

الباب الثاني نظرية المعادلات

Theory of equations

مقدمة :

درسنا في السابق حل المعادلات من الدرجة الأولى والثانية. المعادلة
من الدرجة الأولى في الصورة:

$$ax + b = 0$$

ويكون الحل في الصورة:

$$x = -\frac{b}{a}$$

وبالنسبة للمعادلة من الدرجة الثانية:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

فيكون الحل طبقا للقانون:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

وهنا سوف ندرس طرق حل المعادلات من الدرجة الثالثة والرابعة.

Definitions : تعاريف

(1) جذر المعادلة:

هو قيم المتغير x التي تجعل قيمة الدالة مساوية للصفر. فمثلا يقال للعدد a جذرا للمعادلة $F(x)=0$ إذا كان $F(a)=0$.

(2) دالة كثيرة الحدود:

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (1)$$

الدالة **(1)** تسمى دالة كثيرة الحدود **Polynomial** أو دالة جذرية صحيحة في x من الدرجة n ، حيث n عدد صحيح موجب، $a_0 \neq 0$

وإذا كان $x=a$ هو جذر للمعادلة فيكون $(x-a)$ هو أحد عوامل كثيرة الحدود.

(3) إذا كانت الدالة $F(x)$ من الدرجة n وكانت a جذرا للمعادلة ومكرر k من المرات فإن a تسمى صفرًا لكثيرة الحدود، ويكون في هذه الحالة

$$F(a) = F'(a) = F''(a) = \dots = F^{k-1}(a) = 0$$

Theory of remainder : نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $F(x)$ على القيمة $(x-a)$ فإن نظرية الباقي

$$R=F(a)$$

هي:

البرهان:

إذا افترضنا أن $Q(x)$ هو خارج قسمة $F(x)$ على $(x-a)$ وأن R

هي الباقي أي أن:

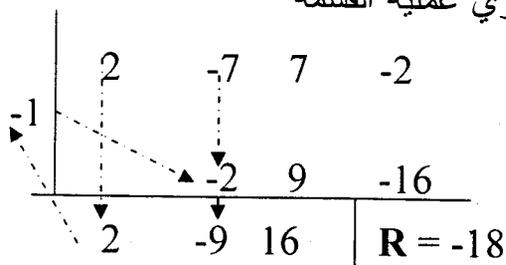
$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$$

على $(x+1)$.

الحل

$$(x + 1) = [x - (-1)]$$

أولا نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة



$$R = -18$$

فيكون الباقي هو

ويكون خارج القسمة هو:

$$Q(x) = 2x^2 - 9x + 16$$

مثال 2:

أوجد خارج قسمة

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$$

على $(x-2)$.

الحل:

$$(x - 2) = [x - (+2)]$$

أولا نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة

$$\begin{array}{r|rrrr}
 2 & 2 & -7 & 7 & -2 \\
 & & 4 & -6 & 2 \\
 \hline
 & 2 & -3 & 1 & R=0
 \end{array}$$

$$R = 0$$

فيكون الباقي هو:

ويكون خارج القسمة هو:

$$Q(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

القسمة على المقدار $(ax-b)$:

الدالة $F(x)$ يمكن كتابتها على الصورة:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= (ax - b) Q(x) + R \\
 &= a(x-b/a)Q(x) + R
 \end{aligned}$$

مثال 3:

أوجد خارج قسمة المقدار

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 + x + 5$$

$$(2x - 1) = 2[x - (1/2)] \quad \text{على}$$

الحل: من الواضح أن $a=2$ ، $b=1$ أي أن

$$b/a = 1/2$$

أولاً: نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 4 & 1 & 5 \\
 (1/2) & & & & & \\
 \hline
 & & (1/2) & -(5/4) & (11/8) & (19/16) \\
 \hline
 & 1 & -(5/2) & (11/4) & (19/8) & R = (99/16)
 \end{array}$$

$R = (99/16)$ ويكون الباقي هو:

وخارج القسمة هو:

$$Q(x) = \frac{1}{2}[x^3 - (5/2)x^2 + (11/4)x + (19/8)]$$

القسمة على المقدار $(x-a)(x-b)$

مثال 4: أوجد خارج قسمة المقدار $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x + 6$

على $(x+1)(x-1)$

الحل: أولاً: نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة على أحد

القوسين ثم نكرر نفس العملية على القوس الآخر.

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 3 & -4 & 2 & 6 \\
 1 & & & & \\
 \hline
 & & 3 & -1 & 1 \\
 \hline
 & 3 & -1 & 1 & 7 = R_1 \\
 \hline
 & & -3 & +4 & \\
 \hline
 & 3 & -4 & 5 = R_2 &
 \end{array}$$

$$Q_1(x) = 3x -$$

ويكون للدالة خارج القسمة

4

والباقي في هذه الحالة معادلة من الدرجة الأولى الشكل العام لها هو

$$R = R_2(X-a) + R_1$$

بمعنى أن

$$R = 5(x-1) + 7 = 5x - 5 + 7 = 5x + 2$$

مثال 5: أوجد خارج قسمة المقدار

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 + 6x + 13$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1) \quad \text{على}$$

الحل:

أولاً: نقوم بكتابة المعاملات ونجري عملية القسمة على أحد القوسين

ثم نكرر نفس العملية على القوس الآخر.

	1	-5	9	0	6	13	
2		2	-6	6	12	36	
	1	-3	3	6	18	49 = R ₁	
1		1	-2	1	7		
	1	-2	1	7	25 = R ₂		

تكون للدالة خارج القسمة

$$Q(x) = X^3 - 2X^2 + X + 7$$

ويكون الباقي في هذه الحالة معادلة من الدرجة الأولى الشكل العام لها هو:

$$R = R_2(X-a) + R_1$$

بمعنى أن

$$R = 25(X-2) + 49$$

* * *

تمارين

استخدم طريقة هورنر للقسمة لإيجاد خارج القسمة والباقي للدوال الآتية:

$$1) f(x) = 3x^6 - 7x^5 + 5x^4 - x^2 - 6x - 8$$

على $(x + 2)$

$$2) f(x) = 5x^5 - 7x^3 + 6x^2 - 2x + 4,$$

على $(x - 1)$

$$3) f(x) = x^5 - 5x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 16x + 13$$

على $(x^2 - 3x + 2)$

$$4) f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 4x - 3$$

على $(2x + 3)$

$$5) f(x) = 5x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 1$$

على $(x - 2)(2x - 3)$

* * *

خواص كثيرة الحدود

Polynomial properties

الخاصية الأولى: العلاقة بين معاملات كثيرة الحدود وجذورها.

إذا كانت هناك كثيرة حدود من الدرجة n على الصورة

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_nx^0,$$

وكانت x_1, \dots, x_n هي جذور كثيرة الحدود.

و الآن سوف نذكر بعض هذه العلاقات بين هذه الجذور والمعاملات

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

(1) إذا كانت $F(x)$ من درجة n فإن لها عدد n من الجذور بالتحديد

وليس ضرورياً أن تكون هذه الجذور مختلفة.

(2) إذا كانت جميع معاملات كثيرة الحدود $F(x)$ حقيقية فإن الجذور

التخيلية (إن وجدت) يجب أن تكون مقترنة

بمعنى أنه إذا كان $(a+ib)$ جذراً للمعادلة فإن المرافق $(a-ib)$ يجب أن

يكون أيضاً جذراً من جذور المعادلة.

(3) إذا كانت x_0, x_1, \dots, x_n هي جذور المعادلة فإن:

$$1) \sum_{i=1}^n x_i = x_1 + \dots + x_n = \frac{-a_1}{a_0}$$

$$2) \sum_{i,j=1}^n x_i x_j = x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots = \frac{a_2}{a_0}$$

$$\sum_{i,j,k=1}^n x_i x_j x_k = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + \dots = \frac{-a_3}{a_0}$$

3)

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

مثال 1: في المعادلة من الدرجة الثالثة:

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$$

إذا كانت x_1, x_2, x_3 جذوراً للمعادلة فإن:

$$1) \quad x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$2) \quad x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{a_2}{a_0}$$

$$3) \quad x_1 x_2 x_3 = -\frac{a_3}{a_0}$$

مثال 2: إذا كانت x_1, x_2, x_3 هي جذور المعادلة

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \quad \dots \quad (I)$$

$$1) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$$

فأثبت أن:

$$2) \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3$$

$$3) x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 8$$

الحل : من الخاصية الأولى السابقة يكون

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = -2, a_3 = 1$$

$$a) \therefore x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_1}{a_0} = 0$$

$$b) x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = -2$$

$$c) x_1x_2x_3 = 1 \Rightarrow \text{From a), b), c)} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= 0 - 2(-2) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) \\ &= 0 - 2(-2) = 4 \end{aligned}$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 =$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\times (x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3$$

$$x_2x_1 + x_2^2 + x_2x_3$$

$$x_3x_1 + x_2x_3 + x_3^2$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2 + x_3)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$\therefore x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

(2) بما أن الثلاثة جذور x_1, x_2, x_3 هي جذور للمعادلة (I)

$$x_1^3 - 2x_1 + 1 = 0,$$

$$x_2^3 - 2x_2 + 1 = 0,$$

$$x_3^3 - 2x_3 + 1 = 0$$

بجمع الثلاث معادلات ينتج أن

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 2(x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 0.$$

$$\Rightarrow (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 2(0) + 3 = 0,$$

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) = -3$$

(3) بما أن الثلاثة جذور هي جذور للمعادلة فلا بد أن يحققوها

وبالضرب في x

$$x_1^4 - 2x_1^2 + x_1 = 0,$$

$$x_2^4 - 2x_2^2 + x_2 = 0,$$

$$x_3^4 - 2x_3^2 + x_3 = 0.$$

بجمع الثلاث معادلات ينتج أن

$$(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + (x_1 + x_2 + x_3) = 0$$

$$\Rightarrow (x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) - 2(4) + (0) = 0$$

$$(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) = 8.$$

ملاحظة:

إذا اختلفت إشارتي $F(b), F(a)$ فإن أحد جذور المعادلة $F(x)=0$ يقع بين

a, b

تعريف:

إذا كانت كثيرة الحدود مرتبة ترتيباً تنازلياً حسب قوى x وكان فيها حدين متتاليين مختلفين في الإشارة فإننا نقول: إن كثيرة الحدود تحتوي على تغير واحد في الإشارة.

قاعدة ديكارت للإشارات

Descart's Rule of signs

المعادلة $F(X)$ ليس لها جذور موجبة حقيقية أكثر من عدد التغيرات في إشارة كثيرة الحدود ويكون عدد الجذور الموجبة مساوي لعدد التغيرات في الإشارة أو أقل منه بمقدار زوجي.

كما أن عدد الجذور الحقيقية السالبة لا تزيد عن عدد التغيرات في إشارة الدالة $F(-x)$.

مثال: حدد إشارات جذور المعادلة

$$F(x) = 2x^5 - 4x^4 - 9x - 2$$

الحل :

بما أن الدالة $F(x)$ بها تغير واحد في الإشارات فإن $F(x)=0$

*يكون لها جذر موجب واحد على الأكثر وبما أن

$$F(-x) = -2x^5 - 4x^4 + 9x - 2$$

*بها تغيران في الإشارة فتكون الدالة لها على الأكثر جذران سالبان
*والجذران الآخران لابد وأن يكونا تخيليان على الأقل أو يكون لها
أربعة جذور تخيلية وليس لها جذور سالبة على الإطلاق.

الخاصية الثالثة: تحويل المعادلات

نحتاج في بعض الأحيان إلى تحويل معادلة إلى أخرى وتربط جذور
المعادلتان علاقة معا.

أ- تكوين معادلة جذورها مكبرة k مرة لجذور معادلة معلومة :

يتم ذلك بضرب المعاملات لكثيرة الحدود الأصلية $F(x)$

في قوى k المختلفة تبعا للقاعدة التالية:

$$F(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n,$$

فتكون المعادلة التي جذورها تساوي k مرة من هذه المعادلة:

$$g(x) = a_0x^n + a_1k^1x^{n-1} + a_2k^2x^{n-2} \dots + a_nk^n.$$

مثال: كون المعادلة التي جذورها عشر مرات جذور المعادلة:

a) $2x^3 - 4x^2 + 3x - 5 = 0$

b) $5x^4 - 3x + 8 = 0$

الحل:

a) $2x^3 - 40x^2 + 300x - 5000$

b) $5x^4 - 3000x + 80000 = 0$

تكبير (تصغير) جذر المعادلة

هو تكوين معادلة أخرى تزيد أو تنقص جذورها بمقدار معين وذلك يتم تبعاً لما سيوضح بالأمثلة الآتية:

أمثلة Solved Problems

مثال 1: أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار "2" عن جذور المعادلة

$$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 11x + 1$$

الحل: نقوم بقسمة الدالة على $(x + 2) = 0 \Rightarrow x = -2$

ولكن نستمر حتى النهاية

	1	6	12	11	1	
-2						
		-2	-8	-8	-6	
	1	4	4	3		$R_1 = -5$
		-2	-4	0		
	1	2	0			$3 = R_2$
		-2	0			
	1	0				$0 = R_3$
		-2				
	1					$-2 = R_4$
	1					$1 = Q_n$

حيث Q_n تأخذ الشكل:

$$g(y) = Q_n(y) \cdot y^n + R_n \cdot y^{n-1} \dots + R_1$$

فتكون المعادلة الجديدة التي تزيد جذورها بمقدار 2 هي:

$$g(y) = y^4 - 2y^3 + 3y - 5$$

$$\text{put } y = (x+2) \Rightarrow F(x) = (x+2)^4 - 2(x+2)^3 + 3(x+2) - 5$$

مثال 2: أوجد المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار "2" عن جذور

المعادلة

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$$

الحل: نقوم بقسمة الدالة على $(x-2) = 0 \Rightarrow x=2$ ولكن نستمر حتى النهاية

2	-3	4	-5	6	
2		4	2	12	14
2	1	6	7	20=R ₁	
	4	10	32		
2	5	16	39=R ₂		
	4	18			
2	9	34=R ₃			
	4				
2	13=R ₄				
2=Q _n					

تكون المعادلة الجديدة التي تتقص جذورها بمقدار 2 هي

$$g(y) = 2(x-2)^4 + 13y^3 + 34y^2 + 39y + 20$$

وبوضع

$$y = (x-2) \Rightarrow$$

$$F(x) = 2(x-2)^4 + 13(x-2)^3 + 34(x-2)^2 +$$

$$+ 39(x-2) + 20 = 0$$

الحلول التقريبية للمعادلات

Approximate solutions of equations

هي عبارة عن طرق لإيجاد حلول تقريبية للمعادلات تكون قريبة من الحل الأساسي ولكنها لاتساويه وتستخدم في المعادلات التي يصعب الحصول منها على الحل الأساسي، وهناك ثلاث طرق:

(1) طريقة نيوتن.

(2) طريقة هورنر.

(3) طريقة الوضع الزائف.

طريقة نيوتن

Newton's Method

هذه الطريقة يستخدم فيها التكرار (iteration) لحل المعادلة $F(x)=0$ حيث $F(x)$ لابد وأن يكون لها المشتقة الأولى $F'(x)$. هذه الطريقة

مشهورة جدًا لأنها سهلة الاستعمال وتعطي حلول تقريبية جيدة.

تعتمد هذه الطريقة على الخطوات الآتية:

إذا أعطيت الدالة $F(x)$ التي لها مشتقاتها التفاضلية وأيضاً أعطيت نقطة البداية x_0 فيكون التقريب الأول هو x_1 حيث :

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

وبالتالي التقريب رقم $n+1$ هو :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad (1)$$

ومن الواضح أنه لا بد من وجود نقطة للبداية x_0 وتعين إما بفرض أي نقطة أو بتعيين فترة يوجد بها الجذر الحقيقي ولتكن $[a, b]$ ثم نعين

$$x_0 = \frac{b+a}{2} \quad \text{قيمة النقطة}$$

نتوقف عن تعيين القيم التقريبية إذا وجدنا أن هناك جذران الفرق بينهم بسيط جداً أو يتحدد في المسألة عدد المرات المطلوب إيجاد التقريب لها.

مثال

استخدم طريقة نيوتن لتعيين حلول تقريبية للمعادلة التالية

$$F(x) = x^3 + x - 1$$

الحل باستخدام طريقة نيوتن للحل يكون القانون العام للحل هو :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^3 + x_n - 1}{3x_n^2 + 1} \quad (1)$$

ولكن المشكلة هنا أنه لا توجد نقطة بداية فنقوم بتعيين فترة يقع بها الجذر وهي الفترة $[0, 2]$

ملاحظة: يوجد أكثر من فترة ولك الاختيار، المهم أن نقطة البداية هي

$$x_0 = \frac{b+a}{2} = \frac{2+0}{2} = 1$$

النقطة التي تتوسط تلك الفترة وهي

وبوضع $n=0$

$$\therefore x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + x_0 - 1}{3x_0^2 + 1} = 1 - \frac{1+1-1}{3+1} = 0.75,$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + x_1 - 1}{3x_1^2 + 1} = 0.750.75 - \frac{0.1718}{2.6875} \\ = 0.686047$$

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 + x_2 - 1}{3x_2^2 + 1} = 0.686047 - \frac{(0.686047)^3 + (0.686047) - 1}{3(0.686047)^2 + 1} \\ = 0.68234,$$

$$x_4 = 0.6823278$$

يتضح من النتائج أن x_4 هي الحل لأن الفرق بينها وبين x_3 أقل ما

$$x_3 - x_4 = [(1.177865).(10)]^{-5} \rightarrow 0 \quad \text{يمكن، أي أن:}$$

* * *

طريقة هورنر

Horner`s Method

فى بعض الأحيان لا نستطيع أن نوجد جذور المعادلة تحليليًا ومن ثم فمن الطبيعي أن نستخدم طريقة تقريبية لإيجاد هذه الجذور عدديًا. ومن هذه الطرق طريقة هورنر.

*أولاً: نبدأ باستخدام قاعدة الإشارات

*والعلاقات بين الجذور لتعيين نقطة الانطلاق التي سنقوم بقسمة المعادلة عليها وذلك.

*لتعيين المعادلة التي تنقص جذورها بهذا المقدار.

*ونعين حل هذه المعادلة الجديدة وذلك بحذف القيم الكبيرة.

*ونكرر العملية هذه أكثر من مرة ثم نقوم بجمع هذه الزيادات كلها.

مثال: استخدم طريقة هورنر لتعيين حلول تقريبية للمعادلة

$$f(x) = x^4 - 12x^2 + 12x - 3 = 0$$

الواقع بين (2,3).

الحل: باستخدام طريقة هورنر حيث إن

$$f(3) = (3)^4 - 12(3)^2 + 12(3) - 3 \Rightarrow$$

$$f(3) = 81 - 108 + 36 - 3 = (107) - (111) = 6$$

وأيضا

$$f(2) = (2)^4 - 12(2)^2 + 12(2) - 3 \Rightarrow$$

$$f(2) = 16 - 48 + 24 - 3 = (40) - (51) = -11$$

فنتيجة لتغير الإشارة يعني أن أحد جذور المعادلة يقع في تلك الفترة وبالتالي تكون الفترة المناسبة لبداية الحل. وطريقة هورنر تتلخص في خطوات ثلاث.

(1) نحصل على معادلة تنقص جذورها بمقدار "2" وذلك كما يلي:

1	0	-12	12	-3
	2	4	-16	-8
1	2	-8	-4	-11=R ₁
	2	8	0	
1	4	0	-4=R ₂	
	2	12		
1	6	12=R ₃		
	2			
1	8=R ₄			
1				

تكون المعادلة الجديدة التي تنقص جذورها بمقدار 2 هي

$$g(y) = y^4 + 8y^3 + 12y^2 - 4y - 11 = 0$$

ولتحويل الحسابات إلى التعامل مع أرقام صحيحة نضرب جذور المعادلة

(1) في العدد 10 لنحصل على

$$y^4 + 80y^3 + 1200y^2 - 4000y - 110000 = 0 \dots (2)$$

جذورها تقع في الفترة (0,10) بإهمال الحدين الأولين في المعادلة (2) نجد أن لها جذر موجب وحيد يقع في الفترة (8,9) وبذلك يكون الرقم العشري الأول في جذر المعادلة الأصلية هو (0.8) .

نعمل على إنقاص جذر المعادلة (2) بمقدار 8 نحصل على

$$z^4 - 112z^3 + 350z^2 + 32608z - 21044 = 0 (3)$$

جذورها تقع بين (0,1) ثم نضرب الجذر في العدد 10 نحصل على

$$z^4 - (1120)z^3 + (35000)z^2 + (32608000)z - 210440000 = 0 (4)$$

نلاحظ أن الحدين الآخرين في معادلة (4) هما اللذان يؤثران على قيمة الجذر ولذلك نهمل الحدود الأخرى عند التجربة في تعيين الفترة التي تقع فيها الجذور ومن ثم نرى أن المعادلة (4) لها جذر يقع في الفترة (6,7) وبالتالي فإن الجذر الموجب للمعادلة الأصلية لرقمين عشريين هو $x = 2.86$

طريقة أخرى لشرح الخطوة السابقة:

بإهمال الحدين الأولين في المعادلة (2) نجد أن لها جذر موجب وحيد يقع في الفترة (8,9) وبذلك يكون الرقم العشري الأول في جذر المعادلة الأصلية هو (0.8) . نعمل على إنقاص جذر المعادلة (2) بمقدار 8 نحصل على

$$g(y) = y^4 + 8y^3 + 12y^2 - 4y - 11 = 0$$

نهمل الحدود الكبيرة ينتج أن

$$g(y) = 12y^2 - 4y - 11 = 0$$

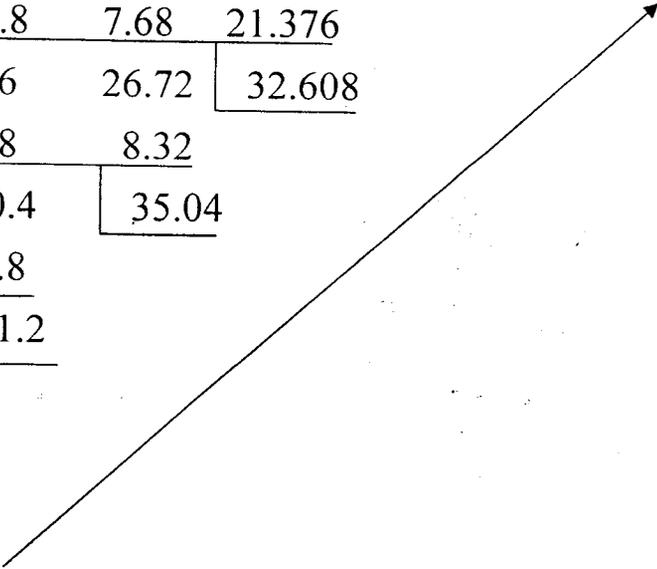
(1) ومنها نستطيع إيجاد قيمتين لـ Y من خلال القانون العام وهما

$0.805, 1.13$ - نعوض في المعادلة ونختار القيمة التي تعطي أقل

قيمة ونكون المعادلة التي ينقص جذورها بمقدار القيمة المطلقة

0.8 تقريباً لأقرب رقم عشري.

0.8	1	8	12	-4	-11
		0.8	7.04	15.232	8.9856
	1	8.8	19.04	11.232	-2.0144
		0.8	7.68	21.376	
	1	9.6	26.72	32.608	
		0.8	8.32		
	1	10.4	35.04		
		0.8			
	1	11.2			
	1				



فتكون المعادلة التي تنقص جذورها بمقدار 0.8 عن المعادلة $g(y)$ هي:
 $h(z) = z^4 + 9.6z^3 + 31.16z^2 + 29.5z - 2.8336$

بإزالة الحدود الكبيرة وإيجاد جذور المعادلة

$$z = 0.058 \quad \text{or} \quad z = -0.9887$$

وبالتعويض عن قيم في المعادلة ونأخذ القيمة التي تعطي أقل ناتج

$$\therefore z \cong 0.06$$

(2) بنفس الطريقة نقوم بإزالة الحدود الكبيرة وإيجاد الحل لأقرب رقم
مئوي ويكون 0.06 ويكون الحل النهائي هو

$$x = 2 + 0.8 + 0.06 = 2.86$$

وهو الحل التقريبي الذي حصلنا عليه.

طريقة الوضع الزائف

Method of false position

تتلخص تلك الطريقة في أنه إذا كانت $F(x)$ دالة مستمرة في الفترة
 $[a_n, b_n]$ وتحقق الشرط:

$$F(a_0).F(b_0) < 0$$

(أي أن إشارتي $F(a_0), F(b_0)$ مختلفتين) فإن الحل التقريبي بطريقة
التكرار (iteration) هو:

$$C = \frac{a_n F(b_n) - b_n F(a_n)}{F(b_n) - F(a_n)}$$

وبعد حساب القيمة C يبقى أمامنا ثلاث خيارات:

(1) إذا كانت $F(C)=0$ فتكون القيمة C هي الجذر المطلوب.

(2) أما إذا كانت $F(a_n).F(C) < 0$

$$a_{n+1} = a_n, \quad b_{n+1} = c \quad \text{نضع}$$

(3) ماعدا ذلك نضع

$$a_{n+1} = C, \quad b_{n+1} = b_n$$

مثال: استخدم طريقة الوضع الزائف لتعيين حلول تقريبية للمعادلة:

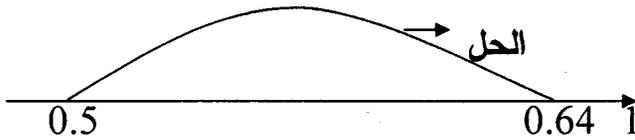
$$F(x) = x^2 + x - 1 = 0$$

القريب من النقطة $x=1$.

الحل: باستخدام طريقة الوضع الزائف أولا نبحث عن فترة يكون بها الحل وذلك عن طريق إيجاد دوال بعض النقط حتى نحصل على نقطتين

$$F(0.5) = -0.25, \quad f(1) = 1 \quad \text{تبادلان الإشارة مثل}$$

$$b_0 = 1, \quad a_0 = 0.5 \quad \text{إن يمكن اختيار}$$



فيكون الحل موجود في الفترة $[0.5, 1]$ وعلى ذلك نستطيع تعيين قيمة

الـ x_1 والحل التقريبي الأول باستخدام القانون:

$$x_1 = \frac{a_0 F(b_0) - b_0 F(a_0)}{F(b_0) - F(a_0)} =$$

$$= \frac{0.5 \times 1 - 1 \times (-0.25)}{1 - (-0.25)} = C = 0.6$$

وبالتعويض في المعادلة الأصلية بالقيمة $x_1 = 0.6$ فنحصل على قيمة
دالة النقطة الجديدة $F(0.6) = -0.04$

وعلى ذلك يكون الحل يقع في الفترة $[0.6, 1]$ وبوضع

$$a_{n+1} = 0.6, b_{n+1} = 1$$

$$x_2 = \frac{(0.6) \cdot 1 - (1)(0.04)}{1 + 0.04} = 0.615384615$$

ونكرر نفس القانون لكن بالنسبة للفترة الجديدة وهكذا حتى نتوقف نتيجة
لتكرار جذران.

تمارين

(1) أوجد الحل الحقيقي للمعادلات الآتية باستخدام طريقة الوضع الزائف

$$(1) x^4 = 3,$$

$$(2) x^3 - 5x = 6,$$

$$(3) x^3 - 2x = 5.$$

(2) باستخدام الثلاث طرق أوجد مجموعة الحلول التقريبية لإيجاد

الجذور الحقيقية للمسائل التالية:

$$1) f(x) = x^3 - 5x + 3$$

$$2) f(x) = x^4 - x^3 - 2x - 34$$

$$3) f(x) = x^3 - 3.5x^2 + 4.79x - 1 \quad 4) f(x) = x^3 - 2x + 5$$

(3) استخدم طريقة هورنر للقسمة لإيجاد خارج القسمة والباقي عند قسمة:

$$i) F(x) = 3x^6 - 7x^5 + 5x^4 - x^2 - 6x - 8$$

على (x+2)

$$ii) F(x) = 5x^5 - 7x^3 + 6x^2 - 2x + 4$$

على (x-1)

$$iii) F(x) = x^5 - 4x^4 + 9x^3 - 6x^2 - 16x + 13$$

على (x²-3x+2)

$$F(x) = 2x^3 - 8x^2 + 5 \quad (4) \text{ إذا كانت}$$

أوجد g(x) التي تزيد عن جذور F(x) بمقدار 2 وأيضا h(x) التي تنقص جذورها بمقدار 3 عن g(x).

(5) أوجد المعادلة التي تزيد جذورها بمقدار 2 عن جذور المعادلة:

$$F(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 - 5x + 4$$

(6) باستخدام طريقة نيوتن ثلاث مرات أوجد الجذر الحقيقي لكل من

$$2x^3 + 3x - 4 = 0, \quad 3x^3 + x^2 - 11x + 6 = 0,$$

* * *

المعادلات من الدرجة الثالثة

Equations of third degree

طريقة كاردان Kardan's Method

أولاً: معلوم الشكل العام للمعادلة من الدرجة الثالثة هو:

$$x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3 = 0$$

ولتطبيق طريقة كاردان لابد وأن يكون معامل x^2 يساوي الصفر
وللتخلص من هذا نتبع الآتي قبل إجراء الطريقة:

نقوم بإجراء تعويضة وهي:

$$x = y - \frac{b_1}{3}$$

وبذلك نحصل على معادلة خالية من الحد التربيعي ويكون شكلها العام:

$$y^3 + ay + b = 0$$

ثم نقوم بتطبيق الطريقة وهي تتلخص في ثلاث احتمالات للحل تعتمد
على قيمة معينة اسمها المميز: Δ

الاحتمال الأول: أن تكون قيمة المميز قيمة موجبة (أكبر من الصفر)

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 > 0$$

في هذه الحالة يكون للمعادلة جذر حقيقي وجذران تخيليان مترافقان

$$m^2 - bm - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0 \quad \text{ويمكن تعيينهم عن طريق حل المعادلة}$$

$$l = (m_1)^{\frac{1}{3}}, n = (m_2)^{\frac{1}{3}} \quad \text{تم نوجد الجذور } m_1, m_2 \text{ ثم نعين القيم}$$

$$(l + n, lw + nw^2, lw^2 + nw) \quad \text{ومنها تكون الجذور الثلاث هي}$$

الاحتمال الثاني:

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0 \quad \text{أن تكون قيمة المميز } \Delta \text{ تساوي الصفر}$$

في هذه الحالة يكون للمعادلة جذور حقيقية ومنها جذران متساويان

$$m^2 - bm - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0 \quad \text{ونعينهم عن طريق حل المعادلة}$$

$$\text{ثم نوجد الجذور } m_1 = m_2 \text{ ثم نعين القيم } l = (m_1)^{\frac{1}{3}} \text{ ومنها تكون}$$

$$(2l, -l, -l) \quad \text{الجذور الثلاث هي}$$

الاحتمال الثالث: أن تكون قيمة المميز أقل من الصفر

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$$

وفي هذه الحالة نعين الجذور من العلاقة

$$2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\theta + 2\pi k}{3}, \quad k = 0, 1, 2$$

حيث إن قيم المتغيرات هي

$$r^2 = -\left(\frac{a}{3}\right)^3,$$

$$\cos \theta = -\frac{b}{2r}$$

أمثلة Solved Problems

مثال 1: حل المعادلة

$$x^3 - 9x + 28 = 0$$

الحل: المعادلة خالية من الحد التربيعي إذا بدأ الحل

عن طريق تعيين إشارة المميز بالمقارنة مع المعادلة العامة:

$$x^3 + ax + bx = 0$$

$$a = -9, \quad b = 28 \quad \text{نحصل على:}$$

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = (14)^2 + (-3)^3 > 0$$

وعلى ذلك تكون المعادلة من الدرجة الثانية هي:

$$m^2 - bm - \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0$$

$$m^2 - 28m + 27 = 0$$

ويكون حلها هو $m_1 = -1, m_2 = -27$ وعلى ذلك قيمة

$l = -1, n = -3$ ومنها الجذور للمعادلة المعطاة هي:

$$(l + n, lw + nw^2, lw^2 + nw)$$

$$l + n = -4, \Rightarrow (-4, -w - 3w^2, -w^2 - w)$$

$$\therefore w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$(-4, 2+3i, 2-3i)$$

فإن الجذور هي:

مثال 2: حل المعادلة

$$x^3 - 15x^2 - 33x + 847 = 0$$

الحل: أولاً نلاحظ أن المعادلة تحتوي على حد تربيعي لا بد من التخلص منه قبل بداية الحل وذلك عن طريق التعويض

$$x = y - \frac{a_1}{3a_0} = y + 5$$

وباستخدام التعويض المباشر أو أي طريقة أخرى (هورنر للقسمة التركيبية)

	1	-15	-33	847
5		5	-50	-415
	1	-10	-83	<u>432</u>
		5	-25	
	1	-5	<u>-108</u>	
			5	
	1	0		
			1	

نحصل على المعادلة الخالية من الحد التربيعي:

$$y^3 - 108y + 432 = 0 \quad (3)$$

وبالمقارنة بالمعادلة:

$$y^3 + ay + b = 0$$

$$a = -108, b = 432$$

ويمكن إجراء الحل حيث

ومنها إيجاد قيمة المميز

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = (216)^2 + (-36)^3 = 0$$

وعلى ذلك نكون المعادلة هي:

$$\therefore m^2 - bm - (-a/3)^3 \Rightarrow$$

$$m^2 - 432m + (108/3)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$m = \frac{432 \pm \sqrt{(432)^2 - 4(108/3)^3}}{2} = 216$$

وعلى ذلك قيمة

$$m_1 = m_2 \text{ ثم نعين القيم } l = (m_1)^{\frac{1}{3}} \text{ ومنها تكون الجذور الثلاث هي } (2l, -l, -l)$$

$$\therefore l = (b/2)^{1/3} = \sqrt[3]{216} = 6$$

ومنها الجذور للمعادلة (3) هي (6,6,-12) وتكون الجذور الأصلية للمعادلة هي: (-7,11,11)

مثال 3:

$$x^3 - 6x + 4 = 0$$

حل المعادلة

الحل:

أولا المعادلة خالية من الحد التربيعي إذا بدأ الحل عن طريق تعيين

$$a=-6, b=4$$

إشارة المميز حيث:

ومنه المميز:

$$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 < 0$$

وعلى ذلك تكون طريقة الحل هي إيجاد

$$r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, \quad \cos \theta = \frac{-b}{2r} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

وتكون الجذور هي

$$2r^{\frac{1}{3}} \cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} = 2\sqrt{2} \cos \frac{3\pi + 8\pi k}{12},$$

$$k = 0, 1, 2. \Rightarrow$$

$$x_1 = 1.82, \quad x_2 = -2.6, \quad x_3 = 0.732.$$

إذن مجموعة الحل هي: (1.82, -2.6, 0.732)

المعادلات من الدرجة الرابعة

Equations of fourth degree

طريقة فراري Ferrary Method

الصورة العامة لمعادلة الدرجة الرابعة هي:

$$a_0x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (1)$$

وتتلخص طريقة الحل فيما يلي:

أولا : نجعل معامل x^4 يساوي الواحد وذلك بالقسمة على a_0 ثم نكتب المعادلة على الصورة

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d$$

ثانيا: بطريقة إكمال المربع:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + l\right)^2 = \frac{a^2}{4}x^2 + l^2 + (2l)x^2 + alx - bx^2 - cx - d,$$

$$\therefore \left(x^2 + \frac{a}{2}x + l\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 2l - b\right)x^2 + (al - c)x + l^2 - d$$

ثم نختار l بحيث يكون الطرف الأيمن للمعادلة الأخيرة على الصورة:

$$(mx + n)^2$$

وتصبح المعادلة الأخيرة النهائية على الصورة:

$$\left(x^2 + \frac{a}{2}x + l\right)^2 = (mx + n)^2 \quad (2)$$

وبذلك يكون

$$m^2 = \frac{a^2}{4 + 2l - b},$$

$$n^2 = l^2 - d, \quad (3)$$

$$mn = \frac{1}{2}(al - c)$$

ومن (3) يكون:

$$\left(\frac{a^2}{4} + 2l - b\right)(l^2 - d) = \frac{1}{4}(al - c)^2$$

وهذه معادلة من الدرجة الثالثة في l ونوجد أحد جذورها بأبسط الطرق الممكنة (طريقة التخمين) ونعوض بقيمته في (3) فنحصل على قيمتي m, n ثم نعوض بقيمة m, n في (2) نحصل على معادلتين من الدرجة الثانية

$$x^2 + \frac{a}{2}x + l = \pm(mx + n)$$

ومنها نحصل على الأربع جذور للمعادلة (1) وستوضح الطريقة كما في المثال التالي:

مثال:

حل المعادلة

$$x^4 + 4x^3 - 6x^2 + 20x + 8 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

∴ $a = 4, b = -6, c = 20, d = 8$ الحل:

أولا نكتب المعادلة (1) في الصورة

$$x^4 + 4x^3 = 6x^2 - 20x - 8$$

وبعدها نكتب الطرف الأيسر في صورة إكمال مربع والباقي للطرف الآخر:

$$\therefore \left(x^2 + \frac{a}{2}x + l\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + 2l - b\right)x^2 + (al - c)x + (l^2 - d)$$

بمقارنة هذه المعادلة بالمعادلة الأصلية نحصل على

$$\begin{aligned} (x^2 + 2x + l)^2 &= (10 + 2l)x^2 + (4l - 20)x \\ + (l^2 - 8) &= (mx + n)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

وبتطبيق القاعدة

$$\text{(معامل } x^2 \text{)} \text{(الحد المطلق)} = \text{مربع (نصف معامل } x)$$

$$(10 + 2l)(l^2 - 8) = (2l - 10)^2 \quad \text{وعلى ذلك يكون:}$$

ومنها نحصل على المعادلة التكعيبية التالية:

$$l^3 + 3l^2 + 12l - 90 = 0 \dots\dots\dots(3)$$

ويمكن إيجاد أحد جذور هذه المعادلة باستخدام التخمين فنجد أن $l = 3$

تحقق المعادلة (3) وأخيرا نجد أن:

$$m^2 = 16, \quad n^2 = 1, \quad mn = 4 \Rightarrow m = 4, \quad n = -1,$$

$$\Rightarrow (x^2 + 2x + 3)^2 = (4x - 1)^2 \Rightarrow (x^2 + 2x + 3) = \pm(4x - 1)$$

أولاً:

$$(x^2 + 2x + 3) = (4x - 1)$$

ومنها المعادلة التربيعية الأولى هي

$$x^2 - 2x + 4$$

$$x = 1 \pm \sqrt{3}i$$

ويكون حلها

والمعادلة الثانية هي

$$(x^2 + 2x + 3) = -(4x - 1)$$

وبالاختصار

$$x^2 + 6x + 2$$

$$x = (-3 \pm \sqrt{7})$$

وتكون جذورها هي

وتكون الجذور الأربع هي

$$(1 \pm \sqrt{3}i), (-3 \pm \sqrt{7})$$

* * *

تمارين

حل المعادلات الآتية:

$$1) x^3 - 18x - 35 = 0,$$

$$2) x^3 - 12x + 16 = 0,$$

$$3) x^3 + 6x^2 + 9x + 3 = 0,$$

$$4) x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 14x + 3 = 0,$$

$$5) x^4 + 32x - 60 = 0,$$

$$6) x^3 - 12x - 16 = 0,$$

$$7) (x-3)(x-5)(x+6)(x+8) = 504,$$

$$8) x^3 - 12x - 9 = 0,$$

$$9) x^3 - 3x + 1 = 0$$

* *