الباب الخامس عشر

القطع الزائد:Hyperbola

تعريف: " القطع الزائد هو المحل الهندسي للنقط التي يكون الفرق بين بعدى أي نقط منها عن نقطتين مثبتتين في المستوى ، تسميان بالبؤرتين مقدار ثابت (الاختلاف المركزي) ويأخذ الفرق المذكور بقيمته المطلقة كما ولابد وأن يكون أقل من البعد بين البؤرتين وغير مساوي للصفر". فإذا اخترنا كما بالشكل مجموعة من الإحداثيات بحيث تقع البؤرتان عند f(-c,0) , f(c,0) فإن النقطة p(x,y) تقع على القطع إذا كان

$$fp - f\,'p = 2a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

حيث $c > a$ وبالتعويض في (1) بالإحداثيات النقط f, f′,p نجد أن:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

وبتربيع الطرفين:

$$x^2 + c^2 - 2cx + y^2 = x^2 + c^2 + 2cx + y^2 + 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$\therefore -4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$c^2x^2 + a^2 + 2a^2cx = a^2(x^2 + c^2 + 2cx + y^2) \Rightarrow$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$c^2x^2 + a^2 + 2a^2cx = a^2(x^2 + c^2 + 2cx + y^2) \Rightarrow$$

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

وحيث إن $c > a$ إذن يمكننا كتابة المعادلة السابقة على الصورة:

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

$$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

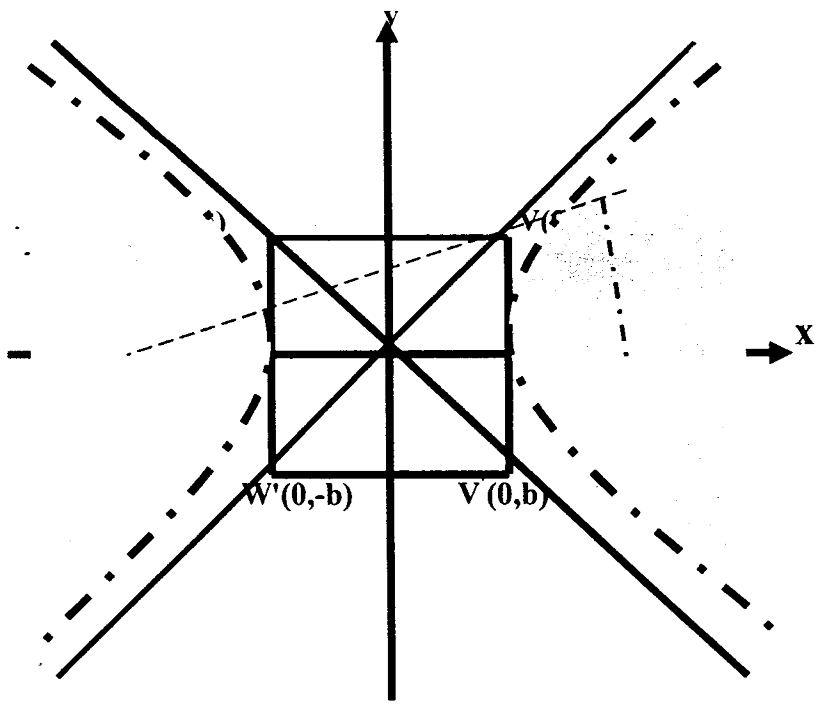
وبالقسمة على $a^2(c^2-a^2)$ نحصل على $x^2/a^2-y^2/(c^2-a^2)=1$

وبوضع $b^2=(c^2-a^2)$ ينتج أن:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

وهذه معادلة القطع الزائد الذي تقع بؤرتاه على محور x ومركزه عند نقطة الأصل ويتقاطع هذا القطع مع المحور السيني عند $\pm a$ وهما الرأسان $V(a,0),V'(-a,0)$ ويسمى الخط VV' بالمحور القاطع أو المستعرض للقطع Transverse Axis

ونلاحظ أن القطع الزائد السابق لا يقطع المحور الصادي.



الخطان التقاربيان

هما الخطان المماسان للمنحنى عند اللانهاية.

فإذا اخترنا الخط $y=\frac{b}{a}x$ وأخذنا النقطة $Q(x,y)$ عليه والنقطة $P(x,y)$ على القطع الزائد $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ نجد أن المسافة

$$Q-P=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\to 0 \qquad when \qquad x\to\infty$$

(يترك برهان ذلك للطالب)

كذلك نجد أن الخط $y=-\frac{b}{a}x$ يمس القطع ايضًا في اللانهاية.

نلاحظ أن المعادلة الخطين التقاربيين هي أن نضع الطرف الأيمن لمعادلة القطع (2) مساويًا للصفر، أي أن معادلة الخطين التقاربين هي:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \qquad (13)$$

والحل هو الخطين التقاربين $y=\pm\frac{b}{a}x$

ملاحظات:

(i) يمس الخط $y=\frac{b}{a}x$ الفرع الأيمن للقطع عندما $x\to\infty$ وبينما يمس الطرف الأيسر عندما $x\to-\infty$.

(ii) يمس الخط $y = -\frac{b}{a}x$ القطع بطريقة معاكسة.

(iii) يطلق على الخط الواصل بين $W(0,b),\ W'(0,-b)$ بالمحور المرافق Conjugate axis .

(iv) إذا رسمنا خطوط موازية للمحور القاطع والمحور المرافق تمر بالرأسين $V(a,0), V'(-a,0)$ ، وكذلك بالنقطتين $W(0,b), W'(0,-b)$

يتكون مستطيل وينطبق قطرا هذا المستطيل مع الخطوط التقاربية للقطع.

(v) يستخدم الخطان التقاربيان وكذلك هذا المستطيل في المساعدة على رسم القطع.

(vi) ليس من الضروري أن تكون $b<a$ إذا يمكن أن تكون $b \le a$

مثال: ارسم المنحنى الممثل بالمعادلة $9x^2 - 4y^2 = 36$

الحل: بقسمة الطرفين على 36

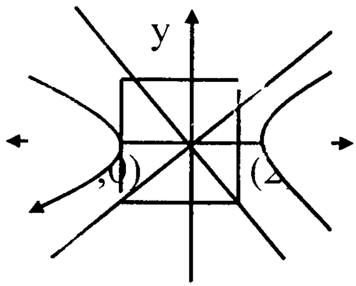
$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

هذه معادلة قطع زائد حيث:

$$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2, \qquad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

بينما نهايتي المحور المرافق و الرأسان عند

$(\pm 2,0)$ $(0,\pm 3)$ يمكن استخدام هذه النقطة لرسم مستطيل حيث



امتداد القطرين يمثلان الخطان التقاربيان

معادلة الخطين التقاربيين هي $y = \pm\frac{3}{2}x$

كذلك نجد أن: $c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$

البؤرتان عند النقطتين

$$f(-\sqrt{13},0) \qquad \& \qquad f(\sqrt{13},0)$$

مثال: أوجد المعادلة والبؤرتين والخطين التقاربيين للقطع الزائد الذي تقع رأسيه عند النقطتين $(\pm 3,0)$ ويمر بالنقطة $P(5,2)$

الحل:

$\because$ الرأسين عند النقطتين $(\pm 3,0)$

$$\therefore a = 3$$

وتكون معادلة القطع هي:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\therefore$ القطع يمر بالنقطة $(5,2)$ فهي تحقق معادلته

$$\frac{25}{9} - \frac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{b^2} = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9} \Rightarrow b^2 = \frac{4x9}{16} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$\therefore$معادلة القطع هي:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{4y^2}{9}=1 \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

∴معادلة الخطين التقاربيين

$$y=\pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y=\pm\frac{x}{2}$$

ولإيجاد البؤرتين f(c,0), f(-c,0)

$$c^2=a^2+b^2=9+\frac{9}{4}=\frac{45}{4} \Rightarrow c=\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$$

إحداثيات البؤرتين هما:

$$f(\frac{3\sqrt{5}}{2},0)\ \&\ f(-\frac{3\sqrt{5}}{2},0)$$

ملاحظة:

إذا وقعت بؤرتا القطع الزائد عند النقطتين $(0,\pm c)$ على محور y فإن معادلة القطع تأخذ الصورة:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ويقطع القطع محور y في الرأسين $(0,\pm a)$ حيث يكون محورة القاطع، أما المحور المرافق فينطبق على محور x بين النقطتين $(\pm b,0)$

ومعادلتي الخطين التقاربيين هما:

$$y=\pm\frac{a}{b}x$$

الاختلاف المركزي والدليلان

تمشيًا مع ما سبق في حالة القطع الناقص يمكننا أن نعرف الاختلاف المركزي e حيث

$$e=\frac{c}{a}, \qquad c\ge a \qquad (5)$$

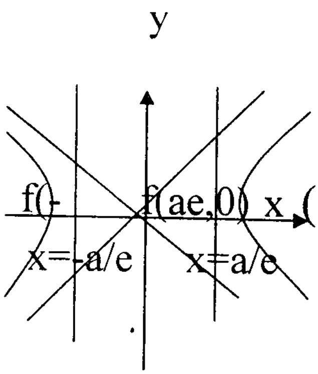
فإن الاختلاف المركزي للقطع الزائد يكون أكبر من الواحد الصحيح

e > 1 أما الدليلان فمعادلتيهما $x=\pm\frac{a}{e}$

ومن الواضح أنهم لا يتقاطعان مع منحنى القطع لأن

$$\frac{a}{e}\langle a\Leftarrow \qquad e\rangle 1$$

(أقل من بعد الرأس عن المركز) ونلاحظ أنه باستخدام e , a فإنه يمكن تعيين مواقع الدليلين والرأسين والبؤرتين فمثلاً



(i) الدليلان عند $x=\pm\frac{a}{e}$ $(\frac{a}{e}\langle a)$

(ii) الرأسان عند $x=\pm a$

(iii) البؤرتان عند $x=\pm ae$ $(ae\rangle a)$

ae,0)

ويمكننا أيضا باستخدام e والبؤرة والدليل

أن نعيد تعريف القطع الزائد كالآتي :

هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة (البؤرة) إلى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) يساوي مقدار ثابت أكبر من الواحد الصحيح(الاختلاف المركزي)

ملاحظات :

(i) القطع الزائد القائم

إذا كانت $a = b$ في معادلة القطع الزائد فإن معادلة القطع تصبح

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$$

ويسمى القطع في هذه الحالة بالقطع الزائدة القائم واختلافه المركزي يتعين من العلاقة

$$b^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow a^2 = a^2(e^2 - 1) \Rightarrow e^2 = 2 \Rightarrow e = \sqrt{2}$$

من الواضح هنا أن المستطيل الأساس للقطع الزائد يصبح مربعًا ويكون خطي التقارب للقطع القائم متعامدان.

(ii) القطع الزائد المرافق

إذا كانت معادلة القطع الزائد هي

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

فإن المعادلة

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (6)$$

تسمى معادلة القطع الزائد المرافق.

(iii) معادلة المماس للقطع الزائد

معادلة المماس للقطع الزائد
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

عند النقطة $P(x_1,y_1)$ هي:

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1 \qquad (7)$$

الخواص البصرية للقطع الناقص - الزائد- المكافيء

تعد ما يسمى بالخواص البصرية للقطوع المخروطية من الخواص العجيبة لهذه المنحنيات وبالمناسبة فإن هذه الخواص تبين بأن مصطلح "بؤرة " المنحنى له أصل فيزيائي وفيما يلي نصيغ هذه الخواص بطريقة هندسية بحتة.

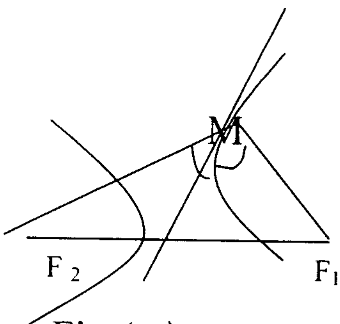


Fig (a)

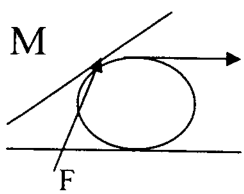


Fig (b)

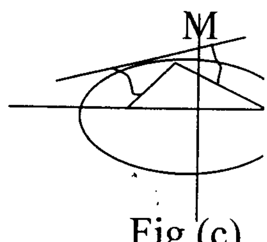


Fig (c)

1- يصنع المماس للقطع الناقص عند أي نقطة عليه M زاويتين متساويتين مع البعد بين البؤرتين $F_1 M, F_2 M$ ويمر خارج الزاوية $F_1 M F_2$

2- يصنع مماس القطع المكافيء عند أي نقطة عليه M زاويتين متساويتين مع FM والشعاع الخارج من النقطة M موازيًا لمحور القطع Fig c .

3- يصنع مماس القطع الزائد عند أي نقطة علية M زاويتين متساويتين مع FM والشعاع الخارج من نقطة M موازيًا لمحور القطع Fig b .

4- يصنع مماس القطع المكافيء عند أي نقطة عليه M زاويتين متساويتين مع FM والشعاع الخارج من النقطة M موازيًا لمحور القطع Fig c .

5- يصنع مماس القطع الزائد عند أي نقطة عليه M زاويتين متساويتين مع F_2M ,F_1M ويمر داخل الزاوية $F_1 M F_2$ Fig c

ولتوضيح المعنى الفيزيائي للخواص المذكورة نفرض أن القطع الناقص – الزائد – المكافيء يدور حول محوره المار بالبؤرة، وبذلك يتكون سطح يسمى بسطح الجسم الناقص – الجسم الزائد – الجسم المكافيء على الترتيب، ويعتبر هذا السطح إذا غطى بورق الزئبق مرآة.

ناقصية – زائدية – مكافئة على الترتيب . وبالأخذ بعين الاعتبار قوانين الانعكاس نجد أن:

1) إذا وجد مصدر للضوء في إحدى بؤرتي القطع الناقص(المرأة الناقضية) فإن أشعة هذا الضوء المنعكسة على المرأة تتجمع في البؤرة الأخرى .

2) إذا وجد مصدر للضوء في بؤرة المرآة المكافئة تكون الأشعة الضوئية المنعكسة على المرآة متجهة موازية لمحور القطع .

3) إذا وجد مصدر للضوء في إحدى بؤرتي المرآة الزائدية فإن الأشعة المنعكسة من هذه المرآة تكون كما لو كانت منبعثة من البؤرة الأخرى .

ويعتمد تركيب الكشافات (Projectors) على الخاصية المذكورة (3) .

تمارين

1- ارسم القطاعات الزائدة الآتية:

$i)\dfrac{(x-1)^2}{9}-\dfrac{(y+1/2)^2}{4}=1$ $\qquad ii)4x^2-y^2+16x+2y-13=0$

$iii)9x^2-y^2-18\sqrt{3}x+36=0$

أوجد الاختلاف المركزي وإحداثيات طرفي المحور القاطع لكل قطع .

2- أوجد معادلة القطع الزائد الذي يحقق الشروط المبينة في كل من المسائل الآتية:

الرأسان عند النقطتان $(\pm 5,0)$ والبؤرتان هما $(\pm 7,0)$

(i)الرأسان هما $(0,\pm 7)$ واختلافه المركزي $\dfrac{3}{4}$

(ii)الاختلاف المركزي $\sqrt{5}$ – والمركز عند نقطة الأصل

والبؤرتان تقعان على محور السينات ويمر بالنقطة $(3,2)$.

(iii) والبؤرتان هما $(0,\pm10)$ ويمر بالنقطة $(2,3)$.

(iv)المحوران هما محوري الإحداثيات ويمر بالنقطتين $(4,2),(7,-6)$.

3- أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديهما عن النقطة $(\pm4,0)$ مساويًا 2.

4- أوجد المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون الفرق بين بعديها عن النقطتين $(0,\pm7)$ مساويًا 3.

5- أوجد طول الوتر البؤري العمودي للقطع الزائد الذي بؤرته $(1,1)$ ودليله المستقيم $5x+13y+9=0$ واختلافه المركزي يساوي 2. أوجد خطية التقاربيان.

6- أوجد معادلة المماس والعمودي للقطع الزائد.

7- أوجد معادلة القطع الزائد الذي اختلافه المركزي $5/4$ ويشترك في البؤرتين مع القطع الناقص $24x^2+49y^2=1176$ وارسمة .

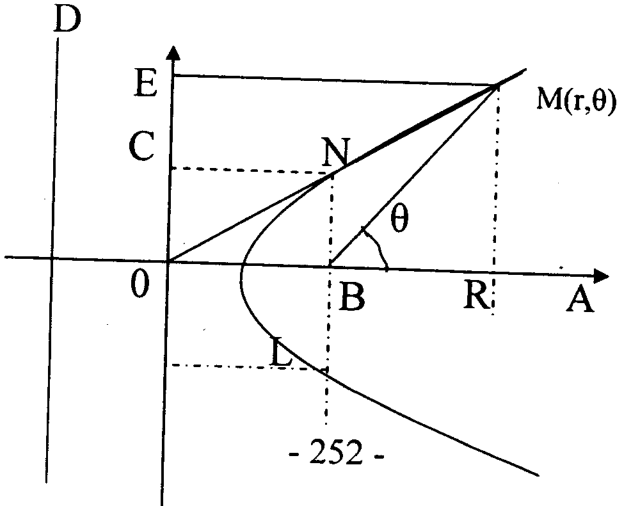
8- أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزة نقطة الأصل أوجد راسية النقطة

$(3,0)$ ومعادلة أحد خطيه التقاربيين هي $2x-3y=0$.

9- أوجد مماسات القطع الزائد $4x^2-y^2=36$ المتعامدة على المستقيم $2x-3y=0$.

المعادلات القطبية للقطاعات المخروطية

في هذا البند سوف نستنتج المعادلة القطبية للقطـع المخروطـي وهـي معادلة عامة , من حيث صورة كتابيها , للثلاثـة منحنيـات (القطـع الناقص والقطع المكافيء والقطع الزائد) وذلك في حالة وضع معـين للمحور القطبي غير أنه يوجد تحفظ في حالة القطـع الزائـد , فهـذه المعادلة لاتعرف القطع الزائد كله وإنما تعرف فرعًـا واحـدًا منـه . المعادلة تأخذ شكلا بسيطا إذا وضعت البؤرة عند قطـب الإحـداثيات وكان دليل القطع (directrix) موازيًا أو عموديًّا على الخط القطبـي. سوف نعتبر هنا أن الدليل D يكون عموديًّا على الخـط القطبـي OA ويقع على يسار القطب , سوف نرمز للاختلاف المركزي للقطع بالرمز e , وباستخدام تعريف القطع المخروطي على أنه المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث تكون النسبة بين بعدها عن نقطة ثابتة (البـؤرة) إلـى بعدها عن مستقيم ثابت (الدليل) يساوي مقـدار ثابـت (الاخـتلاف المركزي) . باعتبار أن$M(r, \theta)$ نقطة ما على القطع فمن التعريف نجد أن:



$$\left|\frac{MO}{ME}\right| = e \qquad (1)$$

بما أن $MO = r$ ومن الرسم نجد أن:

$$M\,E = BR = BO + OR$$

$$= L + r\cos\theta$$

بالتعويض في (i) نحصل على:

$$\frac{r}{1-\cos\theta} = e \qquad (2)$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة إلى r نحصل على:

$$r = \frac{el}{1-e\cos\theta}, \qquad l = \overline{OB} \qquad (3)$$

وهذه المعادلة القطبية للقطع المخروطي تحت الظروف السابقة .

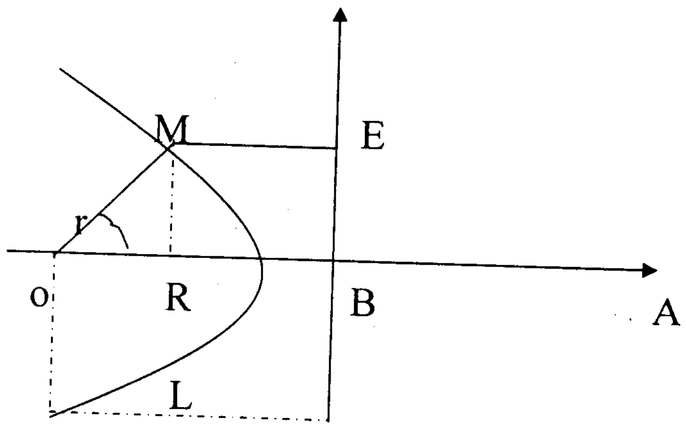
ولتوضيح معنى المقدار (el) الذي يظهر في المعادلة (1) نأخذ نقطة N على المنحنى رأسيًا فوق O (القطب) ومن N نرسم موازيًا للمحور القطبي فيقطع الدليل في G وبذلك نلاحظ أن $P = ON$ ومن تعريف القطع مرة أخرى نجد أن:

$$\left|\frac{NO}{NG}\right| = \left|\frac{P}{OB}\right| = \left|\frac{P}{l}\right| = e$$

$$\therefore el = P \qquad (4)$$

حيث P تساوي نصف طول الوتر البؤري العمودي للقطع بـــالتعويض في المعادلة القطع (3) نحصل على :

$$r = \frac{P}{1 - e\cos\theta}, \qquad (5)$$



ملاحظات:

(I)إذا كانت بؤرة القطع عند القضب (0)وكان الدليل إلى يمين القضب كما في الشكل السابق نجد ان معادلة القطع تأخذ صورة

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\theta}, \qquad (6)$$

(تترك كتمرين للطالب)

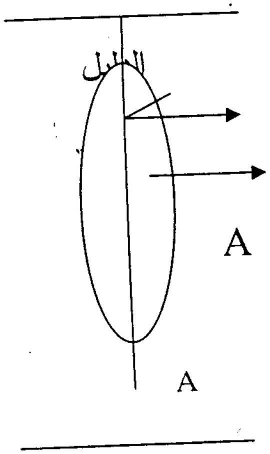
(ii) في حالة القطع المكافيء نجد أن 1 = e (الاختلاف المركـــزي) وبذلك تكون المعادلة القطبية للقطع المكافيء هي :

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\theta}, \qquad (7)$$

(iii) يتم التمييز بين القطعتين الناقص والزائد من الصورة القطبية على أساس الاختلاف المركزي $e<1$ (قطع ناقص) $e>1$ قطع زائد .

(iv)إذا كان الدليل يوازي الخط القطبي

ويقع أعلى البؤرة تكون معادلة القطع



D

على الصورة :

$$r=\frac{P}{1+\sin\theta} \qquad (8)$$

D' الـدليل

(تترك كتمرين للطالب)

(v)إذا كان الدليل موازيًا للخط القطبي ويقع أسفل البؤرة تكون معادلة القطع على صورة :

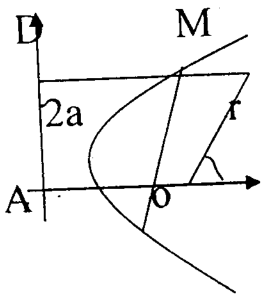
$$r=\frac{P}{1-\sin\theta} \qquad (9)$$

أبعاد القطاعات المخروطية

i)) القطع المكافيء : $(e=1)$

نأخذ البؤرة (0) هي قطب الإحداثيات فنجد

أن $P=2a$ = نصف طول الوتر العمودي

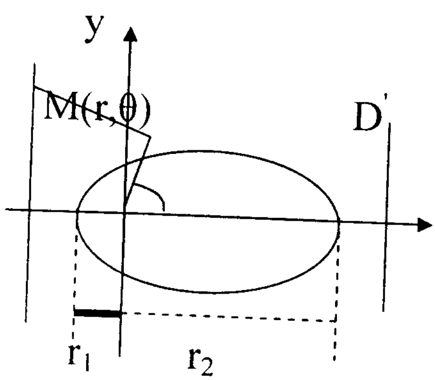


وتكون معادلة القطع على صورة :

$$r = \frac{2a}{1-\cos\theta} \tag{10}$$

الرأس a عند النقطة (a,π) ومعادلة الدليل هي $\theta = \pi$

(ii) القطع الناقص $(e \langle 1)$



نأخذ إحدى البؤرتين قطب الإحداثيات القطبية (r,θ) ولتكن (0) كما بالشكل فتكون معادلة القطع على صورة:

$$r = \frac{P}{1-e\cos\theta} \tag{11}$$

ونفرض أن D` ,D هما دليلي القطـــع وأن $M(r,\theta)$ أي نقطـــة علـــى القطع.

ولكتابة معادلة القطع على الصورة الكارتيزية تأخذ البـــؤرة (0) نقطـــة الأصل، ونفرض أن المحور القطبي هو المحـــور O X ، ونأخـــذ oy منطبقًا على الوتر البؤري العمودي عند(0) من المعادلة (11) نجد أن :

$$r - er\cos\theta = P$$

وباستخدام العلاقات:

$$x = r\cos\theta,$$
$$y = r\sin\theta$$

نحصل على معادلة القطع على الصورة :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ex + P$$

بالتربيع وإعادة الترتيب نحصل على :

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} - \frac{2Pe}{1-e^2}x = \frac{e^2}{1-e^2}$$

$$\left[\ x - \frac{Pe}{1-e^2}\ \right]^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{P^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\left[\ x - \frac{Pe}{1-e^2}\ \right]^2 . \frac{1}{\left[\frac{P}{(1-e^2)^2}\right]} + \frac{y^2}{(P\sqrt{1-e^2})} = 1$$

بوضع هذه المعادلة على الصورة:

$$\frac{(x-k)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (12)$$

بذلك تكون أبعاد القطع الناقص هي:

$$a=\frac{P}{1-e^2},\qquad b=\frac{P}{\sqrt{1-e^2}},k=\frac{pe}{(1-e^2)^2}=ea \qquad (13)$$

وَيكون مركز القطع عند النقطة $C(ea,0) = C(k,0)$

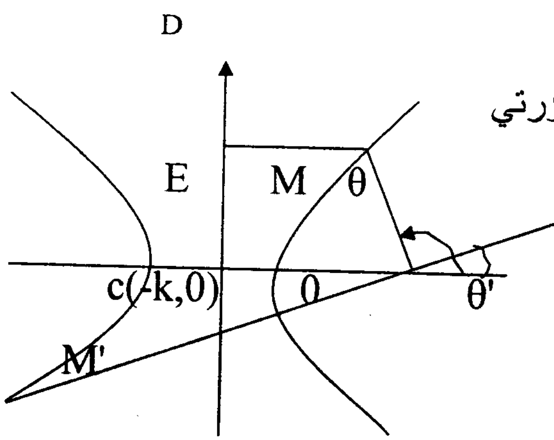
ولإيجاد إحداثيات الرأسين A القريب من البؤرة B البعيد عـــن البـــؤرة نضع $(\theta=\pi,0)$ في المعادلة القطع على الترتيب فنجد أن:

$$at \qquad \theta=\pi, \qquad r=\frac{P}{1+e}=\frac{a(1-e^2)}{1+e}=a(1-e)$$

$$at \qquad \theta=0 \qquad r=\frac{P}{1-e}=\frac{a(1-e^2)}{1-e}=a(1+e) \qquad (14)$$

ويكون الدليل على بعد $\frac{a}{e}$ من البؤرة **(تترك كتمرين للطالب)**

(iii) القطع الزائد $(e \succ 1)$



نأخذ مركز الإحداثيات في أحد بؤرتي القطع ولتكن (0) كما بالشكل

معادلة القطع هي :

$$r=\frac{P}{1-e\cos\theta} \qquad (15)$$

باتباع خطـوات مماثلـة لحالـة القطـع النـاقص نحـصل علـى

$$a=\frac{P}{e^2-1},b=\frac{P}{\sqrt{e^2-1}},k=\frac{eP}{(e^2-1)^2}=ea \qquad (16)$$

حيث C(-k,0) مركز القطع منسوبًا للبؤرة (0)

نلاحظ أن :

(i) لقيم θ التي تحقق $\cos\theta \prec \frac{1}{e}$ المعادلة (15) تعطي قيمًا موجبة للإحداثي r وهذه القيم تحدد الفرع الأيمن من القطع الزائد.

(ii) لقيم θ التي تحقق أن $\cos\theta \succ \frac{1}{e}$ نجد أن في المعادلة (15) أن القيم المناظرة تكون سالبة وهذه القيم تحدد الفرع الأيسر من القطع الزائد فمثلا نقطة `M على الفرع الأيسر للقطع نجد أن الإحداثي r لها يكون سالبًا. ولإيجاد الإحداثي r لرأس القطع A نجد أن:

$$at\ A \qquad \theta=\pi, \qquad r=\frac{P}{1+e}$$

وباستخدام المعادلة (15) نجد أن:

$$r_a=\frac{a(e^2-1)}{1+e}=a(e-1) \qquad (17)$$

معادلة الدليل هي:

$$x=-d=\overline{OG}=-(\overline{OA}+\overline{AG})$$

لإيجاد $\overline{AG}$ من تعريف القطع

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{AG}} = e \Rightarrow \qquad \overline{AG} = \frac{\overline{AG}}{e} = \frac{a(e3-1)}{e} = a - \frac{a}{e}$$

$$\therefore x = -(ae - a + a - \frac{a}{e}) = -(ae - \frac{a}{e})$$

أي أن معادلة الدليل D هي:

$$x = -(ae - \frac{a}{e}) = -\frac{a(e^2-1)}{e} \qquad (18)$$

وبالتالي تكون معادلة الدليل الأخرى D` هي:

$$x = -2k + d = -ae - \frac{a}{e} = -\frac{a(e^2+1)}{e} \qquad (19)$$

مثال:

أوجد إحداثيات المركز ونهايتي المحور الأكبر للقطع الناقص الذي يمر بالنقطتين $(3, \frac{3\pi}{2}) \qquad (4, \frac{\pi}{3}),$

الحل:

معادلة القطع الناقص هي:

$$r = \frac{P}{1 - e\cos\theta}$$

وبالتعويض بإحداثيات النقطتين نجد أن:

$$at: \quad (4,\frac{\pi}{3}): \qquad 4=\frac{P}{1-\frac{1}{2}e}=\frac{2P}{2-e} \Rightarrow \qquad 4-2e=P$$

$$at: \quad (3,\frac{3\pi}{2}): \qquad 3=\frac{P}{1-0}=P \qquad\qquad (I)$$

$$P=3, \qquad e=\frac{1}{2}$$

بحل المعادلتين:

$$at: \quad (3,\frac{3\pi}{2}): \qquad 3=\frac{P}{1-0}=P$$

$$\Rightarrow P=3, \qquad e=\frac{1}{2}$$

إحداثيات المركز هي: $c(ae,o) = (2,0)$

إحداثيات راس القطع A هي: $(-a(1-e),0) = (-2,0)$

إحداثيات الرأس B هي:

$[a(1+e),0] = (6,0)$

مثال:

حدد نوع القطع الذي معادلته

$$r=\frac{10}{(2+3\cos\theta)}$$

وارسمه ووضح على الرسم إحداثيات كل من المركز ونهايـــة محـــوره الأكبر ومعادلة الدليل القريب من البؤرة.

الحل: بوضع المعادلة على الصورة القياسية

$$r = \frac{5}{(1+\frac{3}{2}\cos\theta)} \Rightarrow$$

$$P = 5, \qquad e = \frac{3}{2} \succ 1$$

إذن هذه المعادلة تمثل قطعًا زائدًا نصفًا طولا محورية

$$a = \frac{P}{e^2 - 1} = \frac{5}{5/4} = 4 \qquad , b = \frac{P}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{5}{\sqrt{5/4}} = 2\sqrt{5}$$

إحداثيات المركز c هي $c=(ea,0) = (6,0)$

نهاية المحور الأكبر للقطع (رأس القطع)

$$\theta = 0 : V$$

$$\therefore V = (r_o, 0) = (2,0)$$

معادلة الدليل D

$$x = \frac{P}{e} = \frac{5}{3/2} = \frac{10}{3}$$

تمارين

1- حدد أنواع القطاعات الآتية، ثم ارسمها

$(i) r = 12/(6+2\sin\theta$ $\qquad (ii) r = 12/(6-2\sin\theta)$

$(iii) r = 12/(2-6\cos\theta)$ $\qquad (iv) r = 12/(2+6\cos\theta)$

2- أوجد المعادلات الكارتيزية للقطاعات في تمرين 1.

3- أوجد المعادلة القطبية للقطاعات المخروطية الآتية المعطى اختلافها المركزي ومعادلة دليلها منسوبة إلى البؤرة

$(i) e = 1/3, \quad r = 2\cos\theta \qquad (ii) e = 3/5, r = 4\operatorname{cosec}\theta$

$(iii) e = 4, \quad r = -3r\cos\theta \qquad (iv) e = 3, r = -4\sec\theta$

4- أوجد المعادلة القطبية للقطع المكافيء الذي بؤرتـــه عنـــد القطـــب ورأسه النقطة $(4, \pi/2)$.

5- أوجد المعادلة القطبية للقطع الناقص الذي اختلافه المركـــزي 2/3 ورأسه النقطة$(1, 3\pi/2)$ وبؤرته عند القطب .

6- أوجد ميل المماس لمنحنيات المعادلات الآتية عند قيمة θ المعطاة

$$(i) r = \frac{12}{6 + 2\sin\theta}, \qquad \theta = \frac{\pi}{6},$$

$$(ii) r = \frac{3}{2 + 2\cos\theta}, \qquad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$(iii) r = \frac{4}{2 - \cos\theta} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$(iv) r = \frac{12}{2 + 3\sin\theta}, \qquad \theta = 0$$

7- إذا كانت معادلة قطع مخروطي هي:

$e > 1, r = p/(1 - e\cos\theta)$

اثبت أن الزوايا التي يصنعها الخط المار بالمحور القطبي والخطـــوط التقاربية للقطع هي : $\cos^{-1}(\pm 1/e)$