

الباب السادس عشر

حل بعض تمارين الهندسة التحليلية

حل تمارين الباب التاسع

التمرين الاول :

(1) معادلة المستقيم المار بنقطتين هي:

$$\frac{x - x_1}{y - y_1} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$(2, 4) , \quad (1, -6)$$

$$\swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow$$

$$x_1 \quad y_2 \quad x_2 \quad y_2$$

بما أن النقطتين هما:

∴ معادلة المستقيم هي:

$$\frac{x - 2}{y - 4} = \frac{1 - 2}{-6 - 4} = \frac{1}{10} \Rightarrow 10x - 20 = y - 4$$

$$\therefore 10x - y - 16 = 0$$

(2) بما أن المستقيم يقطع من محور X جزءًا طوله 4

$$(4, 0)$$

∴ المستقيم يمر بالنقطة $\swarrow \searrow$ وبالتالي تكون معادلة

$$x_1 \quad y_1$$

المستقيم هي:

$$(y - y_1) = (x - x_1) \tan \theta$$

$$\therefore y - 0 = (x - 4) \tan 250^\circ$$

$$\therefore y = \frac{-\sqrt{3}}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}x 4$$

$$\therefore \sqrt{3}x + 3y - 4\sqrt{3} = 0$$

(3) بما أن المستقيم يوازي محور Y

\therefore المستقيم عمودي على محور X

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

$$\therefore \text{slope} = \tan \theta = \frac{1}{0}$$

(undefined)

وبالتالي تكون معادلة المستقيم

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m \Rightarrow \frac{y + 3}{x - 4} = \tan \theta \Rightarrow \frac{x - 4}{y + 3} = \cot \theta = 0$$

$$\therefore x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

هذه هي معادلة المستقيم .

(4) نفترض أن المستقيم يقطع من محور y طولاً b

\therefore المستقيم يقطع من محور X طولاً $a = 2b$ وبالتالي تكون معادلة المستقيم

$$\frac{x}{2b} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x + 2y}{2b} = 1$$

$$\therefore x + 2y = 2b$$

بما أن المستقيم يمر بالنقطة $(5, 1)$ فإنها تحقق معادلته .

بالتعويض عن النقطة $(5, 1)$ في معادلة المستقيم

$$5 + 2(1) = 2b + 7 \Rightarrow b = \frac{7}{2} = 3.5$$

$$a = 2b = 3.5 \times 2 = 1$$

وبالتالي تكون:

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{3.5} = 1$$

∴ معادلة المستقيم هي:

(5)

بما أن $ABCD$ هو مستطيل ، $B = (5,0), D = (0,3)$

$$\therefore C = (5,3)$$

فيكون الميل

$$\text{For } \overline{AD} : \text{slope} = m = \frac{-3-0}{0-0} = \frac{3}{0} \text{ (undefined)}$$

$$\therefore \text{equation of the straight line : } \frac{y-3}{x}$$

$$\therefore x = 0$$

$$\text{For } \overline{AB} : \text{slope} = \tan \theta = \tan 0^\circ = 0$$

$$\therefore \text{equation of the straight line : } \frac{y-0}{x-5} = 0 \Rightarrow y = 0$$

Then by $pt(5,0)$

$$\text{For } \overline{CD} \text{ slope} = m = \frac{3-3}{5-0} = 0$$

$$\therefore \text{equation of the straight line : } \frac{y-3}{x-5} = 0 \Rightarrow y = 3$$

By point $(5, 3)$

For \overline{BC} : slope = $\tan \theta = \tan 90^\circ = \frac{1}{0}$ (undefined)

$$\therefore \text{equation : } \frac{y-3}{x-5} = \tan \theta \Rightarrow \frac{x-5}{y-3} = \cot = 0$$

$$\therefore x-5=0 \Rightarrow x=5$$

بما أن القطر \overline{AC} يمر بالنقطتين $A(0,0), C=(5,3)$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{وبالتالي تكون معادلته:}$$

$$\therefore \frac{y-0}{x-0} = \frac{3-0}{5-0} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{3}{5} \Rightarrow 3x-5y=0$$

القطر \overline{BD} يمر بالنقطتين $B(5,0), D(0,3)$ وبالتالي تكون معادلته

$$\frac{y-0}{x-5} = \frac{3-0}{0-5} \Rightarrow \frac{y}{x-5} = \frac{3}{-5}$$

$$\therefore 3x-15=-5y \Rightarrow 3x+5y-15=0$$

(6) نفترض أن \overline{AB} يقطع من محور y طولاً C

$$y = mx + C \quad \therefore \text{معادلة } \overline{AB} \text{ تكون}$$

$$y = mx + C \quad \therefore \text{معادلة } \overline{CD} \text{ تكون}$$

حيث إن m تمثل ميل كل منهما

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \quad \text{لأن}$$

بما أن \overline{AB} يمر بالنقطة $A(-0,0)$ فهي تحقق معادلته

$$\therefore 0 = -6m + C \quad (1)$$

$$4x + 3y - 12 = 0$$

بما أن معادلة \overline{BC} هي

$$\therefore \text{slope} = \frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-4}{3}$$

$$\therefore \overline{BC} \perp \overline{AB}, \overline{BC} \perp \overline{CD} \Rightarrow m \times m' = -1$$

$$\therefore m = \frac{-1}{m'} = \frac{3}{4} = 0.75$$

بالتعويض في (1)

$$0 = -6 \times 0.75 + C \Rightarrow C = 4.5$$

$$(y = 0.75x + 4.5) \quad \overline{AB} \text{ معادلة } \therefore$$

$$(y = 0.75x - 4.5) \quad \overline{CD} \text{ معادلة}$$

حل تمارين الباب العاشر

التمرين الثاني :

$$(3, 1, -1)$$

(1) معادلة المستوى المار بالنقطة $\swarrow \downarrow \searrow$ وعمودي على
 $x_0 \quad y_0 \quad z_0$

$$(3, 1, -1)$$

المتجه $\swarrow \downarrow \searrow$ هي:
 $a \quad b \quad c$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$$

$$5(x - 3) + 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0$$

$$5x - 15 + 2y - 2 + 3z + 3 = 0$$

$$5x + 2y + 3z - 14 = 0$$

(2) بما أن المستوى يوازي المستوى xz

∴ المستوى عمودي على محور y

$$(5, 7, -6)$$

بما أن المستوى يمر بالنقطة

$$x_0 \quad y_0 \quad z_0$$

$$(0, 7, 0)$$

∴ عمودي على المستوى $\vec{n} = \begin{matrix} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ a & b & c \end{matrix}$

∴ معادلة المستوى هي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$(0)(x - 5) + 7(y - 7) + (0)(z + 6) = 0$$

$$\therefore 7(y - 7) = 0 \Rightarrow y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7$$

(3) بما أن المستوى المطلوب يوازي المستوى $4x - 2y = 5$

$$(4, -2, 0)$$

∴ عمودي أيضاً على المستوى المطلوب $\vec{n} = \begin{matrix} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ a & b & c \end{matrix}$

$$(2, 6, -1)$$

بما أن المستوى المطلوب معادلته يمر بالنقطة

$$x_0 \quad y_0 \quad z_0$$

∴ المعادلة المطلوبة هي:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$4(x - 2) - 2(y - 6) + 0 = 0$$

$$4x - 8 - 2y + 12 = 0 \Rightarrow 4x - 2y + 4 = 0$$

(4) بما أن المستوى يمر بالنقطتان $A = (1, 0, 5), B = (0, 2, -1)$

∴ المتجه \overline{AB} يقع في المستوى

$$\overline{AB} = (0, 2, -1) - (2, 0, 5) = (-2, 2, -6)$$

$$\therefore \text{Plane}_{(1)} \perp \text{Plane}_{(2)}, \quad \overline{n_2} \perp \text{Plane}_{(2)}$$

$$\therefore \overline{n_2} // \text{plane}_{(1)} \quad \text{where} \quad \overline{n_2} = (1, 3, 0-1)$$

$$\overline{AC} // \overline{n_2} \quad \text{نفرض أن}$$

$$ptC \in \text{Plane}_{(1)} \quad \text{حيث إن:}$$

$$\therefore \overline{AC} = K \overline{n_2} = (K, K, -K)$$

$$\therefore \overline{n_2} = \overline{AB} \times \overline{AV} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 2 & -6 \\ J & 3K & -K \end{vmatrix} = (16K, -8K, -8K)$$

وبالتالي فإن معادلة المستوى هي:

$$16K(x-2) - 8K(y-0) - 8K(z-5) = 0$$

$$\therefore 2(x-2) - (y-0) - (z-5) = 0 \Rightarrow 3x - y - z + 1 = 0$$

(5) بما أن المستوى يحتوي على محور x

∴ المستوى يمر بالنقاط $A(0,0,0), B(1,0,0)$

بما أن المستوى يمر بالنقطة $C(3,-5,1)$

$$\therefore \overline{AC} = \overline{C} - \overline{A} = (3, -5, 1)$$

$$\overline{AB} = \overline{B} - \overline{A} = (1, 0, 0)$$

نفترض أن \overline{n} عمودي على المستوى

$$\begin{aligned} \therefore \vec{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(0-0) - \hat{j}(1-0) + \hat{K}(-5-0) \\ &= -\hat{j} - 5\hat{K} \end{aligned}$$

$$(0, -1, -5)$$

$$\therefore \vec{n} = \begin{matrix} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ a & b & c \end{matrix}$$

$$(3, -5, 1)$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{matrix} \quad \therefore \text{معادلة المستوى باستخدام النقطة}$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\therefore 0 - (y + 5) - 5(z - 1) = 0 \Rightarrow -y - 5 - 5z + 5 = 0$$

$$\therefore y + 5z + 4 = 0$$

(6)

$$A(0,0,0), B(-3,0,4), C = (2,1,1)$$

$$\overline{AB} = (-3,0,4), \overline{AC} = (2,1,1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ -3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(0-4) - \hat{j}(-3-8) + \hat{K}(-3-0) \\ &= -4\hat{i} + 11\hat{j} - 3\hat{K} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} (-4, 11, -3) \\ \therefore \vec{n} = \begin{array}{ccc} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ a & b & c \end{array} \perp \text{plane} \end{array}$$

∴ معادلة المستوى بدلالة النقطة $A(0,0,0)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$-4x + 11y - 3z = 0$$

(7) بما أن كلامن

$$\text{plane}_{(1)} : x - y + z = 3$$

$$\text{plane}_{(2)} : 2x + y + 4z = 0$$

عمودي على $\text{plane}_{(3)}$

$$\therefore \vec{n}_1 = (1, -1, 1) // \text{plane}_{(3)},$$

$$\therefore \vec{n}_2 = (2, 1, 4) // \text{plane}_{(3)}$$

نفترض أن $\overline{AB}, \overline{AC}$ يقعان في المستوى $\text{plane}_{(3)}$ حيث إن النقطة A هي النقطة المعطاه .

$$A = (4, 0, -2)$$

ونفترض أن :

$$\overline{AC} // \vec{n}_1 \Rightarrow \overline{AC} = K \vec{n}_1$$

$$\overline{AB} // \vec{n}_2 \Rightarrow \overline{AB} = m \vec{n}_2$$

$$\therefore \overline{AC} = (K, -K, K), \overline{AB} = (2m, m, 4m)$$

$$\therefore \vec{n}_3 = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ 2m & m & 4m \\ K & -K & K \end{vmatrix} = mK \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \vec{n}_3 = mK [\hat{i}(1+4) - \hat{j}(2-4) + \hat{K}(-2-1)]$$

$$\therefore \vec{n}_3 = (5mK, 2mK, -3mK)$$

$$\vec{n}_3 \perp \text{plane}_3 \quad \text{حيث إن}$$

وبالتالي تكون معادلة المستوى المطلوبة

$$5mK(x-4) + 2mK(y-0) - 3mK(z+2) = 0$$

$$\therefore 5(x-4) + 2(y-0) - 3(z+2) = 0$$

$$\therefore 5x - 20 + 2y - 3z - 6 = 0$$

$$5x + 2y - 3z - 26 = 0$$

(8) بما أن المستوى يقطع جزأين طولهما 2,5 من محوري x, y على التريب .

\therefore المستوى يمر بالنقط

$$A = (2, 0, 0), B = (0, 5, 0)$$

$$\text{If } ptC = (1, 3, -2)$$

$$\therefore \overline{AC} = (1, 3, -2) - (2, 0, 0) = (-1, 3, -2)$$

$$\overline{AB} = (0, 5, 0) - (2, 0, 0) = (-2, 5, 0)$$

$$\therefore \bar{n} = \overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(0-10) - \hat{j}(0-4) + \hat{K}(-5+6)$$

$$\therefore \bar{n} = (10, 4, 1) \quad \text{where} \quad \bar{n} \perp \text{plane}$$

وبالتالي تكون معادلة المستوى باستخدام النقطة A

$$10(x-2) + 4(y-0) + z - 0 = 0$$

$$10x - 20 + 4y + z = 0 \Rightarrow 10x + 4y + z - 20 = 0$$

(10) بما أن المستوى يبعد مسافات متساوية عن النقطتين $(-1, 1, 0)$ و $(2, 7, 3)$

\therefore النقطة A تقع على المستوى حيث أن

$$A = \left(\frac{2-1}{2}, \frac{7+1}{2}, \frac{3+0}{2} \right) = (0.5, 4, 1.5)$$

بما أن المستوى يمر بصفر y فإن النقطتين

$$B = (0, 0, 0), C = (0, 1, 0)$$

تقع على المستوى

$$\therefore \overline{AB} = \bar{B} - \bar{A} = (-0.5, -4, -1.5)$$

$$\overline{AC} = \bar{C} - \bar{A} = (-0.5, -3, -1.5)$$

$$\therefore \bar{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{K} \\ -0.5 & -4 & -1.5 \\ -0.5 & -3 & -1.5 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(1.5) - \hat{j}(0) + \hat{K}(-0.5)$$

$$\therefore \bar{n} = (1.5, 0, -0.5) \perp \text{plane}$$

وبذلك تكون المعادلة المطلوبة عن طريق النقطة A

$$1.5(x - 0.5) + (0)(y - 4) - 0.5(2 - 1.5) = 0$$

$$\therefore 1.5x - 0.5z = 0 \Rightarrow 3x - z = 0$$

(12)

$$D = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

where $x_0 = -2, y_0 = 6, z_0 = 3$

$$a = 5, b = 11, c = 2, d = -30$$

$$\therefore D = \frac{-2 \times 5 + 11 \times 6 + 2 \times 3 - 30}{\sqrt{5^2 + 11^2 + 2^2}} = \frac{16\sqrt{6}}{15} \text{ units}$$

$$= 2.613 \text{ units}$$

(13) لحساب البعد بين المستويين نحسب البعد العمودي بين نقطة على المستوى الثاني ولتكن (x_0, y_0, z_0) والمستوى الأول

$$ax + by + cz + d_1 = 0$$

$$D = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\therefore pt(x_0, y_0, z_0) \in \text{plane} : ax + by + cz + d_2 = 0$$

وبالتالي فإنها تحقق معادلته:

$$\therefore ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2 = 0$$

$$\therefore ax_0 + by_0 + cz_0 = -d_2$$

$$\therefore D = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

وبالتالي تكون المسافة العمودية بين المستويين

$$4x - 8y - 2 + 9 = 0, \quad 4x - 8y - z - 6 = 0$$

$$D = \frac{9 - (-6)}{\sqrt{4^2 + 8^2 + (-1)^2}} = \frac{5}{3} = 1.667 \quad \text{units}$$

(12) بما أن المستوى يوازي المستوى

$$p_1 : 2x + y - 4z = 0,$$

$$\bar{n}_1 = (2, 1, -4) \perp p_1$$

فإن المتجه \bar{n}_1 عمودي على المستوى المطلوب

$$\therefore a = 2, b = 1, c = -4$$

(13) معادلة المستوى المار بخط تقاطع المستويين تكون

$$(x + 2y + 3z - 4) + t(3x + z - 5) = 0$$

$$\therefore x + 2y + 3z - 4 + 3tx + tz - 5t = 0$$

$$\therefore (1 + 3t)x + (2)y + (3 + t)z - 4 - 5t = 0$$

المستوى المطلوب

$$\therefore \bar{n} = (1 + 3t, 2, 3 + t) \perp \text{plane}$$

بما أن المستوى المطلوب يوازي المستوى

$$7x + 2y + 5z = 8$$

$$\therefore \vec{n}' = (7, 2, 5) // \vec{n}$$

$$\therefore \frac{1-3t}{7} = \frac{2}{3} = \frac{3+t}{5} = 1$$

$$\therefore 3+t = 5 \Rightarrow t = 2$$

وبالتالي تكون معادلة المستوى المطلوب

$$7x + 2y + 5z = 14 = 0$$

(14) المستوى يمر بخط تقاطع المستويين

$$x_y \quad \text{و} \quad 3x + 2y + 2z = 6$$

معادلة المستوى x_y هي $z = 0$

وبذلك تكون معادلة المستوى المطلوبة هي:

$$3x + 2y + 2z - 6 + tz = 0$$

بما أن المستوى يمر بالنقطة $(1, 1, 1)$

$$\therefore 3 + 2 + 2 - 6 + 2t = 0$$

\therefore المعادلة المطلوبة:

$$3x + 2y + z = 6$$

حل تمارين

(1) (أ)

$$r = 4, c = (1, 0, -3)$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ h & k & 1 \end{array}$$

معادلة سطح الكرة هي:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + y^2 + (z + 3)^2 - 4^2$$

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + z^2 + 9 + 6z - 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6z - 6 = 0$$

(ب)

$$c = (4, 5, -2)$$

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & \downarrow & \searrow \\ h & k & l \end{array}$$

$$h \quad k \quad l$$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

$$(x - 4)^2 + (y - 5)^2 + (z + 2)^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y + 4z + 45 = r^2$$

بما أن الكرة تمر بالنقطة $(1, 0, 0)$

∴ النقطة تحقق معادلة سطح الكرة

$$1 - 8 + 45 = r^2 = 38$$

∴ المعادلة

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y + 4z + 7 = 0$$

(ج) مركز الكرة هو

$$c = \left(\frac{7+3}{2}, \frac{3+1}{2}, \frac{1-3}{2} \right)$$

$$\therefore c = (5, 2, -1)$$

$$\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$$

$$h \quad k \quad h$$

$$A = (7, 3, 1)$$

بما أن الكرة تمر بالنقطة

$$\overline{AC} = (5, 2, -1) - (7, 3, 1) = (-2, -1, -2)$$

$$\|\overline{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$

وبالتالي يكون نصف القطر $(r = 3)$.

\therefore معادلة سطح الكرة

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$$

$$(x - 5)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 9$$

$$x^2 + 25 - 10x + y^2 + 4 - 4y + z^2 + 1 + 2z = 9$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 4y + 2z + 21 = 0$$

(2)

$$\overline{PC} = \overline{Q} - \overline{P} = (5, 6, 7) - (-1, 2, -3)$$

$$\overline{PQ} = (6, 4, 10) \Rightarrow \|\overline{PQ}\| = PQ = \sqrt{6^2 + 4^2 + 10^2} = 2\sqrt{38} \text{ unit}$$

$$\therefore \alpha = \cos^{-1} \frac{6}{2\sqrt{38}} = 60.88^\circ$$

$$\beta = \cos^{-1} \frac{4}{2\sqrt{38}} = 71.07^\circ$$

$$\gamma = \cos^{-1} \frac{10}{2\sqrt{38}} = 35.79^\circ$$

(1) (3)

$$\cos \theta = \frac{\bar{a}\bar{b}}{ab} = \frac{(-1, 3, 0) \cdot (2, -1, 2)}{\sqrt{1+9}\sqrt{4+1+4}}$$

$$\cos \theta = \frac{-5}{3\sqrt{10}} \Rightarrow \theta = 121.81^\circ$$

(ب)

$$vt \quad \bar{a} + 2\bar{c} = \bar{D}$$

$$\bar{D} = (-1, 3, 0) + (2, 8, 2) = (1, 11, 2)$$

$$\cos \theta = \frac{\bar{D}\bar{b}}{\|\bar{D}\| \|\bar{b}\|} = \frac{(1, 11, 2) \cdot (2, -1, 2)}{\sqrt{126}\sqrt{9}} = \frac{-5}{9\sqrt{14}}$$

$$\therefore \theta = 98,45^\circ$$

(ج)

$$comp_b a = \frac{\bar{a}\bar{b}}{\|\bar{b}\|} = \frac{-5}{3}$$

$$comp_a b = \frac{\bar{b}\bar{a}}{\|\bar{a}\|} = \frac{-\sqrt{10}}{2}$$

(د)

$$vt \quad \bar{a} + \bar{b} = \bar{e} = (1, 2, 2)$$

$$\therefore \text{comp}_{\vec{c}} \vec{e} = \frac{\vec{e} \cdot \vec{c}}{\|\vec{c}\|} = \frac{(1, 2, 2) \cdot (1, 4, 1)}{3\sqrt{2}} = \frac{11\sqrt{2}}{6}$$

(د) (4)

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = (1, 1, 7)$$

$$\overrightarrow{PR} = \vec{R} - \vec{P} = (-4, -5, 4)$$

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (39, -32, -1)$$

$$\therefore |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = 50.46$$

Area of ΔPQR

$$= \frac{1}{2} |\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}| = 25.23 \quad \text{square units}$$

(ب)

$$\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR} = (4, 5, -4)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{R} = (5, 6, 3)$$

$$\therefore \cot(\widehat{PRQ}) = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{RP}}{\|\overrightarrow{PQ}\| \|\overrightarrow{RP}\|} = \frac{(4, 5, -4) \cdot (5, 6, 3)}{\sqrt{57} \sqrt{70}} = \frac{38}{\sqrt{3990}}$$

$$\therefore m(\angle PRQ) = 53.02^\circ$$

(ج)

$$\overrightarrow{QR} = (-3, -2, 2)$$

$$\overrightarrow{OP} = (1, 3, -2)$$

$$\overrightarrow{OQ} = (2, 4, 5)$$

$$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot (\overrightarrow{OQ} \times \overrightarrow{OR}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 + 10 - 3(4 + 15) - 2(-4 + 12) = -55$$

وبالتالي يكون حجم متوازي السطوح

$$\text{Volume} = |-55| = 55 \text{ units of volume}$$

(د)

$$\overline{PQ} = \overline{Q} - \overline{P} = (1, 4, 5) - (1, 3, -2) = (1, 1, 7)$$

$$\overline{PR} = (-3, -2, 2) - (1, 3, -2) = (-4, -5, 4)$$

$$\therefore \vec{n} = \overline{PQ} \times \overline{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 7 \\ -4 & -5 & 4 \end{vmatrix} = (39, -32, -1)$$

حيث إن \vec{n} عمودي على المستوى PQR .

ومتجه الوحدة العمودي على المستوى هو متجه الوحدة في الاتجاه \vec{n}

$$\vec{u} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \frac{(39, -32, -1)}{\sqrt{2546}}$$

$$\therefore \vec{n} = \left(\frac{39}{\sqrt{2546}}, \frac{-32}{\sqrt{2546}}, \frac{-1}{\sqrt{2546}} \right)$$

(5) الشرط المطلوب يتمثل في معادلة المستوى المار بالنقاط الثلاث

$$A = (4, -3, 0)$$

$$B = (-4, -1, 3), C = (3, -5, 7)$$

$$\therefore \overline{AB} = (-8, 2, 3), \quad \overline{AC} = (-1, -2, 7)$$

$$\therefore \vec{n} = \overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -8 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = (39, -32, -1)$$

$$= \hat{i}(14 + 6) - \hat{j}(-56 + 3) + \hat{k}(16 + 2)$$

$$\therefore \vec{n} = (20, 53, 18) \perp \text{ plane}$$

وبالتالي تكون معادلة المستوى باستخدام $B = (-4, -1, 3)$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$\therefore 20(x + 4) + 53(y + 1) + 18(z - 3) = 0$$

هذا هو الشرط المطلوب

$$20x + 53y + 18z + 79 = 0 \Rightarrow$$

(6)

$$\overline{PQ} = (-3, 2, 4) - (1, -1, 4) = (-4, 3, 0)$$

إذا كان المتجه \bar{n} عموديًا على محور z و \overline{PQ}

$$\therefore \bar{n} = \overline{PQ} \times \bar{K} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \hat{i}(3 - 0) - \hat{j}(-4 - 0) + \hat{k}(0)$$

$$\therefore \bar{n} = (3, 4, 0) \Rightarrow \bar{U} = \frac{(3, 4, 0)}{5} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

ويوجد عدد لانتهائي من المتجهات العمودية على محور z و \overline{PQ} نحصل عليهما

$$\bar{N} = h(3, 4, 0) \quad \text{where } h \in R$$

$$\therefore \bar{U} = \frac{(3h, 4h, 0)}{\sqrt{9h^2 + 16h^2}} = \frac{(3h, 4h, 0)}{5h} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

ولكنه لا يوجد إلا متجه وحدة واحد فقد هو العمودي على محور z و \overline{PQ}

$$\bar{U} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right)$$

(1)

(أ)

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 + (z+3)^2 = (4)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 + 6z = 9 - 16$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6z - 7 = 0$$

(ب)

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = r^2$$

وبالتعويض في النقطة $(1, 0, 0)$

$$(-3)^2 + (-5)^2 + (2)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 38$$

$$(x-4)^2 + (y-5)^2 + (z+2)^2 = 38$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 16 - 10y + 25 + 4z + 4 = 38$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 10y + 4z + 7 = 0$$

(ج)

$$\vec{PQ} = (7, 3, 1) - (3, 1, -3) = (4, 2, 4)$$

$$\vec{PC} = \frac{\vec{PQ}}{2} = (2, 1, 2) \Rightarrow PC = C - P$$

$$(2, 1, 2) = C - (3, 1, -3) \Rightarrow C = (5, 2, -1)$$

$$|PC| = \text{نصف القطر} = \sqrt{(2)^2 + 1 + (2)^2} = \sqrt{9} = 3 = r$$

$$(x-5)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$$

$$r^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y = 4 + z^2 + 27 + 1 - 9 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 4y + 2z + 21 = 0$$

(2)

$$PQ = Q - P = (5, 6, 7) - (-1, 2, -3) = (6, 4, 10)$$

$$|PQ| = \sqrt{(6)^2 + (4)^2 + (10)^2} = 2\sqrt{38}$$

$$\cos \alpha = \frac{6}{2\sqrt{38}} \Rightarrow \alpha = 60^\circ 52' 42,35''$$

$$\cos \beta = \frac{4}{2\sqrt{38}} \Rightarrow \beta = 71^\circ 4' 5,44''$$

$$\cos \gamma = \frac{10}{2\sqrt{38}} \Rightarrow \gamma = 35^\circ 47' 44,74''$$

(i)

$$\cos \theta = \frac{ab}{|a||b|} = \frac{(-1, 3, 0) \cdot (2, -1, 2)}{\sqrt{1+9}\sqrt{4+1+4}} = \frac{-2-3}{\sqrt{10}\sqrt{9}} = \frac{-5}{3\sqrt{10}}$$

$$\theta = 121^\circ 48' 21,96''$$

(b)

$$d = a + 2 = (-1, 3, 0) + (2, 8, 2) = (1, 11, 2)$$

$$\cos \theta = \frac{db}{|d||b|} = \frac{(1, 11, 2) \cdot (2, -1, 2)}{\sqrt{1+(11)^2+(2)^2}\sqrt{(2)^2+(-1)^2+(2)^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{2-11+4}{3\sqrt{14}\sqrt{9}} \quad \theta = 81^\circ 27' 40,46''$$

(c)

$$\text{comp}_b a = \frac{ab}{b} = \frac{(-1,3,0).(2,-1,2)}{\sqrt{4+4+4}} = \frac{-2-3}{3} = \frac{-5}{3}$$

$$\text{comp}_a b = \frac{ba}{a} = \frac{(-1,3,0).(2,-1,2)}{\sqrt{1+9}} = \frac{-5}{\sqrt{10}} \frac{-\sqrt{10}}{2}$$

$$a + b = (1, 2, 2)$$

$$\text{comp}_c (a+b) = \frac{(a+b).c}{c} = \frac{(1,2,2).(1,4,1)}{\sqrt{1+16+1}}$$

$$\text{comp}_c (a+b) = \frac{1+8+2}{\sqrt{18}} = \frac{11}{\sqrt{18}} = \frac{11\sqrt{18}}{18} = \frac{33\sqrt{2}}{18} = \frac{11\sqrt{2}}{6}$$

(3)

$$\overline{PQ} = (1,1,7) \quad \overline{PR} = (-4,-5,4) \quad \overline{QR} = (-5,-6,-8)$$

$$= \frac{|\overline{PQ} \times \overline{PR}|}{2} = PQR \quad \text{مساحة المثلث}$$

$$\overline{PQ} \times \overline{PR} = \begin{vmatrix} i & J & K \\ 1 & 1 & 7 \\ -4 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= (4+12)i - (4+38)J + 9 - 5 + 4)K = 16i - 32J - K$$

$$18 \approx 17,895 = \frac{\sqrt{(16)^2 + (-32)^2 + (-1)^2}}{2} = PQR$$

مساحة المثلث

وحدة مساحة

(ب) الزاوية QRP

$$|\overline{PR} \times \overline{QR}| = 2 \quad \text{مساحة المثلث}$$

$$|\overline{PR}| \|\overline{QR}\| \sin \theta = 2 \times 17,895 = 35,79$$

$$\sin \theta = \frac{35,79}{\sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + (4)^2} \sqrt{(5)^2 + (-6)^2 + (-3)^2}} = \frac{85,79}{\sqrt{70}\sqrt{57}}$$

$$\theta = 34^\circ 30' 52,23''$$

(→)

$$\overline{OP} \cdot (\overline{OQ} \times \overline{OR}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(8+10) - 3(4+15) - 2(-4+12) = 18 - 57 - 16 = -55$$

حجم متوازي السطوح = 55

$$U = \frac{(16, -32, -1)}{\sqrt{(16)^2 + (32)^2 + (-1)^2}} = (0,447, -0,894, -0,028)$$

$$= OP \cdot U = (1, 3, -2) \cdot (0,447, -0,894, -0,028)$$

$$= 0,447 - 2,682 + 0,056 = 2,179$$

بعد نقطة الأصل المستوى 2,179

حل آخر :

(1) ايجاد معادلة المستوى

$$n = (16, -32, -1) \quad (1,3, -2)$$

وبأخذ النقطة P التي تنتمي للمستوى

$$16(x-1) - 32(y-3) - (z+2) = 0$$

$$16x - 16 - 32y + 69 - z - 2 = 0$$

$$16x - 32y - z - 78 = 0 \quad \text{معادلة المستوى}$$

(2) لايجاد البعد العمودي نعوض عن النقطة $(0, 0, 0)$ ، ثم نقسم الناتج على معيار المتجه العمودي هو n .

$$2,179 = \frac{78}{\sqrt{(16)^2 + (-32)^2 + (-1)^2}} = \text{البعد العمودي}$$

$$A(x, y, z) \quad B = (4, -3, 0) \quad C = (-4, -1, 3) \quad D(3, -5, 7)$$

$$BA = (x - 4, y + 3, z)$$

$$BC = (-8, 2, 3)$$

$$BD = (-1, -2, 7)$$

لكي تقع النقط في مستوى أفقى واحد يجب أن يكون

$$\text{حاصل ضربهم الثلاثي} = 0$$

$$\overline{BA} \cdot (\overline{BC} \times \overline{BD}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-4 & y+3 & z \\ -8 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 4(14 + 6) - (y + 3)(-56 + 3) + z(16 + 2) = 0$$

$$20x - 80 + 53y + 159 + 18z = 0$$

$$20x + 53y + 18z + 79 = 0$$

$$PQ = Q - P = (-3, 2, 4) - (1, -1, 4) = (-4, 3, 0)$$

$$U = \frac{(0, 0, n) \times (-4, 3, 0)}{5} = \left(\frac{-3n}{5}, \frac{4n}{5}, 0 \right)$$

$$\text{المتجه العمودي} = \begin{vmatrix} i & J & K \\ 0 & 0 & n \\ -4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3ni + 4nJ$$

(n عدد ينتمي إلى ج)

(مدة n تنتمي الح)

توجد متجهات أخرى تحقق الشروط.