الباب الخامس

جبر المصفوفات Algebra of Matrices

تعريف:

المصفوفة هي منظومة من الأعداد تتكون من مجموعة من الصفوف والأعمدة ويسلك كل منها سلوك العنصر الواحد في العمليات الجبرية.

1) **المصفوفة القياسية:** هي المصفوفة التي كل عناصرها أصفار وعناصر القطر الرئيسى كلها متساوية.

وتأخذ الشكل الآتي:

$$S = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$$

وإذا كانت الواحد $k=1$ تسمى في هذه الحالة مصفوفة الوحدة ويرمز لها بالرمز I.

مجموعة المعادلات الخطية:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= k_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= k_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= k_m \end{aligned} \qquad (1)$$

وهي عبارة عن m من المعادلات في n من المجاهيل من: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ويمكن كتابتها على الصورة:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \dots \\ k_n \end{pmatrix} \dots\dots(2)$$

وبشكل عام يمكن وضع المصفوفة في الصورة:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(I)$$

والأعداد $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mn}$ تسمى عناصر المصفوفة والخطوط الأفقية تسمى صفوف (rows) والخطوط الرأسية تسمى أعمدة (columns) المصفوفة ذات m صف و n عمود تسمى (mxn) مصفوفة. ويمكن كتابة المصفوفة بالرمز A أو $(a_{ij})_{mn}$ حيث الرمز الأول i يدل على رقم الصف والثاني على رقم العمود. حيث إن

$$i = 1,2,3,\dots m, \quad j = 1,2,3,\dots n$$

والمصفوفة $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ ذات صف واحد تسمى **مصفوفة صف.**

بينما المصفوفة: $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ تسمى **مصفوفة عمود.**

والمصفوفة التي لها نفس عدد الصفوف والأعمدة تسمى **مصفوفة مربعة** (Square Matrix). والقطر الذي يحتوي على العناصر: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ يسمى **القطر الأساسي**. يمكن كتابة مجموعة

المعادلات (2) على الصورة:

(3) **Ax = h**

$$where \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad h=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}, \quad A \quad is \quad mxn \quad matrix$$

وفي المعادلة (3) نلاحظ أن A عبارة عن مصفوفة مستطيلة من رتبة mxn ، x عبارة عن مصفوفة العمود وتتكون من n من العناصر، أما h فهي مصفوفة العمود وتتكون من m من العناصر.

ملحوظة: بالنسبة لتساوي مصفوفتين وجمع المصفوفات وخواصها فقد تم دراستها في المرحلة الثانوية.

مجموعة المعادلات الخطية وطريقة جاوس

System of Linear Equations & Gauss Elimination Method

نفرض أن لدينا مجموعة من المعادلات الخطية عددها m في n من المجاهيل $x_1, x_2, ..., x_n$ في الصورة:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2$$

....(1)

$$a_{m1}x_1 + a_{m1} + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

المعاملات a_{ij} معطاة وكذلك أيضا المعاملات b_j معطاة إذا كانت كل b_j تساوي صفر فالمعادلات تسمى معادلات متجانسة وما عدا ذلك تسمى غير متجانسة. ويكون حل المعادلات (1) هو عبارة عن مجموعة

من الأعداد $x_1, x_2, \ldots, x_n$ التي تحقق المعادلات. متجه الحل (عبـــارة عن مصفوفة من عمود واحد) للمعادلة (1) هو المتجه x الذي مركباته عبارة عن $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

إذا كانت مجموعة المعادلات متجانسة فإن لها على الأقل **الحل التافه (Trivial solution)** أي أن:

$$x_1 = 0,$$
$$x_2 = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = 0$$

ومن تعريف المصفوفات وضربها يمكن كتابة المعـــادلات (1) علـــى الصورة:

$$AX = b$$

حيث

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

سوف نفرض أن a_{ij} لاتساوي أصـــفارا كلهـــا بمعنـــى أن A لا تساوي صفر. تسمى المصفوفة الآتية:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

بالمصفوفة المطولة (Augmented Matrix)

للمعادلات (1). هذه المصفوفة مركبة من A مضافا إليها العمود b.

والآن سوف نناقش طريقة حل هذه المعادلات (1) بطريقة **الحذف لجاوس**. بداية سوف نشرحها عن طريق مثال توضيحي.

طريقة الحذف لجاوس

مثال:

حل المعادلات الخطية الآتية في أربعة مجاهيل:

$$3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 = 8.0$$
$$0.6x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 = 2.7$$
$$1.2x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 = 2.1$$

الحل:

- **أولا:** بتكوين المصفوفة المطولة:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1 \end{pmatrix}.$$

الخطوة الثانية: حذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة

و بطرح [$\frac{0.6}{3.0} = 0.2$ x المعادلة الأولى] من المعادلة الثانية ، ثــم طرح [$\frac{1.2}{3.0} = 0.4$ x المعادلة الأولى] من المعادلة الثالثة نحــصل على المجموعة الجديدة التالية:

$$3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 = 8.0$$
$$1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 = 1.1$$
$$-1.1x_2 - 1.1x_3 + 4.4x_4 = -1.1$$

والمصفوفة المطولة هي:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & -1.1 \end{pmatrix}$$

الخطوة الثالثة: حذف x_2 مــن المعادلـــة الثالثـــة وذلــك بطــرح [$\frac{-1.1}{1.1} = -1$ x المعادلة الثانية] من المعادلـــة الثالثـــة فنحــصل علــى المجموعة الجديدة:

$$3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 = 8.0$$
$$1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 = 1.1$$
$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 = 0$$

والمصفوفة المطولة هي:

$$B_3 = \begin{pmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

من المعادلة الثانية نجد أن:

$$x_2 = 1 - x_3 + 4x_4 \qquad (1)$$

ومن هذه المعادلة الأولى نجد أن:

$$x_1 + x_4 = 2 \qquad (2)$$

وبما أن x_2, x_3 , يظلان اختياريين فإنه يمكن الحصول على عدد لا نهائي من الحلول إذا فرضنا أية قيمة لهما.

طريقة جاوس في حالة عدم وجود حل

ماذا يحدث لو طبقنا طريقة جاوس في مجموعة من المعـــادلات التـــي ليس لها حل؟

الإجابة في هذه الحالة: هي أنه سوف يظهر تعارض في المسألة.

مثال2 : حل المعادلات الآتية:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3,$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$
$$6x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6,$$

الحل: المصفوفة المطولة هي:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

بحذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة:

وذلك بضرب $\frac{2}{3}$ في المعادلة الأولى ثم طرحها مـــن المعادلـــة الثانيـــة فنحصل على:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$\left.\begin{matrix} 2x_2 + 7x_3 = 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$2x_2 + x_3 = 2$$

ثم نقوم بحذف x_1 من المعادلة الثالثة وذلك بضرب

$\frac{6}{3} = 2$ x المعادلة الاولى ثم طرحها من المعادلة الثالثة نحصل على :

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

وبنفس الطريقة نقوم بحذف x_2 من المعادلة الثالثة وذلك بطرح

[$\frac{-2}{3} = -1$ x المعادلة الأولى] من المعادلة الثالثة نحصل على:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3$$

$$-\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -2$$

$$0 = 12$$

ومن التعارض من المعادلة الثالثة يؤكد أن المعادلات ليس لها حل.

طريقة جاوس في حالة وجود حل وحيد:

مثال3:

حل المعادلات الآتية:

$$\left.\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 6 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 6 \\ -1 & 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

بحذف x_1 من المعادلتين الثانية و الثالثة نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} -x_1+x_2+2x_3&=2 \\ x_2+7x_3&=12 \\ 2x_2+2x_3&=2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 7 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

وبحذف x_2 من المعادلة الثالثة نحصل على:

$$\left.\begin{aligned} -x_1+x_2+2x_3&=2 \\ x_2+7x_3&=12 \\ 12x_3&=22 \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 12 & 22 \end{pmatrix} \Rightarrow 12x_3=22 \Rightarrow x_3=2$$

من المعادلة الثالثة نجد أن $x_3=2$

ومن المعادلة الثانية نجد أن

$$2x_2+7x_3=12 \Rightarrow 2\times 2+7x_3=12 \Rightarrow x_2=\frac{8}{7}$$

ومن المعادلة الأولى نجد أن

$$-x_1+x_2+2x_3=2 \Rightarrow x_1=-x_2-2x_3+2$$

$$\Rightarrow x_1=-2-2\left(\frac{8}{7}\right)+2=-\left(\frac{16}{7}\right)$$

$\therefore$ **المعادلات لها حل وحيد.**

تمارين

حل المعادلات الآتية باستخدام طريقة جاوس:

1) $$\begin{aligned} 3x + y &= -5 \\ 2x + 3y &= 6 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x - 2y &= -8 \\ 5x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 7x - y - 2z &= 0 \\ 9x - y - 3z &= 0 \\ 2x + 4y - 7z &= 0 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 3x - y + z &= -2 \\ x + 5y + 2z &= 6 \\ 2x + 3y + z &= 0 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} 5x + 3y - 3z &= -1 \\ 3x + 2y - 2z &= -1 \\ 2x - y + 2z &= 8 \end{aligned}$$

معكوس المصفوفة
Inverse of the Matrix

في هذا الفصل سوف نتعامل مع **المصفوفة المربعة** فقط.

معكوس المصفوفة A من درجة mxn هو مصفوفة أيضا ويرمز لهـا بالرمز A^{-1} ولها خاصية

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \qquad (1)$$

حيث إن I هو مصفوفة الوحدة مـن درجـة nxn لإيجـاد هـذا المعكوس سنبدأ بفرض أن لدينا مجموعة من المعادلات يمكن كتابتها في الصورة:

$$Y = AX \qquad (2)$$

حيث إن المتجهات X,Y هي عبارة عن n مركب

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$
$$Y = (y_1, y_n, \dots, y_n),$$

إذا وجد معكوس المصفوفة A فإننا يمكن ضرب المعادلة (2) فـي A^{-1} ونحصل على

$$X = A^{-1}Y \qquad (3)$$

والتى تشتمل على X بدلالة Y.

طريقة جاوس – جوردان للحذف
Gaues - Jordan Elimination Method

هذه الطريقة تعتمد على جعل المصفوفة مصفوفة **مثلثية**

(المصفوفة المثلثية هي التي جميع عناصرها فوق القطر الرئيـسي أو

تحت أصفاره) أي أنه يمكن اختصار:

$$AX = Y = I\,Y \Rightarrow I\,X = X = A^{-1}\,Y$$

وذلك بدًا بالمصفوفة A , I ووصولا إلى I, A^{-1} .

ويمكن الحصول على معكوس المصفوفة بطريقتين.

سنشرح طريقة الحل للمصفوفة من الدرجة الثانية والأخرى في الدرجة الثالثة.

أولا: معكوس المصفوفة من الدرجة الثانية

معكوس المصفوفة من درجة 2x2 كالآتي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \,, A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

حيث إن

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

وبالمثل معكوس المصفوفة القطرية:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0\ldots & 0 \\ 0 & a_{22}\ldots & 0 \\ 0 & 0\ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0\ldots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \ldots & 0 \\ 0 & 0\ldots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

مثال:

أوجد المعكوس A^{-1} للمصفوفة

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل:

يعتمد على القانون التالي:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA$$

$$\det A = (3)(4) - (1)(2) = 10$$

$$\text{adj } A = \text{adj} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

وذلك بتغير إشارة عنصرين ومكان عنصرين

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adjA = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.4 & -0.1 \\ -0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

معكوس المصفوفة من الدرجة الثالثة

مثال:

أوجد معكوس المصفوفة التالية:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل:

وذلك عن طريق العمليات الأولية على المصفوفة ومعها مصفوفة الوحدة حتى تتحول المصفوفة إلى مصفوفة وحدة وسنجريها كما هو

موضح من اليسار لليمين:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \quad row_2 + 3row_1 \\ \\ \rightarrow row_3 \quad - row_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow row\,3 - row\,2$$

$\rightarrow ByGauss \quad Method$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2 + \frac{7}{10}R_3 - \frac{1}{3}R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{-3}{10} & \frac{-2}{10} & \frac{7}{10} \\ \frac{4}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-7}{10}&\frac{2}{10}&\frac{3}{10}\\\frac{-13}{10}&\frac{-2}{10}&\frac{7}{10}\\\frac{4}{5}&\frac{1}{5}&\frac{-1}{5}\end{pmatrix}\rightarrow row_1 \quad + row_2$$

وعلى ذلك تكون المصفوفة الأخيرة هي المصفوفة المعكوسة.

مثال3:

أوجد معكوس المصفوفة القطرية:

$$A=\begin{pmatrix}-.5&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

الحل:

$$A=\begin{pmatrix}-.5&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&.25&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

تمارين

أوجد معكوس المصفوفات الآتية:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

*   *