاً لكيفية اختياره «عشوائياً». واحتمالية وجود خلايا سرطانية صغيرة في الرئة عند بعض المرضى مشروط بتاريخ المريض بالتدخين. إن قيمة ـ ب المقدرة لاختبار الفرضية الصفرية لآثار عدم المعالجة لتجارب مضبوطة مشروطة على نوع تصميم التجربة. إن الجانب المهم في الاحتمالية المشروطة هو أن احتمالية بعض الوقائع (فوز مجموعة من الأرقام باليانصيب مثلاً) مختلفة لأسباب احتمالية مسبقة.

اعتمدت كل صيغ الاحتمالات المشروطة التي تطورت في القرن الثامن عشر على فكرة، أن الأحداث المشروطة حدثت قبل الحادثة المطلوب البحث عنها. قامت عائلة الراهب توماس بييز Reverend Thomas Bayes في أواخر هذا القرن بالتلاعب في صيغ الاحتمالات المشروطة وتوصلت إلى اكتشاف مذهل: أن للصيغ تناظراً داخلياً.

فلنفترض وقوع حدثين في فترة زمنية، مثل خلط مجموعة من أوراق اللعب وتوزيع خمس أوراق للاعب الورق. فلنطلق على الحدثين «قبل» و «بعد». من المنطقي التحدث عن احتمالية «بعد»، مشروطة بـ «قبل». فإذا لم نخلط الأوراق بشكل جيد، فسيؤثر على احتمالية حصول اللاعب على آصين. اكتشف بييز أنه بإمكاننا حساب احتمالية «قبل»، مشروطة بـ «بعد». وهذا غير منطقي. سنبدو مثل تأكيد احتمالية وجود أربعة آصوص (من فئة الرقم واحد) في أوراق اللعب، مفترضين

أن بيد اللاعب آصين. أو احتمالية أن المريض كان مدخناً، مفترضين إصابته بسرطان الرئة. أو احتمالية مشروعية اليانصيب مفترضين أن الفائز الوحيد يدعى تشارلز أ. سميث. Charles A. Smith.

وضع بييز هذه الحسبة جانباً. لقد وجدت بين أوراقه عند موته، ونشرت بعد موت مؤلفها. لقد أفسدت نظرية بييز[1] وقتها المادة الرياضية للتحليل الإحصائي. بعيداً عن المنطق، فإن قلب بييز للاحتمالية المشروطة أصبح أكثر منطقية. عند محاولات علماء الأوبئة العثور على الأسباب الممكنة للحالات الطبية النادرة، مثل أعراض مرض ريس Reye's Syndrome، فإنهم يقومون بدراسة مضبوطة لحالة ما. في مثل هذه الدراسة، يتم تجميع مجموعة من الحالات لهذا المرض، ومن ثم تتم مقارنتها بمجموعة من المرضى (المضبوطين)، الذين لا يعانون من المرض ذاته ولكن حالتهم مشابهة. يقوم علماء الأوبئة بحساب احتمالية معالجات وحالات سابقة، مفترضين أن المرضى المضبوطين لديهم المرض نفسه. ومن هنا يتضح أثر التدخين على مرضى القلب وسرطان الرئة عند بداية اكتشاف

(1) يظهر قانون ستيغلر في تزييف الأسماء تماماً بهذا الاسم. لقد كان بييز بعيداً عن كونه الشخص الأول ليظهر التناظر في الاحتمالية المشروطة. لقد اتضح أن عالمة البرونيللي كانوا على دراية بها. وكذلك دي موافر رجع إليها في أعماله. وعلى كل لقد حصل بييز وحده على هذه السمعة (أو بسبب تردد بييز بالنشر، يمكننا إيقاع اللوم عليه).

الحالة. وظهر أثر المهدئ ثاليدوميد على التشوهات الخلقية عند دراسة حالة مضبوطة.

إن استخدام نظرية بييز لتقدير متغيرات التوزيع أكثر أهمية من الاستخدام المباشر للنظرية في قلب الاحتمالية المشروطة. هناك إغراء في معاملة متغيرات التوزيع على أنها أعداد عشوائية، وفي حساب الاحتمالات المصاحبة للمتغيرات. على سبيل المثال، بإمكاننا مقارنة طريقتي علاج للسرطان مستنتجين «أننا متأكدين بنسبة 95٪ أن سنوات العيش الخمس بعد معالجة أ أعلى من نسبتها في علاج ب». ويمكن تطبيق هذا باستعمال نظرية أو اثنتين من نظريات بييز.

أسئلة حول «الاحتمالية العكسية»

جرى اعتبار، ولعدة سنوات، استخدام نظرية بييز في هذا المجال على أنه غير لائق. هناك أسئلة مهمة عن معنى الاحتمالية عندما تُستخدم للمتغيرات. كما أن أساس الثورة البيرسونية يكمن في عدم أهمية القياسات العلمية. بل كما أوضح بيرسون، كانت احتمالات توزيع لتلك القياسات، والهدف من البحث العلمي هو تقدير المتغير (الثابت وغير المعروف) الذي تضبط قيمة التوزيع. إذا اعتبرنا المتغيرات أرقاماً عشوائية (مشروطة على القياسات الملحوظة)، فسيمنعنا هذا الاتجاه من الحصول على معنى واضح.

تجنب الإحصائيون بحذر في بداية القرن العشرين،

«الاحتمالية العكسية،» كما جرت تسميتها. وفي إحدى المناقشات أمام المجتمع الإحصائي الملكي بعد أحد أبحاثه الأولى، تم اتهام فيشر باستخدامه الاحتمالية العكسية، ولكنه دافع عن نفسه بكل جرأة ضد هذه التهمة الشنيعة. اتضح أن نيمان استخدم في بحثه الأول متضمناً مراحل الثقة الاحتمالية العكسية، ولكن فقط كوسيلة رياضية حول بعض الحسابات. وأوضح في بحثه الثاني كيفية الوصول إلى النتيجة نفسها من غير اللجوء إلى نظرية بييز. وبقدوم سنة 1960 بدأت القوة الكامنة والفائدة من هذا الاتجاه بجذب الكثير من العاملين. وأصبحت البدعة البييزينية جديرة بالاحترام أكثر من قبل، ووصلت في نهاية القرن العشرين إلى درجة عالية من القبول حتى أصبحت معظم المقالات التي تظهر في مجلات مثل السجلات الإحصائية، والبيومتريكا تستفيد من تلك الأساليب البييزينية. ومازال تطبيق البدعة البييزينية موضع شك، وخاصة في العلوم الطبية.

تكمن الصعوبة في شرح البدعة البييزينية لوجود الكثير من الأساليب المختلفة في التحليل، ومؤسستين تتبعان المنطق على الأقل لاستخدام هذه الأساليب. دائماً كأفكار مختلفة تماماً، لها نفس السمة البييزينية. سأضع في عين الاعتبار لاحقاً، تركيبتين للبدعة البييزينية: أسلوب السلسلة البييزينية، والاحتمالية الفردية.

النموذج التسلسلي البييزيني

أبدت النماذج الإحصائية للتحليل النصي تقدماً عظيماً مع بداية سنة 1970، ابتداءً بأعمال قام بها فريدريك موستيللر Frederick Mosteller وديفيد والاس David Wallace، اللذين استخدما الأساليب الإحصائية لتقرير حقوق تأليف الأبحاث الفدرالية المختلف فيها، توصلا إلى إقرار من الدستور الأمريكي الجديد من ولاية نيويورك في سنة 1787-1788، وقام جيمس ماديسون James Madison، وأليكساندر هاملتون Alexander Hamilton، وجون جيي John Jay، بكتابة سلسلة من سبعين مقالة تدعم هذا الإقرار. وتم توقيع المقالات بأسماء مستعارة. وفي بداية القرن التالي، تعرف هاملتون وماديسون على الأبحاث التي ادعوا تأليفها. وادعى كل منهم[2] خاصته في اثني عشر بحثاً.

وفي أثناء تحليلاتهما الإحصائية للأبحاث المختلف فيها، قام موستيللر ووالاس بالتعرف على مئات الكلمات الإنجليزية التي ينقصها «المضمون». وهذه كلمات مثل إذا if، متى when، من أجل because، فوق over، فترة whilst، مثل as، و and. ولهذه الكلمات أهمية في إبراز المعنى النحوي للجملة، ولكنها لا

(2) لقد كان ماديسون في الحقيقة من ادعى ذلك لنفسه. لقد كان هذا رداً على سلسلة من الأبحاث اعتقد أن هاملتون كان قد كتبها وحررها أصدقاؤه بعد ثلاث سنوات من موته.

تحمل معاني معينة، ويعتمد استخدامها أساساً على أسلوب اللغة النحوي. ومن ضمن مئات الكلمات التي لا مضمون لها، وجدوا ثلاثين كلمة اختلف المؤلفان في تكرار استخدامها بكتاباتهما.

استخدم ماديسون على سبيل المثال، كلمة على upon بمعدل 0,23 مرة كل ألف كلمة، واستخدم هاملتون الكلمة ذاتها بمعدل مرة كل ألف كلمة. (أحد عشر من أصل اثني عشر بحثاً مختلف فيها لا يستخدم كلمة (على upon) على الإطلاق، والأبحاث الأخرى لها معدل استخدام بنسبة 1.1 مرة كل ألف كلمة). لا تصف هذه المعدلات الترددية أي مجموعة بعينها من الألف كلمة، علما أنها ليست أرقاماً صحيحة أي أنها لا تصف سلسلة من الكلمات الملحوظة. فهي، على كل حال، تقديرات لأحد متغيرات التوزيع في الكلمات عند الكتابة عن طريق شخصين مختلفين.

والسؤال في حقوق التأليف المختلف فيها: هل تأتي نماذج استخدام تلك الكلمات من احتمالات التوزيع المرتبطة بهاملتون؟ ولهذه التوزيعات متغيرات، وتختلف المتغيرات المحددة التي توضح عمل ماديسون وهاملتون. يمكن تقدير المتغيرات فقط من أعمالهم، وقد تخطئ هذه التقديرات. ويغشى نوع من الغموض في محاولة تحديد نوع التوزيع على البحث المختلف فيه.

يمكن الحصول على تقدير مستوى الغموض، بملاحظة أن

القيم المحددة لهذه المتغيرات لكلا الرجلين، مأخوذة من توزيع يصف المتغيرات المستخدمة من قبل الناس المتعلمين، الذين يكتبون الإنجليزية في شمال أمريكا في نهاية القرن الثامن عشر. على سبيل المثال، استخدم هاملتون الكلمة في in 24 مرة كل ألف كلمة. واستخدم ماديسون الكلمة ذاتها نحو 22 إلى 25 مرة كل ألف كلمة.

تكون المتغيرات لكل رجل عشوائية وذات توزيع احتمالي حسب النماذج المصاحبة للاستعمال العام للكلمات في ذلك الزمان والمكان. بهذه الطريقة، فإن المتغيرات التي تؤدي إلى استعمال الكلمات التي لا مضمون لها من قبل هاملتون أو ماديسون لها نفسها متغيرات، والتي يمكن أن نسميها «المتغيرات الفوقية». وبإمكاننا تقدير المتغيرات الفوقية باستخدام الأعمال المكتوبة لمؤلفين آخرين في ذاك الزمان والمكان.

تتغير اللغة الإنجليزية بتغير الزمان والمكان. ففي الأدب الإنجليزي مثلا للقرن العشرين، يتكرر استعمال كلمة في in أقل من 20 مرة كل ألف كلمة، وهذا مؤشر إلى تغيير خفيف في نماذج الاستعمال خلال مدة 200 سنة أو أكثر منذ زمن هاملتون وماديسون. ويمكننا اعتبار المتغيرات الفوقية التي تعرف توزيع المتغيرات في القرن الثامن عشر في شمال أمريكا لاحتوائها توزيعاً احتمالياً بحد ذاتها عبر الأزمان والأماكن. ويمكننا استخدام كتابات من أزمنة وأماكن أخرى، إضافة إلى كتابات القرن الثامن عشر في شمال أمريكا، لتقدير متغيرات المتغيرات

الفوقية، والتي نسميها «المتغيرات لفوق الفوقية».

يمكننا بإعادة استخدام نظرية بييز تقرير توزيع المتغيرات، ومن ثم المتغيرات الفوقية. ويمكننا الاستمرار في هذه السلسلة إلى أبعد من ذلك عن طريق إيجاد توزيع المتغيرات فوق الفوقية، عبر المتغيرات فوق فوق الفوقية وهكذا دواليك. لا يوجد هنا مرشح واضح للأجيال لإضافة المزيد من الغموض. وباستخدام التقديرات للمتغيرات فوق فوق الفوقية، تمكن موستيللر ووالاس من قياس الاحتمالية المصاحبة للحالة: كتب ماديسون (أو هاملتون) هذا البحث.

لقد تم تطبيق نماذج السلسلة البيزينية بنجاح منذ بداية سنة 1980 على الكثير من المسائل الصعبة في الهندسة والأحياء. وتظهر مثل هذه المسائل عندما تكون البيانات من توزيعين أو أكثر. يقدم المحلل حينها وجود متغيرات غير ملحوظة تبين لنا نوع التوزيع الذي تأتي منه الملاحظات المعطاة. وهذه العلامة المطابقة متغير، ولكن لها توزيعاً احتمالياً (مع متغيرات فوقية) يمكن دمجها في الدالة الأرجحية. والقياسات التكرارية عند لاريد وويير Larid and Ware مناسبة بشكل خاص لهذا النوع من المسائل.

إن الاستخدام المفرط للأساليب البيزينية في الكتابات الإحصائية مليئة بالتشويش والنزاع. يمكن تقديم أساليب مختلفة بنتائج مختلفة، ولا يوجد مقياس واضح لتقرير صحة هذه

الأساليب. اعترض المتمسكون بالتقاليد على استخدام نظرية بييز بشكل عام، ولم يوافق البييزينيون على تفاصيل نماذجهم. يستصرخ الوضع لعبقري مثل ر.آ فيشر كي يقدم مبدأ موحداً لحل كل هذه الخلافات. لم يظهر إلى الآن مثل ذلك العبقري حتى بعد دخولنا القرن الحادي والعشرين. وتبقى المشكلة محيرة كما كانت بالنسبة لريفارند توماس بييز منذ 200 سنة مضت.

الاحتمالية الفردية

وهو اتجاه بييزيني آخر أكثر صلابة، مفهوم الاحتمالية الفردية. لقد كانت الفكرة موجودة منذ العمل الأول لعائلة بيرنوللي Bernoulli عن الاحتمالية في القرن السابع عشر. وفي الواقع لقد نشأت كلمة احتمالية لتتعامل مع شعور الغموض الفردي.

طور ل.ج. (جيمي) سافاج L. J. (Jimmie) Savage وبرونو دي فينيتي Bruno de Finetti الكثير من الرياضيات في ما وراء الاحتمالية الفردية في سنة 1960 و 1970. حضرت محاضرة في مؤتمر إحصائي في جامعة في شمال كارولينا في نهاية 1960 لما اقترح سافاج بعض هذه الأفكار. كما ادعى عدم وجود ما يؤكد الحقائق العلمية المبرهنة. ولكن هناك فقط تقارير أو حقائق، ممن يدعون أنهم علماء، يصحبه احتمالية عالية. يقول مثلا، إن معظم الذين يسمعونه في حديثه سوف تربطهم احتمالية عالية،

لذلك التقرير أو الحقيقة: «العالم مستدير». ومن ناحية أخرى، إذا أجرينا إحصاء بتعداد سكان العالم، سوف نجد غالباً الكثير من الفلاحين في وسط الصين تربطهم احتمالية ضعيفة لذلك التقرير. في ذلك الوقت، على سافاج أن يتوقف عن الكلام لأن مجموعة من الطلاب في الجامعة ذهبوا للسباق خارج القاعة وهم يصرخون، «أغلقوها! إضراب، إضراب أغلقوها!» لقد كانوا يعترضون على حرب فيتنام ويدعون طلبة الجامعة إلى الإضراب. وباختفاء أصواتهم في الممر وبانطفاء الشغب، ينظر سافاج من النافذة و يقول، «كما تعلمون، قد تكون الجيل الأخير الذي يعتقد أن الكون مستدير».

هناك عدة أوجه للاحتمالية الفردية. في أحد الأطراف الاتجاه سافاج ودي فينيتي، الذي يقول أن كل فرد له احتمالاته الخاصة به. وفي الطرف الأخر وجهة نظر كيينز بأن الاحتمالية هي درجة من الاعتقاد يتوقع أن يحملها الشخص المتعلم في حضارة ما. من وجهة نظر كيينز، لكل حضارات معينة «علماء»، سافاج أو «فلاحو الصين» ممكن أن يتوافقوا في درجة عامة من الاحتمالية تستمر في حالة معينة، لاعتماد هذا النوع من الاحتمالية على الحضارة والزمن، ومن الممكن أن يكون المستوى المناسب من الاحتمالية غير صحيح بمعنى أصح.

اقترح سافاج ودي فينيتي أن كل فرد له مجموعة معينة من الاحتمالات الفردية، ووصفوا استنتاج هذه الاحتمالات عن طريق تقنية تدعى «معيار المقامرة». ومن أجل مشاركة حضارة

بأكملها في مجموعة من الاحتمالات المعطاة، كان على كيني أن يضعف التعريف الرياضي ويعزو الاحتمالية بالأكثر ليس كرقم محدد مثل (نسبة 67) ولكن أكثر كأسلوب في استنباط الأفكار (إن الاحتمالية التي ستمطر غداً أعظم من الاحتمالية التي ستثلج).

بغض النظر عن مفهوم تعريف الاحتمالية الفردية تماماً، تبدو الطريقة التي يستخدمها بييز في نظريته عن الاحتمالية الفردية، تتماشى مع الطريقة التي يفكر فيها معظم الناس. يبدأ الاتجاه البييزيني بمجموعة مبدئية من الاحتمالات في ذهن الشخص المعني. ومن ثم، يقوم الشخص بالمراقبة، أو إجراء التجارب وإنتاج البيانات. ومن ثم تستخدم البيانات لتعديل الاحتمالات المسبقة، وتنتج مجموعة تالية من الاحتمالات:

الاحتمالية المبدئية ← (البيانات) ← الاحتمالات البعدية

فلنفترض أن الشخص يتمنى تحديد ما إذا كانت جميع الغربان سوداء. يبدأ أولاً بمعلومات مسبقة عن احتمالات صحة ذلك الافتراض. فقد لا يعرف شيئاً عن الغربان مثلا في البداية ويبدأ بالموازنة، 50:50، على أن كل الغربان لونها أسود. فلنفترض أنه رأى غراباً ولاحظ لونه الأسود، تزداد بذلك الاحتمالية البعدية. ثم يشاهد الغربان، فإن الاحتمالية المبدئية الجديدة (الاحتمالية البعدية القديمة) تصبح أكثر من نسبة 50 وتزداد بالتالي عن طريق ملاحظة المجموعة الجديدة من الغربان، والتي تكون كلها سوداء.

ومن ناحية أخرى، فقد يدخل الفرد العملية باحتمالات مبدئية قوية، لدرجة أنه يستطيع أخذ كمية كبيرة من البيانات لتغطيها. كان لدى العاملين في مفاعل محطة ثري مايلس آيلاند Three Miles Island لتوليد القوة الكهربائية في بنسلفانيا Pennsylvania، حيث وقعت كارثة القوة النووية بأمريكا سنة 1980، لوح كبير من المدرجات والمؤشرات لتتبع تطور المفاعل. كما كانت توجد الأنوار التحذيرية، وبعضها كان فيه عيوب فتصدر إنذارات خاطئة في الماضي. فكانت المعتقدات المبدئية لدى العاملين، أنه من الممكن لكل الأنوار التحذيرية الجديدة أن تعطي إنذاراً مزيفاً. حتى ولو كان نموذج الأنوار التحذيرية مصاحباً لمدرجات تنتج صورة متماسكة عن نقص المياه في المفاعل، واستمروا في رفض كل الأدلة. لقد كانت احتمالاتهم المبدئية قوية جداً لدرجة لم تغير البيانات، الاحتمالات البعدية كثيراً.

فلنفترض وجود احتمالين فقط، كما كانت الحالة في الأبحاث الفيدرالية المختلف فيها: لقد كتبها ماديسون وهاملتون فقط. وبعدها أدى تطبيق نظرية بييز إلى علاقة مشابهة بين الفروق المبدئية والبعدية في الوقت الذي تختصر فيه البيانات إلى شيء يسمى « عامل بييز». وهذه حسابات رياضية تصف البيانات من غير الرجوع إلى الفروق المبدئية إطلاقاً. وبهذا يمكن للمحلل حينها إخبار القارئ، إدخال الفروق المبدئية التي يتمناها، ومن ثم يتم ضربه بمعامل بييز المحسوبة قيمته،

وحساب الفروق البعدية بالتالي. اتّبع موستيللر ووالس هذا الأسلوب في كل الأبحاث الفدرالية المختلف عليها.

لقد أجروا أيضاً تحليلين غير بييزيين لتكرار الكلمات التي لا مضمون لها. وتمكنوا بذلك من الوصول إلى أربعة أساليب لتحديد حقوق التأليف في الأبحاث المختلف عليها: الأسلوب البييزيني التسلسلي، وعامل بييز المحسوب، والتحليلين غير البييزيين. كيف ظهرت هذه النتائج كلها؟ لقد تم منح كل الإثني عشر إلى ماديسون بجدارة. إن استخدام عوامل بييز المحسوبة، في الواقع وفي بعض الأبحاث يتطلّب من القارئ الحصول على فروق مبدئية أكبر من 100،000 إلى فرق واحد لصالح هاملتون من أجل استخراج فروق بعدية تعادل 50 : 50.