

الباب السادس

الجدور المميزة والمتجهات المميزة

Eigen values and Eigen vectors

نفرض أن لدينا المصفوفة $A = (a_{ij})$ عبارة عن $n \times n$ مصفوفة ونفرض أن المعادلة المتجهة هي:

$$AX = \lambda X \quad (1)$$

حيث أن λ أي عدد ثابت ويسمى الجذر المميز.

(1) لتعيين الجذور المميزة λ لأي مصفوفة A نقوم بحل المعادلة

$$|A - \lambda I| = 0$$

(2) لتعيين المتجهات المميزة X نقوم بحل المعادلة

$$AX = \lambda X$$

من الواضح أن المتجه $X = 0$ هو حل للمعادلة (1) لأي قيمة والقيمة λ التي عندها الحل $X \neq 0$ تسمى الجذور المميزة أو القيمة الخاصة **Characteristic value** والحل المقابل $X \neq 0$ يسمى الموجة المميز المناظر للجذر λ .

إذا كانت المصفوفة المربعة فإن الدالة:

$$F(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2)$$

تسمى كثيرة الحدود المميزة أو الدالة المميزة.

والمعادلة (2) تسمى المعادلة المميزة المناظرة للمصفوفة A.

امثلة محلولة Solved Problems

مثال:-

أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

الحل:

أولاً: نعين الجذور المميزة وذلك باستخدام المعادلة

$$F(\lambda) = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$\therefore (5 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$$

وتكون هذه القيم هما قيمتا الجذور المميزة

ثانياً: $\lambda = 1$

نعين المتجهات المميزة عن طريق المعادلة

$$AX = \lambda_1 X$$

ويكون عندنا قيمتان

$$1) \lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلتان

$$5x_1 + 4x_2 = x_1,$$

$$x_1 + 2x_2 = x_2$$

وبجمع هاتان المعادلتان نحصل على

$$x_1 : x_2 = 4 : 1$$

وعلى ذلك تكون قيمة أول متجه هو

$$X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ثالثا $\lambda = 6$

$$2) \lambda_2 = 6 \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x_1 \\ 6x_2 \end{pmatrix}$$

نحصل على

$$x_1 : x_2 = 1 : -1$$

وعلى ذلك تكون قيمة ثاني متجه هو

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

مثال :

أوجد الجذور المميزة والمتجهات المميزة للمصفوفة:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل:

أولاً: نعين الجذور المميزة وذلك باستخدام المعادلة

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ونحصل على المعادلة بعد فك المحدد

$$(1 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0$$

وتكون الجذور المميزة ثلاثة وهي:

$$\lambda_1 = 1,$$

$$\lambda_2 = 2,$$

$$\lambda_3 = 3$$

ثانيا: نعين المتجهات المميزة عن طريق المعادلة

$$AX = \lambda X$$

ويكون عندنا قيمتان

أولا: عند: $\lambda = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ومن هنا نحصل على

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = x_1,$$

$$x_1 + x_3 = x_2, \quad \Rightarrow$$

$$4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = x_3$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}x_3$$

وبوضع قيمة x_3 تساوي (2- x_3) فنحصل على الموجه المميز:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ثانياً: عند:

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

ومنها نحصل على المعادلات

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 2x_1,$$

$$x_1 + x_3 = 2x_2,$$

$$4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 2x_3$$

وبالجمع نحصل على

$$x_1 : x_2 : x_3 = -2 : 1 : 4$$

وعلى ذلك تكون قيمة ثاني متجه

$$X_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ثالثًا: عند:

$$\lambda_3 = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$$

ومن هنا نحصل على المعادلات

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3x_1,$$

$$x_1 + x_3 = 3x_2,$$

$$4x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 3x_3$$

وبجمع المعادلات نحصل على $x_1 : x_2 : x_3 = -1 : 1 : 4$

وعلى ذلك تكون قيمة ثالث متجه

$$X_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

تمارين

أوجد الدالة المميزة والجدور والموجهات المميزة لكل مما يأتي

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

* * *