

كتاب

الروضة الزهرية

في

الأصول الجبرية

تأليف كرنيليوس فان ديك

بسم الله المبدى المعيد

الحمد لله الملك الوهاب الذي بيده الجبر والكبر واليو المرجع والمآب . اما بعد
فينول العبد الفقير الى عفوه تعالى كرنيلبوس فان ديك الاميركاني هذا كتاب في علم
الجبر الحماني قد علفت فيه ما املينه على بعض التلامذة في مدرسة عيه احدى قرى
جبل لبنان سنة ١٨٤٨ للتاريخ المسيحي سالكا فيه مسلك بعض العلماء الاميركانيين .
ثم اضفت اليه زيادات اخرى من كتب بعض العلماء الفرنسيين والانكليزيين . وقد
اضفت الى هذه الطبعة الثالثة فصولاً وبعض المعائل والايضاحات والعلميات لم توضع
في الطبعة الاولى وبالله التوفيق

مقدمة

في العلوم التعليمية بالاجال

١ موضوع العلوم التعليمية الكم وهو كل ما يقبل الزيادة او الانقسام او القياس .
فكل من الخط والوزن والعدد والوقت كم . وليس كذلك الالوان والافعال العقلية
ونحوها

٢ جميع اقسام التعليميات مبني على الحساب والجبر والهندسة . اما الحساب فهو
علم الاعداد . ومعرفته ضرورية لمعرفة ما سواه من هذه العلوم . واما الجبر فهو طريق
للعد بواسطة احرف وعلامات اخرى . ويقال للطبقة العليا منه حساب التفاضل .
وهو لا يدخل في كتب الجبر لسموه بل بquam علماً بنفسه . واما الهندسة فهي قسم من
التعليميات موضوعه المثلث وهو كم ذو ابعاد اي كل ماله واحد من ثلاثة اشياء وهي
الطول والعرض والعمق ويقال لها الابعاد الثلاثة . ولذلك يكون كل من الخط والسطح
والجسم مقداراً دون الحركة فانها وان كانت كمّاً لكنها لا تُعد مقداراً اذ ليس لها شيء من
الابعاد المذكورة . واما حساب المثلثات وقطع الخروط فهما علمان تُستعمل فيهما التواعد

التعليمية لمعرفة المثلثات والمخبرات الحاصلة من قطع الخروط أي الفلجي والثلجي والهندولي

٣ العالم نوعان محضة وإضافية أو منتجة . أما المحضة فهي المختصة بالكميات المجردة عن المواد . وأما الإضافية فهي استخدام قواعد تعليمية لمعرفة شيء من خصائص الميولي أو لانعام شيء من المصالح اليومية كما في التجارة وعلم المساحة وعلم البصريات وعلم الهيئة ونحو ذلك

٤ أن للعالم المحضة مزية على سائر العلوم من حيث وضوح قواعدها وقوة براهينها حتى ضرب بها المثل في الإيضاح والتبيين ومن حيث كثرة استعمالها وأزومها في المصالح والعلوم كافة وإيضاً لسبب فعلها في ترويض القوى العقلية بتنويعها وتوسيعها . فإن درسها يدرّب العقل على الانجاء بكل قواه فحواميرها وعلى انحصاره في موضوع بدون أن يشتت . ويمنح حذقة عظيمة في الكشف عن فساد أو سنسطة في برهان أو قضية . ولذلك تفيد معرفتها جداً لكل واحد ولو كان غير منفتح إلى مآسة علمياتها وحُببت من العلوم الرياضية

الفصل الأول

في الاشارات الجبرية والكميات السلبية والاوليات

٥ الجبر علم يُبحث فيه عن نسب الكميات باستعمال احرف وإشارات أخرى . وله مزية على علم الحساب بأن مسائله أعمّ ولأنه يُستخدم فيه الاحرف المجازية عوضاً عن الأعداد كبيرة كانت أم صغيرة . وإيضاً لأنه يُستخدم فيه كميات مجهولة كانت أم معلومة . فالاحرف التي تنوب عن كميات عددية في الجبر ليس لها قيمة في نفسها ولكن تُفرض لها قيمة معلومة في كل مسئلة على مقتضى شروطها . وقد تكون تلك القيمة معلومة وقد تكون مجهولة كما سترى . فإن كانت معلومة يوضع عوضاً عنها حرف من حروف الهجاء الأول كالالف والباء والتاء وما يليها . وإن كانت مجهولة تستعمل عوضاً عنها الحروف الأخيرة كالكاف واللام والميم وما يليها وهذا امرٌ عادي لا ضروري

٦ الجمع بدل عليه خط عرضي ينطعه خط عمودي هكذا + والطرح بدل عليه خط عرضي فقط هكذا - فالكميات التي تنعدمها العلامة الأولى تُسمى ايجابية . والتي

تتقدمها الثانية يقال لها سلبية. والتي تتقدمها كنهانها تسمى ملتبسة. فلو وُضِعَ ت + ب
 - س كان المراد فضلة س ومجموع ت وب وتقرأ ت مع ب الأ. س. ولو
 وُضِعَ ت + ب لقرئ ت مع او الأ. ب. والتي لا تتقدمها علامة تتقدمها علامة
 ايجابية اي علامة الجمع. ولو وُضِعَ ت - ب او س - د لكان المراد فضلة
 ت وب او فضلة س ود بدون تعيين اي هو المطروح واي هو المطروح منه.
 ويدل على المساواة بين كيتين خطان عرضيان متوازيان هكذا = فلو وُضِعَ ت +
 ب = س - د لقرئ مجموع ت وب يعدل فضلة س ود. ومثال ذلك في
 الافاق الهندية $12 = 2 + 2 + 7 = 2 + 10 = 4 - 16 = 4 + 8$ ولو وُضِعَ
 ت < ب كان المراد ان كمية ت اعظم من كمية ب. وبالعكس ت > ب

٧ اذا تقدم كمية رقم هكذا ٢ ت او ٩ ل او ١٠ ك كان المراد تكرار
 الحرف مراراً مماثل الاحاد في ذلك الرقم. فيقرأ ثلاث مرات ت وتسع مرات ل
 وعشر مرات ك ويقال لذلك الرقم مسمى. وهكذا ل ن. و م فيراد ثلث ن
 وثلاثة ارباع م. وان لم يتقدم كمية مسمى بقدرها واحد مسمى. فان ت مثلاً
 يراد ب ١ ت. وقد يكون المسمى حرفاً هكذا م ك فيراد تكرار ك مراراً مماثل
 الاحاد في م اي ميم مرة. ولو قيل ٢ ت ب لكان ٢ ت مسمى ب. ولو
 قيل ٤ ك ل لكان ٤ ك ل مسمى د. وقس على ذلك

٨ الكمية المركبة هي التي اربطت اجزاؤها بعلامة الجمع او الطرح. مثالها س +
 د ور + س - ك و ٢ ت + ب. وما سواها بسيطة. مثالها ت ورك و ٢م
 س ل. وان كانت لها جزءان سميت ثنائية مثل ت + ب وس - د ويقال
 للاخيرة فضلية ايضاً. وان كان لها ثلاثة اجزاء يقال لها ثلاثية او ذات ثلاثة حدود.
 او اربعة فرباعية او ذات اربعة حدود. وملم جراً. وان اريد معاملته عدة اجزاء من
 كمية مركبة معاملته واحدة يجب رسم خط فوقها او حصرها بين قوسين هكذا ت - د
 + س او (ت - د) + س فيراد اضافة س الى فضلة ت ود وهكذا
 ت + ب - س + د او (ت + ب) - (س + د) يراد ب طرح مجموع س
 ود من مجموع ت وب. ويقال لحرف او لعدة احرف مرتبطة على ما تقدم عبارة
 جبرية

٩ يدل على الضرب خطان يتقاطعان هكذا X او نقطة بين المضروب
 والمضروب فيه. مثالة ت X ب او ت. ب فيقرأ ت في ب. وهكذا

س + د X ن - م فيقرأ مجتمع س ود في فضل ن وم ويقال للمضروب والمضروب فيه اضلاع. فتخل الكمية الى اضلاعها متى انفكت الى كميات اذا ضرب بعضها في بعض نحصل الاصلية. فان $٢ م$ ي مثلاً تخلص الى $٢ م$ و ١ لان $٢ م \times م \times م = م^٣$ و ٤٨ تخلص الى ٢٤ و ٢ او الى ١٦ و ٣ او الى ٦ و ٨ ولم جراً ١٠ يدل على القسمة خط عرضي له نقطة من فوقه ونقطة من تحته هكذا $+ ٨$ ٢ اي قسمة ٨ على ٢ او بكتابة المقسوم والمقسوم عليه على هيئة كمر دارجي هكذا $\frac{٨}{٢}$ فيقرأ الخارج من قسمة ٢ على ب وهكذا $\frac{٨}{٢}$ فيقرأ الخارج من قسمة فضل س ود على مجتمع ت وم. واما النسبة في الجبر فيدل عليها كما في الحساب. مثلاً

ت ب : س د : ن م : ك + ل
اذا تكررت كمية واحدة ضلعاً يُعبر عن الحاصل بكتابة تلك الكمية مرة واحدة ويكتب عن يسارها الى الاعلى قليلاً رقم دال على كم مرة تكررت ضلعاً. مثلاً

$\overline{ب} \times \overline{ب} \times \overline{ب} \times \overline{ب} \times \overline{ب}$ يكتب ب
والرقم المشار اليه سمي دليلاً وان لم يكتب دليل بقدر للكمية دليل هو واحد. مثلاً

$\overline{ب} =$ القوة الاولى من ب
اذا تكررت كمية ضلعاً حسب ما ذكر سمي الحاصل قوة تلك الكمية. مثلاً

$\overline{ب} =$ الثانية " او مربع ب اي $\overline{ب} \times \overline{ب}$
 $\overline{ب} =$ الثالثة " او مكعب ب اي $\overline{ب} \times \overline{ب} \times \overline{ب}$
 $\overline{ب} =$ الرابعة " اي $\overline{ب} \times \overline{ب} \times \overline{ب} \times \overline{ب}$

وقس على ذلك

اما الجذر فهو كمية اذا تكررت مرات مفروضة ضلعاً تحصل كمية مفروضة وهذه علامة الجذر $\sqrt{\quad}$ وتدل مطلقاً على الجذر المائي او جذر تكرار كمية مرتين وللدلالة على جذر آخر يكتب فوقها عن اليمين رقم هو دليل الجذر المطلوب. مثلاً

$\sqrt[٤]{\quad}$

١١ اذا تشابهت الاحرف والنوات كانت الكميات متشابهة والافغير متشابهة. فان $٢ ب$ و $٤ ب$ كميات متشابهة. وكذلك $٢ م$ و $٦ م$ و $٨ م$ و $٢ ب ك$ فغير متشابهة ولو كانت المسميات متساوية. وكذلك $ب$ و $٢ ب$ كميات غير متشابهة ايضاً

١٣ مكفوه كمية هو الخارج من فسة واحد على تلك الكمية . فكفوه ت . مثلاً
هو $\frac{1}{2}$ وكفوه $\frac{1}{4}$ هو $\frac{1}{2}$ وكفوه ت + ب هو $\frac{1}{2}$

١٤ الكمية العملية هي التي يجب طرحها . ففي التجارة مثلاً يكون الربح ايجابياً
والخسارة سلبية . وان كان صعود جسم عن سطح الارض ايجابياً يكون هبوطه سلبياً .
وان كان جري مركب الى الشمال ايجابياً يكون جريه الى الجنوب سلبياً . وقد يكون
العلمي اكبر من الايجابي الذي يجب الطرح منه كما اذا كان راس مال تاجر ١٠٠٠
دينار والدين عليه ١٥٠٠ دينار

١٥ الاولى قضية واضحة لا تقبل زيادة ايضاح . والاوليات التعليمية التي يحتاج
اليها بالاكثير هي هذه

- ١ اذا اُضيفت اشياء متساوية الى اشياء متساوية تكون المجموعات متساوية
- ٢ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء متساوية تكون البقايا متساوية
- ٣ اذا ضُرِبَت اشياء متساوية في اشياء متساوية تكون الحواصل متساوية
- ٤ اذا قُسمَت اشياء متساوية على اشياء متساوية تكون الخواارج متساوية
- ٥ اذا اُضيفت كمية الى اخرى وطُرِحَت منها فالثانية لا تتغير
- ٦ اذا ضُرِبَت كمية في اخرى وانقسمت عليها فلا تتغير
- ٧ اذا اُضيفت اشياء متساوية الى اشياء غير متساوية يكون من الاعظم المجموع

الاعظم

- ٨ اذا طُرِحَت اشياء متساوية من اشياء غير متساوية يكون من الاعظم البقية

العظمى

- ٩ اذا ضُرِبَت اشياء متساوية في اشياء غير متساوية يكون من الاعظم الحاصل

الاعظم

- ١٠ اذا انقسمت اشياء غير متساوية على اشياء متساوية يكون من الاعظم الخارج

الاعظم

١١ الاشياء المتساوية لشيء واحد هي متساوية بعضها لبعض

١٢ الكل اعظم من جزئه

الفصل الثاني

في الجمع

١٥ الجمع هو ربط كميات بواسطة علاماتها. فلو قبل ما هو مجموع ت وب ون لنيل ت + ب + ن ولو قبل اصف فضلة ب وس الى د لنيل ب - س + د ولو قبل اصف فضلة ب وس الى فضلة ن ود لنيل ب - س + ن - د وقس على ذلك

١٦ متى كانت الكميات متشابهة تُجمع الى واحدة. مثالة ٢ ت + ٦ ب + ٤ ت + ٥ ب = ٧ ت + ١١ ب فلما من ذلك القاعدة الاولى للجمع

متى كانت الكميات متشابهة والعلامات متشابهة فاجمع المسميات واكتب عن يسار المجموع الاحرف المشتركة واعطِ العلامة المشتركة. وهذه امثلة للعمل

ب س	٢ كى	٧ ب + كى
٢ ب س	٧ كى	٨ ب + ٢ كى
٩ ب س	كى	٢ ب + ٢ كى
٢ ب س	٢ كى	٦ ب + ٥ كى
١٥ ب س		٢٢ ب + ١١ كى

رى + ٢ ت ب ح	س د كى + ٢ م ن
٢ رى + ت ب ح	٢ س د كى + م ن
٦ رى + ٤ ت ب ح	٥ س د كى + ٧ م ن
٢ رى + ت ب ح	٧ س د كى + ٨ م ن
	١٥ س د كى + ١٩ م ن

وهكذا اذا كانت العلامات سلبية. مثالة

٢- ب س	- ن ك	- ٢ ث ب	م ي
- ب س	- ٢ ن ك	- ث ب	٢ م ي
- ٥ ب س	- ٢ ن ك	- ٧ ث ب	٨ م ي
- ٩ ب س		- ١٠ ث ب	١٢ م ي

وهكذا لو كانت الكميات قويات متشابهة . مثاله

١٦ ب د	+ ب س	- ٢ ب د س
- ٤ ب د	- ٩ ب س	+ ٦ ب د س
- ٩ ب د	+ ب س	+ ب د س
٣ ب د	- ٧ ب	+ ٥ ب د س

١٧ لو قيل ما هو مجتمع ٦ ب وفضلة ٤ ب لنيل ٢ - ٤ ب + ٦ ب اي يعطى ٤ ب من ٢ ثم يضاف الى الفضلة ٦ ب وذلك كاضافة ٢ ب الى ٢ ولو قيل ما هو مجتمع ٧ ب و - ٢ ب لنيل ٧ ب - ٢ ب اي ٥ ب فلنأمن ذلك

القاعدة الثانية للجمع . وهي متى كانت الكميات متشابهة والعلامات غير متشابهة فاطرح المسمى الاصغر من الاكبر واكتب عن يسار الباقي الاحرف المشتركة واعطيه علامة المسمى الاكبر وهذه صورة العمل

٦ ب +	٤ ب +	٥ ب س	٢ ح
- ٤ ب	- ٦ ب	- ٧ ب س	- ٩ ح
٢ ب +		- ٢ ب س	- ٧ ح

- دى + ٦ م	٢ ح - دك
٤ دى - م	٥ ح + ٤ دك
٢ دى + ٥ م	

١٨ الكينان المتساويان اذا كانت احدهما ايجابية والاخرى سلبية تُدني احدهما الاخرى . مثاله ٦ ب - ٦ ب = . و ٦ ب - ١٨ = .

لنفرض كميتين أكبرهما T وأصغرهما B فيكون مجموعهما $T + B$ وفضلتهما $T - B$ ومجموع مجموعهما وفضلتهما $2T$ أي 2 ث ولنا من ذلك هذه القضية العامة أي

ان أضيف مجموع كميتين إلى فضلتهما يكون المجموع مضاعف أكبرهما

١٩ ان أريد جمع عدة من الكميات المتشابهة وكان بعضها إيجابياً وبعضها سلبياً فاجمع أولاً الإيجابية ثم السلبية حسب القاعدة الأولى (١٦) ثم افعل في المجموعين حسب القاعدة الثانية (١٧) فلو قبل اجمع $12B + 6B + B - 4B - 5B - 7B$ لقبل

$$12B + 6B + B = 19B$$

$$- 4B - 5B - 7B = -16B$$

وحسب القاعدة الثانية يكون المجموع $3B$

ولو قبل اجمع $2K - K + 7K - 4K - 9K + 7K$ $K - 6K$ لقبل

الاجزاء الإيجابية هي	$2K$	والسلبية -	K
	$2K$		$-7K$
	$4K$		$-9K$
	$7K$		$-6K$
والمجموع	$16K$		$-22K$

$$16K - 22K = -6K$$

اجمع $4T - 6T + 2T + 7T - 8T + 9T$ $4T - 6T$

$$اجمع 2B - T - 2B + 7B - 8B + 9B$$

اجمع $7D - 8D + 9D - 8D + 9D$ 20 اذا كانت الكميات غير متشابهة لا تجمع إلا بكتابتها على التوالي مع علاماتها.

$$مثال ٤ ب - ٦ ك + ٢ ح + ١٧ ح - ٥ د + ٦$$

وان كانت الكميات التي أريد جمعها بعضها متشابهة وبعضها غير متشابهة تكتب المتشابهة بعضها تحت بعض ثم تجمع على ما تقدم. فلو قبل اجمع $2B - 6D +$

٢ب - ٢ى - ٢ب س + ك - ٢د + ب ع - ٢د + ى + ٢ك + ب لكانت صورة
العمل هكذا

$$\begin{aligned} & ٢ب س - ٢د + ٢ب - ٢ى + ك + ب ع \\ & - ٢ب س - ٢د + ب + ى + ٢ك \\ & + ٢د \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{المجتمع} = - ٢د + ٢ب - ٢ى + ٢ك + ب ع \\ & \text{اجمع ت ب م} - ٢ك + ب م + ى - ك + ٧ + ٥ ك - ٦ ى + ٩ \\ & \text{اجمع ت ب} + ٨ + س د - ٢ + ٥ ت ب - ٤ م + ٢ \\ & \text{اجمع ك} + ٢ى - د ك + ٧ - ك - ٨ + ح م \\ & \text{اجمع ت م} + ٦ - ٧ ك ى + ٨ + ١٠ ك ى - ٩ + ٥ ت م \\ & \text{اجمع ت ح ى} + ٧ د - ١ + م ك ى + ٢ ت ح ى - ٧ د + ١٧ - م ك ى \\ & \text{اجمع ت د} - ح + ٨ ك ى - ت د + ٥ ت د + ح - ٧ ك ى \\ & \text{اجمع ت ب} - ٢ ت ى + ك + ت ب - ت ى + ب ك - ح \\ & \text{اجمع ت ب ى} - ٢ ت ك + ٢ ت + ب ك - ب ى + ت \end{aligned}$$

—xxx—

الفصل الثالث

في الطرح

٢١ الطرح اسقاط كمية من أخرى ليُعرف الفضل بينهما
فلنفرض كمية ت + ب

اطرح منها + ب فيكون الباقي ت

اضف اليها - ب فتصير ت + ب - ب

وبالاولية الخامسة ت + ب - ب يعدل ت

اي طرح كمية ايجابية من عبارة جبرية هو كاضافة سلبية تعادل المطروحة اليها
ولو فرض ت - ب

فان طرح منها - ب بقي ت

وان اضف اليها + ب صارت ت - ب + ب

ولكن ت - ب + ب يعدل ت
اي طرح كمية سلبية هو كإضافة ايجابية تعادلا . فان كان على احد دين فرفعه
عنه فهو بمثابة اضافة مبلغ الدين الى راس المال . ونرى من الامثلة المتقدمة ان طرح
كمية ايجابية انما يتم بتغير علامتها . فلنا من ذلك هذه الفاهدة للطرح

ابدل علامات الكميات المطروحة من + الى - او عكسه ثم افعل
كما تقدم في الجمع . وهذه امثلة للعمل مع مشابهة العلامات اصلاً

من	٢٨ +	ب ١٦	١٤ د	-	٢٨ -	ب ١٦	-	١٤ د
اطرح	١٦ +	ب ١٢	٦ د	-	١٦ -	ب ١٢	-	٦ د
	١٢ +	ب ٤	٨ د	-	١٢ -	ب ٤	-	٨ د

ففي هذه الامثلة يتوهم بدل العلامات الايجابية بالسلبية وبالعكس
٢٢ وهكذا متى تشابهت العلامات وكان المطروح اكبر من المطروح منه . مثاله

من	١٦ +	ب ١٢	٦ د	-	١٦ -	ب ١٢	-	٦ د
اطرح	٢٨ +	ب ١٦	١٤ د	-	٢٨ -	ب ١٦	-	١٤ د
	١٢ -	ب ٤ -	٨ د -		١٢ +	ب ٤ +		٨ د +

وهكذا متى اختلفت العلامات . مثاله

من	٢٨ +	ب ١٦ +	١٤ د +	-	٢٨ -	ب ١٦ -	-	١٤ د -
اطرح	١٦ -	ب ١٢ -	٦ د -		١٦ +	ب ١٢ +		٦ د +
	٤٤ +	ب ٢٨	٢٠ د	-	٤٤ -	ب ٢٨ -		٢٠ د -

٢٣ امتحان الطرح في الجبر كما في الحساب اي باضافة الباقي الى المطروح .
فان وافق المجموع المطروح منه كان العمل صحيحاً والا فهو فاسد
تنبيه . عند الامتحان يجب اعادة العلامات الى اصلها . امثلة

من	٢ ك -	١	ح + ٢ ب ك	ح - ي - ت ح
اطرح	٧ ك -	٧ +	ح - ٩ ب ك	ح - ي - ٦ ت ح
	٢ ك -	٨ -		ح - ٤ ي + ٥ ت ح

من ن د - ٧ ب ي ٢ ت ب م - ك ي - ١٧ + ٤ ت ك
 اطرح ٥ ن د - ب ي - ٧ ت ب م + ٦ ك ي - ٢٠ - ت ك
 ١٠ ت ب م - ٧ ك ي

من ت ك + ٧ ب ٢ ت ح + ت ك ي
 اطرح - ٤ ت ك + ١٥ ب - ٧ ت ح + ت ك ي
 ٥ ت ك - ٨ ب

٢٤ متى فُرِضَتْ عدة كميات متشابهة يجب جمعها أولاً ثم طرحها . مثاله
 لو قيل من ت ب اطرح ٢ ت م + ٧ ت م + ٢ ت م + ٦ ت م لقليل
 ت ب - ١٩ ت م . ولو قيل من ي اطرح - ت - ت - ت - ت لقليل ي
 + ت + ت + ت + ت = ي + ٤ ت . ولو قيل من ت ك - ب س + ٢ ت ك
 + ٧ ب س اطرح ٤ ب س - ٢ ت ك + ب س + ٤ ت ك لقليل ٢ ت ك
 + ب س

من ت د + ٢ د س - ب ك اطرح ٢ ت د + ٧ ب ك - د س + ت د
 ٢٥ متى كانت الكميات غير متشابهة تطرح بكتابتها على التوالي بعد تبديل
 علاماتها . فلو قيل من ٢ ت ب + ٨ - م ي + د ح اطرح ك - در + ٤ ح ي
 - ب م ك لقليل ٢ ت ب + ٨ - م ي + د ح - ك + در - ٤ ح ي + ب م ك
 ٢٦ اذا وُضِعَتْ علامة الطرح قدام كميات محصورة بين قوسين يجب عند رفع
 القوسين تبديل علامات جميع الكميات المحصورة . فلو وُضِعَ ت - (ب - س + د)
 كان المراد ان ب و - س و + د يجب طرحها جميعاً من ت . ويتم العمل برفع
 القوسين وتبديل العلامات فتصير ت - ب + س - د . وهكذا

١٢ ت د + ك ي + د - (٧ ت د - ك ي + د + ح م - ر ي) = ٦ ت د +
 ٢ ك ي - ح م + ر ي
 ٧ ت ب س - ٨ + ٧ ك - (٢ ت ب س - ٨ - د ك + ر) = ٤ ت ب س
 + ٧ ك + د ك - ر
 ٢ ت د + ح - ٢ ي - (٧ ي + ٢ ح - م ك + ٤ ت د - ح ي - ت د) =
 ٦ ت م - د ي + ٨ - (٢ د ي + ١٦ - ٨ + ت م - ي + ر) =

٧ كى - ٢ ك + ٥ - (٤ ح - ت ي + ك + ٢ ب) =
وبالعكس متى أريد حصر كميات بين قوسين . مثالة - م + ب - د ك + ٢ ح
فاذا انحصرت للطرح نصير - (م - ب + د ك - ٢ ح)

الفصل الرابع

في الضرب

٢٧ الضرب اما ان يكون في الصحيح وهو تكرار المضروب مراراً ثمائل الآحاد
الموجودة في المضروب فيه واما ان يكون في الكسر وهو اتخاذ جزء مفروض من المضروب
مراراً ثمائل اجزاء الواحد الموجودة في المضروب فيه . فان كان المضروب فيه واحداً
كان الحاصل مساوياً المضروب فيه . وان كان أكثر من واحد كان الحاصل أكثر
من المضروب فيه . وان كان أقل من واحد كان الحاصل أقل من المضروب فيه

٢٨ او فرض ان يضرب ت في ب وفرضت الباء قيمة ثلاثة مثلاً لا فاضى
اخذت ثلاث مرات اي ت + ت + ت = ٣ ت او ب ت فنرى ان
الاحرف تضرب بكتابتها متوالية بتوسط علامة الضرب او بدونها . فيكون ب في س
ب X س او ب س وهكذا تكاثرت الاحرف . ولا فرق في ترتيبها لان
س د م = د م س = م د س كما ان ٤ X ٢ X ٢ = ٢ X ٢ X ٤ = ٢ X ٤ X ٢
وان كان الاحرف مسميات عددية يجب ضربها ايضاً ثم بوضع حاصلها قدام حاصل
الاحرف . مثالة ٢ ب X ٢ ب = ٦ ب ب

اضرب ٩ ت ب	١٢ ح ي	٢ د ح
في ٣ كى	٢ رك	م
٢٧ ب ت كى		٣ ح د م ي

اضرب ٦ ت د	٧ ب د ح	٢ ت ي
في ١٢ ح م ع	ك	٨ م ك
	٧ ب ح د ك	

ح ي	٢٦	اضرب ٢ ث ب
٢٤	ك ٢	في ٤
-----	-----	-----
٢٤ ح ي	٧٢ ك	١٢ ث ب

٢٩ اذا كان المضروب كمية مركبة يجب ضرب كل جزء منه في المضروب فيه.

مثاله

ح ٢ + م	اضرب د + ٢ ك ي
د ي	في ٢ ب
-----	-----
	٢ ب د + ٦ ب ك ي

ح ٢ + م + ٢ + در	اضرب ٢ ح ل + ١
ب ٤	في م
-----	-----
	٢ ح ل م + م ي

٣٠ اذا كان كل واحد من المضروب والمضروب فيه كمية مركبة يجب ضرب كل جزء من الواحد في كل جزء من الآخر. مثاله

٤ ث ي + ٢ ب	اضرب ٢ ك + د
٢ س + رك	في ٢ ح + م
-----	-----
	٦ ث ك + ٢ ث د + ٢ ح ك + ح د م

اضرب ١ + ث
في ٢ ك + ٤

٢ ث ك + ٢ ك + ٤ ث + ٤

اضرب ٢ ح + ٧ في ٦ د + ١

الجواب ١٢ د ح + ٢٤ د + ٢ ح + ٧

اضرب د ي + رك + ح في ٦ م + ٤ + ٧ ي

اضرب ٧ + ٦ ب + ث د في ٢ ر + ٤ + ٢ ح

إذا كان في الحاصل كميات متشابهة يجب كتابتها بعضها تحت بعض ثم جمعها
وهذه صورة العمل

اضرب ب + ت

في ب + ت

ب ب + ب ت

+ ب ت + ت ت

ب ب + ب ت + ت ت

اضرب ب + س + ٢

في ب + س + ٢

ب ب + ب س + ٢ ب

+ ب س + س س + ٢ س

+ ٢ ب + ٢ س + ٦

ب ب + ب س + ٥ ب + س س + ٥ س + ٦

اضرب ت + ي + ١ في ٢ ب + ٢ ك + ٧

اضرب ٢ ت + د + ٤ في ٢ ت + ٢ د + ١

اضرب ب + س + د + ٢ في ٢ ب + ٤ س + د + ٧

اضرب ٢ ب + ٢ ك + ح في ت د × ٢ ك

اضرب ٢ ت × ٤ ب ح × ٥ م × ٦ ي = ٢٦٠ ت ب ح م ي

اضرب ٤ ب × د في ٢ ك + ١

الجواب ٤٨ ب د ك + ٢٤ ب د

٢١ لا ينبغي أن إذا ضرب ٤ × ت يكون الحاصل ٤ ت وإذا ضرب ٤ × - ت

يجب تكرار - ت أربع مرات . أو - ت - ت - ت - ت = - ٤ ت وإذا

ضرب - ٤ × ت يكون الحاصل + ت + ت + ت + ت = + ٤ ت ولكن

العلامة السلبية الأربعة تبدل على وجوب الطرح وذلك يتم بتبديل العلامات فتصير

- ٤ ت وإذا ضرب - ٤ × - ت يكون الحاصل - ت - ت - ت - ت =

- ٤ ب ولكن يجب تبديل العلامة فتصير + ٤ ت ولنا من ذلك أنه

ان ضرب + في + يكون الحاصل +
وان ضرب - في - يكون الحاصل +
وان ضرب + في - يكون الحاصل -
وان ضرب - في + يكون الحاصل -

اي متى نشابيت علامات المضروب والمضروب فيه تكون علامة
الحاصل ايجابية. ومتى اختلفت تكون علامة سلبية

اضرب ب - ت
في ٦ ي
٢ ت - م
٢ ح + ك
٦ ب ي - ١٨ ت ي

اضرب ح - د - ٤
في ٢ ي
ت - ٢ - د - ٧ - ك
٢ ب + ح
٢ ح ي - ٦ د ي - ٨ ي

اضرب ت + ب
ب - ك
٢ د ي + ح ك + ٢
م - ت ب
ب ت + ب ب - ت ك - ب ك

اضرب ٢ ح + ٢
في ت د - ٦
٢ ح د + ٢ ت د - ١٨ ح - ١٨

اضرب ت - ٤ في ٢ ب - ٦ = ٢ ت ب - ١٢ ب - ٦ ت + ٢٤
اضرب ٢ ت ي - ب في ٦ ك - ١ = ١٨ ت ك ي - ٦ ب ك - ٢
ت ي + ب

اضرب ٢ د - ح ي - ٢ ك في ٤ ب - ٧
اضرب ٢ ت د - ت ح - ٧ في ٤ د ي - ح ر
اضرب ٢ ح ي + ٢ م - ١ في ٤ د - ٢ ك + ٢

٢٢ قد رأينا ان حاصل كيتين سلبية ايجابي. فان ضرب هذا الحاصل في كمية سلبية يكون الحاصل سلبيا. وان ضرب الحاصل الاخير في كمية سلبية يكون الحاصل ايجابيا. وعلى الاطلاق ان كان عدد الكميات السلبية وترا يكون الحاصل سلبيا. وان كان شفعاً يكون الحاصل ايجابيا. اما الكميات الايجابية فحاصلها ايجابية ابداً

٢٣ قد يحدث في الضرب ان الكميات الايجابية والسلبية يفتي بعضها بعضاً حتى نخرج من الحاصل برمتها. مثالة

اضرب ت - ب

في م + ي

م + ي

ت - ت - ب

ت - ب - ب

ت - ب - ب

اضرب ت + ت + ب + ب

في ت - ب

ت + ت + ت + ب + ب + ب

ت - ت - ب - ب - ب - ب

ت ت ت - ب - ب - ب

٢٤ يكفي احياناً الدلالة على الضرب بعلامته من دون انمايه حقيقه. فلو قيل

اضرب ت + ب + س في ح + م + ي لفيل (ت + ب + س) × (ح + م + ي)

٢٥ لنا ما تقدم ذكره هذه القاعدة العامة للضرب

اضرب جميع احرف المضروب ومسمياتها في جميع احرف المضروب فيه ومسمياتها واجعل لكل جزء من الحاصل العلامة المطلوبة على القاعدة السابقة ان العلامات المتشابهة يحصل منها ايجاب والخلفه يحصل منها سلب. مثاله

اضرب ت + ب - ٢ في ٤ ت - ٦ ب - ٤
 اضرب ٤ ت ب X ك X ٢ في ٢ م ي - ١ ح
 اضرب (٧ ت ح - ي) X في ٤ ك X ٢ X ٥ د
 اضرب (٦ ت ب - ح د + ١) X ٢ في (٨ + ٤ ك - ١) X د
 اضرب ٢ ت ي + ي - ٤ ح في (د + ك) X (ح + ي)
 اضرب ٦ ت ك - (٤ ح - د) في (ب + ١) X (ح + ١)
 اضرب ٧ ت ي - ١ ح + (د - ك) في - (٢ + ٤ م)

الفصل الخامس

في القسمة

٢٦ القسمة طريقة لاستخراج عدد من آخر اذا ضرب في المقسوم عليه يحصل المقسوم. وقد يكون المقسوم والمقسوم عليه عددين وقد يكونان حروفاً. فلو قُسم ت ب د على ت لكان الخارج ب د لان ب د X ت = ت ب د

فنرى من ذلك أنه متى وُجد المقسوم عليه بين اجزاء المقسوم نتم القسمة باخراج ذلك الجزء من الكمية. امثلة

اقسم س ك	د ح	درك	ح م ي	د ح ك ي
على س	د	در	ح م	دى
الخارج ك		ك		ك ح

اقسم ت ب س د	ت ب ك ي	ت ت ب
على ب	ت ك	ت
الخارج	ب ي	ت ب

اقسم ب ب ك	ت ت د د ك	ت ت م م ي
على ب	ت د	ت م ي
الخارج ب ك	ت د د ك	

$$\begin{array}{r} \text{اقسم } ت ت ت ك ك ح \\ \hline \text{ت ت ك ك} \\ \hline \text{ت ك ح} \end{array}$$

وعلى الاطلاق مها كانت اجزاء المقسوم يكون اخراج احدها كالقسمة عليه . مثالة

$$\begin{array}{r} \text{اقسم } ت (ب + د) \\ \hline \text{ت} \\ \hline \text{ب + د} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{ت (ب + د)} \\ \hline \text{ب + د} \\ \hline \text{ت} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{علي (ن + م)} \\ \hline \text{ن + م} \\ \hline \text{ي} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{اقسم } (ب + ك) (س + د) \\ \hline \text{ب + ك} \\ \hline \text{س + د} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (ب + ي) \times (د - ح) ك \\ \hline \text{د - ح} \\ \hline (ب + ي) ك \end{array}$$

٢٧ اذا كانت للكميات مسميات عديدة يجيب ان نسم ايضاً ثم يجمل الخارج فلام الخارج من قسمة الاحرف . مثالة

$$\begin{array}{r} \text{اقسم } ٦ ت ب ١٦ د ك ي \\ \hline ٢ ب ٤ د ك \\ \hline \text{الخارج } ٣ ت ٢٥ ر \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{اقسم } ٢٤ د ر ك \\ \hline ٢٤ \\ \hline \text{الخارج } د ر ك \end{array}$$

٢٨ اذا ضربت كمية بسيطة في كمية مركبة تدخل البسيطة في كل جزء من الحاصل (٢٩) فيمكن فكها الى ضلعيه المضروب والمضروب فيه . مثالة

$$\begin{array}{l} \text{ت ب + ت د تنفك الى } ت \times (ب + د) \\ \text{ت ب + ت س + ت ح تنفك الى } ت \times (ب + س + ح) \end{array}$$

ت م ح + ت م ك + ت م ي تنفك الى ت م $\times$ (ح + ك + ي)
 ٤ ت د + ٨ ت ح + ١٢ ت م + ٤ ت ي تنفك الى ٤ ت $\times$ (د + ح + م + ي)
 (٢ + م + ي)

فان انقسمت الكمية على أحد هذين الضلعين يكون الخارج الضلع الآخر. مثاله

(ت ب + ت د) $\div$ ت = ب + د و (ت ب + ت د) $\div$ (ب + د) = ت

اقسم ب د ح + ب د ي	ت ت ح + ت ي
على ب د	ت
الخارج	ت ح + ي

اقسم درك + د ح + ك + د ك ي	٦ ت ب + ١٢ ت س
على د ك	٢ ت
	٢ ب + ٤ س

اقسم ١٠ دري + ١٦ د	١٢ ح ك + ٨	٢٥ د م + ١٤ د ك
على ٢ د	٤	٧ د
الخارج ٥ ري + ٨	٢ ح + ٢	

اقسم ت ب + ت س + ت ح	ت م ح + ت م ك + ت م ي
على ب + س + ح	ح + ك + ي
الخارج ت	

اقسم ٤ ت ب + ٨ ت ي	ت ح م + ت ح ي
على ب + ٢ ي	م + ي
الخارج ٤ ت	

٢٩ اذا كان كل من المقسوم والمقسوم عليه ايجابيا او سلبيا يكون الخارج ايجابيا .
 وان كان احدهما ايجابيا والاخر سلبيا يكون الخارج سلبيا . وذلك واضح مما تقدم ان
 حاصل الخارج في المقسوم عليه هو المقسوم نفسه (٢٦) فيكون

ت ب + ب = ت لان ت × ب = ت ب
و- ت ب + ب = ت- لان ت × ب = ت- ب
وقس على ذلك

اقسم ت ب ك	٨ ت - ١٠ ا ت ي	٢ ت ك - ٦ ت ي
على ت -	٢ ت -	٢ ت
الخارج - ب ك	٤ - ٥ + ي	

اقسم ٦ ت م × د ح
على ٢ ت

$$٢ - ٢ م × د ح = ٢ د ح م$$

٤٠ ان لم توجد احرف المقسوم عليه في المقسوم يدل على القسمة بكتابتها على هيئة كسر دارجي. مثاله ك ي + ت = $\frac{ك ي}{ت}$ وذ- ك + ح = $\frac{د-ك}{ح}$ وان كان المقسوم كية مركبة بوضع المقسوم عليه تحته جميعاً مرة واحدة او يعكس تحت كل جزء منه. مثاله ب + س ÷ ك = $\frac{ب + س}{ك}$ او $\frac{ب}{ك} + \frac{س}{ك}$ وت ب + ب = ٢ = $\frac{ت + ب}{٢}$ او $\frac{ت}{٢} + \frac{ب}{٢}$ لان نصف مجتمع كيتين او اكثر يعدل مجتمع انصافها. وكذلك ت - ب ÷ ٢ = $\frac{ت - ب}{٢}$ او $\frac{ت}{٢} - \frac{ب}{٢}$ لان نصف فضلة كيتين يعدل فضلة نصفها. وهكذا $\frac{ت - ٢ ب + ح}{م} = \frac{ت}{م} - \frac{٢ ب}{م} + \frac{ح}{م}$ وقس على ذلك

٤١ اذا وجدت حروف مشتركة في المقسوم والمقسوم عليه تطرح منها. مثاله $\frac{ت ب}{ب س} = \frac{ت}{س}$ و $\frac{د ح ك}{د ي} = \frac{ح ك}{ي}$ و $\frac{٢ ح ٢ - ٢ ت ي}{٢ ب} = \frac{٢ ح - ٢ ي}{ب}$ وان وجد المقسوم عليه في بعض اجزاء المقسوم دون البعض نقسم الأول كما تقدم وتكتب الآخر على هيئة كسر كما علمت. مثاله (ت ب + د) ÷ ت = $\frac{ت ب + د}{ت} = \frac{ت ب}{ت} + \frac{د}{ت}$

اقسم ٢ ت ح + ت د + ك
على ت

اقسم د ك ي + ر ك - ح د
على ك
الخارج د ي + ر - ح ك

$$\frac{م^٢ + د ح}{م^٢}$$

$$\frac{اقسم ب م + م^٢}{ب - م}$$

$$\frac{م^٢}{ب - م} + م$$

٤٢ الخارج من قسمة كمية على نفسها هو واحد ابداً . مثاله

$$١ = \frac{ت}{ت} \text{ و } ١ = \frac{٢ ت ك}{٢ ت ك} \text{ و } ١ = \frac{٧}{٢ + ٤}$$

$$\frac{اقسم ت ك + ك}{على ك} = \frac{٢ ب د - د}{د} = \frac{٤ ت ك ي - ٤ ت + ٨ ت د}{٤ ت}$$

$$\frac{الخارج ت + ١}{ك ي - ١ + ٢ د}$$

اقسم ١٢ ت ب ي + ٦ ت ب ك - ١٨ ب ب م + ٢٤ ب على ٦ ب

اقسم ١٦ ت - ١٢ + ٨ ي + ٤ - ٢٠ ت د ك + م على ٤

اقسم (ت - ٢ ح) × (م + ٢ ي) × ك على (ت - ٢ ح) (م + ٢ ي)

اقسم ت ح د - ٤ ت د + ٢ ي - ت على ح د - ٤ د + ي - ١

اقسم ت ك - ري + ت د - ٤ م ي - ٦ + ت على - ت

اقسم ت م ي + م ي - م ك ي + ت م - د على - د م ي

اقسم ت رد - ٦ ت + ٢ ر - ح د + ٦ على ٢ ت رد

اقسم ٦ ت ك - ٨ + ٢ ك ي + ٤ - ٦ ح ي على ٤ ت ك ي

نبيه . اذا كان المقسوم عليه كمية مركبة سيأتي ذكره عند الكلام على العاد الاكبر

—x—

الفصل السادس

في الكسور

٤٣ اذا كان كثير من خصائص الكسور يُعرف من علم الحساب اقتصرنا هنا على ما يتعلق منها بالاعمال الجبرية . فنقول

٤٤ قيمة الكسر في الخارج من قسمة الصورة على المخرج . فقيمة $\frac{٧}{٢}$ هي ٣ وقيمة

تب هي ت فقد وضع اذا انه ما تغير الكسرفان بقي ملا الخارج على حاله لم يتغير
 قيمة الكسر. مثاله $\frac{4}{5} = \frac{10}{12.5} = \frac{20}{25} = \frac{40}{50} = \frac{80}{100}$ وملم جراً لان
 الخارج من كل هذه الكسور انما هو اثنان

٤٥ إذا بني مخرج كسر على حاله كان ضرب الصورة في كمية كضرب القيمة في تلك الكمية وقسم الصورة كقسم القيمة . مثاله $\frac{ث ب}{ث ب} \cdot \frac{٧ ث ب}{٧ ث ب} = \frac{٧ ث ب}{٧ ث ب}$ الى آخره . فالخارج في ب ٢ ب ٧ ب د ١ ب الى آخره

وإذا بقيت صورة كسرٍ على ما لما ف ضرب المخرج في كميته هو كقسمة القيمة على تلك الكمية وقسمة المخرج كضرب القيمة . مثاله $\frac{24}{6} \frac{24}{12} \frac{24}{24} \frac{24}{24}$ فالخوارج هي ٤ ٢ ٨ ٢٤

فأرى ان قسمة الصورة كضرب المخرج وضرب الصورة كنفسه المخرج

٤٦ نرى أيضاً ما تقدم أنه إذا ضُربت الصورة والمخرج كلاهما في كمية واحدة أو انقسما على كمية واحدة لا تتغير قيمة الكسر. مثالة $\frac{١٢}{١٢} = \frac{٢٤}{٢٤} = \frac{٣٦}{٣٦}$ مثالاً

٤٧ ان قيمة $\frac{ث}{ب}$ هي ت وقيمة $\frac{ث}{ب}$ هي - ت وي + $\frac{ث}{ب}$ =
 ي + ت وي - $\frac{ث}{ب}$ = ي - ت فارى ان قيمة الكسر تتغير من + الى -
 وبالعكس بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر كله
 حسباً تقدم (٣٩) $\frac{ث}{ب}$ = + ت و $\frac{-ث}{ب}$ = - ت و $\frac{ث}{-ب}$ =
 + ت - س ولكن $\frac{-ث}{-ب} = \frac{ث}{ب}$ = + ت + س

فترى ان قيمة الكسر تتغير من + الى - وعكسه بتبديل جميع علامات الصورة.
اذا تغيرت علامات المخرج فلنا ايضاً كما تقدم $\frac{+}{-} = -$ و $\frac{-}{-} = +$ فلنا مما تقدم هذه القضية العامة ان قيمة الكسر تتغير من + الى -
او عكسه بتبديل العلامة المتقدمة على الكسر. او بتبديل جميع علامات
الصورة. او جميع علامات المخرج

ثم ان $\frac{\text{ت}}{\text{ب}} = \text{ت} + \text{وى} - \frac{\text{ت}}{\text{ب}} = \text{ى} + \text{ت}$ اي اذا تغيرت
العلامات من $+$ الى $-$ او عكس ذلك في موضعين من المواضع المذكورة سابقاً

نبذة في جمع الكسور

٥١ تجتمع الكسور بكتابتها على التوالي مع علاماتها حسبما تقدم في جمع الصحيح او بقولها الى مخرج مشترك. ثم تجعل جميع العلامات المتقدمة عليها ايجابية. ثم تجمع الصور وبوضع المجموع فوق المخرج المشترك

تنبيه . عند تبديل العلامات يجب الاحتراس من تغيير قيمة الكسر (٤٧)

$$\begin{array}{l}
 \text{فلو قبل اجمع } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{3} \text{ لقبل } \frac{1}{6} \\
 \text{اجمع } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \text{ الجواب } \\
 \text{اجمع } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ الجواب } \\
 \text{اجمع } \frac{1}{2} \text{ و } \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ الجواب } \\
 \text{اجمع } \frac{1}{3} \text{ و } \frac{1}{4} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} = \frac{7}{12} \text{ الجواب } \\
 \text{اجمع } \frac{1}{4} \text{ و } \frac{1}{6} = \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{5}{12} \text{ الجواب } \\
 \text{اجمع } \frac{1}{6} \text{ و } \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24} \text{ الجواب } \\
 \text{حوّل } \frac{1}{2} \text{ الى كسر غير حقيقي } \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \text{ الجواب } \\
 \text{حوّل } \frac{1}{3} \text{ الى كسر غير حقيقي } \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \text{ الجواب } \\
 \text{حوّل } \frac{1}{4} \text{ الى كسر غير حقيقي } \frac{1}{4} = \frac{2}{8} \text{ الجواب } \\
 \text{حوّل } \frac{1}{6} \text{ الى كسر غير حقيقي } \frac{1}{6} = \frac{2}{12} \text{ الجواب } \\
 \text{حوّل } \frac{1}{8} \text{ الى كسر غير حقيقي } \frac{1}{8} = \frac{2}{16} \text{ الجواب }
 \end{array}$$

نبذة في طرح الكسور

٥٢ لطرح الكسور غير علامة المطروح من + الى - او عكسه ثم اقل كما تقدم في الجمع

تنبيه . نارة يجب تغيير علامة الصورة ونارة العلامة المتقدمة على الكسر كذا تكون هذه الاخيرة ايجابية

فلو قيل من $\frac{ت}{ب}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ لنيل $\frac{ت}{ب} - \frac{ح}{م}$ ثم بالتحويل الى مخرج مشترك

$$\frac{ت}{ب} - \frac{ح}{م} = \frac{ت م - ح ب}{ب م}$$

وبالجمع $\frac{ت م - ح ب}{ب م}$

من $\frac{ت}{ر}$ اطرح $\frac{ح}{د}$ الجواب $\frac{ت د - ح ر}{د ر}$

من $\frac{ت}{م}$ اطرح $\frac{د}{ب}$ الجواب $\frac{ت ب - د م}{ب م}$

من $\frac{ت + د}{٤}$ اطرح $\frac{٢ ت - ٢ د}{٢}$ الجواب $\frac{١٢ د - ٩ ت}{١٢}$

من $\frac{ب - د}{٤}$ اطرح $\frac{ب}{٢}$ الجواب $\frac{ب - ٢ د}{٢}$

من $\frac{ت + ١}{د}$ اطرح $\frac{١ - د}{م}$ من $\frac{٢}{٢}$ اطرح $\frac{٢}{٢}$

٥٢ تطرح الكسور ايضا مثل الصحيح بكتابنا - المتوالية بعد تبديل العلامة .

فلو قيل اطرح $\frac{ح + د}{س}$ من $\frac{ح}{م}$ لنيل $\frac{ح}{م} + \frac{ح + د}{س}$

اما طرح الكسر من صحيح او عكسه فهو بان نجعل للصحيح مخرجاً هو واحد ثم نفعل كما تقدم

من $\frac{ح}{س}$ اطرح $\frac{ح}{م}$ الجواب $\frac{ح م - ح س}{س م}$

من $\frac{٤ ت + ٢ س}{٢}$ اطرح $\frac{٢ ت - ٢ س}{٢}$ الجواب $\frac{٦ ت + ٤ س}{٢}$

من $\frac{١ + \frac{ب - س}{د}}$ اطرح $\frac{ب - س}{د}$ الجواب $\frac{١ + د}{د}$

من $\frac{٢ ت + ح - ٢ د}{٢}$ اطرح $\frac{٢ ت - ح + ٢ د}{٢}$ الجواب $\frac{٤ ت - ٤ د}{٢}$

نبذة في ضرب الكسور

٥٤ ضرب الكسور في الجبر كما في الحساب اي تضرب الصور بعضها في بعض لايجاد صورة جديدة . والمخارج بعضها في بعض لايجاد مخرج جديد . مثالة

$\frac{٢ ب}{س} \times \frac{د}{٢ س} = \frac{٢ ب د}{٢ س س} = \frac{ب د}{س س}$

اضرب $\frac{٤ ت + ح}{٢ - م} = \frac{٤ ت}{٢ - م} \times \frac{٤ ت + ح}{٢ - م}$

اضرب $\frac{٢ - ٤}{٢ + ٢}$ في $\frac{٢ - ٤}{٢ + ٢}$

اضرب $\frac{١}{٢ + ٢}$ في $\frac{٢}{٢}$ اضرب $\frac{٢ ت - ح}{٢}$ في $\frac{٢ ت - ح}{٢}$

اضرب $\frac{١}{٢ + ٢}$ في $\frac{٢}{٢}$ اضرب $\frac{٢ ت - ح}{٢}$ في $\frac{٢ ت - ح}{٢}$

اضرب $\frac{٢ ت - ح}{٢}$ في $\frac{٢ ت - ح}{٢}$

٥٥ مختصر الضرب باخراج الكميات المتساوية من الصور والمخارج فيستغنى

بذلك عن الاختزال بعد اتمام الضرب . مثاله لو قيل اضرب $\frac{ت}{ر}$ في $\frac{ح}{د}$ في $\frac{د}{ح}$ فلنا
ت في احدى الصور وأحد الخارج . ولذلك نستطاع منها فبقى $\frac{د}{ح}$

اضرب $\frac{ت}{د}$ في $\frac{د}{ح}$ في $\frac{ح}{د}$ الجواب $\frac{ت}{د}$

اضرب $\frac{ت}{د}$ في $\frac{د}{ح}$ في $\frac{ح}{د}$ الجواب $\frac{ت}{د}$

اضرب $\frac{ت}{د}$ في $\frac{د}{ح}$ في $\frac{ح}{د}$ الجواب $\frac{ت}{د}$

ومكنا في الكسر والصحيح بضرب الصحيح في صورة الكسر . مثاله $\frac{ت}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت}{ح}$

$$\text{ور } \frac{ك}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ك}{ح} \quad \frac{ك}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ك}{ح}$$

$$\text{وت } \frac{ب}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ب}{ح}$$

٥٦ الكسر بضرب في كمية تساوي مخرجه برفع المخرج . مثاله $\frac{ت}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت}{ح}$

$$\text{ت وت } \frac{ت}{د} \times (ت - د) = م^2 \text{ و } \frac{ت}{د} \times (م + د) = م^2 + ح$$

ومكنا اذا ضرب في ضلع من اضلاع المخرج برفع ذلك الضلع . مثاله $\frac{ت}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت}{ح}$

$$\frac{ت}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت}{ح} \quad \frac{ت}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت}{ح}$$

٥٧ الكسر الاضافي هو كسر الكسر وهو الحاصل من ضرب كسرين او اكثر .

مثاله $\frac{ت}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت}{ح}$ اي ثلاثة ارباع $\frac{ت}{د} = \frac{ت}{ح}$ فيتحول الكسر الاضافي الى بسيط بضرب

الصور والمخرج حسب تقدم

حول $\frac{ت}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت}{ح}$ الى كسر بسيط الجواب $\frac{ت}{ح}$

حول $\frac{ت}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت}{ح}$ الجواب $\frac{ت}{ح}$

حول $\frac{ت}{د} \times \frac{د}{ح} = \frac{ت}{ح}$ الجواب $\frac{ت}{ح}$

فدري ان $\frac{ت}{د} = \frac{ت}{ح}$ و $\frac{د}{ح} = \frac{د}{ح}$ و $\frac{د}{ح} = \frac{د}{ح}$ وقس على ذلك

نبذة في قسمة الكسور

٥٨ لقسمة الكسور يقلب المقسوم عليه بان تجعل صورته مخرجاً

ومخرجه صورة ثم يفعل كما في الضرب

فلو قيل اقس $\frac{ت}{د}$ على $\frac{د}{ح}$ لقل $\frac{ت}{د} \times \frac{ح}{د} = \frac{ت}{د}$ وكيفية هذه القاءة هي انه

اذا ضرب كسر في نفسه بعد قلبه يكون الحاصل واحداً ابداً . واذا ضربت كمية في واحد

لا تتغير فان ضرب المقسوم أولاً في المقسوم عليه بعد قلبه ثم في نفس المقسوم عليه يكون
الحاصل الاخير مساوياً المقسوم. اما القسمة فهي استخراج كمية اذا ضربت في المقسوم
عليه حصل المقسوم. والكمية الحاصلة من ضرب المقسوم في المقسوم عليه بعد قلبه مستقيمة
الشروط المذكورة. فالفائدة اذا صحيحة

$$\begin{aligned} & \text{اقسم } \frac{1}{2} \text{ على } \frac{1}{3} \text{ الجواب } \frac{3}{2} \\ & \text{الاختبار } \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \\ & \text{اقسم } \frac{1}{2} \text{ على } \frac{1}{3} \text{ الجواب } \frac{3}{2} \\ & \text{الاختبار } \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \\ & \text{اقسم } \frac{1}{2} \text{ على } \frac{1}{3} \text{ الجواب } \frac{3}{2} \\ & \text{الاختبار } \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \\ & \text{اقسم } \frac{1}{2} \text{ على } \frac{1}{3} \text{ الجواب } \frac{3}{2} \\ & \text{الاختبار } \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \\ & \text{اقسم } \frac{1}{2} \text{ على } \frac{1}{3} \text{ الجواب } \frac{3}{2} \\ & \text{الاختبار } \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \\ & \text{اقسم } \frac{1}{2} \text{ على } \frac{1}{3} \text{ الجواب } \frac{3}{2} \\ & \text{الاختبار } \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \end{aligned}$$

٥٩ يُقسم الكسر على صحيح بضرب المخرج في ذلك الصحيح. مثاله $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ لان $\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3}$ وحسبنا تقدم $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$

٦٠ قد تقدم (١٢) ان مكفوء كمية هو الخارج من قسمة واحد على تلك
الكمية. فمكفوء $\frac{1}{2}$ هو $1 \div \frac{1}{2} = 2$ فيكون مكفوء كسري هو الكسر نفسه مقلوباً.
فمكفوء $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ هو $\frac{3}{2}$ ومكفوء $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ هو 2 او $\frac{2}{1}$ ومكفوء $\frac{1}{2} \div \frac{1}{5}$ هو 2

٦١ قد يقع احياناً كسري في صورة كسري آخر. مثاله $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ وهذا الكسر يُنقل من
الصورة الى الخارج او بعكس ذلك بقلبه. ولا تتغير القيمة بذلك لان القسمة على كسري هي
كالضرب في ذلك الكسر مقلوباً. وضرب الصورة كقسمة المخرج وقسمة الصورة كضرب
المخرج. ففي $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3}$ بضرب 2 في $\frac{1}{2}$ ولا تتغير القيمة ان قسمنا المخرج على $\frac{1}{2}$ اي
ضربناه في 2 فاذا $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} = \frac{3}{2}$ وهكذا $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = \frac{4}{2} = 2$ و $\frac{1}{2} \div \frac{1}{5} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}$
و $\frac{1}{2} \div \frac{1}{6} = \frac{6}{2} = 3$ وقس على ذلك

ثم ان هذا الكسر الواقع في الصورة يمكن ازالته لان ضرب الصورة هو كضرب القيمة.

$$\text{فإذا } \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{1} = 2 \text{ و } \frac{1}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{1} = 3 \text{ و } \frac{1}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{1} = 4 \text{ و } \frac{1}{\frac{1}{5}} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\text{وبعكس العمل } \frac{2}{1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \text{ و } \frac{3}{1} = \frac{1}{\frac{1}{3}} \text{ و } \frac{4}{1} = \frac{1}{\frac{1}{4}} \text{ و } \frac{5}{1} = \frac{1}{\frac{1}{5}}$$

$$\text{أما الكسر الواقع في المخرج فيزال بالقسمة أي بضرب الكسر الأصلي في ذلك الكسر مقلوباً. مثالة } \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{3} = \frac{2}{1} = 2 \text{ و } \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{4} = \frac{3}{1} = 3$$

$$\text{و } \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{5} = \frac{4}{1} = 4 \text{ و } \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{6}{6} = \frac{5}{1} = 5$$

الفصل السابع

في المعادلات من الدرجة الأولى وهي البسيطة

٦٢ المعادلة عبارة جبرية دالة على المساواة بين كيتين فأكثر. كنولك ت
 $+ ب = س + د$ أي أن مجتمع ت وب يعدل مجتمع س ود والمقصود منها
 أنما هو استعلام كمية مجهولة بواسطة تحويل المعادلة التي فيها تقع المجهولة مرتبطة مع كميات
 معلومة. وتحويل المعادلات هو نقل المجهولات إلى جانب واحد من علامة المساواة
 والمعلومات إلى الجانب الآخر منها بدون نزع المعادلة أي المساواة بين الجانبين. ولا
 ريب أن المعادلة لا تنتزع إذا أضيف إلى الجانبين أشياء متساوية (أولية أولى) ولا إذا
 طرح منها أشياء متساوية (أولية ثانية) ولا إذا ضربا في أشياء متساوية (أولية ثالثة)
 ولا إذا انقسم على أشياء متساوية (أولية رابعة) فلنا ثلاث طرق لمعاملة المعادلات بدون
 نزع المساواة بين الجانبين وهي النقل والضرب والقسمة
 أما النقل فلو فرضنا هذه المعادلة ك - ٩ = ٧ نصيف إلى الجانبين ٧ فنصير

كـ $7+9=7+7-7$ ولكن $7-7=0$ فيبقى كـ $7+9=7$ فوجدنا قيمة المجهولة كـ وهي $7+9$ اي ١٦

نفرض ايضا كـ $+ب = ت$

اطرح بـ من الجانبين فتصير كـ $+ب - ب = ت - ب$ ولكن بـ $-ب = 0$ فاذا كـ $= ت - ب$

فندري ان العمل قد تم بنقل المعلومة من الجانب الواحد الى الآخر مع تبديل علامتها وهذا العمل يقال له المتقابلة ولنا ما سبق هذه القاعدة

متى ارتبطت الكمية المجهولة مع كميات معلومة بعلامة الجمع او الطرح فانقل المعلومات الى الجانب المتقابل وابدل علاماتها

منفروض كـ $+ب - م = ح - د$

بالمقابلة كـ $= ح - د - ب + م$

٦٤ متى وقعت كميات متشابهة على جانب واحد يجب جمعها حسب قواعد الجمع

فلو فرض كـ $+ب - م = ح - د$

بالمقابلة كـ $= م - ب + د - ح$

وبالجمع كـ $= م - ب + د - ح$

ماذا كانت المجهولة على الجانبين يجب نقلها الى جانب واحد

فلو فرض كـ $+ب - م = ح - د$

بالمقابلة كـ $= م - ب + د - ح$

وبالجمع كـ $= م - ب + د - ح$

٦٥ اذا وقعت كميات متساوية بعلامات متضاربة على الجانبين يمكن اخراجها

منها في الحال

فلو فرض كـ $+ب - م = ح - د$

اخرج $+ب$ من الجانبين

كـ $= م - ب + د - ح$

وبالمقابلة والجمع كـ $= م - ب + د - ح$

ولا فرق في ترتيب الكميات ولا في الجانب الذي تُنقل إليه . وإذا بُدِلَت جميع
علامات الجانبين لا تتغير المعادلة . مثالة $ك - ب = د - ت$ بالمقابلة لنا
 $د + ت = ك + ب$ او $ك - ب = د + ت$ وإذا نُقِلَ جميع
الكميات الى الجانب الواحد بيني الآخر صفراً . فلو فُرض $ك + ب = د$ فنجتذر
 $ك + ب - د = ٠$

وعلى ما تقدم نُحوّل هذه المعادلات

$$ت + ٢ ك - ٨ = ب - ٤ + ك + ت$$

$$٥ - ت - ب - ح م = ت + ٢ ي - ت - ب + ح م$$

$$ح + ٢٠ + ٧ ك = ٨ - ٦ ح + ٦ ك - د + ب$$

$$ب + ح + ٢١ - ٤ = د + ب + ١٢ - ٢ ك - ٧ ب + ح + د$$

٦٦ اما الضرب فيستعمل متى انقسمت الكمية المجهولة على معلومة كما في $\frac{ك}{٦} = ب$
بضرب الجانبين في ت فنصير $ك = ت ب$

ولنا من ذلك هذه القاعدة

متى انقسمت المجهولة على معلومة فاضرب الجانبين في تلك المعلومة
ثم قابل واجمع كما تقدم

$$\frac{ك}{٦} + ت = ب + د$$

$$ك + ت س = ب س + د س$$

$$ك = ب س + د س - ت س$$

وهذا العمل يقال له الجبر اي اعادة الكسر صحيحاً

$$\frac{ك}{٦} = ٥ + \frac{٤ - ك}{٦}$$

$$١٢٠ = ٣٠ + ٤ - ك$$

$$٩٤ = ٣٠ - ٤ + ١٢٠ = ك$$

$$\frac{ك}{٦} + د = ح$$

$$ك + ت د + د = ب د + ح + ب ح$$

$$ك = ت ح + ب ح - ت د - ب د$$

ومكنا متى وقعت المجهولة في مخرج كسر بضرب الجانبان في ذلك المخرج

$$\text{مفروض} \quad ٨ = ٧ + \frac{٦}{١-ك}$$

$$\text{اضرب في } (١-ك) \quad ٨-٨٠ = ٧-٧٠+٦ \quad \text{ك}$$

$$\text{بالمقابل والجمع} \quad ٤ = ك$$

$$٦٧ \text{ لو فرض } ك = \frac{د}{ب} + \frac{ح}{س}$$

$$\text{فالضرب في ت نصير } ك = \frac{تد}{ب} + \frac{تد}{س}$$

$$\text{والضرب في ب نصير } ب ك = ت د + \frac{تد}{س}$$

$$\text{وبالضرب في س نصير } ب س ك = ت د س + ت ب ح$$

$$\text{او بالضرب في جميع الخارج دفعة واحدة نصير} \quad \frac{ت ب د س}{ب} = \frac{ت ب س ك}{ب} + \frac{ت ب ح س}{ب}$$

ثم باخراج الاحرف المتشابهة من الصور والخارج لنا كما في الاول $ب س ك = ت س د + ت ب ح$ ولنا من ذلك هذه القاعدة لازالة الكسور من معادلة اي لجبرها

اضرب كل صورة في جميع الخارج الا مخرجها

$$\text{مفروض} \quad ك = \frac{ب}{د} + \frac{ع}{ح} - \frac{ي}{م}$$

$$\text{بالجبر} \quad د ع م ك = ت ب ع م + ت د م ي - ت د ع ح$$

$$\text{مفروض} \quad \frac{ك}{٢} = \frac{٢}{٢} + \frac{٤}{٥} + \frac{٢}{٢}$$

$$\text{بالجبر} \quad ٢٠ ك = ٢٠ + ٤٨ + ٤٠$$

٦٨ اذا كانت علامة كسرية ملية وجب تبديلها بدون تغيير القيمة كما تقدم في فصل الكسور (٤٧)

$$\text{مفروض} \quad \frac{ت-د}{ك} = س - \frac{٢٢-٢ح٢-٥٦}{ر}$$

$$\text{بتبديل العلامات} \quad \frac{ت-د}{ك} = س + \frac{٢٢-٢ح٢+٥٦}{ر}$$

$$\text{ثم بالجبر} \quad ت ر - د ر = ر س ك - ٢ ب ك + ٢ ح م ك + ٦ ك ن$$

٦٩ اما القسمة فنحل بها المعادلات متى ضربت المجهولة في المعلومة وذلك بقسمة

$$\text{جانبي المعادلة على تلك المعلومة. فلو فرض} \quad ت ك + ب - ح = د$$

$$\text{فبالمقابل نصير} \quad ت ك = د - ب + ح \quad \text{وبالقسمة على ت} \quad ك = \frac{د-ب+ح}{ت}$$

$$\text{مفروض} \quad ٢ ك = \frac{ت}{س} - \frac{د}{ح} + ٤$$

بالجبر $٢س ح ك = ت ح - س د + ٤ ب ح س$
 بالقسمة على $٢س ح$ $ك = \frac{ت ح - س د + ٤ ب ح س}{٢س ح}$

مفروض $٢ ك - ب ك = ت - د$

حسب (٢٨) $(٢ - ب) ك = ت - د$

بالقسمة على $٢ - ب$ $ك = \frac{ت - د}{٢ - ب}$

مفروض $ت ك + ك = ح - ٤$

بالقسمة على $١ + ت$ $ك = \frac{٤ - ح}{١ + ت}$

مفروض $ك - \frac{ك - ب}{ح} = \frac{ت + د}{٤}$

بالجبر $٤ ح ك - ك - \frac{ك - ب}{ح} = ت ح + ح د$

بالمقابلة والقسمة $ك = \frac{ت ح + ح د - \frac{ك - ب}{ح}}{٤ - ح}$

٧٠ إذا ضرب كل جزء من المعادلة في كمية يجب قسمة المعادلة عليها . وإذا انقسم كل جزء على كمية يجب ضرب المعادلة فيها . ومكنا نصير ايسر ما كانت ونسهل معاملتها حسبما تقدم

مفروض $ت ك + ٢ ت ب = ٦ ت د + ت$

بالقسمة على $ت$ $ك + ٢ ب = ٦ د + ١$

بالمقابلة $ك = ٦ د + ١ - ٢ ب$

مفروض $\frac{٦ د + ١ - ٢ ب}{ك} = \frac{١ + ت}{ك}$

بالضرب في $ك$ حسب (٤٨) $٦ د + ١ - ٢ ب = ١ + ت$

بالمقابلة $ك = ٦ د + ١ - ٢ ب$

مفروض $ك (ت + ب) - ت - ب = د (ت + ب)$

بالقسمة على $ت + ب$ $ك = ١ - د$

وبالمقابلة $ك = ١ + د$

٧١ إذا اقتضى كتابة مسألة على هيئة النسبة فنحول تلك النسبة الى معادلة بأن نجعل حاصل الطرفين مساوياً لحاصل الوسطين كما عرفت في علم الحساب . فان قُرض $ت : ب :: س : د$ فإذا $ت د = ب س$ وان قُرض $٢ : ٤ :: ٦ : ٨$

فحينئذ $٨ \times ٢ = ٦ \times ٤$ وهكذا ت ك : ب :: ح : د ثم ت د ك = ب ح س
وايضاً ت + ب : س :: ح - م : ي ثم ت ي + ب ي = ح س - س م

١٢ نتحول معادلة الى نسبة ينك الجانب الواحد الى ضلعين فيعملان طرفين.
والجانب الآخر الى ضلعين فيعملان وسطين. فلو فرض ت ب س = د ي ح فينك
الجانب الاول الى ت $\times$ ب س او ت ب $\times$ س او ت س $\times$ ب وهكذا
ينك الجانب الآخر الى د $\times$ ي ح او د ي $\times$ ح او د ح $\times$ ي

ولنا من ذلك عدة نسب اي ت : د :: ي : ح : ب : س وايضاً ت ب : د ي
:: ح : س او ت س : د ح :: ي : ب ولم جراً لان هذه النسب كلها اذا تحولت
الى معادلات تعبر ت ب س = د ي ح

فلو فرض ايضاً ت ك + ب ك = س د - س ح لانك الجانب الاول الى
ك $\times$ (ت + ب) والثاني الى س $\times$ (د - ح) ولنا ك : س :: د - ح : ت + ب
او د - ح : ك :: ت + ب : س ولم جراً

امثلة

(١) مفروض $٧ + \frac{٥}{٨} = ٦ + \frac{٢}{٤}$

بالجبر $٢٢٤ + ك = ١٩٢ + ٢٠$

بالمقابلة والجمع $٢٢ = ك$

بالقسمة على ٤ $٨ = ك$

(٢) مفروض $\frac{ك}{٨} + ح = \frac{ك}{٤} - ب$

بالجبر ب س ك + ب ت ح س = ت س ك - ت ب ك + ت ب س د

بالمقابلة والقسمة $ك = \frac{ت ب س د - ت ب ك + ت ب ك - ت س ك}{ب س - ت س + ت ب}$

(٣) مفروض $١٢ = ك$ $١٤ - ١٢٠ = ١٦ - ك$

(٤) $\frac{١٢}{٤} = ك$ $\frac{١٩ - ك}{٢} - ٢٠ = \frac{ك}{٢} + \frac{٢ - ك}{٢}$

(٥) $ك = \frac{ك}{٤} + \frac{ك}{٢} - ٢٠$

(٦) $٥ = ٤ - \frac{١ - ت}{٤}$

(٧) $٨ = ٢ - \frac{٢}{٤ + ك}$

(٨) $١ = \frac{٦ - ل}{٤ + ل}$

$$\begin{aligned}
 (١) \text{ مفروض } ك + \frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} &= ١١ \quad = ك \\
 (٢) \quad \frac{٧}{١٠} &= \frac{ك}{٤} - \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٢} \quad = ك \\
 (٣) \quad \frac{٥ - ٢٨٤}{٤} &= ٦ + \frac{٥ - ٢٨٤}{٤} \quad = ٥ \\
 (٤) \quad \frac{٢٧ - ك}{٢} + ٥ &= \frac{٦ + ك}{٥} \quad = ك \\
 (٥) \quad \frac{٤ - ك}{٢} - ٢ &= \frac{٤ - ١٨}{٢} + ك \quad = ك \\
 (٦) \quad \frac{١١ - ك}{١٦} + ٢١ &= \frac{٥ - ك}{٨} + \frac{٢٧ - ٩٧}{٢} \quad = ك \\
 (٧) \quad \frac{١}{١٢} - \frac{١٤ ك}{٣} &= ٤ - \frac{٤ - ك}{٤} - ك \quad = ك \\
 (٨) \quad \frac{٩ + ك}{٢} &= ٦ + \frac{٤ + ١٦}{٥} - \frac{٥ + ك}{٣} \quad = ك \\
 (٩) \quad \frac{١٤ + ٥٧}{٢} + ٥ &= \frac{٢ + ٤}{٣} - \frac{١٧ - ٣}{٥} \quad = ك \\
 (١٠) \quad \frac{٤ - ٢٤}{٥} + \frac{٨ - ٢٦}{٧} - \frac{٢ - ٢٠}{٢} &= ٤ + \frac{٢ - ٢٢}{٥} - ٢ \quad = ك \\
 (١١) \quad \frac{٤ + ك}{٢} &= \frac{١٢ - ك}{٣} + \frac{٧ + ك}{٩} \quad = ك \\
 (١٢) \quad ٤ : ٧ &:: \frac{ك - ١٨}{٤} : \frac{ك}{٢} \quad = ك
 \end{aligned}$$

عمليات

(١) سئل رجل عن ثمن ساعته فقال ان ضرب ثمنها في اربعة واضيف الى المحاصل سبعون وطرح من المجموع خمسون يكون الباقي ٢٢٠ ديناراً. فكم ثمن الساعة
افرض ثمن الساعة ك
واذا ضرب هذا الثمن في ٤ يصير ٤ ك
ثم اضف الى هذا المحاصل ٧٠ فيصير ٤ ك + ٧٠
اطرح من المجموع ٥٠ فيصير ٤ ك - ٧٠ + ٥٠
وهذا الباقي يعادل ٢٢٠ ديناراً اي ٤ ك - ٧٠ + ٥٠ = ٢٢٠
وبتحويل هذه المعادلة لنا ٥٠ = ك

فقد وجدنا ثمن الساعة خمسين ديناراً. ولا تخان العمل نضع قيمة المجهول عوضاً عن المجهول في المعادلة الاصلية فان كان الجانبان متساويين كان العمل صحيحاً والا فلا.
مثال في المسئلة السابقة بالتعويض عن ك بخمسين نصير ٤ × ٥٠ - ٧٠ + ٥٠ = ٢٢٠ وهو صحيح

(٢) اتي عدد اذا اضيف اليه نصفه ثم طرح ٢٠ من المجموع يكون الباقي

ربع العدد

افرض العدد ك

$$\text{ثم حسب شروط المسئلة } ك + \frac{ك}{٢} - ٢٠ = \frac{ك}{٤}$$

وبالتحويل هذه المعادلة تصير ك = ١٦

$$\text{والامتحان } ١٦ + \frac{١٦}{٢} - ٢٠ = \frac{١٦}{٤}$$

(٢) رجل قسم مبلغاً بين اولاده الثلاثة فاعطى الاول نصف المبلغ الألف دينار. والثاني ثلث المبلغ الأ ٨٠٠ دينار. والثالث ربع المبلغ الأ ٦٠٠ دينار. فكم كان المبلغ

اذا فرضنا ان المبلغ ك تكون الحصص $\frac{ك}{٢}$ - ١٠٠٠ و $\frac{ك}{٣}$ - ٨٠٠ و $\frac{ك}{٤}$ - ٦٠٠ وبجمع هذه الثلاث ببادل المبلغ اي $\frac{ك}{٢} + \frac{ك}{٣} + \frac{ك}{٤} = ٢٤٠٠$ ك = ٢٨٨٠٠ وبالتحويل

(٣) اقسام ٤٨ الى قسمين حتى ينقسم اكبرها على ٦ واصغرهما على ٤ ويكون مجموع الخارجين ٩

ان فرض الاصغر ك يكون الاكبر ٤٨ - ك

$$\text{وحسب شروط المسئلة } \frac{ك}{٤} + \frac{٤٨ - ك}{٦} = ٩$$

وبالتحويل ك = ١٢ اصغرهما و ٤٨ - ١٢ = ٣٦ اكبرها

(٥) اي عدد اذا اضيف اليه نصفه يكون المجموع اكثر من ٦٠ بفضلة العدد ٦٥

$$\text{افرض العدد ك فلنا } ك + \frac{ك}{٢} - ٦٥ = ٦٠ \quad ك = ٥٠$$

(٦) اقسام ٢٢ الى قسمين حتى ينقسم اصغرهما على ٦ واكبرها على ٥ ويكون مجموع

الخارجين ٦

لفرض اصغرهما ك فيكون اكبرها ٢٢ - ك

$$\text{وبشروط المسئلة } \frac{ك}{٥} + \frac{٢٢ - ك}{٦} = ٦$$

ك = ١٢ اصغرهما ٢٢ - ١٢ = ١٠ اكبرها

(٧) اقسام ٢٥ الى قسمين بحيث يكون اكبرها ٤٩ مرة اصغرهما

لفرض الاصغر ك والاكبر ٢٥ - ك فلنا ٢٥ - ك = ٤٩ ك

$$ك = \frac{٢٥}{٤٨} \text{ اصغرهما و } \frac{٢٥}{٤٨} \text{ اكبرها}$$

(٨) اقسام ٤٨ الى ٩ اقسام حتى يكون كل قسم اكبر من الذي قبله بنصف

ك	ليكون القسم الاصغر
$\frac{1}{2} + ك$	فيكون الثاني
$١ + ك$	والثالث
$١ \frac{1}{2} + ك$	والرابع
$٢ + ك$	• ولم جراً
$٢ \frac{1}{2} + ك$	
$٣ + ك$	
$٣ \frac{1}{2} + ك$	
$٤ + ك$	

مجموع هذه الاقسام $٩ + ك = ٤٨$ $ك = ٣ \frac{1}{2}$

والاقسام $١ \frac{1}{2} + ٢ \frac{1}{2} + ٣ \frac{1}{2} + ٤ \frac{1}{2} + ٤ \frac{1}{2} + ٥ \frac{1}{2} + ٥ \frac{1}{2} + ٦ \frac{1}{2} + ٦ \frac{1}{2} + ٧ \frac{1}{2} = ٤٨$

تنبيه. نحل هذه المسئلة ايضاً بقواعد السلمة الحسابية على اسهل طريق كما سنعلم

(١) اي عدد يُطرح واحد من مضاعفه ثم يضاعف الباقي ويُطرح منه ٢ ويُقسم هذا الباقي على ٤ فيكون الخارج اقل من العدد بواحد لنفرض العدد ك فيكون مضاعفه ٢ ك وان طرح منه واحد يكون ٢ ك - ١ ومضاعفه ٤ ك - ٢ ثم يُطرح ٢ فيكون ٤ ك - ٢ - ٢ - ٢ اي ٤ ك - ٤ وبالقسمة على ٤ بصيرك ١ وهذا يعادل العدد الاً واحداً اي ك - ١ = ك - ١ فلما ما بُني معادلة ذاتية. وهذه المعادلة تدل على ان المجهول غير معين فيمكن ان يفرض اي عدد شئت

(١) رجل اشترى اذرعاً من القاش. وكان ثمن كل ٥ اذرع ٧ غروش. ثم باع ما اشتراه بثمن ١١ غرشاً لكل ٧ اذرع ورج ١٠٠ غرش فكم ذراعاً اشترى لنفرض الاذرع ك و $\frac{٧}{٥}$ الغرش ثمن الذراع و $\frac{٧}{٥} ك$ ثمن الاذرع كلها ثم عند البيع كان ثمن الذراع $\frac{١١}{٧}$ من الغرش و ثمن الجميع $\frac{١١}{٧} ك$ وفضلة الشراء والبيع ١٠٠ اي $\frac{١١}{٧} ك - \frac{٧}{٥} ك = ١٠٠$ $٦ ك = ٣٥٠٠$ $ك = ٥٨٣ \frac{١}{٥}$

(١١) اي عدد اذا اضيف اليه ٧٢٠ وقسم المجمع على ١٢٥ يعادل الخارج ٧٢٩٢ منسوماً على ٤٦٢ الجواب ١٢٨٠

(١٢) تاجر ناجر في صنف من البضائع فرج او خسر . وفي صنف آخر ربح ٢٥٠ ديناراً . وفي صنف آخر خسر ٦٠ ديناراً . ورجح من الاصناف الثلاثة ٢٠٠ دينار فكم ربح او خسر في الاول

لنفرض المجهول ك فان حسبنا الربح + تكون الخسارة - فلنا $ك + ٢٥٠ - ٦٠ = ٢٠٠$ وبالمقابلة $ك = ١$

فكون الجواب سلبياً يدل على انه خسر في الاول

(١٣) سفينة سافرت الى الشمال ٤° ثم الى الجنوب ١٢° ثم الى الشمال ايضا ١٧° ثم الى الجنوب ايضا ١٩° وكان لها حينئذ ١١° من العرض الجنوبي فكم كان عرضها في الاول

لنفرض $ك =$ العرض المطلوب . فان حسبنا الشمال + يكون الجنوب - ولنا $ك + ٤ - ١٢ + ١٧ - ١٩ = ١١$ اي كانت على خط الاستواء

(١٤) اي عدد اذا انقسم على ١٢ يكون مجموع الخارج والمقسوم والمقسوم عليه ٦٤

لنفرض $ك =$ العدد . فلنا $ك + \frac{ك}{١٢} + ١٢ = ٦٤$

وبالجبر والمقابلة والقسمة $ك = \frac{٦٢٤}{١٣} = ٤٨$

(١٥) رجل اشترى ١٢ ثوب قاش منها اثنان ابيضان وثلاثة سود وسبعة زرق بثمن ١٤٠ ديناراً . وثمن الثوب الاسود اكثر من ثمن الابيض دينارين وثمان ازرق اكثر من ثمن الاسود ثلاثة دنانير فكم ثمن كل واحد منها

لنفرض $ك =$ ثمن الابيض فيكون ثمن الثوبين ٢ ك وثمان الاسود $ك + ٢$ فيكون ثمن الثلاثة ٣ ك + ٦ وثمان الثوب الازرق $ك + ٥$ فيكون ثمن السبعة ٧ ك + ٢٥ والمجموع ١٢ ك + ٤١ فلنا $١٢ ك + ٤١ = ١٤٠$ $ك = \frac{١٤٠ - ٤١}{١٢} = ٨$ ثمن الابيض $\frac{١٠}{٤} =$ ثمن الاسود و $\frac{١٢}{٤} =$ ثمن الازرق

(١٦) مبلغ انقسم بين اربعة ورث فكان للاول ٢٠٠ دينار زيادة عن $\frac{١}{٤}$ المبلغ . وللثاني ٣٤٠ زيادة عن $\frac{١}{٥}$ المبلغ . وللثالث ٢٠٠ دينار زيادة عن $\frac{١}{٦}$ المبلغ . وللرابع ٤٠٠ دينار زيادة عن $\frac{١}{٨}$ المبلغ فكم كان ذلك المبلغ الذي انقسم

الجواب ٤٨٠٠ ديناراً

(١٧) مطلوب عدد اقل من ٥٠٠ بمقدار زيادة خمس على ٤٠

الجواب ٤٥٠

- (١٨) ما عددان فضلتهما ٤٠ ونسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ٦ إلى ٥
الجواب ٢٤٠ و ٢٠٠
- (١٩) مزيج من النحاس والقصدير والرصاص كان فيه النصف الآ ١٦ رطلاً
نحاساً. والثلث الآ ١٢ رطلاً قصديراً. وكان الرصاص أكثر من الربع بأربعة أرطال.
فكم رطلاً من كل صنف في ذلك المزيج
الجواب كان النحاس = ١٢٨ رطلاً. والقصدير = ٨٤ رطلاً. والرصاص =
٧٦ رطلاً
- (٢٠) مركبان بينهما ١٨ ميلاً. والمتأخر منها جرى ١٠ أميال في الساعة والمتقدم
٨ أميال فكم ميلاً يجري المتقدم قبل أن يلحقه المتأخر
الجواب ٧٢ ميلاً
- (٢١) ما عددان مجموعهما سدس حاصلهما ونسبة أحدهما إلى الآخر كنسبة ٣ إلى ٢
الجواب ١٥ و ١٠
- (٢٢) كلب وارنب بينهما ٥٠ قفزة. وكلما قفز الكلب ٢ قفزات قفز الارنب ٤
غير أن القفزتين من الكلب تساويان ٣ قفزات من الارنب. فكم قفزة يقفز الكلب
قبل أن يدرك الارنب
الجواب ٢٠٠
- (٢٣) ثلاثة شعراء مدحوا ملكاً. فجعل الملك جائزة الأول ٢٠٠ دينار. وجائزة
الثاني كالأول وثلث الثالث. وجائزة الثالث كجميع الجائزين الأولين. فكم مجموع
الجوائز الثلاث
الجواب ١٢٠٠ دينار
- (٢٤) أي عدد نسبته إلى ١٢ مع ثلاث مرات العدد كنسبة ٩:٢
الجواب ٨
- (٢٥) زورق تقدم عن مركب ١٢ ميلاً وجرى ٢ أميال كلما جرى المركب
٥ أميال. فكم ميلاً يجري المركب قبل أن يدرك الزورق
الجواب ٢٣ ١/٢ ميل
- (٢٦) أي عدد فضله سدس وثمنه ٢٠
الجواب ٤٨٠
- (٢٧) اقس ٢٠٠٠ إلى قسمين بحيث تكون نسبة أحدهما إلى الآخر ٧:٩
الجواب ١١٢٥ و ٨٧٥
- (٢٨) أي عدد مجموع ثلثه وربعه وخمسه ٩٤
الجواب ١٢٠
- (٢٩) بين زيد وعمرو مسافة ٢٦٠ ميلاً فسافرا حتى التقيا. أما زيد فسار كل
ساعة ١٠ أميال وأما عمرو فثانية أميال في الساعة. فكم قطع كل واحد من المسافة
قبل أن التقيا
الجواب زيد = ٢٠٠ ميل وعمرو ١٦٠ ميلاً
- (٣٠) رجل عاش ثلث عمره في النسططانية وربعه في دمشق والباقي وهو ٢٠

- مئة في مهر فكم سنة عاش
الجواب ٤٨ سنة
- (٢١) اي عدد فضله ربع وخمسة ٩٦
الجواب ١٩٢٠
- (٢٢) عمود في بركة خمسة في الارض و $\frac{1}{7}$ منه في الماء و ١٢ قدماً فوق الماء فكم
قدماً طول العمود
الجواب ٣٥ قدماً
- (٢٣) اي عدد اذا اضيف اليه ١٠ يكون $\frac{1}{2}$ المجمع ٦٦
الجواب ١٠٠
- (٢٤) بستان كان فيه $\frac{1}{4}$ الاشجار نفاحاً و $\frac{1}{10}$ كثرى والبقية وهي ٢٠ شجرة اكثر
من ثمن الجميع سفر جلاً فكم شجرة في البستان
الجواب ٨٠٠
- (٢٥) رجل اشترى ارطالاً من الخمر بدينارين ٩٤ غرساً وشرب منها سبعة ارطال ثم
باع ربع الباقي بعشرين غرساً على سعر مشتراه فكم رطلاً اشترى
الجواب ٤٧ رطلاً
- (٢٦) لزيد وعبيد ايراد واحد سنوياً. اما زيد فانفق كل سنة فوق ايراده مبلغاً
يساوي $\frac{1}{7}$ الايراد. واما عبيد فانفق كل سنة $\frac{1}{4}$ ايراده. وبعد ١٠ سنين حصل عنده
مبلغ يساوي المال الذي انكسر على زيد مع زيادة ١٦٠ ديناراً. فكم كان الايراد
الجواب ٢٨٠ ديناراً
- (٢٧) رجل عاش ربع عمره بقولاً. ثم تزوج وبعد ذلك بمدة ٥ سنين اكثر من
 $\frac{1}{7}$ عمره وولد له ابن. ثم مات الابن قبل ابيه بمدة ٤ سنين وهو قد بلغ نصف عمر ابيه.
فكم سنة عاش الرجل
الجواب ٨٤ سنة
- (٢٨) اي عدد يجمع $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{7}$ منه ٧٣
الجواب ٨٤
- (٢٩) رجل انفق ١٠٠ ديناراً اكثر من $\frac{1}{4}$ ايراده فبقي ٣٥ ديناراً اكثر من
نصفه فكم كان الايراد
الجواب ٤٥٠
- (٣٠) مقدار من البارود كان فيه الملح ١٠ ارطال اكثر من $\frac{1}{2}$ الجميع والكبريت
 $\frac{1}{2}$ رطل اقل من $\frac{1}{4}$ الجميع. والقم اقل من $\frac{1}{7}$ الملح برطلين. فكم رطلاً كان البارود
الجواب ٦٩ رطلاً
- (٣١) وعاء يسع ١٤٦ رطلاً امتلاً بمزيج من سمن وعسل وماء. وكان العسل
اكثر من السمن بخمسة عشر رطلاً والماء بقدرها جميعاً. فكم رطلاً كان فيه من كل صنف
الجواب كان السمن ٢٩ رطلاً والعسل ٤٤ والماء ٧٣
- (٣٢) اربعة اشخاص اشتركوا في شراء بستان ثمنه ٤٧٥٥ ديناراً. فدفع زيد من
الثلث ثلاثة اضعاف ما دفعه عمرو. ودفع عبيد بقدر ما دفعوا كلاهما. ودفع عبد الله
بقدر ما دفع زيد وعبيد معاً. فكم دفع كل واحد منهم

الجواب دفع زيد = ٩٥١ وعمرو = ٢١٧ وعبيد = ١٢٦٨ وعبد الله = ٢٢١٩

(٢٢) انقسم ٩٩ الى خمسة اقسام ويكون الاول اكثر من الثاني بثلاثة واقل من الثالث بعشرة واكثر من الرابع بتسعة واقل من الخامس بستة عشر

لفرض ك = الاول ك - ٢ = الثاني ك + ١٠ = الثالث ك - ٩ = الرابع ك + ١٦ = الخامس ك + ٥ = ١٤ + ٩٩ = ١١٣ ك = ١٧

(٢٣) رجل قسم مالا بين اولاده الاربعة فاعطى الثالث ٥ غروش زيادة عن الرابع. والثاني ١٢ غرشا زيادة عن الثالث. والاول ١٨ غرشا اكثر من الثاني وكان الجميع ٦ غروش اكثر من سبعة امثال حصة الرابع فكم كان المال

الجواب ١٥٢ غرشا

(٢٤) كان لرجل قطيعان من الغنم متساويين في عدد الرؤوس فباع من القطيع الواحد ٢٩ راسا ومن الآخر ٩٢ راسا فكان الواحد مضاعف الاخر في العدد.

فكم راسا في كل قطيع

الجواب ١٤٧

(٢٥) ساع سعى خمسة ايام وقطع كل يوم ٦٠ ميلا. ثم نبعه آخر وقطع كل يوم ٧٥ ميلا فني كم يوم يدرك الاول

الجواب في ٢٠ يوما

(٢٦) كان عمر زيد مضاعف عمر عبيد. وعمر عبيد بقدر عمر عبد الله ثلاث مرات. ومجموع اعمار الثلاثة ١٤٠ سنة فكم عمر كل واحد منهم

الجواب عمر زيد ٨٤ وعبيد ٤٢ وعبد الله ١٤

(٢٧) ثوبان قيمة الذراع من كلهما واحدة ولكن الواحد اطول من الآخر فبلغ

من الواحد ٥ دنائير والآخر ٦ ١/٢ دينار. فان اضيف الى كل واحد منهما ١٠ اذرع

كانت نسبة الواحد الى الآخر ٦:٥ مطلوب طول كل ثوب

الجواب ٢٠ و ٢٦ ذراعا

(٢٨) تاجران راس مال الواحد منها كراس مال الآخر. وفي السنة الاولى ربح

احدهما زيدا ٤٠ دينارا وخسر احدهما عبيد ٤٠ دينارا. وفي السنة الثانية خسر زيد

١/٢ ما كان له في نهاية السنة الاولى وربح عبيد ٤٠ دينارا اقل من مضاعف ما خسره

زيد. وكان امبيد حينئذ مضاعف ما كان لزيد فكم كان راس المال

الجواب ٢٢٠ دينارا

(٢٩) اي عدد اذا اضيف الى ٢٦ ثم الى ٥٢ تكون نسبة المصنوع الاول الى الثاني

الجواب ١٢

٤:٣::

(٥١) رجل اشترى جلاً وفرنساً وحصاراً بثلاث مئة وستين ديناراً . وكانت ثمن الفرس مضاعف ثمن الحمار وثمان الجمل مضاعف ثمن الفرس والحمار كليهما . فاذا كان ثمن كل واحد من الثلاثة

الجواب ثمن الجمل = ٢٤٠ والفرس = ٨٠ والحمار = ٤٠ ديناراً

(٥٢) اناة امتلاً خراً ثم رشح منه ثلث ما فيه ثم اخذ منه ٢١ رطلاً وبقي نصف مل . الاناء فكم رطلاً كان فيه اولاً

(٥٣) رجل كان له ستة بنين كل واحد منهم اكبر من الذي يليه بربع سنين وعمر الاكبر ثلاثة اضعاف عمر الاصغر . فما هو عمر كل واحد منهم

الجواب ١٠ ١٤ ١٨ ٢٢ ٢٦ ٣٠

(٥٤) اقسام ٤٩ الى قسمين وتكون نسبة الاكبر مع ستة الى الاصغر الا ١١ كسبة

الجواب ٣٠ = الاكبر ١٩ = الاصغر

٢:٩

(٥٥) ما عددان نسبة اصغرهما الى الاكبر :: ٣ : ٢ وان اضيف اليهما ٤ تكون

الجواب ١٦ و ٢٤

النسبة :: ٥ : ٧

(٥٦) رجل اشترى زقنين من الخمر مائة من احداهما يسع مل = الآخر ثلاث مرات

فاخذ من كل واحد اربعة ارطال وبقي في الواحد قدر ما بقي في الآخر اربعة امثال فكم رطلاً كان فيهما

الجواب ١٢ و ٢٦

(٥٧) اقسام ٦٨ الى قسمين وتكون فضلة اكبرها ٨٤ بقدر ثلاث مرات فضلة

الجواب ٤٢ و ٢٦

اصغرهما و ٤٠

(٥٨) اربعة اماكن على ترتيب ب ت ث ج وبين ب وج ٢٤ ميلاً ونسبة بعد

ب عن ت الى بعد ت عن ج :: ٢ : ٣ واذا اضيف ربع بعد ب عن ت الى نصف بعد ت عن ج يكون المجموع ثلاث مرات بعد ت عن ت مطلوب بعد كل واحد عن الآخر

الجواب من ب الى ت = ١٢ من ت الى ث = ٤ من ث الى ج = ١٨

(٥٩) اقسام ٢٦ الى ٣ اقسام بحيث يكون نصف الاول و ١/٢ الثاني و ١/٤

الجواب ٨ و ١٢ و ١٦

الثالث متساوية

(٦٠) ناجر عاش ثلاث سنين على ٥٠ ديناراً كل سنة . وفي نهاية كل سنة

اضاف الى ما بقي من ماله مبلغاً يساوي ثلث تلك البقية . وعند نهاية المدة المذكورة كان

راس ماله قد تصاعف فكم كان راس المال

(٦١) فائد جيش بعد وقعة انكسر فيها وجد نصف جيشه و ٢٦٠٠ نفر يصلحون

لوقعة اخرى و ١/٨ الجيش و ٦٠٠ نفر مجارح . والبقية اي ١/٢ الجميع قتلى فكم كان

عدد الجيش اولاً

الجواب ٢٤٠٠٠

(٦٢) رجل استأجر فاعلاً لمدة ٤٨ يوماً على شرط ان يعطيه كل يوم اشتغل

٢٤ درهماً اما لكل يوم بطالة فيدفع الفاعل ١٢ درهماً ثمن طعامه وعند نهاية المدة المشار

اليها اي ٤٨ يوماً حتى للفاعل ٥٠٤ دراهم . مطلوب عدة ايام الشغل وعدة ايام البطالة

(٦٣) رجل استأجر فاعلاً ن يوماً لكل يوم الشغل اعطاه ب درهماً ولكل

يوم البطالة دفع ت درهماً ثمن طعامه وعند نهاية المدة اي ن يوماً حتى له ح

درهماً . مطلوب ايام الشغل وايام البطالة

$$\text{افرض ك} = \text{ايام الشغل} \quad \text{ك} = \frac{\text{ح} + \text{ت}}{\text{ب} + \text{ن}}$$

—x—

الفصل الثامن

في القوت والترقية

٧٢ اذا ضربت كمية في نفسها سمي الحاصل قوة . مثالة $٢ \times ٢ = ٤$ اي مربع

اثنين او مال اثنين او القوة الثانية من اثنين و $٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$ اي مكعب اثنين او

القوة الثالثة من اثنين و $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$ اي مال اثنين او القوة الرابعة

من اثنين وت $\times$ ت = مربع ت او مال ت او قوة ت الثانية وقس على ذلك .

والكمية الاصلية التي بتكرار ضربها حصلت القوة هي جذر تلك القوة ويقال لها الجذر

المالي والمربع والثاني او الجذر الكمي والثالث او الرابع او الخامس بالنسبة الى القوة .

فائتان مثلاً هو جذر اربعة المالي او المربع او الثاني لان $٢ \times ٢ = ٤$ وهو جذر ثمانية

الكمي او الثالث لان $٢ \times ٢ \times ٢ = ٨$ وجذر ١٦ الرابع لان $٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ١٦$

وقس على ذلك

٧٤ يدل على القوت رقم صغير عن يسار الكمية مرتفع عنها قليلاً . مثاله ت^٢

وب^٢ وس^٢ ويقال لهذا الرقم دليل القوة . وان لم يكن للكمية دليل بقدر لها واحد

دليلاً . فان ت^١ = ت اي قوة الاولى . واذا انحصرت كمية ووضع لها دليل

(ت+ب)¹ = ت + ب اي القوة الاولى

ت + ب

ت + ت + ب

ت + ت + ب + ب

(ت + ب)² = ت² + ٢ت + ب² = القوة الثانية

ت + ب

ت² + ٢ت + ب²

ت² + ٢ت + ب² + ب²

(ت + ب)³ = ت³ + ٣ت² + ٣ت + ب³ = القوة الثالثة

ت + ب

ت³ + ٣ت² + ٣ت + ب³

+ ت³ + ٣ت² + ٣ت + ب³ + ب³

(ت + ب)⁴ = ت⁴ + ٤ت³ + ٦ت² + ٤ت + ب⁴ = القوة الرابعة

وهكذا الى آية قوة فُرِضَتْ

مربع ت - ب هو ت² - ٢ت + ب²

مكعب ت + ١ هو ت³ + ٣ت² + ٣ت + ١

مربع ت + ب + ح هو ت² + ٢ت + ب² + ٢ت + ٢ب + ح² + ح

ما هو مكعب ت + د + ٢

ما هي القوة الرابعة من ب + ٢

ما هي القوة الخامسة من ك + ١

ما هي القوة السادسة من ا - ب

٧٨ مربعات الكميات الثنائية والفضلية كثيرة الوقوع في الاعمال الجبرية

فيجب على المتعلم ان يعرف كيفية تربيعها معرفة جيدة . فاذا ربّعنا ت + ب وت -

ب لنا

ومكلا في النوات التي دلائلها سلبية . مثالة القوة الثالثة من $ت = ت^3$ $ت = ت^3$ (٧٥)

القوة الرابعة من $ت = ت^4$ $ت = ت^4$ $ت = ت^4$

مكعب $ت = ت^3$ $ت = ت^3$ $ت = ت^3$

مربع $ت = ت^2$ $ت = ت^2$ $ت = ت^2$

القوة النونية من $ت = ت^5$ $ت = ت^5$ $ت = ت^5$

٨٢ متى كانت العلامة المتقدمة على نفس الكمية سلبية يجب ان تجعل ايجابية كلما صار الدليل شفعاً حسباً تقدم (٨٠) مثالة مربع $ت = ت^2$ $ت = ت^2$ $ت = ت^2$ ومكعب $ت = ت^3$ $ت = ت^3$ $ت = ت^3$

والقوة النونية من $ت = ت^5$ $ت = ت^5$ $ت = ت^5$ متى كانت ن دالة على عدد شفع و $ت = ت^5$ متى دأت على عدد وتر

٨٣ الكسر ينرفى بنرفية صورته ومخرجه معاً . فربع $ت = ت^2$ لان $ت = ت^2$ $ت = ت^2$ $ت = ت^2$

القوة الثانية من $ت = ت^2$ $ت = ت^2$ $ت = ت^2$ وقوة الثالثة $ت = ت^3$ $ت = ت^3$ $ت = ت^3$ وقوة النونية $ت = ت^5$ $ت = ت^5$ $ت = ت^5$

مكعب $ت = ت^3$ $ت = ت^3$ $ت = ت^3$

القوة النونية من $ت = ت^5$ $ت = ت^5$ $ت = ت^5$

مربع $ت = ت^2$ $ت = ت^2$ $ت = ت^2$

مكعب $ت = ت^3$ $ت = ت^3$ $ت = ت^3$

ومن امثلة الكميات الثنائية التي احد جزئيهما كسر هذه

$$\frac{1}{2} - ك$$

$$\frac{1}{2} + ك$$

$$\frac{1}{2} - ك$$

$$\frac{1}{2} + ك$$

$$\frac{1}{2} - ك$$

$$\frac{1}{2} + ك$$

$$\frac{1}{2} + ك$$

$$\frac{1}{2} + ك$$

$$\frac{1}{2} + ك$$

$$\frac{1}{2} + ك$$

Y

$$٢(ت + ي)$$

$$٤(ت + ي)$$

$$٧(ت + ي)$$

$$٥ت٢ح$$

$$٦ت٢ح$$

المجموع

١٠ الاحرف غير المتشابهة او القوت غير المتشابهة من حرف واحد فلا تجمع
الا بكتابتها متوالية مع علاماتها كما تقدم. فجميع ت^١ وت^٢ هو ت^١ + ت^٢ ومجمع
ت^١ ب^١ وت^٢ ب^١ هو ت^١ ب^١ + ت^٢ ب^١

٨٦ طرح القوت كجملتها غير انه يجب تبديل علامة المطروح من + الى -
او عكسه حسبما تقدم في باب الطرح . مثاله

من	٢ت٢	-	٢ب١
اطرح	-	٦ت٢	٤ب١
الفضلة	٨ت٢		-

من	٢ت٢		٥(ت - ح)
اطرح	٢ت٢		٢(ت - ح)
			٢(ت - ح)

نبتة في ضرب القوت

٨٧ تُضرب القوت بكتابتها متوالية حسبما تقدم في فصل الضرب . فحاصل
ت^١ في ت^١ هو ت^١ ب^١ وك^١ × ت^١ = ك^١ ت^١ و٢ت^١ ي^١ = ٢ك^١ - ٦
ت^١ ي^١ ك

٨٨ قوت الجذر الواحد تُضرب بجميع دلائلها . مثاله

ت^١ × ت^١ = ت^٢ لان ت^١ ت^١ × ت^١ ت^١ = ت^٢ ت^٢ ت^٢ ت^٢ = ت^٤ وهكذا
ت^١ × ت^٢ = ت^٣ وك^١ × ت^١ × ك^١ × ت^١ = ك^٢ ت^٢ و٤ت^١ × ٢ت^١ = ٨ت^٢ و٢ك^١
× ٢ك^١ = ٤ك^٢ و٢ب^١ ي^١ × ٢ب^١ ي^١ = ٤ب^٢ ي^٢ و(ب + ح - ي) × (ب + ح - ي) =

اضرب $ك^٢ + ك^٢ ي + ك^٢ ي + ك^٢ ي - ك^٢ ي$ الجواب $ك^٢ - ي^٢$
 اضرب $ك^٢ ي + ك^٢ ي - ك^٢ ي - ك^٢ ي$
 اضرب $ك^٢ + ك^٢ - ك^٢ ي + ك^٢ ي + ك^٢ ي + ك^٢ ي$

ومكنا ان كانت الدلائل سلبية . مثالة

$ت^٢ \times ت^٢ = ت^٤$ و $ت^٢ \times ت^٢ = ت^٤$ و $ت^٢ \times ت^٢ = ت^٤$
 $وت^٢ \times ت^٢ = ت^٤$ و $وت^٢ \times ت^٢ = ت^٤$ و $وت^٢ \times ت^٢ = ت^٤$

٨٩ اذا ضربت $ت + ب$ في $ت - ب$ يكون الحاصل $ت^٢ - ب^٢$ فلنا من ذلك قضية عامة وهي

حاصل مجموع كيتين في فضلتهما يعدل فضلة مربعيهما

$(ت - ي) \times (ت + ي) = ت^٢ - ي^٢$
 $(ت - ي) \times (ت + ي) = ت^٢ - ي^٢$
 $(ت - ي) \times (ت + ي) = ت^٢ - ي^٢$

نبذة في قسمة القوت

٩٠ نُنسَم القوت مثل ما سواها من الكميات . اي بان يُخرج من المنسوم كمية تماثل المنسوم عليه او يكاتبها على هيئة كسرٍ درجي . مثالة

$ت^٢ ب + ب^٢ = ت^٢ ب$ او $\frac{ت^٢ ب}{ب}$	اقسم	$٩ ت^٢ ي$	$١٣ ب^٢ ك$	$٣ ت^٢ ب = ت^٢ ي$
	على	$٣ ت^٢$	$٢ ب$	$ت^٢$
	الخارج	$٢ ي$		$ب + ٢ ي$

اقسم $د \times (ت - ح + ي)$
 على $(ت - ح + ي)$
 الخارج $د$

الثانية. كل جذر كمية ايجابية شفعي ملتبس
الثالثة. الجذر الشفعي لكمية سلبية مستحيل

اما الاولى فواضحة ما تقدم (٨٠) واما الثانية فلأن الكمية الايجابية تحصل من +
في + او من - X - على حدٍ سوى. فجذر ت هو + ت او - ت فيوضع للجذر
علامتان للدلالة على الالتباس هكذا $\pm \sqrt{٢٠} ب$ و $\pm \sqrt{٢٠} ك$ ويرفع هذا الالتباس متى
حصلت القوة من ضرب كميات معروفة علاماتها. واما الثالثة فلأنه لا يمكن استخراج
جذر شفعي لكمية سلبية. فجذر - ت ليس هو + ت ولا - ت لان + ت X + ت
= + ت و - ت X - ت = + ت فسمي الجذر الشفعي لكمية سلبية كمية وهمية او محالة.
ولكن قد تستعمل هذه الكميات الوهمية في الاعمال الجبرية لانها ببعض المعاملات تصير
ممكنة. مثالة $\sqrt{-٦} X \sqrt{-٦} = -٦ ت$ وهي ممكنة. ويجب هنا ان يعتبر في الجذور
الوهمية ان علامة السلب واقعة تحت علامة الجذر كما مثلنا. ولكن $\sqrt{-٦} ت X \sqrt{-٦} ت$
= $\sqrt{-٦} ت = ت$ ومن فوائد هذه الكميات الوهمية ايضا الدلالة على فساد مشقة.
فلو قيل اقسام ١٤ الى قسمين حاصلها ٦٠ قيل ليكن احدهما ك والاخر ١٤ - ك فلنا
ك X (١٤ - ك) = ٦٠ اي ١٤ ك - ك^٢ = ٦٠

وتحويل هذه المعادلة حسب القواعد الآتية لنا ك^٢ + ٧ = $\sqrt{١١} - ٦$ وهذه كمية
وهية غير ممكنة. فالمشقة فاسدة اي لا يمكن انقسام ١٤ الى قسمين حاصلها ٦٠ وقس
على ذلك

١٠٣ كيفية تجذير الكميات المركبة سيأتي الكلام عليها في بعض الفصول الآتية.
واما هنا فلا ننظر الا الى كيفية استعمال الجذر المالي لمربعات الكميات الثنائية والفضلية
وهذه المربعات لا يكون لما اكثر من ثلاثة اجزاء كما رأينا (٧٨) مثالها ت^٢ + ٢ ت ب
+ ب^٢ وفي الفضلية ت^٢ - ٢ ت ب + ب^٢ فحيثما رأينا كمية مثل هذه جزآن منها فونان
تأمتان والاخر حاصل جذري هاتين القوتين علما انها مربع كمية ثنائية او فضلية. ولنا
لاستعلام جذرها هذه القاعدة

خذ جذر الجزء الاول والثالث واربطها بعلامة الجزء الاوسط

فلو قيل ما هو جذر ك^٢ + ٢ ك + ١ قيل جذر الجزء الاول اي $\sqrt{١} = ١$

وجذر الجزء الثالث أي واحد = ١ وعلامة الجزء الأوسط هي + فإذا الجذر ك + ١

$$\text{جذر ك} - ٢ = ١ + \text{ك} = ١ - \text{ك}$$

$$\text{جذر ت} + ٢ = \frac{١}{٤} + \text{ت} = \frac{١}{٢} + \text{ت}$$

$$\text{جذر ت} + \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٤} + \text{ت} = \frac{١}{٢} + \text{ت}$$

$$\text{جذر ت} + \text{ب} = \frac{٢}{٤} + \text{ب} = \frac{٢}{٢} + \text{ب}$$

$$\text{جذر ت} + \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} = \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} + \text{ت} = \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} + \text{ت}$$

١٠٤ كل جذر لا يمكن أن يُدَلَّ عليه تمامًا بالأعداد يقال له اسم. مثالة ٢٦
فهذا لا يمكن الوصول اليه تمامًا وهو بالكسر العشري ١٤٢١٢٥٦ ١٤٢١٢٥٦ تقريباً. وكل
جذر ليس اسم فهو منطوق ولكن في ما يأتي تُطلق هذه اللفظة على كل كمية ليس لها علامة
الجذر ولا دليل كسري

نبذة في تحويل الجذور

١٠٥ أولاً إذا أردت تحويل كمية منطقة الى هيئة كمية جذرية
فرفها الى قوة من اسم الجذر المفروض ثم اجعل لها علامة الجذر مع دليله

فلو قبل حوّل ت الى هيئة الجذر النوني لنيل قوتها النونية = ت ثم انها بوضع
علامة الجذر والدليل تصير ٢ ت فقد تحوّلت الى هيئة كمية جذرية بدون تغيير قيمتها
لان ٢ ت = ت = ت

حوّل ٤ الى هيئة الجذر الكمي الجواب ٢٤ ٢٤ او (٦٤) ٢

حوّل ٢ الى هيئة الجذر الرابع الجواب ٢٨ ٢٨

حوّل ١/٢ الى هيئة الجذر المالي الجواب (١/٢) ٢ ٢

حوّل ٢ × ت - ك الى هيئة الجذر الكمي الجواب ٢٧ ٢٧ × (ت - ك) ٢

حوّل ٢ الى هيئة الجذر الكمي الجواب ٢ ٢

حوّل ت الى هيئة الجذر النوني

١٠٦ ثانياً لكي تحوّل كميات دلائلها مختلفة الى دلائل مشتركة بدون تغيير القيمة

(١) حوّل الدلائل الى مخرج مشترك

- (٢) رَقِّ كل كمية الى القوة المدلول عليها بصورة دليلها بعد تحويله
(٣) اجعل للجميع علامة الجذر المدلول عليه بالخرج المشترك

مثاله لو قيل حوّل $ت^٢ ب^٢$ الى دليل مشترك لقل ٢ و ٢ بالتحويل الى مخرج مشترك $= ١٢ / ١٢$ ثم بنقطة $ت$ الى القوة المدلول عليها بصورة الدليل نصير $ت^٢$ ومكلا $ب$ نصير $ب^٢$ والجذر دليله $١٢ / ١٢$ فلنا $ت^٢ / ١٢$ و $ب^٢ / ١٢$ والقيمة لم تتغير لان $ت^٢ / ١٢ = ت^٢ / ١٢$ و $ب^٢ / ١٢ = ب^٢ / ١٢$ ومكلا $ب^٢ / ١٢ = ب^٢ / ١٢$ و $ت^٢ / ١٢ = ت^٢ / ١٢$

حوّل $ت^٢ ب^٢ ك^٢$ الى دليل مشترك الجواب $ت^٢ / ١٢$ و $(ب^٢ ك^٢) / ١٢$
حوّل $ت^٢ و ب^٢$ الى دليل مشترك الجواب $ت^٢ / ١٢$ و $ب^٢ / ١٢$
حوّل $ك^٢ و ي^٢$ الى دليل مشترك الجواب $ك^٢ / ١٢$ و $ي^٢ / ١٢$
حوّل $٢٣ و ٢٤$ الى دليل مشترك الجواب $٢٣ / ١٢$ و $٢٤ / ١٢$
حوّل $(ت + ب) و (ك - ي)$ الى دليل مشترك الجواب $(ت + ب) / ١٢$ و $(ك - ي) / ١٢$

حوّل $ت^٢ و ب^٢$ الى دليل مشترك
حوّل $ك^٢ و ه^٢$ الى دليل مشترك

١٠٧ لاجل تحويل كمية الى ذات دليل مفروض اقسام دليلها
على الدليل المفروض واكتب الخارج عن يسار الكمية ثم اجعل فوق
الكل الدليل المعروض

فلو قيل حوّل $ت^٢$ الى دليل ٢ لقل $٢ = ٢ + ٢$ فلنا $ت^٢ / ٢$
حوّل $ت^٢ و ك^٢$ الى دليل ٢ الجواب $(ت^٢) / ٢$ و $(ك^٢) / ٢$
حوّل $٢٣ و ٢٤$ الى دليل ٢ الجواب $(٢٣) / ٢$ و $(٢٤) / ٢$

١٠٨ لاجل اخراج بعض كمية من تحت علامة الجذر حل الكمية
الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر وخذ جذر هذا الضلع واكتبه

قدام الضلع الآخر وعلامة الجذر بينهما. وهذه القاعدة مبنية على ما تقدم
(١٠٠) من أن جذر حاصل كيتين يعدل حاصل جذريهما. وإن لم
يمكن حل الكمية الى ضلعين احدهما قوة تامة من اسم الجذر فلا يمكن
اخراج شيء منها من تحت علامة الجذر

فلو قيل اخرج بعض $\sqrt{18}$ من تحت علامة الجذر لقبل $\sqrt{8}$ ينحل الى ضلعين $\sqrt{2}$ و $\sqrt{4}$
واحدهما قوة تامة من اسم الجذر اي $\sqrt{4} = 2$ مربع 2 خذ جذر $\sqrt{4} = 2$ فلنا $\sqrt{18} = 2\sqrt{2}$ وعلى
هذه الكيفية نحول هذه الامثلة

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2$$

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 3$$

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

١٠٩ ثم بعكس هذا العمل يدخل مسي كية جذرية تحت علامة الجذر اي يتدق
الى قوة من اسم الجذر ثم يضرب في الاجزاء الواقعة تحت علامة الجذر

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \quad \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{48} = 4\sqrt{3} \quad \sqrt{3} = \sqrt{3} \quad \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} \quad \sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

نبذة في جمع الجذور وطرحها

١١٠ نجمع الجذور كغيرها من الكميات بكتابتها متوالية مع علاماتها فنجمع

٢٠٢ و ٢٠٢ هو ٢٠٢ + ٢٠٢ وان تشابهت الكميات والدلائل فاجمع المسميات
واكتب الاجزاء الجذرية عن يسار المجموع . مثالة

$$٢٠٢ + ٢٠٢ = ٢٠٢$$

٢٠٢	٢ (ك + ح) ٢	٢٠٢
- ٢٠٢	٢ (ك + ح) ٢	٢٠٢
-----	٢ (ك + ح) ٢	المجموع ٢٠٢

٢٠٢ - ح	٢٠٢ ح
٢٠٢ - ح	٢٠٢ ح
-----	-----
٢٠٢ (٢ + ح) - ح	

١١١ بعض الاحيان ينفضي اخراج بعض الكميات من تحت علامة الجذر لكي
تجمع . مثالة ٢٠٢ + ٢٠٢ . اخراج بعضها من تحت علامة الجذر = ٢٠٢ + ٢٠٢ = ٢٠٢

اجمع ٢٠٢ و ٢٠٢	الجواب ٢٠٢ + ٢٠٢ = ٢٠٢
اجمع ٢٠٢ و ٢٠٢	الجواب ٢٠٢ + ٢٠٢ = (٢ + ح)

اجمع (٢٠٢ ح) و (٢٠٢ ح) الجواب (٢٠٢ + ح) X ح

اجمع ٢٠٢ و ٢٠٢

ثم اذا اختلفت الكميات الجذرية او كانت دلائلها غير متشابهة فلا تجمع الا
بكتابتها متوالية . مثالة مجنوع ٢٠٢ و ٢٠٢ = ٢٠٢ + ٢٠٢ ومجموع ٢٠٢
و ٢٠٢ = ٢٠٢ + ٢٠٢

١١٢ اما طرح الجذور فهو مثل جمعها غير انه يجب تبديل علامة المطروح كما
صلت في فصل الطرح البسيط

$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	من ٢٠٠
$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	اطرح ٢٠٠
$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	الباقى ٢٠٠
$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	من ٢٠٠ (ك + ي)
$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	اطرح ٢٠٠ (ك + ي)
$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	الباقى

من ٢٠٠ اطرح ٨٠٠ الجواب ٢٠٠ - ٢٠٠ = ٢٠٠
 من ٢٠٠ اطرح ٢٠٠ الجواب (ب - ي) $\times$ ٢٠٠
 من ٢٠٠ اطرح ٢٠٠

نبذة في ضرب الجذور

١١٢ تُضرب الجذور مثل غيرها من الكميات بكتابتها متوالية بتوسط علامة الضرب او بدونها كما علمت في فصل الضرب البسيط. مثالة ٢٠٠ في ٢٠٠ = ٢٠٠
 $\times$ ٢٠٠ او ٢٠٠ ٢٠٠ او ٢٠٠ ٢٠٠ في ٢٠٠ = ٢٠٠ ٢٠٠ $\times$ ٢٠٠
 ٢٠٠ ٢٠٠ في ٢٠٠ حسب ما تقدم (١٠٦) = (٢٠٠) $\times$ (٢٠٠) = (٢٠٠) = (٢٠٠)

$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	اضرب ٢٠٠ + ٢٠
$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	في ٢٠٠ - ٢٠
$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	الحاصل ٢٠٠ - ٢٠

$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	اضرب (٢٠٠ + ي)
$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	في (ب + ح)
$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	$\begin{array}{r} ٢٠٠ \\ ٢٠ \end{array}$	الحاصل

اضرب ٢٠٠ في ٢٠٠ الجواب ٢٠٠ ٢٠٠ = ٢٠٠ ك ب
 (٢٠٠) $\times$ (٢٠٠) = (٢٠٠) = (٢٠٠)

ت ضرب ت (ب + ك) ٢	ت م ٢	ت م ك
في ي (ب - ك) ٢	ب م ح ي	ب م ك
الحاصل ت ي (ب - ك) ٢		ت ب م ك آحت ب ك

ت ضرب ت ك ٢	ك م ٢
في ب ي ٢	ي م ٢
الحاصل	٢ ك ي

١١٧ متى ارتبطت الاجزاء المنطقية بالجذرية بواسطة علامة الجمع او الطرح
يجب ان يُضرب كل جزء من المضروب في كل جزء من المضروب فيه

$$\begin{array}{r}
 \text{ت} + \text{ب} \\
 \text{س} + \text{د} \\
 \hline
 \text{ت س} + \text{س م} \\
 + \text{ت م} + \text{م د} \\
 \hline
 \text{ت س} + \text{س م} + \text{ت م} + \text{م د}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{ت} + \text{م} \times ١ + \text{ر م} = \text{ت} + \text{م} + \text{ت ر م} + \text{ري} \\
 \text{اضرب م في م} \quad \text{الجواب م م ب} \\
 \text{اضرب م ه في م ٢} \quad \text{الجواب م م ٢٠ ب} \\
 \text{اضرب م في م ٣} \quad \text{الجواب م م ٦٢ ب} \\
 \text{اضرب م في م ٤} \quad \text{الجواب م م ١٢٠ ب} \\
 \text{اضرب م في م ٥} \quad \text{الجواب م م ١٨٠ ب} \\
 \text{اضرب م في م ٦} \quad \text{الجواب م م ٢٤٠ ب}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 \text{اضرب ت (ت - ك) في (س - د) \times (ت ك) ٢} \\
 \text{الجواب (ت س - ت د) \times (ت ك - ت ك) ٢}
 \end{array}$$

نبتة في قسمة الجذور

١١٨ يُدَلُّ على قسمة الجذور بكتابتها على هيئة كسرٍ دارجي. مثاله

الخارج من قيمة ثَمَات على مَب = $\frac{\text{ثَمَات}}{\text{مَب}}$ او بوضع علامة واحدة للصورة والمخرج.

مثاله $\frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{م}^{\text{ب}}}$

واذا كان جذر المنقسم والمنقسم عليه من اسم واحد ثم القسمة كما في غيرها وبوضع الخارج تحت علامة الجذر المشترك . مثاله

$$\frac{\text{ثَمَات}^{\text{ن}}}{\text{مَب}^{\text{ب}}} = \frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{م}^{\text{ب}}} \text{ و } \frac{\text{ك}^{\text{أ}} \text{ ي}^{\text{ب}}}{\text{ك}^{\text{أ}} \text{ ي}^{\text{ب}}} = \frac{\text{ك}^{\text{أ}} \text{ ي}^{\text{ب}}}{\text{ك}^{\text{أ}} \text{ ي}^{\text{ب}}} = \frac{\text{ك}^{\text{أ}}}{\text{ك}^{\text{أ}}} = \frac{\text{ي}^{\text{ب}}}{\text{ي}^{\text{ب}}}$$

اقسم	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}} \text{ د ح}^{\text{ك}}}{\text{د ح}^{\text{ك}}}$	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}} + \text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ت}^{\text{ك}}}$
على	$\frac{\text{ك}^{\text{أ}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$	$\frac{\text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ت}^{\text{ك}}}$
الخارج	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$	$\frac{\text{ت}^{\text{ك}} + \text{ك}^{\text{أ}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$

اقسم	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}} \text{ ح}^{\text{ك}}}{\text{ح}^{\text{ك}}}$	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}} \text{ ي}^{\text{ب}}}{\text{ي}^{\text{ب}}}$
على	$\frac{\text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ت}^{\text{ك}}}$	$\frac{\text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ت}^{\text{ك}}}$
الخارج	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{ت}^{\text{ك}}}$	$\frac{\text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ت}^{\text{ك}}}$

١١٩ تُنقسم جذور كمية واحدة بطرح دابل المنقسم عليه من دليل المنقسم .
مثاله $\frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{ك}^{\text{أ}}} + \frac{\text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ك}^{\text{أ}}} = \frac{\text{ث}^{\text{ن}} + \text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$

اقسم	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}} + \text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$
على	$\frac{\text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$	$\frac{\text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$
الخارج	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}} + \text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$

اقسم	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$
على	$\frac{\text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$	$\frac{\text{ت}^{\text{ك}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$
الخارج	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$	$\frac{\text{ث}^{\text{ن}}}{\text{ك}^{\text{أ}}}$

ومكنا في قسمة الجذور على الثوات او عكسها . مثالة $ت^{\frac{1}{2}} \div ت^{\frac{1}{3}} = ت^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = ت^{\frac{1}{6}}$

١٢٠ بعد تحويل الجذور الى دليل مشترك ان كان لما سميات منطقة تُقسم أولاً ويوضع الخارج فدام الخارج من قسمة الجذور . مثالة $ت^{\frac{1}{2}} \div ت^{\frac{1}{3}} = ت^{\frac{1}{6}}$ س

اقسم	٢٤ ك	٢٤ ك	٢٤ ك
على	٦	٦	٦
الخارج	٤	٤	٤

اقسم	ب	ب	ب
على	ب	ب	ب
الخارج	ب	ب	ب

$ت^{\frac{1}{2}} \div (ت^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{2}} \div ت^{\frac{1}{6}} = ت^{\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = ت^{\frac{1}{3}}$

اقسم	٢	٢	٢
على	٢	٢	٢
اقسم	١٠	١٠	١٠
على	٤	٤	٤
اقسم	١٠	١٠	١٠
على	٢	٢	٢
اقسم	٨	٨	٨
على	٢	٢	٢
اقسم	(ت ^١ ب ^١)	(ت ^١ ب ^١)	(ت ^١ ب ^١)
على	٢	٢	٢
اقسم	(١٦ ت ^١ - ١٢ ت ^١)	(١٦ ت ^١ - ١٢ ت ^١)	(١٦ ت ^١ - ١٢ ت ^١)
على	٢	٢	٢

نبذة في ترقية الجذور

١٢١ الجذور تترقى مثل الثوات اي بضرب دلائلها في دليل القوة المفروضة
مثالة مربع $ت^{\frac{1}{2}} = ت^{\frac{1}{2} \times 2} = ت^1$ والقوة النونية من $ت^{\frac{1}{3}} = ت^{\frac{1}{3} \times 3} = ت^1$ والقوة
الخامسة من $ت^{\frac{1}{5}} = ت^{\frac{1}{5} \times 5} = ت^1$ او بالتحويل الى دليل مشترك (ت^١)^{١٠} = (ت^١)^{١٠}

١٢٢ كل جذر يترقى الى قوة من اسم برفع علامة الجذر . مثاله مكعب
 $\sqrt[3]{ت} = \sqrt[3]{ت^٣} = \sqrt[3]{ت^٣} = \sqrt[3]{ت^٣}$ والفتوة النونية من $\sqrt[3]{ت} = \sqrt[3]{ت^٣} = \sqrt[3]{ت^٣}$

ومكعب $\sqrt[3]{ت} = \sqrt[3]{ت^٣} = \sqrt[3]{ت^٣}$

واذا كان الجذور مسميات منطقية يجب ترفيقها ايضاً . مثاله مربع $\sqrt[2]{ت} = \sqrt[2]{ت^٢}$
 $\sqrt[2]{ت} = \sqrt[2]{ت^٢} = \sqrt[2]{ت^٢}$ ومربع $\sqrt[2]{ت} = \sqrt[2]{ت^٢} = \sqrt[2]{ت^٢}$

ومكعب $\sqrt[3]{ت} = \sqrt[3]{ت^٣} = \sqrt[3]{ت^٣}$

واذا ارتبطت المنطقة بالجذور بعلامة الجمع او الطرح تترقى بالضرب كما علمت
 فيما تقدم (٧٧) مثاله فلو قيل ما هو مربع $\sqrt[2]{ت} + \sqrt[2]{ت}$ وت $\sqrt[2]{ت} - \sqrt[2]{ت}$

لقليل	$\sqrt[2]{ت} + \sqrt[2]{ت}$	$\sqrt[2]{ت} - \sqrt[2]{ت}$
	$\sqrt[2]{ت} + \sqrt[2]{ت}$	$\sqrt[2]{ت} - \sqrt[2]{ت}$
	$\sqrt[2]{ت} + \sqrt[2]{ت}$	$\sqrt[2]{ت} - \sqrt[2]{ت}$
	$\sqrt[2]{ت} + \sqrt[2]{ت}$	$\sqrt[2]{ت} - \sqrt[2]{ت}$
	$\sqrt[2]{ت} + \sqrt[2]{ت}$	$\sqrt[2]{ت} - \sqrt[2]{ت}$

ما هو مكعب $\sqrt[3]{ت} - \sqrt[3]{ت}$

ما هو مكعب $\sqrt[3]{ت} + \sqrt[3]{ت}$

١٢٣ الجذور تجذر حسباً تقدم (٩٨) اي بقسمة دلائل اعلى دليل الجذر
 المتروض او بوضع علامة الجذر مع دليله فوق الكمية . مثال الاول الجذر المربع من
 $\sqrt[2]{ت} = \sqrt[2]{ت^٢} = \sqrt[2]{ت^٢}$ والجذر الكعبي من $\sqrt[3]{ت} = \sqrt[3]{ت^٣} = \sqrt[3]{ت^٣}$ ومثال
 الثاني الجذر النوني من $\sqrt[٩]{ت} = \sqrt[٩]{ت^٩} = \sqrt[٩]{ت^٩}$

١٢٤ اذا ضربت كمية جذرية في اخرى تشابهها وكان المضروب فيه قوة دليلها
 اقل من دليل المضروب بواحد يكون الحاصل كمية منطقية . مثاله
 $\sqrt[2]{ت} \times \sqrt[2]{ت} = \sqrt[2]{ت^٢} = \sqrt[2]{ت^٢}$ و $\sqrt[3]{ت} \times \sqrt[3]{ت} = \sqrt[3]{ت^٣} = \sqrt[3]{ت^٣}$ و $\sqrt[٩]{ت} \times \sqrt[٩]{ت} = \sqrt[٩]{ت^٩} = \sqrt[٩]{ت^٩}$
 $\sqrt[2]{ت} \times \sqrt[2]{ت} = \sqrt[2]{ت^٢} = \sqrt[2]{ت^٢}$ و $\sqrt[3]{ت} \times \sqrt[3]{ت} = \sqrt[3]{ت^٣} = \sqrt[3]{ت^٣}$ و $\sqrt[٩]{ت} \times \sqrt[٩]{ت} = \sqrt[٩]{ت^٩} = \sqrt[٩]{ت^٩}$
 $\sqrt[2]{ت} \times \sqrt[2]{ت} = \sqrt[2]{ت^٢} = \sqrt[2]{ت^٢}$ و $\sqrt[3]{ت} \times \sqrt[3]{ت} = \sqrt[3]{ت^٣} = \sqrt[3]{ت^٣}$ و $\sqrt[٩]{ت} \times \sqrt[٩]{ت} = \sqrt[٩]{ت^٩} = \sqrt[٩]{ت^٩}$

$$\frac{7}{120} = \frac{5 \times 7}{5 + 120} = \frac{7}{125}$$

$$= \frac{(r^2 - 1)(1 - r^2 - r^2) \times 8}{(r^2 - 1)(1 - r^2 - r^2)(1 + r^2 + r^2)} = \frac{8}{1 + r^2 + r^2}$$

$$r^2 r^2 + r^2 r^2 - 4$$

حوّل $\frac{r}{r^2}$ الى كسر مخرج منطوق

حوّل $\frac{t - r^2}{r^2 + t}$ الى كسر مخرج منطوق

١٢٧ نرى ما تقدم ان استخراج جذر كمية صماء كسراً يسهل بتحويل الصورة او المخرج الى كمية منطوقة . فلا يلزم حينئذ سوى استخراج جذر احدها اذ يكون الآخر منطوقاً .

مثال جذر $\frac{t}{r^2}$ المالي = $\frac{t}{r^2}$ او $\frac{t}{r^2}$

$$\frac{r^2}{r^2} = \frac{r^2 \times r^2}{r^2 \times r^2} = \frac{r^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2}$$

امثلة

- (١) ما هو الجذر الرابع من ٨١ ت
- (٢) ما هو الجذر السادس من (ت + ب) ت
- (٣) ما هو الجذر التوفي من (ك - ي) ت
- (٤) ما هو الجذر الكعبي من - ١٢٥ ت ك
- (٥) ما هو الجذر المالي من $\frac{4}{9} \frac{ت}{ك}$
- (٦) ما هو الجذر الخامس من $\frac{22}{49} \frac{ت}{ك}$
- (٧) ما هو الجذر المالي من ك - ٦ ب ك + ٩ ب
- (٨) ما هو الجذر المالي من ت + ت ي + $\frac{٢}{٤}$
- (٩) حوّل ت ك الى هيئة الجذر السادس

- (١٠) حَوْل - ٢ الى هيئة الجذر الكمي
- (١١) حَوْل ث و ث الى دليل مشترك
- (١٢) حَوْل ٤ و ٥ الى دليل مشترك
- (١٣) حَوْل ث و ب الى دليل
- (١٤) حَوْل ٣ و ٤ الى دليل
- (١٥) اخرج بعض ٢٤٩ من تحت علامة الجذر
- (١٦) اخرج بعض ٢ - ٢ الى ٢ من تحت علامة الجذر
- (١٧) ما هو مجموع ١٦ ت ك و ٤ ت ك و فضلها
- (١٨) ما هو مجموع ١٩٣ و ٢٤
- (١٩) اضرب ٨ في ٥
- (٢٠) اضرب ٤ + ٢ في -
- (٢١) اضرب ت (ت + ٢) ب (ت - ٢)
- (٢٢) اضرب ٢ (ت + ب) ٥ (ت + ب) ٢
- (٢٣) اقس ٦ على ٢
- (٢٤) اقس ٤ على ٢
- (٢٥) اقس ٦ على ٢
- (٢٦) اقس ٨ على ٤
- (٢٧) ما هو مكعب ١٧
- (٢٨) ما هو مربع ٥ + ٢
- (٢٩) ما هي القوة الرابعة من ١/٦
- (٣٠) ما هو مكعب ٢ - ٢
- (٣١) بماذا نصير ٢ منطنة
- (٣٢) بماذا نصير ٥ - ٢ منطنة
- (٣٣) حَوْل الى مخرج منطنة
- (٣٤) حَوْل الى مخرج منطنة

الفصل العاشر

في القسمة على المركب وفي العاد الأكبر

١٢٢ اذا اردت القسمة على مقسوم عليه مركب فاقسم الجزء الاول من المقسوم على الاول من المقسوم عليه واضرب كل المقسوم عليه في الخارج واطرح المحاصل من المقسوم . ثم انزل من اجزاء المقسوم ما يتنضي وعلّم جرّاً الى نهاية العمل . وهذه صورته وامثله

$$(1) \text{ اقسام } ت س + ب س + ت د + ب د \text{ على } ت + ب$$

$$ت + ب \quad ت س + ب س + ت د + ب د \quad (س + د)$$

$$ت س + ب س$$

$$+ ت د + ب د$$

$$+ ت د + ب د$$

تنبيه . قبل القسمة يجب ترتيب الاجزاء حتى يكون الحرف الاول في المقسوم عليه اولاً في المقسوم . وان تكون القوة العليا فيهما اولاً وتكتب بقية القوات على رتبة قوائها

(٢) اقسام $٢ ت ب + ب + ٢ ت ب + ت + ٢ ت ب + ت + ٢ ت ب$ على $٢ ت + ب + ت + ب$ فان اخذنا $٢ ت$ للجزء الاول من المقسوم عليه يجب ان نأخذ $٢ ت$ للاول في المقسوم وتكتب البقية حسب قوات $ت$

$$٢ ت + ب + ت + ب \quad ٢ ت + ب + ت + ب \quad ٢ ت + ب + ت + ب \quad ٢ ت + ب + ت + ب$$

$$٢ ت + ب + ت + ب \quad ٢ ت + ب + ت + ب \quad ٢ ت + ب + ت + ب \quad ٢ ت + ب + ت + ب$$

ويجب في هذه الاعمال ملاحظة العلامات حسب القواعد المتقدمة في الطرح والضرب والقسمة

(٣) اقسام $٢ ت ك - ٢ ت ك - ٢ ت ك + ٢ ت ك + ٢ ت ك - ٢ ت ك$ على $٢ ت ك - ٢ ت ك + ٢ ت ك - ٢ ت ك$

مثال ١ (ت + ب) ت س + ب س + ت د + د ب + د ك (س + د + ت + ك)
 ت س + ب س

ت د + د ب د

ت د + د ب د

ك

مثال ١٠ (د - ح) ت د - ت ح + ب د - ب ح + ي (ت + ب + د - ح)
 ت د - ت ح

ب د - ب ح

ب د - ب ح

ي

(١١) اقسام ٦ ت ك + ٢ ك ي - ٢ ت ب - ب ي + ٢ ت س + س ي + ح
 الخارج ٢ ك - ب + س + ح
 على ٢ ت + ي

(١٢) اقسام ٢ ت ب - ٢ ت + ٢ ت ب - ٦ ت - ٤ ب + ٢٢ على ب - ٢
 الخارج ٢ ت + ٢ ت - ٤ ب + ١٠

(١٣) ت (ت + ب) ت س + س ب + ت م + م د (س + م)
 ت س + س م + ب

ت م + م د

ت م + م د

(١٤) اقسام ت + م + ت ر م + ر ي على ت + م

الخارج ١ + ر م

(١٥) اقسام ك - ٢ ت ك + ٢ ت ك - ت على ك - ت

(١٦) اقسام ٢ ي - ١٦ ي + ٢٦ ي - ١٧ ي على ي - ٨

(١٧) اقسام ك - ١ على ك - ١

(١٨) اقسام ٤ ك - ٩ ك + ٦ ك - ٢ على ٢ ك + ٢ ك - ١

(١٩) اقسام ت + ٤ ت ب + ٢ ب على ت + ٢ ب

(٢٠) اقسام ك^٤ - ت^١ك^٢ + ت^٢ك^٣ - ت^٤ على ك^١ - ت^٢ك^٣ + ت^٤

١٢١ اذا انقسمت فضلة قوتين على فضلة كميتها الاصلبتين يخرج من ذلك

سلسلة قوات

مثاله (ي^١ - ت^١) + (ي^٢ - ت^٢) = ي^٣ + ت^٣

(ي^٢ - ت^٢) + (ي^٣ - ت^٣) = ي^٤ + ت^٤

(ي^٣ - ت^٣) + (ي^٤ - ت^٤) = ي^٥ + ت^٥

(ي^٤ - ت^٤) + (ي^٥ - ت^٥) = ي^٦ + ت^٦

وذلك يبرهن بالضرب

وهكذا يبرهن ان فضلة قوات كميتين اذا كان دليلهما عدد شفع يمكن قسمتها على

مجمع الكميتين

مثاله (ي^١ - ت^١) + (ي^٢ + ت^٢) = ي^٣ - ت^٣

و (ي^٢ - ت^٢) + (ي^٣ + ت^٣) = ي^٤ - ت^٤

و (ي^٣ - ت^٣) + (ي^٤ + ت^٤) = ي^٥ - ت^٥

- ت^٦

ومجمع قوتين من كميتين ان كان الدليل وترًا يُقسم على مجمع الكميتين

مثاله (ي^١ + ت^١) + (ي^٢ + ت^٢) = ي^٣ - ت^٣

(ي^٢ + ت^٢) + (ي^٣ + ت^٣) = ي^٤ - ت^٤

(ي^٣ + ت^٣) + (ي^٤ + ت^٤) = ي^٥ - ت^٥

ت^٦ + ت^٦

في العاد الأكبر للكميتين

١٢٢ لكي نجد العاد الأكبر اقسام احدى الكميتين على الاخرى والمقسوم عليه على

الباقى ثم المقسوم عليه الثاني على الباقي الثاني ولم تجرأ الى ان لا يبقى شيء فيكون المقسوم

عليه الاخير العاد الأكبر. وان أريد العاد الأكبر لثلاث كميات يجب اخذها لاثنتين

منها ثم العاد الأكبر بين الثالثة والعاد الأكبر الأول وهكذا مهما تعددت الكميات

١٢٣ في اخذ العاد الأكبر لكميات مركبة يجب احياناً تنقيص المقسوم عليه ان

زيادة المقسوم. ويمكن ذلك بدون تغيير العاد الأكبر اذا ضرب او انقسم احدهما على كمية لا ينقسم عليها الآخر وليس فيها جزء ينقسم عليه الآخر. مثاله العاد الأكبر بين $ت ب$ و $ت س$ هو $ت$ وان ضربت احدهما في $د$ فيكون العاد الأكبر بين $ت ب د$ و $ت س$ هو $ت$ ايضا. وان فرض $ت ب$ و $ت س$ د يكون العاد الأكبر بينهما $ت$ ايضا. واذا انقسم $ت س$ د على $د$ يبقى $ت س$ فيكون $ت$ العاد الأكبر بينهما كما كان. وبحسب ذلك يمكن تسهيل العمل في اخذ العاد الأكبر بقسمة المقسوم عليه على كمية ليست بنفسوم. عليه للمقسوم او ضرب المقسوم في كمية لا تعد المقسوم عليه

مثال اول ما هو العاد الأكبر بين $٦ ت + ١١ ك + ٢ ك$ و $٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك$ وهذه صورة العمل

$$٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك (٦ ت + ١١ ت ك + ٢ ك) ١$$

$$٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك$$

$$افسم على ٢ ك + ٤ ت ك + ٦ ك$$

$$٢ ت + ٢ ك (٦ ت + ٧ ت ك - ٢ ك) ٢ ت - ٢ ك$$

$$٦ ت + ٩ ت ك$$

$$٢ ت - ٢ ك$$

$$٢ ت - ٢ ك$$

فالعاد الأكبر بين الكيتين $٢ ت + ٢ ك$

$$٢ ما هو العاد الأكبر بين $٢ ك - ٢ ك + ٢ ك + ٢ ك + ٢ ك$$$

الجواب $٢ ك + ٢ ك$

$$٢ ما هو العاد الأكبر بين $٢ ك + ٢ ك + ٢ ك + ٢ ك + ٢ ك + ٢ ك$$$

$$٤ ما هو العاد الأكبر بين $٢ ك - ٢ ك - ٢ ك - ٢ ك - ٢ ك - ٢ ك$$$

الجواب $٢ ك - ٢ ك$

$$٥ ما هو العاد الأكبر بين $٢ ت - ٢ ت - ٢ ت - ٢ ت - ٢ ت - ٢ ت$$$

$$٦ ما هو العاد الأكبر بين $٢ ت - ٢ ت - ٢ ت - ٢ ت - ٢ ت - ٢ ت$$$

٧ ما هو العاد الأكبر بين ك^١ - ا وك ي + ي الجواب ك + ا

٨ ما هو العاد الأكبر بين ت^١ - ت ب - ٢ ب^١ وت^٢ - ٣ ت ب + ٢ ب^١

٩ ما هو العاد الأكبر بين ت^٤ - ك^١ وت^٢ - ت^١ ك + ت^١ ك^٢ - ك^٢

١٠ ما هو العاد الأكبر بين ت^١ - ت ب^١ وت^٢ + ٢ ت ب + ب^١

ينضم ما تقدم

(١) ان فضلة قوتين شفيعتين من اسم واحد تنقسم على مجتمع جذريهما

(٢) مجتمع قوتين ونريبتين من اسم واحد ينقسم على مجتمع جذريهما

وعلى هذه القواعد تفحل عبارات جبرية كثيرة الى اضلاعها

وقد يكون احد الاضلاع من اسم واحد او ذا جزء واحد . مثالة ت ب + ت س

فالامر ظاهر ان احد ضلعيها ت والآخر ب + س وقد يكون كلا الضلعين كمية ثنائية

مثالة ت^٢ + ٢ ت ب + ب^١ فالامر ظاهر ان ضلعيها (ت + ب) X (ت + ب)

(٣) ما ضلعا ت ب^١ س + ٥ ت ب^١ + ت ب^١ س فالامر ظاهر ان

ت وب^١ ضلع من كل جزء فيكون الضلعان ت ب^١ (س + ٥ ب س)

(٤) ما ضلعا ٢٥ ت^٤ - ٣٠ ت^٢ ب + ١٥ ت^١ ب^١

الجواب ٥ ت^١ (٥ ت^١ - ٦ ت ب + ٣ ب^١)

(٥) ما ضلعا ٣ ت^٢ ب + ٩ ت^١ س + ١٨ ت^١ ك ي

الجواب ٣ ت^١ (ب + ٣ س + ٦ ك ي)

(٦) ما ضلعا ٨ ت^١ س ك - ١٨ ت س ك^١ + ٢ ت س^١ ي - ٣٠ ت^١

س^١ ك الجواب ٣ ت س (٤ ت ك - ٩ ك^١ + س^١ ي - ١٥ ت س^١ ك)

(٧) ما ضلعا ٢٤ ت^٢ ب^١ س ك - ٣٠ ت^١ ب^١ س^١ ي + ٣٦ ت^١ ب^١ س د

٦ ت ب س

الجواب ٦ ت ب س (٤ ت ب ك - ٥ ت^١ ب^١ س^١ ي + ٦ ت^١ ب^١ د + ا)

(٨) ما ضلعا ت^١ - ٢ ت ب + ب^١ الجواب (ت - ب) X (ت - ب)

(٩) ما ضلعا ٦٤ ت^٢ ب^١ س^١ - ٤٨ ت ب س^١ د + ٩ س^١ د^١

الجواب (٨ ت ب س - ٣ س د) X (٨ ت ب س - ٣ س د)

(١٠) ما ضلعا ا^١ - ب^١ الجواب (١ + ب) X (١ - ب)

(١١) ما ضلعا ١٦ ت^١ س^١ - ٩ د^١

الجواب (٤ ت س + د^١) X (٤ ت س - د^١)

- (١٢) حل ت - ب الى اربعة اضلاع
 (١٣) حل ٨ ت - ٨ ب الى ثلاثة اضلاع
 (١٤) حل ١ + ٢٧ ب الى ضلعين
 (١٥) حل ٨ ت + ٢٧ ب الى ضلعين
 (١٦) حل ٢ ن + ٢ ن الى ثلاثة اضلاع
 (١٧) حل ت ك - ك الى ثلاثة اضلاع

الفصل الحادي عشر

في ترقية الكميات الثنائية وبسطها

١٢٤ قد رأينا سابقاً كيفية ترقية الكميات بالضرب غير انه اذا كانت القوة المطلوبة عالية بطول بها العمل جداً. وقد اخترع الفيلسوف امحق نيوتن قاعدة مختصرة لترقية الكميات الثنائية ولشدة اعتبارها عند علماء هذا الفن ننشوها على قدره في كنيسة وستمنستر في لندن

- ١٢٥ اذا ضربت كمية مثل ت + ب في نفسها فلنا هذه القوات
 (ت + ب) = ت + ت + ب + ب
 (ت + ب) = ت + ت + ٢ ت ب + ب + ب
 (ت + ب) = ت + ت + ٤ ت ب + ٦ ت ب + ٤ ت ب + ب + ب
 (ت + ب) = ت + ت + ٥ ت ب + ١٠ ت ب + ١٠ ت ب + ٥ ت ب + ب + ب

فترى من ذلك ان الدلائل جارية على اسلوب واحد ابداً. اي ان دليل ت في الجزء الاول ودليل ب في الجزء الاخير يعدل دليل اسم القوة المفروضة. وان دلائل ت يهبط واحداً في كل جزء. وان دلائل ب تعلق واحداً في كل جزء بعد الاول
 واذا فطعنا النظر عن المسميات نرى ما سبق ان دلائل اية فوق قرصت من كمية ثنائية تعدل اسم القوة المفروضة في الجزء الاول والاخير وان دلائل الاصلية يهبط ودلائل التابعة تعلق واحداً في كل جزء

نتبه . يراد بالاصلية الجزء الأول من الكمية الثنائية وبال تابعة الجزء الثاني . مثالة
في ت + ب سُمِّيت ت الاصلية وب التابعة

ثم ان قيل ما هي القوة الثامنة من ت + ب بقطع النظر عن المسميات فالجواب
ت^١ + ت^٧ + ب^١ + ت^٦ + ب^٢ + ت^٥ + ب^٣ + ت^٤ + ب^٤ + ت^٣ + ب^٥ + ت^٢ + ب^٦ + ت^١ + ب^٧

ثم نرى عدد الاجزاء اكثر من الآحاد في اسم القوة بواحد ابدأ . اي في المربع
ثلاثة اجزاء وفي المكعب اربعة وفي القوة الرابعة خمسة وفي الخامسة ستة وهلم جرا

١٢٦ ثم لكي نجد المسميات اذا نظرنا الى القوات المتقدمة (١٢٥) نرى

مسميات المربع	١	٢	٣	٤	٢			
ومسميات المكعب	١	٢	٣	٤	٥	٦		
ومسميات القوة الرابعة	١	٤	٦	٤	١	٦	١٢	
ومسميات القوة الخامسة	١	٥	١٠	١٠	٥	١	٢٠	٣٠

فانرى ان مسمى الجزء الأول هو واحد ابدأ . وان مسمى الجزء الثاني يعدل دليل
القوة المفروضة . ومن ثم اذا ضرب مسمى جزء في دليل الكمية الاصلية وانقسم الحاصل
على دليل التابعة + ١ يكون من ذلك مسمى الجزء الذي يتلوه
واذا نظرنا الى المسميات المذكورة آنفا نرى انها اولاً تزيد الى حد معلوم ثم تنهبط
كما زادت فتكون متساوية في الجزء الأول والاخير وفي الثاني والذي قبل الاخير
وفي الثالث والذي قبل ما قبل الاخير . فاذا عرفنا مسميات نصف الاجزاء نعرف
منها مسميات البقية

وفي اية قوة فرضت من كمية ثنائية مثل ت + ب يعدل مجموع المسميات تلك
القوة من اثنين كما ترى قبيل هذا

١٢٧ ان القضايا الماضي ذكرها قد انحصرت في نظرية واحدة تسمى النظرية
الثنائية . وهي

انه في كل قوة من كمية ثنائية يكون دليل الاصلية مساوياً لاسم
القوة . ومن ثم ينهبط واحداً في كل جزء . ودليل التابعة يبتدى بواحد

١٣٩ متى كان احد جزئيه كميّة ثنائية واحداً يمكن تركه الآخر من الجزء الاول او الاخير لان كل قوة من واحد واحد وضرب كميّة في واحد لا يغيرها شيئاً . مثالة

$$(ك + ١)^٢ = ك^٢ + ٢ ك + ١ = ك^٢ + ١ \times ك + ١ \times ك + ١$$

$$\text{وذلك} = ك^٢ + ٢ ك + ١$$

فلا داعي الى كتابة الواحد الا حفظ الدليل لاجل معرفة المسميات . وليس لها لزوم ايضاً من هذا التبريل لاننا نعرف الدليل من كون مجموع الدليلين في كل جزء يعدل اسم القوة المفروضة

$$\text{مثالة } (١ - ي)^٧ = ١ - ٧ ي + ٢١ ي^٢ - ٣٥ ي^٣ + ٣٥ ي^٤ - ٢١ ي^٥ + ٧ ي^٦ - ي^٧$$

نرى مما سبق ان العبارة الدالة على قوة الجزء الاول من جذرها واحد في بسطة جداً . فاذا تحولت ثنائية الى اخرى الجزء الاول منها واحد يمكن الدلالة على كل قوة منها بالعبارة المذكورة . مثالة $ت + ك = (١ + ت) ك$ او $ت + ك = ت \times (١ + ت)$ فاذا

$$(ت + ك)^٢ = ت^٢ \times (١ + ت)^٢ \text{ وبالبسط نصير}$$

$$ت^٢ \times (١ + ت + ت^٢ + ت^٣) \text{ وقس على ذلك}$$

١٤٠ متى كان دليل قوة مفروضة من ثنائية صحيحاً ايجابياً تنتهي السلسلة حسباً تقدّم . ومتى كان دليل القوة المفروضة سلبية لا تنتهي السلسلة بل يمكن الامتداد فيها الى غير نهاية مثل كثير من الكسور العشرية . مثالة لو قيل ابسط $(١ + ت)$ او $(١ + ت)$ لفيل $١ - ت + ت^٢ - ت^٣ + ت^٤ - ت^٥ + ت^٦ - ت^٧ + ت^٨ - ت^٩ + ت^{١٠} - \dots$ فنرى هنا المسميات تعلو في كل جزء واحداً والعلامات ايجابية وسلبية بالتداول

١٤١ ثم ان النظرية الثنائية تزيد جداً في تجذير الثنائيات لانها تدل على الجذر كما تدل على القوة غير ان دليل القوة صحيح ودليل الجذر كسر مثالة $(ت + ب)$ فان كانت ن عوضاً عن ٢ مثلاً تكون العبارة دالة على قوة وان كانت عوضاً عن $\frac{١}{٢}$ مثلاً تكون جذراً

اذا انبسط جذر بواسطة النظرية الثنائية فالسلسلة لا تنتهي لان السلسلة انما تنتهي عند ما يصير دليل الاصلية صفراً حتى تنفي المسميات . والكسر لا يمكن ان ينتهي الى صفر بطرح واحد منه على التوالي . فان كان الدليل في الجزء الاول $\frac{١}{٢}$ يكون في الثاني

أمثلة

- ١ ما هي القوة الثامنة من (ت + ب)
 الجواب $ت^٨ + ٨ت^٧ب + ٢٨ت^٦ب^٢ + ٥٦ت^٥ب^٣ + ٧٠ت^٤ب^٤ +$
 $٥٦ت^٣ب^٥ + ٢٨ت^٢ب^٦ + ٨تب^٧ + ب^٨$
- ٢ ما هي القوة السابعة من ت - ب
 ٣ أبسط $\frac{١}{١-ت}$ أو $(١-ت)^{-١}$
- الجواب $١ + ت + ت^٢ + ت^٣ + ت^٤ + ت^٥ + ت^٦ + ت^٧$
 ٤ أبسط $\frac{ت}{١-ت}$ أو $ت(١-ت)^{-١}$
 الجواب $ح(١ + \frac{ت}{١} + \frac{ت^٢}{١} + \frac{ت^٣}{١} + \frac{ت^٤}{١} + \frac{ت^٥}{١} + \frac{ت^٦}{١} + \frac{ت^٧}{١})$
 أو $(\frac{ت}{١} + \frac{ت^٢}{١} + \frac{ت^٣}{١} + \frac{ت^٤}{١} + \frac{ت^٥}{١} + \frac{ت^٦}{١} + \frac{ت^٧}{١})$
- ٥ أبسط $(ت + ب)^٢$
 الجواب $ت + \frac{ب}{٢} - \frac{ب}{٢} + \frac{ب^٢}{١٦} + \frac{ب^٢}{٨} - \frac{ب^٢}{٢} + ت$
- ٦ أبسط $(ت + ي)^٤$
 الجواب $\frac{١}{١} - \frac{٤}{١} + \frac{٦}{١} - \frac{٤}{١} + \frac{١}{١} = \frac{١}{١} - \frac{٤}{١} + \frac{٦}{١} - \frac{٤}{١} + \frac{١}{١}$
- ٧ أبسط $(س + ك)^٢$
 الجواب $س(١ + \frac{ك}{١} + \frac{ك^٢}{١} + \frac{ك^٣}{١} + \frac{ك^٤}{١} + \frac{ك^٥}{١} + \frac{ك^٦}{١} + \frac{ك^٧}{١})$
- ٨ أبسط $\frac{د}{س + ك}$ أو $د(س + ك)^{-١}$
 الجواب $س(١ + \frac{ك}{١} + \frac{ك^٢}{١} + \frac{ك^٣}{١} + \frac{ك^٤}{١} + \frac{ك^٥}{١} + \frac{ك^٦}{١} + \frac{ك^٧}{١})$
- ٩ ما هي القوة الخامسة من (ت + ي)
 ١٠ ما هي القوة الرابعة من ت + ب + ك
 ١١ أبسط $(ت - ك)^٢$
 ١٢ أبسط $(١ - ي)^٢$
 ١٣ أبسط $(ت - ك)^٢$
 ١٤ أبسط $ح(ت - ي)^٢$

الفصل الثاني عشر

في تجذير الكميات المركبة

١٤٢ قاعدة. رتب الكميات على موجب قوت احد حروفها حتى تكون العليا اولاً. وهكذا على التوالي. ثم خذ جذر الجزء الاول فيكون لك الجزء الاول من الجذر المطلوب. ورق ذلك الجزء الى قوة من اسم دليل الجذر المطلوب واطرحة من الكمية نفسها ثم نزل الجزء الثاني واقسمه على الجذر الذي اخذته بعد ترفينه الى قوة دليلها اقل من دليل الجذر المطلوب بواحد واضربه في دليل الجذر المطلوب فيكون الخارج الجزء الثاني من الجذر. ثم رقب الجزءين من الجذر الى قوة من اسم دليل الجذر المطلوب واطرحها من الكمية الاصلية واقسم كما تقدم. وهذه صورة العمل

ما هو الجذر الكمي من

$$٢ + ٣ - ٤ - ١١ + ٦ + ٢ + ١٢ - ٨ - (٣ + ٢ - ٢)$$

$$٢ + ٣ - ٤ - ١١ + ٦ + ٢ + ١٢ - ٨$$

$$٢ + ٣ + ٢ + ٢ + ٢$$

$$٢ - ٦ - ١٢ - ١٢ + ٦ + ٢ + ١٢ - ٨$$

$$٢ + ٣ - ٤ - ١١ + ٦ + ٢ + ١٢ - ٨$$

لا يحتاج الى انزال اكثر من جزء واحد من الجذر لان القسمة تجري على جزء واحد منه فقط

٢ ما هو الجذر الرابع من

$$٢ + ٨ + ٢ + ٢٤ + ٢ + ٢٢ + ١٦ + (٢ + ٢)$$

$$٢ + ٨ + ٢$$

$$٢ + ٨ + ٢ + ٢٤ + ٢ + ٢٢ + ١٦$$

٢ ما هو الجذر الخامس من $٥ + ٥ ت^٤ ب + ١٠ ت^٣ ب^٢ + ١٠ ت^٢ ب^٣ + ٥ ت ب^٤ + ١ ت^٥ ب^٥$
الجواب $٥ ت + ٥ ب$

٤ ما هو الجذر الكعبي من $٦ ت^٢ ب - ١٢ ت ب^٢ + ٨ ب^٣$
الجواب $٢ ت - ٢ ب$

٥ ما هو الجذر المالي من

$$\begin{array}{r} ٤ ت^٤ - ١٢ ت^٣ ب + ٩ ت^٢ ب^٢ - ١٦ ت ب^٣ + ٢٤ ت^٢ ب^٣ - ١٦ ت ب^٤ + ٤ ب^٥ \\ \underline{٤ ت^٤} \\ (٤ ت^٤ - ١٢ ت^٣ ب) \\ \underline{٤ ت^٤ - ١٢ ت^٣ ب + ٩ ت^٢ ب^٢} \\ ١٦ ت ب^٣ + \\ \underline{٤ ت^٤ - ١٢ ت^٣ ب + ٩ ت^٢ ب^٢ - ١٦ ت ب^٣ + ٢٤ ت^٢ ب^٣ - ١٦ ت ب^٤ + ٤ ب^٥} \end{array}$$

هنا كانت القوة التي هي اقل واحداً من اسم الجذر القوة الاولى فلم ترق ت قبل
القسمة عليها

١٤٤ الجذر المالي يؤخذ غالباً على موجب قاعدة كقاعدة علم الحساب لذلك
وهي ان ترتب الكمية حسب قوات احد احرفها . ثم تأخذ جذر الجزء الاول للجزء الاول
من الجذر المطلوب وتطرح قوته من الكمية نفسها . ثم تنزل جزءين آخرين وتقسّم على
مضاعف الجذر الموجود وتضيف الخارج الى الجذر والى المقسوم عليه . ثم تضرب المقسوم
عليه في الجزء الاخير من الجذر الموجود وتطرح الحاصل من المقسوم ثم تنزل جزءين
آخرين وتكرر العمل على هذا الاسلوب الى نهايته
مثال اول ما هو الجذر المالي من

$$\begin{array}{r} ٢ ت^٢ + ٢ ت ب + ٢ ب^٢ + ٢ ت س + ٢ ب س + ٢ س^٢ \\ \underline{٢ ت^٢ + ٢ ت ب + ٢ ب^٢} \\ ٢ ت س + ٢ ب س + ٢ س^٢ \\ \underline{٢ ت س + ٢ ب س + ٢ س^٢} \end{array}$$

٢ ما هو الجذر المالي من

$$\begin{array}{r} ١ - ٤ ب + ٤ ب^٢ + ٢ ي - ٤ ي ب + ٢ ي^٢ - ١ ب^٢ + ي \\ \underline{٢ ي - ٤ ي ب + ٢ ي^٢} \\ ١ - ٤ ب + ٤ ب^٢ - ٢ ي + ٤ ي ب - ٢ ي^٢ \\ \underline{٢ ي - ٤ ي ب + ٢ ي^٢} \end{array}$$

الثانية انه في كل معادلة على صورة $ك + م = ت + م$ تكون الاجزاء المنطقة على الجانبين متساوية والصماء كذلك فان لم تكن $ك = ت$ لنفرض $ك = ت + ل$

ثم بالتعويض $ت + ل + م = ت + م$ وبالمقابلة $ل = م$ اي يكون $م$ مركبا من جزئين احدهما منطقي والاخر اصم وقد تبين ان ذلك لا يمكن وهكذا يبرهن انه في المعادلة $ك - م = ت - م$ تكون الاجزاء المنطقة على الجانبين متساوية والصماء كذلك

الثالثة اذا فرض $م + م = ك + م$ يكون $م - م = ك - م$ لانه بتربيع الاولى تبصر $ت + م = ك + م$ $ك + م = ك + م$ وحسب القضية الثانية $ت = ك + م$ و $م = ك + م$ بالطرح $ت - م = ك - م$ بالتعذير $م - م = ك - م$

١٤٦ ثم لنظر في كيفية استخراج عبارة دالة على جذر كمية ثنائية او فضلية صاء
ما سبق

ولنفرض $م + م = ك + م$
اذا $م - م = ك - م$
بتربيع الجانبين فيها لنا $ت + م = ك + م$ $ك + م = ك + م$
و $ت - م = ك - م$
بجمعها والقسمة على ٢ $ت = ك + م$
بضرب الاولين $م - م = ك - م$
بجمع هاتين $ت + م = ك + م$ $ك + م = ك + م$
و $ك = ك$
بطرحها $ت - م = ك - م$
 $م = م$

ثم لجعل الآحاد في الصف الأول عشرات بوضع صفر عن يمينها نصير

١٠٠ ٩٠ ٨٠ ٧٠ ٦٠ ٥٠ ٤٠ ٣٠ ٢٠ ١٠

والمربعات ١٠٠٠ ٨١٠٠ ٦٤٠٠ ٤٩٠٠ ٣٦٠٠ ٢٥٠٠ ١٦٠٠ ٩٠٠ ٤٠٠ ١٠٠

فندري ان مربع عدد ذي منزلتين لا تكون منزلة دون منزلة المئات . ولنا ان
نحسب كل عدد مركباً من مجتمع آحاده مع عشراته فان فرضنا عدداً ن وعشرات
١ وآحاده ب لنا $n = 1 + b$

بالتريع $n^2 = 1^2 + 2b + b^2$

اي مربع عدد يعدل مربع عشراته مع مضاعف حاصل العشرات في الآحاد
مع مربع الآحاد

مثال $8 + 70 = 78$

و $78^2 = 70^2 + 2 \times 70 \times 8 + 8^2 = 4900 + 1120 + 64 = 6084$

ثم نستخرج جذر ٦٠٨٤

هذا العدد اكثر من منزلتين فيكون جذره اكثر من منزلة واحدة ولكنهم ا
دون منازل ١٠٠٠٠ الذي هو مربع ١٠٠ فيكون في الجذر منزلتين فقط اي آحاد
وعشرات

٦٠٨٤

فمربع العشرات يكون في المنزلتين عن اليسار ولنصلهما بوضع نقطة فوق الآحاد
ثم فوق المئات وهذه الاقسام المركبة من منزلتين منزلتين سميت محطات فالمحطة ٦٠
واقعة بين المربعين ٤٩ و ٦٤ فيكون ٧ الجذر المطلوب مع بعض الآحاد فلنضع ٧
عن يمين العدد المطلوب جذره واطرح مربعة

٦٠٨٤ | ٧٨

٤٩

٧ + ٢ = ١٤٨ | ١١٨٤

١١٨٤

٤٩ من ٦٠ فيبقى ١١ وننزل المحطة الاخرى
فيصير ١١٨٤ وهو مضاعف حاصل العشرات
في الآحاد مع مربع الآحاد كما تقدم ولكن
اذا ضرب عشرات في آحاد لا يكون الحاصل
دون العشرات فالامر ظاهر ان المنزلة الاولى

٤ لا يكون جزءاً من حاصل الآحاد في العشرات فلا بد ان يوجد ذلك الحاصل في
١١٨ فلنضاعف العشرات اي $2 \times 7 = 14$ واقسم ١١٨ على ١٤ يخرج ٨ فهو عدد
آحاد الجذر او عدد اكبر من الجذر وهذا الخارج لا يمكن ان يكون اصغر من اللازم لانه

على الأقل يعدل مضاعف حاصل العشرات في الآحاد ولكنه قد يكون أكبر من اللازم ولاستعلام ذلك ضع ٨ عن يمين ١٤ وعن يمين ٧ في الخارج ثم بالضرب لنا (١) مربع الآحاد (٢) مضاعف حاصل العشرات في الآحاد وبالطرح لا يبقى شيء فيكون ٧٨ الجذر المطلوب . وفي هذه المعاملة طرحنا من العدد المفروض ٦٠٨٤

(١) مربع ٧ عشرات أي مربع ٧٠

(٢) مضاعف حاصل ٨ × ٧٠

(٣) مربع ٨ وهذه الأجزاء الثلاثة التي تألف منها مربع ٧٨ وعلى هذه الكيفية

نستخرج مربع ٥٦٨٢١٤٤٤

$$\begin{array}{r}
 ٥٦٨٢١٤٤٤ \overline{) ٧٥٢٨} \\
 ٤٩ \\
 ١٤٥ \overline{) ٧٨٢} \\
 \underline{٧٢٥} \\
 ١٥٠٣ \overline{) ٥٧١٤} \\
 \underline{٤٥٠٩} \\
 ١٥٠٦٨ \overline{) ١٢٠٥٤٤} \\
 \underline{١٢٠٥٤٤} \\
 \dots\dots
 \end{array}$$

فلما تقدم هذه القاعدة لاستخراج جذور الأعداد المربعة

(١) اقسم العدد إلى محطات في كل محطة منزلتين بوضع نقطة فوق منزلة الآحاد أولاً ثم المئات الخ وربما تكون في المحطة عن اليسار منزلة واحدة فقط

(٢) استعلم المربع الأكبر التام في المحطة عن اليسار واكتب جذره في الخارج كما في القسمة واطرح مربعة من المحطة الأولى وإلى الباقي نزل المحطة التالية فذلك مقسوم ثان

(٣) ضاعف الجذر الذي وجدته وضعه عن يسار المقسوم في

موضع المقسوم عليه في القسمة وانظر كم مرة يدخل في المقسوم بعد قطع الرقم الاول منه عن اليمين واكتبه في الخارج عن يمين المقسوم عليه ايضاً

(٤) اضرب هذا المقسوم عليه كله في الرقم الاخير من الخارج واطرح الحاصل من المقسوم ونزل الى الباقي المحطة التالية فهو مقسوم ثالث

(٥) ضاعف الجذر الموجود واجعله مقسوماً عليه وافعل كما تقدم الى ان تنفي كل المحطات

ان لم يبق بقية بعد تنزيل المحطة الاخيرة وال طرح من المقسوم الاخير يكون العدد مربعاً تاماً وان بقيت بقية فهو غير تام فلو قيل ما هو جذر ١٦٨ الثقل ١٢ للمربع التام منه والباقي ٢٤ اي ١٦٨ ليس مربعاً تاماً وان قيل من اين علمت ان ١٢ هو جذر اكبر مربع في ١٦٨ لقلت لان فضلة مربعي عددين متوالين يعدل مضاعف اصغر العددين + ١

$$\begin{aligned} \text{لنفرض } 1 &= \text{اصغرها} \\ 1 + 1 &= \text{اكبرها} \\ 1 + 1 + 1 &= 1^2 + 1^2 + 1^2 = (1 + 1)^2 \\ 1 &= 1^2 \\ \hline 1 + 1 + 1 & \quad \text{الفضلة} \end{aligned}$$

فالجذر لا يزيد واحداً ان لم تكن الفضلة مضاعف ذلك الجذر مع ١ او اكثر و $1 + 1 + 1 = 3$ والفضلة ٢٤ فلا يمكن ان يكون الجذر الصحيح اكبر من ١٢ وهذه القاعدة تنيد في استعمال مربعات اعداد متوالية بطريقة اسهل من ضربها في نفسها

مثال لنا $(601)^2 = 361201$ مطلوب مربع ٦٠٢ فهذه صورة العمل

$$٤٢٢٨٠١ = (٦٥١)^2$$

$$١٢٠٢ = ٦٥١ \times ٢ +$$

$$١ = ١ +$$

$$(٦٥٢) = ٤٢٥١٠٤$$

$$١٢٠٤ = ٦٥٢ \times ٢ +$$

$$١ = ١ +$$

$$(٦٥٣) = ٤٢٦٤٠٩$$

فيه عدة المنازل في الجذر تعدل عدة المخطات في الجذور ابداً

امثلة

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| (١) ما هو جذر ٧٢٢٥ | (٢) ما هو جذر ١٧٦٨٩ |
| (٣) ما هو جذر ٩٩٤٠٠٩ | (٤) ما هو جذر ٨٥٦٧٨٩٧٢ |
| (٥) ما هو جذر ٦٧٨١٢٦٧٥ | (٦) ما هو جذر ٢٧٩٣٤٠١ |
| (٧) ما هو جذر ٢٦٦١٠٩٧٠٤٩ | (٨) ما هو جذر ٩١٨٧٤١٦٧٣٧٠٤ |

لاجل استخراج جذر كسر استخراج جذر الصورة ثم جذر المخرج او حولة الى كسر عشري واقسم الكسور الى محطات مبتدئا من منزلة العشرات واجر العمل حتى يخرج الجذر او يقرب اليه بما يكفي . واذا كان المربع صحيحاً ولكنه ليس مربعاً تاماً فاضف اليه اصفاراً بمنزلة كسر عشري . مثاله لو قبل استخراج جذر ٧ بحيث لا يفضل اكثر من $\frac{1}{100}$

$$٧٠٠ \dots = ٧ \times (١٠٠)$$

$$٧٠٠ \dots \mid ٢٦٤$$

٤

$$٤٦ \mid ٣٠٠$$

$$٢٧٦$$

$$٥٢٤ \mid ٢٤٠٠$$

$$٢٠٩٦$$

$$٣٠٤ \text{ الباقي}$$

ضع اربعة اصفار عن يمين السبعة

واقسمها الى محطات مبتدئا من

منزلة العشرات واجر العمل كما تقدم

فالجواب ٢٦٤ وذلك يفرق عن

جذر ٧ باقل من $\frac{1}{100}$ لانه لا يجنب

ان توضع ٥ عوضاً عن ٤ في

الجواب

(٢) ما هو جذر $\sqrt{29}$ الى اقل من $\frac{1}{100}$ الجواب 5.38
 (٣) ما هو جذر $\sqrt{227}$ الى اقل من $\frac{1}{1000}$ الجواب 15.0665
 تنبيه . عدة الاضمار المضافة الى الجذور في مضاعف عدة المنازل في كسور الجواب
 ما تقدم توضع طريقة مختصرة لاستخراج جذر عدد مخلوط . مثاله لو قيل ما هو جذر
 250 ل قيل هذا العدد المختلط $\frac{250}{1000} = \frac{25}{100}$ اما 1000 فليس بربع تام ولكنه يُجْعَل
 تاماً بضرب الصورة والمخرج في 10 فيصير $\frac{2500}{10000} = \frac{25}{1000}$ وجذر الصورة الى اقرب
 صحيح $= 15$ اي $\frac{15}{100} = 0.15$ ولجل زيادة التدقيق اضع الى المخرج اضماراً
 تعادل عدة منازل الكسور المطلوبة في الجواب

أمثلة

- (١) ما هو جذر $\sqrt{227147.7}$ الى اقل من 0.1
 (٢) ما هو جذر $\sqrt{314.37}$ الى اقل من 0.1
 (٣) ما هو جذر $\sqrt{2.1001}$ الى اقل من 0.0001

في استخراج جذور الاعداد المكعبة

$$\begin{aligned} 1 &= 1 && \text{مكعب} \\ 1000 &= 10 && " \\ 1000000 &= 100 && " \\ 1000000000 &= 1000 && " \end{aligned}$$

اي الجذر المكعب لعدد ذي منازل بين منزلة واحدة وثلاث منازل فيه رقم واحد اي
 منزلة واحدة واعدد منازل بين ٤ و ٦ في جذره الكمي رقمان اي منزلتان واعدد منازل
 بين ٧ و ٩ في جذره الكمي ثلاثة ارقام الخ او اذا وضعنا الاعداد الطبيعية كما علمنا في
 ايضا كيفية استخراج الجذر المائلي فلنا

جذور ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠
 كموب ١ ٨ ٢٧ ٦٤ ١٢٥ ٢١٦ ٣٤٣ ٥١٢ ٧٢٩ ١٠٠٠
 فلو طُلب جذر المكعب لعدد اقل من ١٠٠٠ انظر الى صف الكموب فلا بد

ان يكون الجذر فوق احدها او بين اثنين من صف الجذور وان كان العدد اكثر من ١٠٠٠ يكون جذره المكعب اكثر من ١٠ اي يكون فيه آحاد معلومة وعشرات معلومة

لنفرض العدد n ولنفرض عشرائه $= ١$ وآحاده $= b$ فلنا
 $n = ١ + b$ ون $١ = ١^٣ + ٣ \times ١^٢ \times b + ٣ \times ١ \times b^٢ + b^٣$
 اي مكعب عدد يعدل مكعب عشرائه مع ثلاثة امثال الحاصل من ضرب مربع عشرائه في آحاده مع ثلاثة امثال حاصل عشرائه في مربع آحاده مع مكعب آحاده
 مثالة

$$١٠٢٨٢٣ = ٧^٣ + ٣ \times (٧) \times ٤٠ \times ٢ + ٧ \times ٣ \times (٤٠) \times ٢ + (٤٠) = ٧^٣ + ٣ \times (٤٠) \times ٢ \times ٧$$

فلنعكس العمل ولنستخرج مكعب ١٢١٦٧

$$١٢١٦٧ \overline{) ٢٢}$$

٨

$$\begin{array}{r} ٢ \times (٢٠) \times ٢ = ١٢٠٠ \\ ٢٠ \times ٢ \times ٢ \quad ١٨٠ \\ ٢^٣ \quad ٩ \\ \hline ١٢٨٩ \quad \dots \end{array}$$

فلنا هذه القاعدة لاستخراج جذر مكعب

- (١) قطع العدد محطات في كل محطة ثلاثة ارقام مبتدئاً من اليمين وربما تكون المحطة الاخيرة عن اليسار اقل من ثلاثة ارقام
- (٢) استعلم المكعب الاكبر في المحطة الاولى عن اليسار واكتبه في الخارج كما في القسمة واطرح مكعبه من المحطة ونزل محطة ثانية لاجل مقسوم ثانٍ

- (٣) ضع صفراً عن يمين الجذر الذي وجدته واضرب مربعه في ٢ واجعل الحاصل مقسوماً عليه وانظر كم مرة يدخل في المقسوم الثاني

وأكتب ذلك في الخارج عن بين الرقم الأول. رُبَّع الرقم الأخير واضرب
بالمربع الرقم الأول بعد وضع صفر عن يمينه ثم رُبَّع الرقم أيضاً واجمع
الحواصل الثلاثة فان دخل في المقسوم بما يماثل الرقم الأخير كان والآ
فنقص ذلك الرقم واحداً

(٤) اضرب المقسوم عليه الذي وجدته في الرقم الأخير من الجذر
واطرح الحاصل من المقسوم وإلى الباقي نزل المحطة الثالثة لاجل مقسوم
ثالث

(٥) اضرب مربع كل الجذر الذي وجدته في ٢٠٠ لاجل مقسوم
عليه ثالث وامتنع كما تقدم كم مرة يدخل في المقسوم وهكذا إلى النهاية

امثلة

الجواب ٢٦٤	ما هو $\sqrt[3]{48228044}$
الجواب ٧٨ والباقي ٨٦٩٧	ما هو $\sqrt[3]{482249}$
الجواب ٢٢٠٦٨	ما هو $\sqrt[3]{2297734.218432}$
	ما هو $\sqrt[3]{11}$

في استخراج اي جذر فريض لعدد مفروض

لفرض ن عدداً ولنفرض عشرائه = ١ وآحاده = ب فلنا

$$ن = (١ + ب) = ١ + ن١ + ن٢ + ن٣ + \dots + ن^{٢-١} + ن^{٢-٢} + \dots + ن^{٢-٢} + ن^{٢-٢} + \dots + ن^{٢-٢} + ن^{٢-٢}$$
 في كنية بسط كنية ثنائية

اي العدد المفروض بعدل قوة ن لعشرائه + ن مرة حاصل القوة ن - ١
للعشرات في الآحاد + الخ

فلنا هذه القاعده لاستخراج الجذر التوفي لابة كبت فريضت

(١) قطع العدد محطات ارقامها تعادل الآحاد في دليل الجذر
المطلوب واستعلم اكبر جذر في المحطة الاولى من اسم الدليل المفروض

(٢) رَقِّ ذلك الجذر الى القوة المفروضة واطرح الحاصل من المحطة الاولى ونزل الرقم الاول من المحطة الثانية واجعل الكل مقسوماً ثانياً
 (٣) رَقِّ الجذر الذي وجدته الى قوة ن - ١ واضربها في ن وانظر كم مرة تدخل في المقسوم الثاني واكتب ذلك في الخارج
 (٤) رَقِّ العدد الذي في الخارج كله الى قوة ن واطرح الحاصل من المخطئين عن اليسار وافعل كما تقدم الى النهاية

مثاله لو قيل ما هو الجذر الرابع من ٥٣١٤٤١

$$٥٣١٤٤١ \mid ٢٧$$

$$٢ = ١٦$$

$$٤ \times ٢ = ٨ \mid ٢٧١$$

$$٢٧ = ٥٣١٤٤١$$

(٢) ما هو الجذر الخامس من ٢٢٥٥٤٤٣٢

$$٢٢٥٥٤٤٣٢ \mid ٢٢$$

$$٢ = ٢٤٢$$

$$٥ \times ٢ = ١٠ \mid ٩٢٥$$

$$٢٢ = ٢٢٥٥٤٤٣٢$$

اذا كان دليل الجذر المطلوب عدداً مضلعاً يستخرج الجذر باستخراج الجذر المدلول عليه بالضلع الاول ثم المدلول عليه بالآخر. مثاله لو قيل ما هو الجذر الخامس لـ ٢٢٥٥٤٤٣٢ فاستخرج اولاً جذر الكعب ثم الجذر الرابع. والجذر الرابع يستخرج باستخراج الجذر المربع ثم جذر ذلك الجذر المربع والجذر السادس يستخرج باستخراج الجذر المكعب ثم الجذر المربع والجذر الثامن يستخرج باستخراج الجذر المربع ثلاث مرات متتابعة اي لـ ٢ = ٢ و لـ ٢ = ٢ و لـ ٢ = ٢ والجذر السادس عشر يستخرج باستخراج الجذر المربع اربع مرات متتابعة

الفصل الثالث عشر

في حل المعادلات بالترقية والتجذير

نبذة في الترقية

١٤٧ او قرض $\sqrt{2} = ت$ لكان بتربيع جانبي هذه المعادلة $ك = ت^2$ اي ان وقعت الكمية المجهولة تحت علامة الجذر نحل المعادلة بترقية جانبيها الى قوة من اسم ذلك الجذر

تنبيه . قبل الترقية ينبغي مقابلة المعادلة حتى تكون الكميات المنطقية وحدها على جانب واحد والجذرية وحدها على الجانب الآخر

$$٩ = ٤ + \sqrt{2} \quad \text{فلنفرض هذه المعادلة}$$

$$٥ = ٤ - ٩ = \sqrt{2} \quad \text{ثم بالمقابلة}$$

$$٣٥ = ٢٥ = ك \quad \text{بترقية الجانبين}$$

$$ت + \sqrt{2} = ب - د \quad \text{مفروض}$$

$$\sqrt{2} = د + ب - ت \quad \text{بالمقابلة}$$

$$ك = (د + ب - ت) \quad \text{بالترقية}$$

$$٤ = ١ + \sqrt{2} \quad \text{مفروض}$$

$$٦٤ = ١ + ك \quad \text{بترقية الجانبين الى القوة الثالثة}$$

$$٦٣ = ك \quad \text{وبالمقابلة}$$

$$\frac{1}{2} + ٦ = \sqrt{٤ - ك} + ٤ \quad \text{مفروض}$$

$$١٣ = \sqrt{٤ - ك} + ٨ \quad \text{بالجبر}$$

$$\frac{5}{6} = \sqrt{٤ - ك} \quad \text{بالمقابلة والقسمة على ٦}$$

$$٤ + \frac{٢٥}{٣٦} = ك \quad \text{ثم } ك = \frac{٢٥}{٣٦} \quad \text{بالترقية}$$

$$\frac{د + ٣}{٢ + ٢\sqrt{2} + ك} = \frac{٢\sqrt{2} + ٢ + ك}{٢\sqrt{2} + ٢ + ك} \quad \text{مفروض}$$

بالمجبر $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5} + \sqrt{6}$
 بالمقابل $\sqrt{2} = \sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{3}$
 بالترقية $\sqrt{2} = (\sqrt{5} + \sqrt{6} - \sqrt{3})^2$

وعلى هذا النسق نحل هذه الامثلة الآتية

$$\frac{271}{100} = \sqrt{2}$$

$$20 = \sqrt{2}$$

$$12 = \sqrt{2}$$

$$4 = \sqrt{2}$$

$$\frac{20}{16} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{30} = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1-2} = \sqrt{2}$$

$$4 = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{3} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\frac{2-4}{4} = \sqrt{2}$$

$$\frac{2}{3} = \sqrt{2}$$

$$81 = \sqrt{2}$$

$$16 = \sqrt{2}$$

$$6 = \sqrt{2}$$

$$\frac{2-4}{4} = \sqrt{2}$$

$$7 = \frac{4}{5} - \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$8 = \frac{4}{5} \sqrt{2}$$

$$7 = 4 + (\sqrt{2} + \sqrt{3})$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{28 + \sqrt{2}}{7 + \sqrt{2}} = \frac{28 + \sqrt{2}}{4 + \sqrt{2}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} - 16 = \sqrt{2} - 16$$

$$1 + \sqrt{2} = 17 + \sqrt{2}$$

$$\frac{9 - \sqrt{2}}{7 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\frac{9 - \sqrt{2}}{7 + \sqrt{2}} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

نبذة

في حل المعادلات بالتجذير

١٤٨ لو فرض $ك' = ١٦$ فان تجذرا الجانبان تصير $ك = ٤$

اي ان كانت الكمية المجهولة قوة نحل المعادلة بتجذير الجانبين

(١) مفروض $٧ = ٨ - ك' + ٦$

بالمقابلة $ك' = ٩$ وبالتجذير $ك = ٣$ و $٣ + = ٦ + = ٩$

فالجواب ملتبس لان $٩ = ٣ + \times ٢ +$ و $٩ = ٣ - \times ٢ -$

مفروض $٥ ك' = ٣٠ - ك' + ٢٤$

بالمقابلة والقسمة $ك' = ١٦$

بالتجذير $ك' = ٤ +$

(٢) مفروض $ت + = \frac{ك'}{ب} = ح - \frac{ك'}{د}$

بالتجذير والمقابلة والقسمة $ك' = \frac{ب د ح - ت د}{ب + د}$

وبالتجذير $ك' = \frac{١}{٢} (\frac{ب د ح - ت د}{ب + د}) +$

مفروض $ت + د ك' = ١٠ - ك'$

بالمقابلة والقسمة $ك' = \frac{١٠ - ت}{١ + د}$

بالتجذير $ك' = \frac{١}{٢} (\frac{١٠ - ت}{١ + د})$

١٤٩ متى كانت المجهولة قوة تحت علامة الجذر نحل المعادلة بالترقية والتجذير

(٢) مفروض $٤ = \sqrt[٢]{ك'}$

بالترقية $ك' = ١٦ = ٢٤$

بالتجذير $ك' = ٨ + = ٦٤ + = ٨$

(٤) مفروض $\sqrt[٢]{ك' - ٢} = ت - ح - د$

بالترقية $ك' - ٢ = ت - ح - د + د$

بالمقابلة $ك' = ح - ٢ + ح + د + د + ت$

بالتجذير $ك' = \sqrt[٢]{ح - ٢ + ح + د + د + ت}$

(١) مفروض $\frac{١}{٢} (ك' + ت) = \frac{ت + ب}{٢(ك' - ت)}$

بالجبر حداً مرة (١١٢) $(ك - ت) = ت + ب$
 بالترقية $ك - ت = ت + ت + ب + ب$
 بالمقابلة $ك = ت + ت + ب + ب$
 بالتعذير $ك = (ت + ت + ب + ب) + ت$

(٦) مفروض $\frac{مك + مك - ب}{مك - مك - ب} = \frac{ن ب}{ك - ب}$ الجواب $ك = ب \frac{(ن + ١)}{١ + ن}$

(٧) $\frac{ك + ١}{ك} = \frac{ك + ١ + ك + ك}{ك + ١}$ الجواب $ك = ١$

مسائل منتورة

(١) سئل رجل عن عمره فقال اذا اُضيف اليه عشرين وأُخذ الجذر المالي للجمع وطُرح من هذا الجذر ٢ بقي ٦ فكم كان عمره

بموجب شروط المسئلة $٦ = ٢ - \sqrt{١٠ + ك}$

بالمقابلة $٨ = \sqrt{١٠ + ك}$

بالترقية $٦٤ = ١٠ + ك$

بالمقابلة ايضاً $٥٤ = ك$

والامتحان $٦ = ٢ - \sqrt{١٠ + ٥٤}$

(٢) اي عدد اذا اُضيف اليه ٢٢٥٧٧ وأُخذ جذر المجمع المالي وطُرح منه

١٦٢ بقي ٢٢٧

بشروط المسئلة $٢٢٧ = ١٦٢ - \sqrt{٢٢٥٧٧ + ك}$

بالمقابلة $٤٠٠ = \sqrt{٢٢٥٧٧ + ك}$

بالترقية $١٦٠٠٠٠ = ٢٢٥٧٧ + ك$

بالمقابلة $١٢٧٤٢٣ = ك$

الامتحان $٢٢٧ = ١٦٢ - \sqrt{٢٢٥٧٧ + ١٢٧٤٢٣}$

(٣) تاجر ربح من تجارته مبلغاً نسبته الى ٢٢٠ كنسبة ٢٥٠٠ الى خمسة اضعاف

المبلغ . فكم ربحه

بشروط المسئلة $ك : ٢٢٠ :: ٢٥٠٠ : ٥$

بغوبل النسبة الى معادلة ٥ ك = ٨٠٠٠٠٠

بالقسمة ك = ١٦٠٠٠٠ بالتجزير ك = ٤٠٠

نتيبه . عند تجذير ١٦٠٠٠٠ لا نعلم هل الجذر ايجائي أم سلمي ولكن حسب شروط المسئلة كان رجماً فحسبه ايجائياً . وقس على ذلك نظيره

(٤) سئل كم ميلاً الى المكان الثلاثي . فأجيب انه اذا طُرِح ٩٦ من مربع البعد يبقى ٤٨ فكم كانت المسافة

بالشروط ك = ٩٦ - ٤٨ ك = ١٤٤ ك = ١٢

(٥) اي عدد ينقسم ثلاثة امثال مربعه على ٤ ويطرح ١٢ من الخارج فيبقى ١٨٠

بالشروط $\frac{٢ ك}{٤} - ١٢ = ١٨٠$ ك = ١٦

(٦) اي عدد يُطرح ربع مربعه من ٨ فيبقى ٤ الجواب ٤

(٧) اي عدد ين نسبة مجتمعهما الى اكبرها كنسبة ١٠ الى ٧ واذا ضرب مجتمعهما

في اصغرها كان الحاصل ٢٧٠

لتفرض مجتمعهما = ١٠ ك فيكون الاكبر ٧ ك والاصغر ٣ ك والعددان ٢١ و٩

(٨) اي عدد ين نسبة فضلنها الى اكبرها كنسبة ٩:٢ وفضله مربعها ١٢٨

الجواب ١٨ و ١٤

(٩) اقس ١٨ الى قسمين بحيث تكون نسبة مربع احدهما الى مربع الآخر كنسبة

١٦:٢٥

ليكن ك الاكبر فيكون ١٨ - ك الاصغر وك : (١٨ - ك) = ١٦:٢٥

وبالتحويل الى معادلة ١٦ ك = ٢٥ (١٨ - ك)

وبالتجزير ٤ ك = ٥ (١٨ - ك) ك = ١٠

(١٠) اي عدد يُضرب نصفه في ثلثه فيكون الحاصل ٢٤ الجواب ١٢

(١١) اي عدد اذا اُضيف اليه ٥ وطرح منه ٥ وضرب المجمع في الفضلة يكون

الحاصل ٩٦

الجواب ١١

(١٢) اقس ١٤ الى قسمين بحيث تكون نسبة الخارج من قسمة اكبرها على اصغرها

الى الخارج من قسمة اصغرها على اكبرها كنسبة ١٦:٩ الجواب ٨ و ٦

(١٣) اي عدد ين نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٤:٥ ومجتمع كليهما ٥١٠٢

افرض الاكبر ٥ ك والاصغر ٤ ك . فيكون الجواب ١٥ و ١٢

(١٤) ثلاثة شركاء قسموا ارباحهم فكان الخارج من قسمة حصة الاول على ٧ بمائل الخارج من قسمة حصة الثاني على ٢ والخارج من قسمة حصة الثاني على ١٧ بمائل الخارج من قسمة حصة الثالث على ٥ وان ضربت حصة الاول في حصة الثاني وحصة الثاني في حصة الثالث وحصة الثالث في حصة الاول يكون مجموع الحاصل $\frac{1}{2} \times 2820$ فكم حصة كل واحد

$$\text{لنفرض حصة الاول } ك \text{ فلنا } ٧ : ٢ :: ك : \frac{2}{7} = \text{حصة الثاني و } ١٧ : ٥ :: \frac{2}{7} : \frac{10}{119} = \text{حصة الثالث}$$

$$\text{والاول في الثاني اي } ك \times \frac{2}{7} = \frac{2}{7} ك$$

$$\text{والثاني في الثالث اي } \frac{2}{7} ك \times \frac{10}{119} = \frac{20}{823} ك$$

$$\text{والثالث في الاول اي } ك \times \frac{10}{119} = \frac{10}{823} ك$$

$$\text{ثم بالتحويل الى مخرج مشترك والمجموع } = \frac{20.7}{823} ك$$

$$\text{فلنا } \frac{20.7}{823} = \frac{1}{2} \times 2820 \quad ك = \frac{1}{2} \times 79$$

$$\text{فالاول } = \frac{1}{2} \times 79 \text{ والثاني } = 24 \text{ والثالث } = 10$$

(١٥) بعض التجار اشتركوا في ارسال عامل الى مصر واعطاه كل واحد منهم من الدنانير عشرة امثال عدد الشركاء. وكانت عمالة العامل في المئة من الدنانير ضعف عدد الشركاء. فان ضرب $\frac{1}{100}$ من ربحه في $\frac{1}{2} \times 2$ بمائل الحاصل عدد الشركاء فكم كانت الشركاء

ليكن عدد الشركاء ك فيكون المال الذي يده العامل ١٠ ك ورجح العامل على كل ١٠٠ دينار = ٢ ك وعلى ١٠ ك يكون ربحه $\frac{2}{10} ك$ ويكون $\frac{1}{100}$ من هذا الربح $\frac{2}{1000} ك$ و $\frac{2}{1000} ك \times \frac{1}{2} = \frac{2}{4000} ك = \frac{1}{2000} ك$

$$\text{فلنا } \frac{1}{2000} ك = 225 ك = 2 ك = 225 ك = 10 ك$$

(١٦) اي عدد اذا اضيف اليه ٢٠ وطرح منه ١٠ يكون مربع المجمع مع مضاعف مربع الفضلة ١٧٤٧٥ الجواب ٧٥

(١٧) اي عدد من نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٥ : ٢ ومجموع مربعيهما ١٦٦٦ الجواب ٢١ و ٢٥

(١٨) سافر زيد وعمر وكل واحد من بلده فاصدين ان يتلاقيا في مكان. ولما التقيا كان زيد قد قطع من المسافة ١٨ ميلاً زيادة عن عمرو وفي سبيلها كان زيد

قد قطع مسافة عمرو في $\frac{1}{4}$ يوم . وكان عمرو قد قطع مسافة زيد في ٢٨ يوماً .
فكم كان البعد بين البلدين

لنفرض ك = المسافة التي قطعها زيد

وك = ١٨ = التي قطعها عمرو

فيكون $\frac{ك}{١٨} = \frac{١٨ - ك}{١٥\frac{1}{4}}$ سفر زيد اليومي

و $\frac{ك}{٢٨} =$ سفر عمرو اليومي

ولنا ك : ك - ١٨ :: $\frac{١٨ - ك}{١٥\frac{1}{4}}$: $\frac{ك}{٢٨}$

ك = ٧٢ = مسافة زيد . والبعد = ١٢٦ ميلاً

(١١) اي عددان نسبة احدهما الى الاخر كنسبة ٨ : ٥ وحاصلها ٢٦٠

الجواب ٢٤ و ١٥

(٢٠) رجل اشترى ثوبين مجتمعهما ٢٦ ذراعاً . وكان ثمن الذراع من كل واحد
من الدراهم بقدر عدد اذرعهِ . ونسبة ثمن الواحد الى ثمن الآخر :: ١ : ٤ فكم ذراعاً
كان كل ثوب

الجواب ٢٤ و ١٢

(٢١) اي عددان نسبة احدهما الى الاخر كنسبة ٣ : ٢ ونسبة فضلة قوتيهما الرابعتين

الى مجموع كميتهما كنسبة ٢٦ : ٧

الجواب ٦ و ٤

(٢٢) بعض السياح توافقوا في السفر . ومع كل واحد منهم قدر ما مع الآخر من
الدراهم ولكل واحد من الخدّام انفاً بقدر عدد السياح . والدراهم التي مع كل واحد
من السياح مضاعف عدد الخدّام ومجموع الكل ٢٤٥٦ درهماً فكم كان عدد السياح

الجواب ١٢

(٢٣) طلب ملك من مقاطعة رجالاً للحرب فارسلت كل قرية انفاً بعدد
قرى تلك المقاطعة اربع مرات . واذا لم يرض الملك بذلك ارسلت كل قرية ثلاثة انفاً
ايضاً فكانت نسبة العدد كلاً بعد هذه الزيادة الى عدد المرسلين اولاً كنسبة ١٧ : ١٦
فكم قرية في تلك المقاطعة

العملية التاسعة السابقة خصوصية فلنجعلها هنا عامة

(٢٤) انقسم كمية ا الى قسمين بحيث تكون نسبة مربع احدهما الى مربع الآخر

كنسبة ب الى س

لنفرض ك = قسماً واحداً ا - ك = القسم الآخر

بشروط المسئلة ك : (١ - ك) :: ب : س

$$س ك = ب (١ - ك)$$

$$س ك = ب (١ - ك)$$

$$\frac{س ك}{س + ب} = ك \quad \text{و} \quad \frac{س ك}{س + ب} = ١ - ك$$

$$\frac{س ك}{س - ب} = ك \quad \text{و} \quad \frac{س ك}{س - ب} = ١ - ك$$

اذا كان ب = س يكون القسمان متساويين وكل واحد = ١/٢ اذا اخذنا

العلامة الايجابية للجذر ولكن اذا اخذنا العلامة السلبية ك = $\frac{س ك}{س - ب}$

وذلك عبارة عن غير المتناهي كما سترى في محله اي المخرج موجود في الصورة الى ما لا نهاية وكذلك القسم الثاني اي

$$\frac{س ك}{س - ب} = ١ - ك$$

وذلك ايضا عبارة عما لا نهاية والقسمان

$$١ = \frac{س ك}{س - ب} = \frac{س ك}{س - ب}$$

استخدام هذه العبارة في حل مسائل الفلسفة الطبيعية

من مبادئ الفلسفة الطبيعية ان النور والجاذبية يتلاقان بالنسبة الى مربع البعد اما الجاذبية بين جسمين فهي بالنسبة الى جرمها وبالقلب كمربع البعد بينها واما النور فبالنسبة الى جرم النور وبالقلب كمربع البعد

مسئلة . لنفرض جرم الارض ٧٥ مرة جرم القمر والمسافة بينهما ٢٠ مرة قطر الارض . فعلى اي بعد تكون جاذبية الجرم الواحد مثل جاذبية الجرم الآخر لنفرض جرم القمر = س وجرم الارض = ب والبعد بينهما = ١ والبعد عن مركز الارض المطلوب = ك فيكون القسم الاخر من البعد بينهما ١ - ك وبالمسئلة ك = (١ - ك) : ب : س

$$\frac{س ك}{س + ب} = ١ - ك \quad \text{و} \quad \frac{س ك}{س + ب} = ك$$

بالمسئلة

$$٢٠ = ا \quad ٧٥ = ب \quad ١ = س$$

$$ك = \frac{٢٠ \sqrt{٧٥}}{١ + \sqrt{٧٥}} = ٢٦٠٩ \text{ تقريباً} \quad \text{وا} - ك = ٢٠٩ \text{ تقريباً} \text{ هذا اذا اخذنا}$$

القيمة الايجابية ثم اذا اخذنا القيمة السلبية لنا

$$ك = \frac{٢٠ \sqrt{٧٥}}{١ - \sqrt{٧٥}} \quad \text{وا} - ك = \frac{٢٠ \sqrt{٧٥}}{١ - \sqrt{٧٥}}$$

$$ك = \frac{٢٠ \sqrt{٧٥}}{١ - \sqrt{٧٥}} = ٢٢٠٩ \quad \text{ا} - ك = - ٢٠٩ \text{ تقريباً}$$

وهذه القيمة السلبية تدل على وجوب اتخاذ البعد الى الجهة المتقابلة للجهة الاولى اي انه على مسافة ابعد من القمر عن الارض بما يماثل ٢٠٩ قطر الارض تكون جاذبية الارض والقمر لجرم في تلك النقطة متساويتين

مسئلة . على اية مسافة من الارض تكون جاذبية الارض ١٦ مرة جاذبية القمر

$$\text{جاذبية الارض} \frac{ب}{ا} \text{ وجاذبية القمر في تلك النقطة} = \frac{س}{(ك - ا)}$$

$$\text{بالمسئلة} \frac{ب}{ا} = \frac{١٦ س}{(ك - ا)}$$

$$\text{بالتحذير} \frac{ب}{ك} = \frac{١٦ س}{ك - ا}$$

$$\text{بالتحذير} ١ - \frac{ب}{ك} = \frac{١٦ س}{ك - ا}$$

$$\text{بالقيمة الايجابية} ك = \frac{١٦ س}{١ - \frac{ب}{ك}} = ٢٠٠٥ \text{ تقريباً}$$

$$\text{بالقيمة السلبية} ك = \frac{١٦ س}{١ - \frac{ب}{ك}} = ٥٥٧ \text{ تقريباً}$$

اي ابعد من القمر عن الارض بما يماثل قطر الارض ٥٥٧ مرة
لأجل كيفية استخدام هذه العبارة لاستعلام نور جرمين النسبي انظر اصول المهرنة

الفصل الرابع عشر

في معادلات ممتزجة من الدرجة الثانية

١٥٠ تنقسم المعادلات الى اقسام ثلثي باعتبار قوة الحرف الدال على الكمية

المجهولة

الاول معادلات من الدرجة الاولى وهي ما ليس فيها سوى القوة الاولى من المجهولة . مثالها $ك = ت + ب$ وتسمى ايضا معادلات بسيطة وقد تقدم ذكرها الثاني معادلات من الدرجة الثانية وهي ما كانت القوة العليا فيها من المجهولة مالا . ويقال لها ايضا معادلات مربعة . فان لم يكن فيها غير تلك القوة من المجهولة فهي المحضة وقد مضى ذكرها . مثالها $ك^٢ = ت - ر$ وان كان فيها القوة الثانية والاولى من المجهولة فهي الممتزجة . مثالها $ك^٢ + ب = ك = د$

الثالث معادلات من الدرجة الثالثة وهي ما كانت فيها القوة العليا من المجهولة كعبا . وهي ايضا اما محضة مثل $ك^٣ = ب - س$ واما ممتزجة مثل $ك^٣ + ت = ك^٢ + ب = ك = ح$ وقس على ذلك معادلات الدرجة الرابعة والخامسة ولم تجر

١٥١ قد رأينا في ما تقدم ان المعادلة المربعة المحضة تفل بتجذير جانبيها . ويمكن

ايضا الممتزجة اذا كان الجانب الذي فيه المجهولة مربعا تاما . مثالها

$ك^٢ + ٢ت = ك + ب + ح$ فهذه المعادلة تفل بالتجذير لان جانبيها الاول مربع كمية ثنائية . وحسبنا تقدم (١٠٢) لنا بالتجذير $ك + ت = \sqrt{٢ب + ح}$ وبالمقابلة $ك = \sqrt{٢ب + ح} - ت$

١٥٢ مرارا كثيرة يحدث ان الجانب الذي فيه المجهولة لا يكون مربعا تاما

مثل $ك^٢ + ٢ت = ك + ب$ فلو عرفنا الجزء الناقص من الجانب الاول لكي يصير مربعا تاما واضفناه الى الجانبين لجعلنا المعادلة محضة بالتجذير كما تقدم (٧٨) فما ان الجزء الثاني هو مضاعف حاصل الجزءين يكون $٢ت = ك$ في المعادلة المذكورة مضاعف حاصل جزوي الكمية التي نحن في طلبها وتكون الكمية $ك + ت$ ومربعها $ك^٢ + ٢ت + ت^٢ = ك + ب$ اي الجزء الناقص هو مربع نصف مسمى القوة الدنيا من

المجهول . ولنا من ذلك قاعدة لاتمام تربيع معادلة مربعة ممتزجة وهي ان يؤخذ مربع نصف مسي القوة الدنيا من المجهول ويضاف الى جانبي المعادلة

فلو فرض $ك^2 + ف = د$ لكان لنا حسباً ننقدم

$$ك^2 + ف + ك = د + ك + \frac{1}{4} ف$$

$$ك + \frac{1}{2} ف = \sqrt{د + ك + \frac{1}{4} ف}$$

$$ك + \frac{1}{2} ف = \sqrt{د + ك + \frac{1}{4} ف}$$

وهي عبارة عمومية لكل معادلة مربعة ممتزجة . فلو فرض $ك^2 - ٦ = ٧$ لقلنا

$$\text{حسب هذه العبارة } ك = \sqrt{٩ + ٧} + ٣ = ٤ + ٣ = ٧ \text{ او } ١$$

تنبيه . اكل معادلة مربعة محضة كانت او ممتزجة فيبتان لان الجذر الشفعي

ملتبس (١٠٢) وهذا الجذر هو نفس قيمة المجهول في كل معادلة مربعة محضة . مثالة

$ك^2 = ٦٤$ $ك = \sqrt{٦٤} = ٨$ ولكن في الممتزجة لابد من اضافة شيء الى هذا

الجذر او طرح شيء منه كما رأينا . ونرى القيمتين تارة ايجابيتين وتارة احدهما ايجابية

والاخرى سلبية . مثال ذلك

$$ك^2 + ٨ = ٢٠ \quad ك = \sqrt{٢٠ - ٨} = ٤ \text{ او } ١٠ \quad ك^2 - ٨ = ١٠ \quad ك = \sqrt{١٠ + ٨} = ٤$$

$ك = ١ + ٤ = ٥$ او ٣ ونبرهن صحتهما بالتعويض بهما عن المجهول في المعادلة الاصلية .

$$\text{فبالتعويض عن } ك \text{ بخمسة لنا } ٥^2 - ٨ = ١٧ \text{ او } ٥^2 + ٨ = ٣٣$$

$$\text{وبالتعويض عنها بثلاثة } ٣^2 - ٨ = ١ \text{ او } ٣^2 + ٨ = ١٧$$

١٥٣ قبل انمام التربيع يجب مقابلة المعادلة حتى تكون المجهولات وحدها على

جانب واحد والمعلومات على الجانب الآخر . ويجب ايضاً ازالة الكسور والقسمة على

مسي القوة العليا للمجهول . ولايضاح كل ذلك قد وضعنا هذه الامثلة

$$(١) \text{ مفروض } ك^2 + ٦ = ٨ \quad ك = ١$$

$$\text{باتمام التربيع } ك^2 + ٦ + ك = ٨ + ك + \frac{1}{4} = ٨ + ك + \frac{1}{4}$$

$$\text{بالتجذير } ك + \frac{1}{2} = \sqrt{٨ + ك + \frac{1}{4}}$$

$$\text{وبالمقابلة } ك - \frac{1}{2} = \sqrt{٨ + ك + \frac{1}{4}}$$

$$(٢) \text{ مفروض } ك^2 - ٨ = ١٠ \quad ك = ٤$$

بإتمام التربع $ك' - ٨ ب + ك = ١٦ ب + ١٦ ب + ح$

بالتجذير $ك - ٤ ب = ١٦ ب + ح$

بالمقابلة $ك = ٤ ب + ١٦ ب + ح$

(٣) مفروض $ك' + ث + ك = ب + ح$

بإتمام التربع $ك' + ث + ك = \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} + ب + ح$

بالتجذير $ك + \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} + ب + ح$

وبالمقابلة $ك - \frac{٢}{٢} = \frac{٢}{٢} + ب + ح$

(٤) مفروض $ك' - ك = ح - د$

بإتمام التربع $ك' - ك + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} + ح - د$

وبالتجذير والمقابلة $ك = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ح - د$

(٥) مفروض $ك' + ٢ = ٦ + د$

بإتمام التربع $ك' + ٢ + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} + ٦ + د$

وبالتجذير والمقابلة $ك = \frac{٢}{٢} + \frac{١}{٢} + ٦ + د$

(٦) مفروض $ك' - ث + ب + ك = ث - ب - س + د$

بإتمام التربع $ك' - ث + ب + ك = \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} + ث - ب - س + د$

بالتجذير والمقابلة $ك = \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢} + ث - ب - س + د$

(٧) مفروض $ك' + \frac{٢}{٢} + ح = \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢} + ح$

بإتمام التربع $ك' + \frac{٢}{٢} + ح = \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢} + ح$

وبالتجذير والمقابلة $ك = \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢} + ح$

(٨) مفروض $ك' - \frac{١}{٢} = ٧ + ح$

بإتمام التربع $ك' - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤} + ٧ + ح$

بالتجذير والمقابلة $ك = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٢} + ٧ + ح$

١٥٤ متى كانت القوة الدنيا في عدة من اجزاء المعادلة يجب جمعها الى جزء واحد قبل اتمام التربع . وان كانت مضلعة يجب فكها الى اضلاعها لكي يُعرف مسأها

(١) مفروض $ك' + ٢ + ك + ٢ + ك = د$

بالجمع $ك' + ٦ + ك = د$

بإتمام التربع $ك' + ٦ + ك + ٩ = ٩ + د$

وبالتجذير والمقابلة ك $= -٢ + \sqrt{١٦} + ٤$

(٢) مفروض ك $+ ت + ك = ب$ ك $= ح$

بالفك حسب (٢٨) ك $+ (ت + ب) \times ك = ح$

باتمام التربيع ك $+ (ت + ب) \times ك + \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢ + ح + \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢$

بالتجذير ك $+ \frac{ت + ب}{٢} = \frac{ت + ب}{٢} + \sqrt{ح + \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢}$

وبالمقابلة ك $= -\frac{ت + ب}{٢} + \sqrt{ح + \left(\frac{ت + ب}{٢}\right)^٢}$

(٣) مفروض ك $+ ت - ك = ب$

بالفك (٢٨) ك $+ (١ - ت) \times ك = ب$

باتمام التربيع ك $+ (١ - ت) \times ك + \left(\frac{١ - ت}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{١ - ت}{٢}\right)^٢ + ب + \left(\frac{١ - ت}{٢}\right)^٢$

بالتجذير والمقابلة ك $= -\frac{١ - ت}{٢} + \sqrt{ب + \left(\frac{١ - ت}{٢}\right)^٢}$

١٥٥ ينبغي في بعض الاحيان ان تُعدّ المعادلة لاتمام التربيع بالجبر او المقابلة

او القسمة او تبديل العلامات وما يشبه ذلك كما ترى في هذه الامثلة

(١) مفروض ت $+ ٥ - ك = ب$ $٢ - ك = ك$

بالمقابلة والجمع ك $+ ٢ = ك$ $٢ - ب = ت$

باتمام التربيع ك $+ ٢ + ١ = ١ + ك$ $٢ + ١ - ب = ت$

بالتجذير والمقابلة ك $= -١ + \sqrt{١ + ٢ - ب}$

(٢) مفروض $\frac{ك}{٢} = \frac{٢٦}{٢ + ك} - ٤$

بالجبر والمقابلة والجمع ك $+ ١٠ = ك$ $٥٦ = ٤$

باتمام التربيع ك $+ ١٠ + ك = ٢٥$ $٨١ = ٤$

بالتجذير والمقابلة ك $= -٥ + \sqrt{٨١ + ١٠}$

(٣) مفروض ك $+ ٢٤ - ت = ح$ $١٢ - ك = ٥$ ك

بالمقابلة والجمع ك $- ١٢ = ح - ٢٤$

بالقسمة على ٦ ك $- ٢ = ح - ٤$

باتمام التربيع ك $- ٢ + ١ = ١ + ح - ٤$

بالتجذير والمقابلة ك $= ١ + \sqrt{١ + ح - ٤}$

(٤) مفروض ح $+ ٢ = ك$ $د - ب = ك$

بالجبر والمقابلة ب ك $+ ٢ = ت$ $د - ت = ح$

$$\begin{aligned}
 & \text{بالقسمة على ب ك}^{\text{ا}} + \text{ك}^{\text{ا}} \text{ ت}^{\text{ا}} = \frac{\text{ت}^{\text{ا}} - \text{د}^{\text{ا}}}{\text{ب}} \\
 & \text{باتمام التربيع ك}^{\text{ا}} + \frac{\text{ك}^{\text{ا}}}{\text{ب}} + \frac{\text{ت}^{\text{ا}}}{\text{ب}} = \frac{\text{ت}^{\text{ا}} - \text{د}^{\text{ا}}}{\text{ب}} + \frac{\text{ت}^{\text{ا}}}{\text{ب}} \\
 & \text{بالتجذير والمقابلة ك}^{\text{ا}} = \frac{\text{ت}^{\text{ا}}}{\text{ب}} - \frac{\text{ت}^{\text{ا}}}{\text{ب}} + \frac{\text{ت}^{\text{ا}}}{\text{ب}} \\
 & \text{(١) مفروض ب ك}^{\text{ا}} + \text{د ك}^{\text{ا}} - \text{ك}^{\text{ا}} = \text{ب} - \text{ح} \\
 & \text{بالقسمة على ب د}^{\text{ا}} + \text{ك}^{\text{ا}} = \frac{\text{ب} - \text{ح}}{\text{ب} + \text{د}} \\
 & \text{ك}^{\text{ا}} = \frac{\text{ب} - \text{ح}}{\text{ب} + \text{د}} + \frac{\text{ك}^{\text{ا}}}{\text{ب} + \text{د}} \\
 & \text{(٢) مفروض ت ك}^{\text{ا}} + \text{ك}^{\text{ا}} = \text{ح} + \text{ك}^{\text{ا}} - \text{ك}^{\text{ا}} \\
 & \text{بالمقابلة والجمع ت ك}^{\text{ا}} + \text{ك}^{\text{ا}} - \text{ك}^{\text{ا}} = \text{ح} \\
 & \text{بالقسمة على ت ا}^{\text{ا}} + \text{ك}^{\text{ا}} = \frac{\text{ح}}{\text{ا} + \text{ت}} \\
 & \text{ثم ك}^{\text{ا}} = \frac{\text{ح}}{\text{ا} + \text{ت}} + \frac{\text{ك}^{\text{ا}}}{\text{ا} + \text{ت}}
 \end{aligned}$$

١٥٦ لنفرض ت ك^ا + ب ك^ا = د فاذا ضرب الجانبان في ا ت واضيف اليهما ب^ا نصير المعادلة ا ت ك^ا + ا ت ب ك^ا + ب^ا = ا ت د + ب^ا فنرى الجانب الاول قوة تامة من ا ت ك^ا + ب و لنا من ذلك قاعدة اخرى لاتمام التربيع وهي ان تضرب المعادلة في اربعة امثال مسي قوة المجهول العليا وتضيف الى الجانبين مربع مسي قوته الدنيا

تنبيه . هذه القاعدة اسهل من الاولى متى كان للمجهول مسميات لا يمكن ازالتهما بالقسمة لانه لا يحدث منها كسر في اتمام التربيع كما ترى في هذه الامثلة

$$\begin{aligned}
 & \text{(١) مفروض ت ك}^{\text{ا}} + \text{د ك}^{\text{ا}} = \text{ح} \\
 & \text{باتمام التربيع حسب القاعدة الثانية} \\
 & \text{ا ت ك}^{\text{ا}} + \text{ا ت د ك}^{\text{ا}} + \text{د}^{\text{ا}} = \text{ا ت ح} + \text{د}^{\text{ا}} \\
 & \text{بالتجذير ا ت ك}^{\text{ا}} + \text{د}^{\text{ا}} = \sqrt{\text{ا ت ح} + \text{د}^{\text{ا}}} \\
 & \text{وبالمقابلة والقسمة ك}^{\text{ا}} = \frac{\sqrt{\text{ا ت ح} + \text{د}^{\text{ا}}} - \text{د}^{\text{ا}}}{\text{ا ت}} \\
 & \text{وباتمام التربيع حسب القاعدة الاولى لنا} \\
 & \text{ك}^{\text{ا}} + \frac{\text{د}^{\text{ا}}}{\text{ا ت}} + \frac{\text{ح}}{\text{ا ت}} = \frac{\text{د}^{\text{ا}}}{\text{ا ت}} + \frac{\text{ح}}{\text{ا ت}} \\
 & \text{بالتجذير ك}^{\text{ا}} + \frac{\text{د}^{\text{ا}}}{\text{ا ت}} = \sqrt{\frac{\text{ح}}{\text{ا ت}} + \frac{\text{د}^{\text{ا}}}{\text{ا ت}}}
 \end{aligned}$$

$$\text{وبالمقابلة ك} = -\frac{د}{٢} + \frac{ح}{٢} + \frac{د}{٢}$$

$$(٢) \text{ مفروض ك}^٢ + د ك = ح$$

$$\text{باتمام التربيع ك}^٤ + د ك^٢ + د^٢ = ح د + د^٢$$

$$\text{بالتجذير ك}^٢ + د = ح د + د^٢$$

$$\text{وبالمقابلة والنسبة ك} = \frac{-\sqrt{د(ح+د)} + د}{٢}$$

$$(٢) \text{ مفروض ك}^٢ + ٥ ك = ٤٢$$

$$\text{باتمام التربيع ك}^٢ + ٦٠ ك + ٩٠٠ = ٥٢٩ + ٩٠٠$$

$$\text{بالتجذير والمقابلة والنسبة ك} = \frac{-٦٠ \pm \sqrt{٦٠^2 - ٤(٩٠٠ - ٥٢٩)}}{٢}$$

$$(١) \text{ مفروض ك}^٢ - ١٥ ك = ٥٤$$

$$\text{باتمام التربيع ك}^٢ - ٦٠ ك + ٩٠٠ = ٥٤ + ٩٠٠$$

$$\text{ثم ك} = ١٥ + ٢ = ١٧ \text{ أو } ١٢$$

تنبيه . اذا وقع - ك في معادلة يجب تبديل جميع علاماتها حتى تصبح القوة العليا من المجهول ايجابية (٦٥) لان - ك لا يكون جزءا من مربع كمية ثنائية فلا يمكن اتمام التربيع

$$(١) \text{ مفروض ك}^٢ + ٢ ك = د - ح$$

$$\text{بتبديل العلامات ك}^٢ - ٢ ك = ح - د$$

$$\text{ثم ك} = \frac{٢ \pm \sqrt{٢^2 - ٤(ح - د)}}{٢}$$

$$(٢) \text{ مفروض ك}^٢ - ٤ ك = ١٢$$

$$\text{بتبديل العلامات ك}^٢ - ٤ ك = ١٢$$

$$\text{ثم ك} = \frac{٤ \pm \sqrt{٤^2 - ٤(١٢)}}{٢}$$

حيلة للتخلص من الكسور في اتمام التربيع

$$\text{لفرض المعادلة ك}^٢ + ب ك = س$$

$$\text{افرض ك} = \frac{د}{١} \text{ ثم ك}^٢ = \frac{د^٢}{١} \text{ وب ك} = \frac{ب د}{١}$$

$$\text{وصارت المعادلة } \frac{د^٢}{١} + \frac{ب د}{١} = س \text{ اي } د^٢ + ب د = س$$

فإذا كان ب شفعاً يتم التربيع بالقاعدة الأولى بدون كسور وهذا التعويض
يسهل العمل جداً

ان لم يكن ب شفعاً فاضرب المعادلة في ٢ فيصير مسي ك شفعاً ونصبر بالمعادلة

$$(1) \quad ١٢ ك + ٢ ب ك = ٢ س$$

$$\text{افرض } ك = \frac{٢}{١٢} \text{ ثم } ١٢ ك = ٢ \text{ و } ٢ ب ك = \frac{٢ ب ٢}{١٢}$$

$$\text{وبالمعادلة (١) صارت } ٢ س = \frac{٢ ب ٢}{١٢} + \frac{٢}{١٢}$$

$$\text{أي } ٢ ب د = ٤ س$$

$$\text{بانما التربيع بالقاعدة الأولى } د + ٢ ب د + ب = ٤ س + ب$$

بعض المسائل يعسر حلها بواسطة القاعدتين المذكورتين وهي تستلزم في العامل
فطنة لاخترع حيل لاجل التخلص من كميات مشتبكة وتحويل المسئلة الى معادلة
مربعة ولجل الاعانة على ذلك وتوضيح كيفية تلك المعادلات لتراجع مربع كمية ثنائية
ان $ك + ١٢ ك + ٢ ب ك$ مربع كمية ثنائية تام وهو مؤلف

(١) من ثلاثة اجزاء

(٢) جزؤه الأول والثالث مربعان تامان

(٣) جزؤه الأوسط هو مضاعف حاصل جذري الجزء الأول والثالث

فلو فقد الجزء الثالث أي $١٢ ك + ٢ ب ك$ ولا يتركب من هذه الكميات
مربع لان مربع كمية ثنائية لابد ان يكون له ثلاثة اجزاء ولا بد من كون الجزء الثالث
مربعاً

فلنفرضه $ت$ ثم حسب الافتراض

$$ك + ١٢ ك + ٢ ب ك = ت$$

وحسب الملاحظة الثالثة اعلاه $٢ ك ت = ١٢ ك$

$$\text{أي } ت = ١ \text{ و } ت = ١$$

فوجدنا الجزء المنقود أي ١

$$(1) \quad ١٤ + ١٤ ب = ١٤$$

لنفرض $ت = ١٤$ ذلك الجزء الثالث

$$\text{ثم } ١٤ + ١٤ ب + ت = ١٤$$

$$\text{أي } ١٤ ت = ١٤ ب + ت \text{ و } ت = ١٤ \text{ أي } ب = ١ \text{ هو الجزء الثالث}$$

المنفرد و $١٤ + ١٤ + ١٢ + ١٢$ هو مربع كمية ثنائية وجذرها $١٢ + ١٢$

(٢) ٢٦ ي ٢٦ ي ها الجزء الأول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب ٩

(٣) $٩ + \frac{٧}{٤}$ ها الجزء الثاني والثالث لمربع كمية ثنائية مطلوب الأول

الجواب $\frac{١}{٤}$

(٤) $\frac{٤٩}{٤} - ٤٩$ ها الجزء الأول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب $\frac{٤٩}{٤}$

(٥) ٩ ي ٦ ي ها الجزء الأول والثاني لمربع كمية ثنائية مطلوب الثالث

الجواب ١

(٦) ١ ك ١ ب ك ها الجزء الأول والثاني مطلوب الثالث الجواب $\frac{١}{١٤}$

(٧) ٨ ك ١ و $\frac{١}{٤}$ ها الجزء الأول والثالث مطلوب الأوسط الجواب $١٨ +$

(٨) ٨ ي ٨ ك ي ها الجزء الأول والثاني مطلوب الثالث الجواب ١٦ ك

(٩) $\frac{١٢}{١٩} + ٢٦$ ها الجزء الثاني والثالث مطلوب الأول الجواب $\frac{٢٦}{١٩}$

(١٠) $\frac{١٢}{١٩} + ٢٦$ ها الجزء الأول والثالث مطلوب الأوسط الجواب $\frac{١٢}{١٩} +$

(١١) $\frac{١}{١٦} + ١$ ها الجزء الثاني والثالث مطلوب الأول الجواب ٤ ك

(١٢) الجزء الأول $\frac{٩}{٤}$ ي والثاني $١٢ +$ فما هو الثالث الجواب $\frac{٤}{٩}$ ي

إذا كانت المعادلة بعد تحويلها على صورة $١٢ + ١٢ = ١٢$ ب تغل بدون انعام

التربيع بواسطة التعويض على هذه الكيفية

افرض $١ - ١ = ١$

ثم $١ - ١ = ١ + ١$

و $١٢ + ١٢ = ١٢$

بالجمع $١٢ + ١٢ = ١ - ١ = ١$ ب

ثم $١ + ١ = ١ + ١$ ك $١ - ١ = ١ + ١$

وذلك مثل ما يخرج بالقاعدة الأولى وهذه قاعدة التعويض

افرض قيمة المجهول مجهولاً آخر مع نصف مسمى قوته الدنيا واعكس

علامته

لاجل زيادة ابضاح ماهية المعادلات المربعة لنحل هذه

منروض $ك^2 + ٤ك = ٦٠$ مطلوب قيمة ك

باتمام الترييع $ك^2 + ٤ك + ٤ = ٦٤$

بالتخدير $ك + ٢ = ٨$ $ك = ٦$ او $ك = -١٠$

اي بالتعويض عن ك باحدى هاتين القيمتين في المعادلة الاصلية تكون صحيحة اي

$$٦٠ = ٦ \times ٤ + ٦^2 \text{ و } ٦٠ = ١٠ \times ٤ - ١٠^2$$

اذا كان ك = ٦ فحينئذ $٠ = ٦ - ٦$

اذا كان ك = ١٠ " $٠ = ١٠ + ١٠$

اضرب احدى هاتين بالاخري ك $٦ - ١٠$

$$٦٠ - ١٠$$

$$٠ = ٦٠ - ٤ك$$

بالمقابلة ك $٤ + ٦٠ = ٦٠$ وهي المعادلة الاصلية

فندى ان المعادلة المربعة تعتبر كأنها حاصل معادلتين بسيطتين من الدرجة

الاولى وقياس ك في تلك المعادلات البسيطة سميت جذور المعادلة المربعة وذلك

بوضع سبب القيمتين اللتين للجهول في كل معادلة مربعة

ان لم توجد من المعادلة الا قيمة واحدة للجهول نستنتج ان القيمة الاخرى تعدلها

والجذران متساويان او ان احدهما صفر

١٥٧ قد يكون جزء من كمية ثنائية اصلية قوة مثل ك $٢ + ت$ ومربعها

ك $٢ + ت$ ك $٢ + ت$ فندى دليل الجهول في الجزء الاول مضاعف دليله في

الثاني . وان فقد الجزء الثالث يستعمل باتمام الترييع حسبما تقدم . ولنا من ذلك هذه

القاعدة . وهي كل معادلة فيها قوتان من الجهول فقط دليل احدهما مضاعف دليل

الاخرى تحل كمعادلة مربعة اي باتمام الترييع

(١) منروض ك $٢ - ب = ٢$ ك $٢ - ب = ٢$

باتمام الترييع ك $٢ - ب = ٢$ ك $٢ - ب = ٢$

بالتخدير والمقابلة ك $٢ - ب = ٢$ ك $٢ - ب = ٢$

- بالجذر أيضاً $\sqrt{\frac{1}{2}(4 + \sqrt{4 - 4t})} + \sqrt{\frac{1}{2}(4 - \sqrt{4 - 4t})} = k$
 (١) مفروض $k^2 - 4b^2 = 4t$
- (٢) مفروض $\sqrt{\frac{1}{2}(4 + \sqrt{4 - 4t})} + \sqrt{\frac{1}{2}(4 - \sqrt{4 - 4t})} = k$
 باتمام التربع $k^2 + 4 = 4 + \sqrt{4 - 4t} = 4 - \sqrt{4 - 4t} = 4 - 4t$
 بالجذر والمقابلة $\sqrt{4 - 4t} = 4 - 4t$
 بالترقية $k^2 - 4 = 4 - 4t$
- (٤) مفروض $k^2 + 8 = 4t$
 باتمام التربع $k^2 + 8 = 4t$
 بالجذر والمقابلة $k^2 + 8 = 4t$
 بالترقية $k^2 - 4 = 4t$
- (٥) مفروض $k^2 + 4 = 4t$
 افرض $y = \sqrt{4 + k^2}$
 بالترقية $y^2 = 4 + k^2$
 فنصير المعادلة $y^2 - 4 = k^2$
 $y = 1$ أو $y = -1$
 عوض بذلك في (١) نصير $4t = 4 + k^2$
 أو $1 = 4 + k^2$
 وك $k = 2$ أو $k = -2$ من الأولى
 وك $k = \frac{1}{2}(4 - \sqrt{4 - 4t})$ من الثانية وهي كمية وهمية

١٥٨ متى خرج للجهول قيمة وهمية (١٠٢) لا يمكن ان توجد تلك القيمة حقيقة.

مثاله

- $k^2 - 8 = 4t$ $k^2 + 4 = 4t$ $k^2 - 4 = 4t$ $k^2 + 8 = 4t$ $k^2 - 4 = 4t$
 للجهول قيمة ٠ ولا بد لكل معادلة مربعة ان تكون على احدى هذه الصور الثلاث
 (١) $k^2 + 4 = 4t$ $k^2 - 4 = 4t$ $k^2 + 8 = 4t$ $k^2 - 8 = 4t$
 (٢) $k^2 + 4 = 4t$ $k^2 - 4 = 4t$ $k^2 + 8 = 4t$ $k^2 - 8 = 4t$
 (٣) $k^2 + 4 = 4t$ $k^2 - 4 = 4t$ $k^2 + 8 = 4t$ $k^2 - 8 = 4t$

ففي الاولى والثانية لانهما القيمة وهمية البتة . وتكون وهمية في الثالثة متى كان ب
 اكثر من $\frac{1}{2}$ ثا . فالقيمة الوهمية تدل على فساد مسئله كما تقدم (١٠٢)
 فلو قيل اقسام ٨ الى قسمين حاصلها ٢٠ فلو قيل $ك \times (٨ - ك) = ٢٠$ ك =
 $٤ + ٦ - ٤$ وذلك مستحيل

١٥٩ للجهول في كل معادلة مربعة قيمتان حسبما تقدم (١٥٢) وغالبا نتمتع
 التي يجب ان تؤخذ منها بشروط المسئلة . فلو قيل اقسام ٢٠ الى قسمين حاصلها يعدل
 ثمانية امثال فضلها لتبل اصغرها = ك واكبرها = ٢٠ - ك وبشروط المسئلة
 $ك \times (٢٠ - ك) = ٨ \times (٢٠ - ٢٠) ك$
 $ك = ٢٢ + ١٧ = ٤٠$ او ٦
 ولكن لا يكون ٤٠ قسما من ٢٠ فيكون القسم الاصغر ٦ والاكبر ٢٤

١٦٠ لنا طريقة اخرى لحل المعادلات المربعة المتزجة . وهي بالتعويض .
 فلنرض $ك = ف + ك + ق$ وفوق معروفتان . فلنرض $ك = ي + \frac{1}{2} ف$ ثم
 بالتعويض عن ك بهذه القيمة تصير المعادلة

$ي + ف + ي + \frac{1}{4} ف = ف + ي + \frac{1}{2} ف + ق$
 $ثم ي + \frac{1}{4} ف = ف + \frac{1}{2} ف + ق$
 $ي = \frac{1}{4} ف + ق$ $ي = \frac{1}{4} ف + ق$
 وك $\frac{1}{2} ف = \frac{1}{4} ف + ق$ وهي عبارة عمومية لكل معادلة مربعة ممزجة كما
 ترى في هذه الامثلة الآتية

مفروض $ك + ٦ = ك = ٩١$ ثم $ك = ٩١ - ٦ = ٨٥$
 وهنا $ف = ٦ - ٦ = ٠$ وق ٩١ فلنا بموجب العبارة المذكورة $٩١ + ٩٦ + ٣ = ١٨٠$
 $١٨٠ = ١٠ + ١٢ = ٢٢$ او ٧
 مفروض $ك - ١٠٩ = ٢٢ - ك$
 ثم $ك = ١٢٢ + ك = ١٢٢$ ف $١ = ١$
 ولنا $١٢٢ + ١٢٢ + ١ = ٢٤٥$ او ١٢
 مفروض $ك + ٢ = ١٨٠$ ثم $ك = ١٨٠ - ٢ = ١٧٨$

$$\frac{1}{3} \text{ ف } - = \frac{2}{3} \text{ ولنا ك } - = \frac{2}{3} \pm \frac{2}{3} - = \sqrt{18 + \frac{2}{3}} \pm \frac{2}{3} - = \frac{17}{3} \pm \frac{2}{3} - = 12 \text{ او } 10$$

منروض $2 \text{ ك } + 2 \text{ ك } = 90$ ثم $2 \text{ ك } = 90 - 2 \text{ ك}$

$$\frac{2}{3} \text{ ك } - = \frac{2}{3} \text{ ك } + 40 \quad \frac{1}{3} \text{ ف } - = \frac{2}{3} \text{ ولنا ك } - = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \pm \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - = 40$$

$$- = \frac{17}{4} \pm \frac{2}{4} = 7 \text{ او } 7 \frac{1}{2}$$

معادلات من الدرجة الثالثة والرابعة الخ تفصل مثل المعادلات المربعة اذا امكن حلها الى ضلعين من القوة الاولى والثانية ولجل استعمال ذلك انقل كل الاجزاء الى جانب واحد وان لم تكن القوة العليا للجهول شفعاً فاضرب كل جزء من المعادلة في الجهول حتى تصير القوة العليا شفعاً ثم استخرج الجذر الى جزءين او ثلاثة حسب منتضى الحال فاذا بقي باق هو ضلع او جزء من الجذر فقد انحلت الى صورة معادلة مربعة ولاً فذلك غير ممكن . مثالة

(١) منروض $2 \text{ ك } - 18 \text{ ك } + 18 \text{ ك } + 18 \text{ ك } = 99 - 2 \text{ ك } = 0$ مطلوب قيمة ك بواسطة معادلة مربعة

صورة العمل

$$2 \text{ ك } - 18 \text{ ك } + 18 \text{ ك } + 18 \text{ ك } = 99 - 2 \text{ ك } = 0 \quad | \quad 2 \text{ ك } - 18 \text{ ك}$$

$$2 \text{ ك } - 18 \text{ ك } + 18 \text{ ك } + 18 \text{ ك } = 99 - 2 \text{ ك } = 0$$

$$2 \text{ ك } - 18 \text{ ك } + 18 \text{ ك } + 18 \text{ ك } = 99 - 2 \text{ ك } = 0$$

$$2 \text{ ك } - 18 \text{ ك } + 18 \text{ ك } + 18 \text{ ك } = 99 - 2 \text{ ك } = 0$$

وهذه البقية تفصل الى ضلعين اي $2 \text{ ك } - 18 \text{ ك } = 99 - 2 \text{ ك } = 0$

والمعادلة الاولى نصح كتابتها هكذا

$$(2 \text{ ك } - 18 \text{ ك}) - 18 \text{ ك } = 99 - 2 \text{ ك } = 0$$

افرض $2 \text{ ك } - 18 \text{ ك } = \text{ ي }$

نصير $\text{ ي } - 18 \text{ ك } = 99$ وهي معادلة مربعة

باتمام الترييع $\text{ ي } - 18 \text{ ك } + 116 = 99$

بالتجذير $\text{ ي } - 18 \text{ ك } = 99$ او $\text{ ي } = 99$ او $\text{ ي } = 99$

او $2 \text{ ك } - 18 \text{ ك } = 99$ او $2 \text{ ك } = 99$

باتمام الترييع ك' - ١٤ + ك' ١٤ = ١٢ او ١٢
 بالتجذير ك' - ١٢ = ١٢ او ١٢
 فللمجهول اربع قيمات اي ك' = (١٢ + ١٢) وك' = (١٢ - ١٢)
 وك' = (١٢ + ١٢) وك' = (١٢ - ١٢)

واذا نعوض عن المجهول في المعادلة الاصلية باحدى هذه القيمات نصع
 (٢) حل ك' ١٢ + ك' ١٢ + ك' ١٢ = ١٢ بواسطة معادلة مربعة
 بما ان القوة العليا ليست شفعاً يجب ضرب المعادلة في ك' فتصير
 ك' ١٢ + ك' ١٢ + ك' ١٢ = ١٢

استخرج الجذر لجزءين وانظر الباقي الذي يدخل في الجذر فلنا
 (ك' ١٢ + ك' ١٢) ١٢ = ١٢
 اقسم على (ك' ١٢ + ك' ١٢) نصير ك' ١٢ + ك' ١٢ = ١٢ وهي معادلة مربعة
 (٢) حل ك' ١٢ + ك' ١٢ - ك' ١٢ = ١٢ بواسطة معادلة مربعة
 هذه المعادلة نكتب على هذه الصورة
 (ك' ١٢ + ك' ١٢) ١٢ = ١٢

ك' = ١ او ٢ او ٣ او ٤
 (٤) مفروض ك' ١٢ - ك' ١٢ + ك' ١٢ = ١٢ مطلوب قيمات ك'
 ك' = ١ او ٢ او ٤
 (٥) ك' ١٢ - ك' ١٢ + ك' ١٢ = ١٢

قد حلت هنا بعض المسائل دلالة على بعض الحيل التي نستخدم في حل المسائل
 من هذا الباب

(١) افرض ١٢ = ١٢ + ١٢ + ١٢
 وافرض ١٢ = ١٢ + ١٢ + ١٢
 بالترقية ١٢ = ١٢ + ١٢ + ١٢ (١)
 فصارت المعادلة ١٢ = ١٢ + ١٢ (٢) افرض ١٢ = ١٢
 ثم ١٢ = ١٢ + ١٢
 اصف ا' الى الجانين لاجل اتمام الترييع نصير ١٢ = ١٢ + ١٢ + ١٢

بالتجذير $١ - ١ = ١ + ١$ ي $١٢ = ١ + ١٢$ او $١ - ١$

(٢) مفروض $١ - ١ = ١٢$ ي $٨ = ٨$ الجواب ي $٨ = ٨$ او $١ - ١$

(٣) مفروض $١ + ١ = ١١$ ك $٢٦ = ٢٦$ افرض $١١ = ١٢$

ثم $١٤ + ٤ = ٢٦$ عوض بهذه القيمات عن المسميات العددية

وتم الترييع نصير $١٢ + ١ = ١ + ١٢ + ٤ + ٤$

بالتجذير $١ + ١ = ١ + ١$ (٢ + ١) ك $٢ = ٢$ او $١٣ - ١٣$

(٤) مفروض $١ - ١ = ١٧$ ك $٦٠ = ٦٠$ افرض $١٢ = ١٧$ ثم $١٦ + ٩ = ٦٠$

و $١٢ - ١ = ١ + ١٢ + ٩ + ٩$

بالتجذير $١ - ١ = ١ + ١$ (٢ + ١) ك $٢٠ = ٢٠$ او $٢ - ٢$

(٥) مفروض $١ + ١ = ١٩$ ك $٩٢ = ٩٢$ مطلوب قيمة ك

افرض $١٢ = ١٩$ ثم $١٨ + ١٦ = ٩٢$ بالتعويض وإتمام الترييع لنا

$١٢ + ١ = ١ + ١٢ + ١٨ + ١٦$

بالتجذير $١ + ١ = ١ + ١$ (٤ + ١) ك $٤ = ٤$ او $٢٣ - ٢٣$

في هذه المعادلات فرضنا مسمى القوة الاولى للجهول $١٢ = ١٢$ ثم اذا وجدنا الجز

المطلق في الجانب الثاني يعدل $١ + ١٢$

او $٤ + ١٤$

او $٩ + ١٦$

او $١٦ + ١٨$ او على الاطلاق م $١٢ + م$ اعني

المضروب فيه $١٢ +$ مربع ذلك المضروب فيه = الجانب الثاني من المعادلة في

تعمل على الطريقة التي اشرنا اليها وذكرنا امثلتها لان جذراً من جذري المعادلة هو

هذا المضروب فيه ١٢ والجذر الآخر هو $١٢ + ب$ اذا كان م المضروب

فيه. ولا مزية لهذه الطريقة ان لم تكن م كمية صحيحة وصغيرة

مثال معادلة فيها م كسر

ك $١ - ١ = ١٢$ مطلوب قيمة ك

افرض $١٢ = ١$ ثم $١٢ \times \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٤}$

فصارت المعادلة ك $١٢ + ١ = ١ + ١$ ك $١ = ١ + (\frac{١}{٢} + ١)$

ك $١ - ١ = ١٢$ او $\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} = ١٢$

اذا كانت جذور المعادلة كميات صماء او غير منطقية فالطريقة المذكورة لا توافق واستعلام كون الجذور منطقية او صماء امر سهل

مثالة لنفرض $ك' + ١٢ = ٤٠$

افرض $١٢ = ١٢$ ثم $١٤ + ٤ = ٢٠$ و $١٦ + ٩ = ٤٨$

ومن ذلك نرى ان واحداً من جذري المعادلة واقع بين ٢ و ٢

اذا كانت جذور المعادلة كميات غير منطقية او صماء فلا نفيدنا حيلة من الحيل لحل المعادلة بل يقتضي معاملتها بموجب القواعد الثابتة غير انه اذا كانت الجذور اعداداً صحيحة ولم تكن كبيرة قد نتخزع لكل مسألة حيلة لاجل التخلص من الاعداد الكبيرة وذلك بتعلم بالممارسة اذ لا قاعدة ضابطة يسلك عليها في ذلك وقد وضعت منا بعض الامثلة ايضاً للمعنى

(١) مفروض $ك' + ٩٩٨٤ = ١٦٠٠٠٠$ مطلوب قيمة ك

لاحظ ان $٩٩٨٤ = ١٠٠٠٠ - ١٦$

افرض $١٢ = ١٢$ ثم $١٠٠٠٠ = ١٢٢$

بالتعويض $ك' + (١٦ - ١٢) = ١٢٢$

باتمام الترييع بالقاعدة الاولى $ك' + (١٦ - ١٢) + (٨ - ١) = ١١٦ + ١$

٦٤ +

بالتجذير $ك' + (٨ - ١) + (٨ + ١) = ١٦$ او $١٢ - ١٠٠٠٠ = ١٢$

(٢) مفروض $ك' + ٤٥ = ٩٠٠٠$ مطلوب قيمة ك

اذا فرضنا $١٢ = ٤٥$ يكون المضروب فيه ومربعة حتى يصير ٩٠٠٠ كبيراً

فلا مزية في هذه الطريقة والغرض التخلص من الاعداد الكبيرة. فلاحظ ان ٩٠٠٠×٤٥

$٢٠٠ = ٩٠٠٠$ ثم افرض $٤٥ = ١$

وبالتعويض $ك' + ١ = ١٢٠٠$

ثم الترييع بالقاعدة الثانية $٤ + ك' + ١٤ + ١ = ١٨٠٠ + ١$

بالتجذير $٢ + ك' + ١ = ١٨٠٠ + ١$

اضرب احد الضلعين تحت علامة الجذر في ٥ واقسم الآخر على ٥ بهيران

١٦٩×٢٢٥٠ وكل واحد منها مربع. جذرها ورجع القيمة المفروضة لها

فصل المعادلة $٢ + ك' = ١٥ \times ٢ + ١٥ \times ١٢$

ك = ٧٥

اخرج ١٥×٢ من الجانبين $٢ = ١٥ \times ١٠$

(٢) مفروض $١٦ ك - ٢٢٥ ك = ٢٢٥$ مطلوب قيمة ك

لاحظ ان $٢٢٥ = ١٥ \times ١٥$ ثم افرض $١٥ = ١$ $١٦ = ١ + ١$

بالتعويض $(١ + ١) ك - ١ ك = ١$

ثم الترييع بالقاعدة الثانية

$$٤ (١ + ١) ك - ٤ (١ + ١) ك = ١ + ١$$

$$٢ (١ + ١) ك - ٢ (١ + ١) ك = ١ + ١$$

$$١ (١ + ١) ك - ١ (١ + ١) ك = ١ + ١$$

$$١ + ١ = ١ + ١$$

(٣) مفروض $\frac{٦٥ - ك}{٧٢} = \frac{ك - ٨}{١} + \frac{١٨}{ك}$ مطلوب قيمة ك

تري الاعداد اما ٩ واما مضروب ٩ فلنفرض $٩ = ١$

$$\frac{٦٥ - ك}{١٨} = \frac{ك - ٨}{١} + \frac{١٢}{ك}$$

$$١٦ ك + ١٨ ك - ٨ ك = ٦٥ ك$$

انقل الكل الى جانب واحد ورتب الكميات على ترتيب القوت نصير

$$١٦ ك + ١٨ ك - ٨ ك - ٦٥ ك = ٠$$

$$٢ ك + ٤ ك - ٨ ك - ٦٥ ك$$

$$١٦ ك + ١٨ ك$$

$$١٦ ك - ٨ ك - ١٨ ك - ٦٥ ك$$

$$١ - (١٦ ك + ٨ ك + ١٨ ك)$$

فحسب ما تقدم آتينا صارت المعادلة

$$٠ = (١٦ ك + ٨ ك + ١٨ ك) - ١$$

$$١ = (١٦ ك + ٨ ك + ١٨ ك) - ١$$

$$١ + ١ = ١٦ ك + ٨ ك + ١٨ ك$$

الامثلة المتقدمة تعين على حل بعض هذه الامثلة الآتية

$$١٦ - ٥ = ك$$

$$٨٠ = ك + ١١$$

$$١ - ٤ = ك$$

$$\frac{٦ - ك}{٢} + ك = \frac{٢ - ك}{٢} + ٣$$

$$٢ = ك$$

$$\frac{١٢}{٦} = \frac{١ + ك}{٢} + \frac{ك}{١ + ك}$$

$$(٨) \quad ١٧ = \frac{٢٤}{٢} + ١٦ + ك \quad ك = ٢ - او ٢ - او ٨ - او - \frac{١}{٢}$$

$$(٩) \quad ك - ١ = \frac{٢}{٢ + ك}$$

$$(١٠) \quad ٢ - ك = \frac{١}{٢} \left(\frac{٩ - ٢\sqrt{٢} + ك}{٩ - ٢\sqrt{٢} - ك} \right) \quad ك = ٥ - او ٢$$

$$(١١) \quad ٨٠ = ٤ - ك - ٩ = ك - ٧ - او ٤$$

$$(١٢) \quad ٤٦ - \frac{ك - ٢٦}{ك} = ك - ١٢ = او - \frac{٢}{٤}$$

$$(١٣) \quad ١٤ = \frac{ك - ١٤}{١ + ك} = ك - ٤ = او - \frac{٧}{٤}$$

$$(١٤) \quad \frac{٧ - ك}{٢} + ك = \frac{٢ - ك}{٢} = ك - ٥ = او - ١$$

$$(١٥) \quad ١٦ = \frac{٩ - ١٠٠}{٢} = ك - ٩ = او - \frac{١}{١٢}$$

$$(١٦) \quad \frac{٢ - ك}{٢} - ١٠ = ١ + \frac{٤ - ك}{٤} = ك - ١٢ = او ٦$$

$$(١٧) \quad ١ - \frac{٧ + ك}{٩} = \frac{ك - ٧}{٢} = \frac{٤ + ك}{٣} = ك - ٢١ = او ١$$

$$(١٨) \quad ٢ - ك = \frac{١ + ك}{٩} = \frac{١٠ - ك}{٦} = ك - ٢٨ = او ١$$

$$(١٩) \quad ٢ = ك = \frac{٢}{١ + ك} + \frac{٦}{١ + ك}$$

$$(٢٠) \quad ٩ - ك = \frac{١ - ك}{٦} = \frac{ك}{٢ + ك}$$

$$(٢١) \quad \frac{٢}{٢ + ك} + \frac{ك}{٢ + ك} = ١ = ك - ١٢ = او - \frac{١}{٢}$$

$$(٢٢) \quad ك = \frac{١}{٢} \left(\frac{٢}{٤ + ب} + \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢} \right) = ك + ٢ = او ب$$

$$(٢٣) \quad \frac{١}{٢} = \frac{٢}{٤} - \frac{١}{٢} = ك - \frac{١}{٢}$$

$$(٢٤) \quad ٢ = ك + ٢ = او ٢$$

$$(٢٥) \quad ٢٢ = ك - \frac{١}{٢} = او ٢$$

$$(٢٦) \quad ٩٩ = ٩٦ + ك = او ٢$$

$$(٢٧) \quad ٦ = ك = \frac{١}{٢} (ك + ١٠) - \frac{١}{٢} (ك + ١٠)$$

$$(٢٨) \quad ٨ = ك - ٢ = او ٢$$

$$(٢٩) \quad \frac{١}{٩} = \frac{١}{٩} - \frac{١}{٩} + \frac{١}{٩} = ك - (ك - ١ + ١) = او ٢$$

$$(٣٠) \quad ك - ب = \frac{٢ - ٢\sqrt{٢}}{٢} = ك - \frac{٢}{٢} = او ب$$

$$(٣١) \quad \frac{٢ + \sqrt{٢}}{\sqrt{٢} + ٤} = \frac{\sqrt{٢} - ٤}{\sqrt{٢}}$$

$$(٣٢) \quad ٧٥٦ = ك + ٢ = او ٢$$

$$(٣٣) \quad ٤ = ك = \frac{٢١}{١ + ك} = \frac{٢}{١ + ك} + \frac{٢}{١ + ك}$$

$$(٢٤) \quad ٢ \sqrt{٢-ك} + ٢ \sqrt{٢+ك} = \frac{٧+٥ك}{\sqrt{٢-ك}} \quad ك=٩$$

$$(٢٥) \quad ٩ = ك \quad ١٦ + ٧ \sqrt{٢+ك} - ١٠ = ٤ \sqrt{٢+ك} \quad ١٦ + ك$$

$$(٢٦) \quad \sqrt{٢+ك} = \sqrt{٢-ك} + \sqrt{٢+ك}$$

بالقسمة على $\sqrt{٢+ك}$ $١ = \sqrt{٢-ك} + ١$ $٢ = ك$

$$(٢٧) \quad ٢ = ك \quad \frac{٢٢+ك٩}{١٣} = \frac{٧-ك٢}{٧+ك٢} - \frac{٥-ك٤}{ك}$$

$$(٢٨) \quad ٢ = ك \quad \frac{١١}{٥ك} = \frac{٧}{ك٢+ك} + \frac{٢}{ك-٦}$$

$$(٢٩) \quad ٩ = ك \quad ٤٠ = ٢(٥-ك) - ٢(٥-ك) = ٤٠$$

$$(٣٠) \quad ١٠ = ك \quad ٦ + ٢ \sqrt{٢+ك} + ٢ = ٦ + ك$$

$$ك = \frac{٨ \sqrt{ب+د} + ٢ \sqrt{ب+د}}{٤}$$

$$(٣١) \quad ٢ \sqrt{ب+د} - ٢ \sqrt{ب+د} = د$$

$$ك = \frac{٨ \sqrt{ب+د} + ٢ \sqrt{ب+د}}{٨}$$

$$(٣٢) \quad ٤ \sqrt{ب+د} - ٢ \sqrt{ب+د} = د$$

$$ك = \frac{٨ \sqrt{ب+د} + ٢ \sqrt{ب+د}}{٢}$$

$$(٣٣) \quad ٢ \sqrt{ب+د} - ٢ \sqrt{ب+د} = د$$

$$ك = ٢$$

$$(٣٤) \quad ١٢ = ٤ + ك$$

$$ك = ٨$$

$$(٣٥) \quad ٥١٢ = ٨ + ك$$

$$ك = ٨١$$

$$(٣٦) \quad ٩٩ = ٧ + ك$$

$$ك = ١٠ - ٢ + ٤$$

$$(٣٧) \quad ٠ = ٢١ + ك$$

$$ك = ١٤ - ٢ + ٦$$

$$(٣٨) \quad ٠ = ٥٠ + ك$$

$$ك = ٦ - ٢ + ٨$$

$$(٣٩) \quad ٧٠ = ١٦ + ك$$

$$(٤٠) \quad ١٠ + \frac{٢٢٢}{ك} + \frac{٨٤١}{ك} = \frac{١}{ك} + ١٧ + ٨١ + ك$$

$$ك = ٢ - ٢ + ١٠$$

$$(٤١) \quad \frac{١٠٠}{٩} = \frac{٤}{ك} + ٦ + ٢٠ + ك$$

$$ك = \frac{١١١ - ٢ + ٢}{٤}$$

$$(٤٢) \quad ٢ = ١٥ + ك$$

$$٤$$

$$ك = ٦ - ٢ + ٤$$

$$(٤٣) \quad ١٠ = ٢ - ك$$

عمليات

(١) ناجر عنده ثوبان طولهما ١١٠ اذرع وان طرح مربع اذرع اطولهما من ٨٠ مرة اذرع الآخر يبقى ٤٠٠ فكم ذراعاً كل ثوب

لتفرض ك اطولهما و ١١٠ - ك الآخر

بشروط المسئلة $٤٠٠ = ٨٠ \times (١٠ - ك) - ك^٢$

ك = ٦٠ اطولهما $٥٠ =$ الآخر

(٢) سئل اخوان كم عمر كل واحد منكما . فقالا مجتمع عمرنا ٤٥ سنة وحاصلهما

٥٠٠ سنة . فكم عمر كل منهما

الجواب ٢٥ و ٢٠

(٣) اي عدد من فضلتها ٤ وحاصلها ١١٧

ك = احدها ك + ٤ = الآخر

ثم $(ك + ٤) \times ك = ١١٧$

الجواب ٩ و ١٢

(٤) ناجر باع ثوباً كان قد اشراه بثلاثين ديناراً ولو ضرب الثمن الذي باعه

بـ في الربح الذي ربحه لكان الحاصل مكعب الربح . فكم كان الربح

لتفرض ك = الربح فيكون $٣٠ + ك$ ثمن المبيع

ثم بشروط المسئلة $ك^٢ = (٣٠ + ك) \times ك$

الجواب ٦ دنانير

(٥) اي عدد من فضلتها ٣ وفضله كعبيها ١١٧

ك = الاصغر ك + ٣ = الاكبر

الجواب ٢ و ٥

(٦) ما عددان فضلتها ١٢ ومجموع مربعيهما ١٤٢٤

الجواب ٢٠ و ٢٢

(٧) ما عددان فضلتها ٧ ونصف حاصلهما مع ٣٠ يعدل مربع اصغرها

ك = الاصغر ك + ٧ = الاكبر

ثم بالمسئلة $ك = ٣٠ + \frac{(٧ + ك)}{٢} \times ك$

الجواب ١٢ و ١٩

(٨) سرب طيور طار منه جذر مال نصفه ثم $\frac{١}{٢}$ منه وبقي طائران . فكم طائراً

كان السرب

لتفرض العدد ٢ ك فلنا $ك + \frac{١٦}{٩} + ٢ = ٢ ك$

الجواب ٧٢ طائراً

(٩) رجل اشترى قطيعاً من الغنم بثمن ٢٤٠٠ دينار . ولو زيد عدد الغنم ٨

رؤوس لكان ثمن كل رأس اقل مما كان في الحقيقة ١٠ دنانير. فكم رأساً كان القطيع
الجواب ٤٠

(١٠) رجل اشترى مواشي ببلغ ١١٤٠ ديناراً وبات منها ٨ رؤوس ثم باع
الباقى ورجح في كل رأس ٨ دنانير ولم يبحر شيئاً. فكم رأساً اشترى الجواب ٢٨
(١١) زيد وعبيد سافرا معاً فاصدين مكاناً بعده عنهما ٣٠٠ ميل. وزيد
سبق عبيداً كل ساعة ميلاً فوصل قبله بعشر ساعات. فكم ميلاً مشى كل واحد منهما
في الساعة زيد = ٦ اميال وعبيد = ٥ اميال

(١٢) اقسام ١٨ الى ضلعين حتى يكون مجموع كمبيها ٢٤٢

$$ك = ١٨ = \frac{١٨}{ك} = \text{الآخر}$$

$$ك = ٦ = \frac{١٨}{٦} = ٣ = \text{اصغرها}$$

(١٣) اي عدد من فضلتها ١٢٠ ونسبة اكبرها الى اصغرها :: الاصغر : ١٠

الجواب ٤٠ و ١٦٠

(١٤) اي عدد من مجموعها ٦ ومجموع كمبيها ٧٢ الجواب ٢ و ٤

(١٥) اقسام ٥٦ الى ضلعين حاصلها ٦٤٠ الجواب ٤٠ و ١٦

(١٦) رجل اشترى اثواباً ثمنها ٦٧٥ ديناراً. ثم باع كل ثوب بثانية واربع
ديناراً ورجح مبلغاً ياتل ثمن الثوب الاصلي. فكم ثوباً اشترى الجواب ١٥

(١٧) رجل اشترى فرساً ببلغ من المال ثم باعه بمئة وتسعة عشر ديناراً ورجح في
المئة ما ياتل الثمن الاصلي فكم كان ثمنه

$$ك = \text{الثمن فيكون ك ايضا الرجح في المئة} \quad \frac{ك}{١٠٠} = \text{الرجح كله}$$

$$\text{فلما ك} + \frac{ك}{١٠٠} = ١١٩ \quad ك = ٧٠$$

(١٨) رجل اشترى اثواباً ببلغ ١٨٠ ديناراً. ولو زيد ثلاثة اثواب لانحط ثمن

الثوب ثلاثة دنانير. فكم ثوباً اشترى الجواب ١٢

(١٩) تاجران تشاركان وكان رأس مالهما ١٠٠ دينار. وبقيت حصة احدهما في

الشركة ثلاثة اشهر وحصة الآخر شهرين. ثم انفخت الشركة فحصل اكل واحد منهما
من رأس المال والرجح ٩٩ ديناراً. فكم وضع كل واحد من رأس المال في الاصل

لنفرض ك = حصة الاول و ١٠٠ - ك = حصة الثاني. فيكون رجح الاول

٩٩ - ك ثلاثة اشهر وك = ١ = رجح الثاني شهرين ولو بقي رأس مال ثلاثة اشهر

لكان رجحه $\frac{٢-ك}{٣}$ ولكن الرجح هو ك رأس المال. فلما ك : ٩٩ - ك :: ١٠٠ - ك

$$\frac{2}{3} \text{ ك} = \frac{2}{3} \text{ ك} \quad \text{ك} = ٤٥ = \text{الاول} \quad ٥٥ = \text{الثاني}$$

(٢٠) نزلت امرأتان الى السوق ومع كل واحدة منها عدد من البيض خلاف ١٠. مع الاخرى ولكن الجميع ١٠٠ بيضة. فباعت كل واحدة ما معها بشئ واحد. فقالت احدهما للاخرى لو كان معي من البيض قدر ما معك لآخذت ثمنه ١٥ غرشاً. وقالت الاخرى لو كان معي قدر ما معك لآخذت $7\frac{1}{2}$ غروش. فكم بيضة كان مع كل واحدة منهما لنفرض ما مع الاولى = ك وما مع الاخرى ١٠٠ - ك. وبما ان الاولى كانت قد باعت ١٠٠ - ك بشئ ١٥ غرشاً لنا (١٠٠ - ك) : ١٥ :: ك : $\frac{10}{100} \text{ ك}$ والثانية كانت باعت ك بشئ $7\frac{1}{2}$ غروش لنا

$$\text{ك} : (١٠٠ - \text{ك}) :: \frac{20}{3} : \frac{2000 - 200}{3}$$

ثم ان كل واحدة اخذت مبلغاً واحداً فلنا

$$\frac{10}{100} \text{ ك} = \frac{2000 - 200}{3}$$

$$\text{ك} = ٤٠ = \text{الاول} \quad ٦٠ = \text{الثانية}$$

(٢١) ناجران باعا اذرعاً من قاش يبلغ ٢٥ ديناراً وباع احدهما ٢ اذرع زيادة عن الآخر. فقال له صاحبه لو بعث ما بعته لآخذت ٢٤ ديناراً فقال وانا لو بعث ما بعته لآخذت $12\frac{1}{2}$ ديناراً. فكم ذراعاً باع كل واحد منهما

$$\text{ك} = \text{ما باعه الاول} \quad \text{و} \text{ك} + ٢ = \text{ما باعه الثاني}. \text{ فيكون } \frac{24}{3} + \frac{2}{3} \text{ ثمن ك اذرع}$$

$$\frac{70 + \text{ك}}{3} \text{ ثمن ك} + ٢ \text{ اذرع فلنا}$$

$$\text{ك} = ١٠ + ٥ = ١٥ \text{ او } ٥ = \text{الاول}$$

$$٢٥ = \frac{70 + \text{ك}}{3} + \frac{2}{3}$$

$$١٨ \text{ او } ٨ = \text{الثاني}$$

(٢٢) سافر زيد وعبيد قاصدين بلدة بعدها عنها ١٥٠ ميلاً وزيد قطع من المسافة كل ساعة ٢ اميال زيادة عن عبيد فوصل قبل عبيد بثلاث ساعات وعشرين دقيقة فكم قطع كل واحد منهما في الساعة

$$(٢٣) \text{ اي عدد من فضائهما ٦ واذا اضيف ٤٧ الى مضاعف مربع الاصغر بعدل}$$

$$\text{المجموع مربع الاكبر} \quad \text{الجواب ١٧ و ١١}$$

(٢٤) زيد وعبيد تصدقا على الفقراء كل واحد منهما مبلغ ١٢٠٠ دينار والذين اعطاهم زيد اربعون نفراً اكثر من الذين اعطاهم عبيد غير ان صدقة عبيد لكل واحد ٥ دنائير اكثر من صدقة زيد. فكم كان عدد الفقراء جميعاً

$$\text{زيد} = ١٢٠ \text{ عبيد} = ٨٠$$

(٢٥) ما عددان مجتمعا ١٠ ومجتمع مربعيهما ٥٨ الجواب ٧ و ٢

(٢٦) اشترك رجال في شراء بستان ثمنه ١٧٥ ديناراً. ثم خرج اثنان من الشركة فلحق كل واحد من الآخرين ١٠ دنانير زيادة عما كان قد لحقه لو بقي الاثنان معهم. فكم عندهم اولاً الجواب ٧

(٢٧) تاجر اشترى اذرعاً من القماش بستين ديناراً. فانخذ منها لنفسه ١٥ ذراعاً وباع الباقي باربعة وخمسين ديناراً فربح في كل ذراع $\frac{1}{10}$ دينار. فكم ذراعاً اشترى وكم كان الثمن الجواب ٧٥ ذراعاً و $\frac{1}{10}$ دينار ثمن الذراع

(٢٨) سافر زيد من بلدة وعمره من اخرى فاصدين ان يلتفيا في مكان وبين البلدين ٢٤٧ ميلاً. فزيد قطع كل يوم ٩ اميال والابام التي سافرا فيها قبل التقائهما تزيد ثلاثة ايام عن عدد الابال التي قطعها عمرو في اليوم. فكم ميلاً سافرا الجواب زيد = ١١٧ وعمرو = ١٢٠

(٢٩) رجل اشترى ثوبين من الجوخ ثمن الذراع من الواحد يزيد ٤ دراهم عن ثمن الآخر. وكان ثمن هذا الثوب جميعه ٢٦٠ درهماً وثمن الآخر جميعه ٢٢٠ درهماً ولكنه اطول من الاول بذراعين. فكم ذراعاً كان كل واحد منهما وكم ثمن الذراع منه الجواب الاول ١٨ ذراعاً وثمن الذراع ٢٠ درهماً والآخر ٢٠ ذراعاً وثمن الذراع ١٦ درهماً

(٣٠) رجل اشترى ٥٤ رطلاً من الخمر الاصفر وعدة ارطال من الخمر الاسود وكان ثمن الرطل من الاول يعدل نصف ارطال الثاني وثمن الرطل من الثاني اقل من ثمن الرطل من الاول اربعة دراهم. ثم مزجها وباع الرطل من المزيج بعشرة دراهم فخسر ٥٧٦ درهماً. فكم كان ثمن الرطل من الاصفر وكم عدد ارطال الاسود الجواب الرطل من الاصفر = ١٨ درهماً والاسود ٢٦ رطلاً

(٣١) اي عدد اذا طرح مربعه من ٤٠ واضيف الى جذر الباقي المائي ١٠ وضرب المجموع في ٢ وانقسم الحاصل على العدد نفسه يخرج ٤ الجواب ٦

(٣٢) سئل رجل عن عمره فقال اذا اضيف جذره المائي الى نصفه وطرح من المجموع ١٢ لا يبقى شيء. فكم كان عمره الجواب ١٦

(٣٣) رجل اشترى زقنين من الخمر ثمنها ٥٨ غرشاً. وفي الواحد منها ٥ ارطال زيادة عن الآخر وثمن الرطل اقل من $\frac{1}{2}$ عدة ارطال الاصغر بغرشين فكم رطلاً في كل زقي وكم ثمن الرطل الجواب الاكبر = ١٧ والاصغر = ١٢ وثمن الرطل = ٢

(٢٤) رجل مئة ٢٤ قطعة بعضها فضة وبعضها نحاس . وقيمة النطقة من الفضة تساوي غروشا عدد قطع النحاس وقيمة النطقة من النحاس تساوي عدد قطع الفضة . وقيمة الجميع ٢١٦ غروشا . فكم عدد النطع

الجواب الفضة = ٦ والنحاس = ١٨

(٢٥) رجل اشترى عدة من الغنم بثمانين دينارا . ولو اخذ بهذا الثمن اكثر مما اخذ بأربعة رؤوس لانحط ثمن الراس دينارا واحدا . فكم رأسا اشترى

الجواب ١٦

(٢٦) مغنيطان نسبة قوة جاذبية الواحد الى قوة جاذبية الآخر :: ٩ : ٤ وبينهما ٢٠ قيراطا مطلوب النقطة من الخط الموصل بين مركزيهما التي فيها يجذب كل واحد ابرة على حدٍ سوى على افتراض ان الجاذبية هي بالقلب كمرع البعد

الجواب ٨ قراريط عن اقربهما

او - ٤٠ قيراطا عن اضعفهما

(٢٧) مغنيطان نسبة قوة جاذبية الواحد الى قوة جاذبية الآخر :: م : ن . وبينهما ب قراريط . في اية نقطة على الخط الموصل بين مركزيهما تكون جاذبيتها لابرقة واحدة

الجواب عن م = $\frac{ب \cdot م}{م + ن}$

البعد عن ن = $\frac{ب \cdot ن}{م + ن}$

١٦١ كثيرا ما تسهل الاعمال الجبرية ولا سيما حل المعادلات بواسطة التحويل عن عبارة طويلة بحرف واحد . وعند نهاية العمل ترجع العبارة الاصلية . فلو فرض $ك - ٢ = ٢ + \frac{٢}{٤} - ٨٦ - ٦٤ + ح$ فافرض ب عوضا عن الجانب الثاني فتصير $ك - ٢ = ك - ب$ ثم $ك = ب + ٢$ ثم بترجع العبارة الاصلية تصير

$$ك = ٢ + ٢ + \frac{٢}{٤} - ٨٦ - ٦٤ + ح$$

ولو فرض $ك - ٢ = ك - د = ب - ك - ك - ك$

فبالقابلة والفك تصير $ك = (١ - ب - ت) + ك = د$

افرض ح عوضا عن $(١ - ب - ت)$ فلنا $ك + ح = د$

$$ك = د - ح + \frac{٢}{٤} - ٨٦ - ٦٤ + ح$$

وبترجع العبارة الاصلية $ك = \frac{د - ب - ت}{٢} + \frac{١ - (١ - ب - ت)}{٤} + د$

وما من احد يبرع في حل المسائل الجبرية ان لم يعود نفسه على التعويض المناسب
كما تقدم وكثيرا ما نحل المسائل بسهولة بواسطة التعويض ويختصر العمل كما ترى في
هذه المسئلة وكما رأيت في ما تقدم

$$(1) \text{ ك }^{\text{أ}} \text{ ي} + \text{ك }^{\text{ب}} \text{ ي} = ٢٠$$

$$(2) \frac{1}{\text{ك}} = \frac{1}{\text{ي}} + \frac{1}{7}$$

$$\text{بالك } \text{ك }^{\text{أ}} \text{ ي} + \text{ك }^{\text{ب}} \text{ ي} = \text{ك }^{\text{أ}} \text{ ي} (\text{ك} + \text{ي})$$

$$(2) \text{ بالجبر } \text{ك} + \text{ي} = \frac{٥ \text{ ك }^{\text{أ}} \text{ ي}}{7}$$

$$\text{افرض } \text{ك} + \text{ي} = \text{ص} \text{ و } \text{ك }^{\text{أ}} \text{ ي} = \text{ف}$$

$$\text{وعوض بذلك في (1) ندير } \text{ص} \text{ ف} = ٢٠$$

$$\text{و } ٦ \text{ ص} = ٥ \text{ ف}$$

فنستعلم قيمة ص وف ومنها قيمة ك وي

فائدة . اذا كان المجهولان في معادلتين من صورة

$$(1) \text{ ك} + \text{ي} = \text{ص}$$

$$(2) \text{ ك }^{\text{أ}} \text{ ي} = \text{ف}$$

نحل المسئلة على هذه الكيفية

$$(1) \text{ ربع (1) } \text{ك} + ٢ \text{ ك }^{\text{أ}} \text{ ي} + \text{ي} = \text{ص}^{\text{أ}}$$

$$\text{اضرب (2) } \times ٤ \text{ واطرح } ٤ \text{ ك }^{\text{أ}} \text{ ي} = ٤ \text{ ف}$$

$$\text{الفضلة } \text{ك} - ٢ \text{ ك }^{\text{أ}} \text{ ي} + \text{ي} = \text{ص}^{\text{أ}} - ٤ \text{ ف}$$

$$(4) \text{ بالتجدير } \text{ك} - \text{ي} = ٢ \text{ ص}^{\text{أ}} - ٤ \text{ ف}$$

$$(3) \text{ اجمع (1) و (2) } ٢ \text{ ك} = \text{ص} + ٢ \text{ ص}^{\text{أ}} - ٤ \text{ ف}$$

$$(4) \text{ اطرح (2) من (1) } ٢ \text{ ك} = \text{ص} - ٢ \text{ ص}^{\text{أ}} - ٤ \text{ ف}$$

$$\text{منروض ك} + ٢ \text{ ك }^{\text{أ}} \text{ ي} + \text{ي} = ١٩$$

$$\text{ك} + \text{ك }^{\text{أ}} \text{ ي} + \text{ي} = ١٣٣$$

$$\text{افرض } \text{ك} + \text{ي} = \text{ص} \text{ و } ٢ \text{ ك }^{\text{أ}} \text{ ي} = \text{ف}$$

$$(1) \text{ بالتعويض } \text{ص} + \text{ف} = ١٩$$

$$(2) \text{ ص} - \text{ف} = ١٣٣$$

$$\text{بقسمة (2) على (1) } \text{ص} - \text{ف} = ٧ \quad \text{ك} = ٩ \quad \text{ي} = ٤ \text{ او } ٩$$

وهذه الامثلة تنهم بأكثر سهولة بعد درس الفصل الآتي

الفصل الخامس عشر

في المسائل المتعلقة على مجهولين فاكه

$$١٦٢ \text{ لنفرض } ك + ي = ١٤$$

$$\text{وايضاً } ك - ي = ٢$$

$$\text{بنقل الياء فيهما لنا } ك = ١٤ - ي$$

$$\text{وك } ٢ + ي = \text{وحسب الاولى الحادية عشرة ان الاشياء المساوية لشيء}$$

واحد هي متساوية

$$\text{فاذا } ٢ + ي = ١٤ - ي \text{ وهي معادلة جديدة فيها مجهول واحد فقط . وقد}$$

استخرجناها من معادلتين في كل واحدة منها مجهولان . ولنا من ذلك

الفائدة الاولى لاخراج احد المجهولين واستخراج معادلة واحدة من اثنتين . وهي ان

ندعلم قيمة احد المجهولين في المعادلتين ونبنى المعادلة الجديدة من هاتين القيمتين

(١) ما عددان مجتمعهما ٢٤ والاكبر منهما ٥ مرات الاصغر

$$\text{لنفرض } ك = \text{الاكبر} \text{ و } ي = \text{الاصغر}$$

$$(١) \text{ بالشرط الاول } ك + ي = ٢٤$$

$$(٢) \text{ بالشرط الثاني } ك = ٥ ي$$

$$(٣) \text{ بمقابلة } ي \text{ في الاول } ك - ٢٤ = - ي$$

$$(٤) \text{ بالمساواة بين (٢) و (٣) } ٥ ي = ٢٤ - ي$$

$$(٥) \text{ بالمقابلة والقسمة } ي = ٤$$

(٢) ما كبتان مجتمعهما بعدل ح وفضله مربعيهما بعدل د

$$\text{لنفرض } ك = \text{أكبرها} \text{ و } ي = \text{اصغرهما}$$

$$(١) \text{ بالشرط الاول } ك + ي = ح$$

$$(٢) \text{ بالثاني } ك - ي = د$$

$$(٣) \text{ بمقابلة } ي \text{ في (٢) } ك = د + ي$$

$$(٤) \text{ بالتعويض } ك = د + ي$$

$$(٥) \text{ بمقابلة } ي \text{ في (١) } ك - ح = - ي$$

(٦) بالمساواة بين (٤) و (٥) $٦ + د + ي = ح - ي$

(٧) فلنا $ي = \frac{٦ - ح}{٢}$

(٢) مفروض $ت ك + ب ي = ح$

و $ك + ي = د$

مطلوب قيمة $ي$ الجواب $ي = \frac{ح - ت}{ب - ت}$

١٦٣ مفروض $ك = ح - ي$

وأيضاً $ت ك + ب ك = ي$

نرى هنا قيمة $ك$ في الأولى هي $ح - ي$ ويمكننا اذ ذاك ان نعوض عن $ك$ في الثانية بهذه القيمة فتصير $ت ح - ي + ب ح - ي = ي$ وليس فيها سوى مجهول واحد. ولنا من ذلك

القاعدة الثانية لاجراج مجهول. هي ان تستعلم قيمة احد المجهولين في احدى المعادلتين وتعوض عنه بها في الاخرى

(٤) سفينة جرت على اثار اخرى كانت قد سبقت ٢٠١ ميلاً. وكانت التابعة تجري ٨ اميال كلما جرت السابقة ٧ اميال. فكم ميلاً تجري الاولى قبل ان تدرك الاخرى

لنفرض ما تجر به الاولى = $ك$ وما تجر به الاخرى = $ي$ فلنا

(١) بالشروط $ك = ي + ٢٠$

(٢) بالشروط $ك : ي :: ٧ : ٨$

(٣) ثم $ي = \frac{٧}{٨} ك$

(٤) بالتعويض عن $ي$ في (١) $ك = \frac{٧}{٨} ك + ٢٠$

(٥) ولنا من ذلك $ك = ١٦٠$

(٥) سئل كم عمر زيد وعبيد. فقبل منذ سبع سنين كان عمر زيد ثلاثة امثال عمر عبيد. واعد سبع سنين يكون عمره مضاعف عمر عبيد. فكم هو عمر عبيد

لنفرض $ك =$ عمر زيد $ي =$ عمر عبيد

ثم $ك - ٧ =$ زيد منذ سبع سنين

$ي - ٧ =$ عبيد منذ سبع سنين

$ك + ٧ =$ زيد بعد سبع سنين

$ي + ٧ =$ عبيد بعد سبع سنين

- (١) بالشرط الاول $ك - ٧ = ٢ \times (٧ - ٢) = ٢١ - ٢$
 (٢) بالناني $ك + ٧ = ٢ \times (٧ + ٢) = ٢٤ + ٢$
 (٣) بمقابلة الاولى $ك - ٢ = ١٤$
 (٤) بالتعويض عن ك في (٢) $٢٤ + ٢ = ٧ + ١٤ - ٢$
 (٥) ولنا من ذلك $٢١ = ٢١ = ٢١$ عمر عبيد
 (٦) اي عدد بين نسبة اكبرها الى اصغرهما $٢:٣$ ومجموعها يعدل سدس حاصلها
 الجواب ١٠ و ١٥

١٦٤ مفروض $ك + ٢ = ٢٤$ ت

وايضاً $ك - ٢ = ١٤$ ب

بجمع المعادلتين $٢ ك = ٣٨$ ت + ب

وليس فيها سوى مجهول واحد

مفروض $٢ ك + ٢ = ٢٤$ ح

وايضاً $٢ ك + ٢ = ٢٤$ د

بالطرح $ك = ١١$ ح - د

فقد اخرجت ي

مفروض $ك - ٢ = ١٤$ ت

و $ك + ٢ = ٢٤$ ب

بضرب الاولى في ٢ $٢ ك - ٤ = ٢٨$ ت

ثم بجمع الثانية والثالثة $٢ ك = ٣٨$ ت + ب فلنا من ذلك

القاعدة الثالثة لاجراج مجهول . في ان تضرب احدى المعادلات او تقسمها حتى يكون احد الاجزاء المشتملة على المجهول يعدل جزءاً من الاخرى . ثم تجمع المعادلتين او تطرح الواحدة من الاخرى حتى ينفي جزءاً من الواحدة جزءاً من الاخرى

القاعدة الرابعة لاستخراج مجهول

(١) لنفرض $٢ ك + ٢ = ٢٤$

(٢) ولنفرض $٥ ك - ٢ = ١٠$

اضرب احدى المعادلتين في كمية غير معينة مهما كانت ولكن م ولنضرب بها الاولى منها فتصير

$$٢م ك + م٢ = م٢٢$$

اطرح منها (٢) ٥ ك - ٢ م = ١٠

$$\text{الفضلة} \quad (٥ - م٢) ك + (٢ + م٢) م = ١٠ - م٢٢$$

وقد فرضنا م كمية غير معينة فلنا ان نعين لها اية قيمة شئنا فلنفرض لها قيمة
تجعل مسمى ي اي (٢ + م٢) = ٠ فيصير ذلك الجزء من المعادلة صفراً وتصبح
المعادلة

$$(٥ - م٢) ك = ١٠ - م٢٢$$

$$(٢) \quad \frac{١٠ - م٢٢}{٥ - م٢} = ك$$

وقد فرض ٢ + م٢ = ٠ ويحل هذه المعادلة م = - ٢

عوض عن م بهذه القيمة في المعادلة (٢) فتصير

$$ك = \frac{١٠ - \frac{٢}{٢} \times ٢٢}{٥ - \frac{٢}{٢} \times ٢} = \frac{١٠ - ٢٢}{٥ - ٢} = \frac{- ١٢}{٣} = - ٤$$

وهذه الطريقة فرنساوية قليلة الاستعمال

وهذه القواعد تستخدم لاجراء اي عدد كان من المجاهيل على شرط ان عدد
المعادلات المستعملة يعدل عدد المجاهيل

مثال ذلك

$$(١) \quad ا ك + ب ي + س ل = د$$

$$(٢) \quad آ ك + ب ي + س ل = د$$

$$(٣) \quad آ ك + ب ي + س ل = د$$

فتستخرج ك او ي او ل حسب ما يوافق شروط المسئلة من ١ و ٢ فلنا
معادلة جديدة فيها مجهولان فقط ولنعمل ذلك مع (٢) و (٣) ومع (١) و (٣) فلنا
معادلة ثانية فيها المجهولان اللذان في السابقة ومنها نستخرج احد المجهولين بطريق من
الطرق المذكورة

(٧) عسكران مجتمع انفارهما ٢١١١٠ ومضاعف اكبرهما مع ثلاثة امثال اصغرها

يعدل ٥٢٢١٩ فكم عدد اكبرها

لنفرض ك = الأكبر وى = الأصغر

(١) بالشرط الأول $ك + ى = ٢١١١٠$

(٢) بالتالي $ك + ٢ ى = ٥٢٢١٩$

(٣) اضرب (١) في ٢ $٢ ك + ٢ ى = ٦٢٢٢٠$

(٤) اطرح (٢) من (٣) $ك = ١١١١١$

(٨) مفروض $ك + ٢ ى = ١٦$ و $٢ ك - ٢ ى = ٦$ مطلوب قيمة ك

(١) بالفرض الأول $ك + ٢ ى = ١٦$

(٢) بالتالي $ك - ٢ ى = ٦$

(٣) اضرب (١) في ٢ $٢ ك + ٢ ى = ٤٨$

(٤) يجمع (٢) و (٣) $٣ ك = ٥٤$

$ك = ١٨$

(٩) مفروض $ك + ى = ١٤$ و $ك - ى = ٢$ مطلوب قيمة ى

الجواب $ى = ٦$

(١٠) في عمود ذي قطعتين اذا اضيف $\frac{١}{٨}$ النقطعة السفلى الى $\frac{١}{٦}$ النقطعة العليا

يكون المجموع ٢٨ واذا طرح ٦ امثال النقطعة العليا من ٥ امثال النقطعة السفلى يبقى ١٢
فما هو طول العمود

لنفرض ك = النقطعة السفلى ى = العليا

(١) بالشرط الأول $\frac{١}{٨} ك + \frac{١}{٦} ى = ٢٨$

(٢) بالتالي $٥ ك - ٦ ى = ١٢$

(٣) بضرب (١) في ٦ $٦ ك + ى = ١٦٨$

(٤) بقسمة (٢) على ٦ $\frac{٥}{٦} ك - ى = ٢$

(٥) يجمع (٣) و (٤) $٢ ك + \frac{١}{٦} ك = ١٧٠$

(٦) بالجبر والجمع $١٧ ك = ١٠٢٠$

(٧) بالقسمة $ك = ٦٠ = السفلى$

ثم بالتعويض عن ك في (٣)

$١٢٠ = ى + ١٦٨$ $ى = ٤٨ = العليا$

(١١) مطلوب كسر اذا اضيف واحد الى صورتو يعدل الكسر $\frac{١}{٨}$ وان
اضيف واحد الى مخرجو يعدل الكسر $\frac{١}{٦}$

لنفرض ك = الصورة وى = المخرج

(١) بالشرط الأول $\frac{1}{2} = \frac{1+ك}{وى}$

(٢) بالثاني $\frac{1}{4} = \frac{ك}{1+وى}$

ك = ٤ = الصورة وى = ١٥ = المخرج

(١٢) اي عددان نسبة فضلتهما الى مجموعهما :: ٢ : ٣ ونسبة مجموعهما الى حاصلها

الجواب ١٠ و ٢

٥ : ٣ ::

(١٣) ما عددان حاصل مجموعهما في فضلتهما يعدل ٥ وحاصل مجموع مربعيهما

في فضلة مربعيهما يعدل ٦٥

لنفرض ك = الأكبر وى = الأصغر

(١) بالشرط الأول $٥ = (ك + وى) \times (ك - وى)$

(٢) بالثاني $٦٥ = (ك + وى) \times (ك - وى)$

(٣) بضرب الأولى ك - وى = ٥

(٤) بقسمة (٢) على (٣) ك + وى = ١٣

(٥) بمجموع (٣) و (٤) ٢ ك = ١٨

(٦) ك = ٩ وى = ٤

(١٤) اي عددان فضلتهما ٨ وحاصلهما ٢٤٠

(١٥) ما عددان فضلتهما ١٢ ومجموع مربعيهما ١٤٢٤

لنفرض أكبرهما = ك وأصغرهما = وى

(١) بالشرط الأول ك - وى = ١٢

(٢) بالثاني ك + وى = ١٤٢٤

(٣) بمقابلة وى في (١) ك - وى = ١٢

(٤) بتربيع الجانبين ك = وى + ٢٤ + ١٤٤

(٥) بمقابلة وى في (٢) ك = ١٤٢٤ - وى

(٦) بالمساواة بين (٤) و (٥) وى + ٢٤ + ١٤٤ = ١٤٢٤ - وى

وى = ٢٠ ك = ٢٢

(١٦) انقسمت تركة بين عدة ورثة بحيث كان الأول ١٠٠ غرش وعشر

الباقى. والثاني ٢٠٠ غرش وعشر الباقي. والثالث ٣٠٠ غرش وعشر الباقي. والرابع

٤٠٠ غرش وعشر الباقي ولم يجر. فوجدان التركة قد انقسمت بينهم بالسوية فكم

كانوا وكل حصة كل واحد منهم

لنفرض التركة $ي$ وكل حصة كل واحد فيكون $\frac{ي}{٩}$ عدد الورثة

$$١٠٠ = ك + \frac{١٠٠ - ي}{١٠}$$

وبقي $ي - ك$

$$٢٠٠ = ك + \frac{٢٠٠ - ي - ك}{١٠}$$

وبقي $ي - ٢ - ك$

$$٣٠٠ = ك + \frac{٣٠٠ - ي - ٢ - ك}{١٠}$$

ولم جراً وبطرح حصة الأول من حصة الثاني

$$١٠٠ - \frac{١٠٠ - ي}{١٠} = ٠ \text{ وهكذا ان طرح الثاني من الثالث والثالث من}$$

الرابع ولم جراً

$$\text{فلنأخذ هذه المعادلة } ١٠٠ - \frac{١٠٠ - ي}{١٠} = ٠$$

$$ك = ٩٠٠ \text{ حصة كل واحد ثم بالتعويض عن ك لنا } ٩٠٠ = ١٠٠ +$$

$$\frac{١٠٠ - ي}{١٠}$$

$$ي = ٨١٠٠ \text{ التركة } \frac{ي}{٩} = ٩ = \text{عدد الورثة}$$

(١٧) اي عدد من فضلنها ١٥ ونصف حاصلها يعدل كسب اصفرها

الجواب ٢ و ١٨

(١٨) اي عدد من مجتمعا ١٠٠ وحاصلها ٢٠٥٩ الجواب ٧١ و ٢٩

(١٩) اقس ٢٦ الى ثلاثة اقسام بحيث يزيد كل قسم على ما قبله اربعة ويكون

مجموع مربعاتها ٤٦٤ الجواب ٨ و ١٢ و ١٦

(٢٠) قال حمار البغل لو زيد على حملي رطل من حملك لكان وزنه

مضاعف وزن حملك . فقال البغل ولو زيد على حملي رطل من حملك اصار ثلاثة

امثال حملك . فكم رطلا كانا حاملين

$$ك = \text{البغل} \quad ي = \text{الحمار}$$

لو زيد على حمل الحمار رطل من حمل البغل لكان $ي + ١$ وبقي للبغل $ك - ١$

$$\text{وكان حمل الحمار مضاعف حمل البغل اي } ي + ١ = ٢ - ك$$

$$\text{وان زيد على حمل البغل لنا } ك + ١ = ٣ - ي$$

$$ك = ٢\% \quad ي = ٢\%$$

$$١٦٥ \text{ مفروض } ك + ي + ل = ١٢$$

$$\text{وايضاً } ك + ي - ل = ١٠$$

$$\text{وايضاً } ك - ي - ل = ٤$$

علينا ان نجد قيمة ك وى ول

$$\text{بالمقابلة لنا من الاولى } ك = ١٢ - ي - ل$$

$$\text{من الثانية } ك = ١٠ - ي + ل$$

$$\text{من الثالثة } ك = ٤ - ي + ل$$

بالمساواة بين الاولى والثانية وبين الثانية والثالثة لنا

$$١٢ - ي - ل = ١٠ - ي + ل$$

$$\text{وايضاً } ١٠ - ي + ل = ٤ - ي + ل$$

$$\text{بالمقابلة لنا من الاولى } ي = ٢ - ل$$

$$\text{ومن الثانية } ي = ل + ٦$$

$$\text{بالمساواة بين هاتين } ٢ - ل = ل + ٦ \quad ل = ٤$$

وذلك حسب القاعدة لحل مسئلة فيها ثلاث مجهولات فاكثر المذكورة آنفاً

اي ان نستخرج من المعادلات الثلاث معادلتين فيها مجهولان فقط . ونستخرج من هاتين واحدة فيها مجهول واحد فقط

$$(٢١) \text{ مفروض (١) } ك + ٥ + ل = ٥٢$$

$$\text{ايضاً (٢) } ك + ي + ل = ٢٠$$

$$\text{ايضاً (٣) } ك + ي + ل = ١٢$$

المطلوب قيمة ك وى ول

$$(٤) \text{ بطرح الثانية من الاولى } ٢٢ = ل + ي$$

$$(٥) \text{ بطرح (٢) من (٣) } ٨ = ل + ي$$

$$(٦) \text{ بطرح (٥) من (٤) } ١٤ = ل$$

ثم لكي نجد ك وى نفرض عن ل بنينها ونحول المعادلات كما تقدم

$$\text{فلنا في (٥) } ٨ = ١٠ + ي - ١٤ \quad ي = ٤$$

$$\text{وفي (٢) } ٢٠ = ٥ + ٤ + ك \quad ك = ١١$$

(٢٢) مطلوب قيمة ك وى ول من هذه المعادلات الثلاث

- (١) مفروض ك + ي + ل = ١٢
 (٢) ايضاً ك + ٢ي + ٢ل = ٢٠
 (٣) ايضاً $\frac{1}{2}ك + \frac{1}{2}ي + ل = ٦$
 (٤) اضرب الاولى في ٢ $٢ك + ٢ي + ٢ل = ٢٦$
 (٥) اطرح (٢) من (٤) $٢ك + ٢ي = ١٦$
 (٦) اطرح (٢) من (١) $\frac{1}{2}ك + \frac{1}{2}ي = ٦$
 (٧) بالمجبر $٢ك + ٢ي = ٢٦$
 (٨) اضرب (٥) في ٢ $٤ك + ٤ي = ٤٨$
 (٩) بطرح (٧) من (٨) $٢ك = ١٢$ $ك = ٦$
 (١٠) بقول (٧) $٤ = ي$ (١١) بقول (١) $٢ = ل$
 (١٢) مفروض (١) ك + ي = ت
 (٢) ك + ل = ب
 (٣) ي + ل = س

مطلوب ك و ي و ل
 الجواب ك = $\frac{ت + ب - س}{٢}$ ي = $\frac{ت + س - ب}{٢}$ ل = $\frac{ب + س - ت}{٢}$

(٢٤) زيد وعيد وبكر نشاركوا في شراء فرس ثلثة مئة دينار فلو أخذ ماع زيد ونصف ماع عيد كان المجموع ثمن الفرس . او لو أخذ ماع عيد وثلث ماع بكر لكان المجموع ثمن الفرس . او لو أخذ ماع بكر ورابع ماع زيد لكان المجموع ثمن الفرس . فكم كان مع كل واحد منهم

لنفرض ك = زيد ي = عيد ل = بكر

(١) بالشرط الاول $١٠٠ = ي + \frac{1}{2}ك$

(٢) بالثاني $١٠٠ = ل + \frac{1}{2}ي$

(٣) بالثالث $١٠٠ = ك + \frac{1}{4}ل$

ك = ٦٤ ي = ٧٢ ل = ٨٤

(٢٥) ثلاثة رجال اشتروا كراماً بمئة دينار . فلو أخذ ماع الاول ونصف ماع الثاني كان المجموع ثمن الكرم . ولو أخذ ماع الثاني وثلث ماع الثالث كان المجموع ثمن الكرم . ولو أخذ ماع الثالث ورابع ماع الاول كان المجموع ثمن الكرم . فكم ديناراً مع كل واحد منهم الجواب الاول = ٦٤ الثاني = ٧٢ الثالث = ٨٤ ديناراً

(٢٦) ملك عنده ثلاث كنائب من العساكر احدها اترك والثانية عرب والثالثة اعجم. فامر ان يهجم احدى الطوائف على قلعة ووعد ان يعطي الجميع ٩٠١ من الدينار غير انه يعطي كل نفر من الطائفة الهاجة ديناراً واحداً ويوزع ما بقي على الطائفتين الاخرتين بالمساواة. فلو هجمت الاترك لاصاب كل نفر من الاخرين نصف دينار. ولو هجمت العرب لاصاب كل نفر من الاخرين ثلث دينار. ولو هجمت الاعجم لاصاب كل نفر من الاخرين ربع دينار. فكم نفراً كان في كل طائفة

لنفرض الاترك = ك والعرب = ي والاعجم = ل

ولنفرض $ك + ي + ل = س$ اي مجتمع الثلاثة. فان هجمت الاترك فلنا البقية $س - ك$ وللاترك دينار واحد لكل نفر. وللبقية نصف دينار لكل نفر اي $ك + \frac{1}{2}س - \frac{1}{2}ك = \frac{1}{2}س$ وان هجمت العرب فلنا $س - ي$ وان هجمت العرب فلنا $س - ي = \frac{1}{4}س$ وان هجمت الاعجم فلنا $س - ل$ وان هجمت الاعجم فلنا $س - ل = \frac{1}{4}س$

ك = ٢٦٥ ي = ٥٨٢ ل = ٦٨٩

(٢٧) زيد عمرو وبكر سافروا الى جهات مختلفة. وكان مجموع اسفارهم ٦٢ ميلاً. وكان سفر زيد اربعة امثال سفر بكر مع مضاعف سفر عمرو. و١٧ مثل سفر بكر تعدل مضاعف سفر زيد مع ثلاثة امثال سفر عمرو. فكم ميلاً سافر كل واحد منهم

زيد = ٤٦ عمرو = ٩ بكر = ٧

(٢٨) مطلوب قيمة ك وى ول من هذه المعادلات

$$\frac{1}{2}ك + \frac{1}{4}ي + \frac{1}{8}ل = ٦٢$$

$$\frac{1}{4}ك + \frac{1}{8}ي + \frac{1}{16}ل = ٤٦$$

$$\frac{1}{8}ك + \frac{1}{16}ي + \frac{1}{32}ل = ٢٨$$

الجواب ك = ٢٤ ي = ٦٠ ل = ١٢٠

(٢٩) مفروض ك = ٦٠٠ ي = ٢٠٠ ل = ٢٠٠

مطلوب قيمة ك وى ول

ك = ٢٠ ي = ٢٠ ل = ١٠

١٦٦ على هذه الكيفية نحل اربع معادلات فاكثر. اي يستخرج من الاربع ثلاثاً ومن الثلاث اثنتين وملم جراً

(٣٠) مطلوب قيمة ك وى ول ون من هذه المعادلات

اربع معادلات	$\frac{1}{2} ي + ل + \frac{1}{2} ن = ٨$	(١) مفروض
	$٩ = ن + ي + ك$	(٢) مفروض
	$١٢ = ل + ي + ك$	(٣) مفروض
	$١٠ = ل + ن + ك$	(٤) مفروض
ثلاث معادلات	$١٦ = ن + ل + ي$	(٥) مجبر الاولى
	$٢ = ل - ن$	(٦) بطرح (٢) من (٤)
	$٢ = ن - ي$	(٧) بطرح (٤) من (٢)
معادلتان	$١٩ = ل + ي$	(٨) جميع (٥) و (٦)
	$١ = ل + ي -$	(٩) بطرح (٧) من (٦)
الكليات المطلوبة	$٥ = ل \quad ٢٠ = ل + ي$	(١٠) جميع (٨) و (٩)
	$٤ = ل - ١٩ = ي$	(١١) بمقابلة (٨)
	$٢ = ل - ي - ١٢ = ك$	(١٢) بمقابلة (٢)
	$٢ = ن - ك - ي$	(١٣) بمقابلة (٢)
مطلوب ك وي ول ون	$ك = ٥٠ + ن$	(١٤) مفروض
	$ك = ١٢٠ + ي$	
	$ل = ١٢٠ + ي$	
	$ل = ١٩٥ + ن$	

$$ن = ١٠٠ \quad ك = ١٥٠ \quad ي = ٩٠ \quad ل = ١٠٥$$

(٢٢) مطلوب عدد ذور قمين احدهما في منزلة الاحاد والآخر في منزلة العشرات . والذي في منزلة العشرات يعدل ثلاثة امثال الآخر . واذا طرح ١٢ من العدد نفسه يعدل الباقي منه مربع الرقم الذي في منزلة العشرات لنفرض ك = الذي في منزلة العشرات وي = الذي في منزلة الاحاد . فوقع ك في منزلة العشرات يزيد عشرة امثال ما كان لو وقع في منزلة الاحاد . فلما

$$١٠ + ك = العدد$$

وبشروط المسئلة ك = ٢ ي

وايضاً ١٠ ك + ي - ١٢ = ك

$$ك = ٩٢$$

(٢٣) مطلوب ثلاثة اعداد يكون الأول مع نصف الآخرين ٢٤ والثاني مع ثلث الآخرين ٢٤ والثالث مع ربع الآخرين ٢٤
الجواب ١٠ و ٢٢ و ٢٦

(٢٤) مطلوب عدد ذو رقيبتين مجتمعهما ١٥ وإذا أُضيف ٢١ الى حاصلها تنقلب رتبة الرقيبتين اي الذي كان في منزلة الآحاد يصير في منزلة العشرات وبالعكس
الجواب ٧٨

(٢٥) اي عدد ذي رقيبتين اذا انقسم على حاصل رقيبته يخرج اثنان . وإذا أُضيف ٢٧ الى العدد تنقلب رتبة رقيبته
الجواب ٢٦

(٢٦) ما عددان اذا طُرِحَ الاصغر من ثلاثة امثال الاكبر بقي ٢٥ وإذا انقسم اربعة امثال الاكبر على ثلاثة امثال الاصغر مع واحد يكون الخارج نفس العدد الاصغر
الجواب ١٢ و ٤

(٢٧) اي كسر اذا أُضيف ٢ الى صورته تكون قيمته $\frac{1}{2}$ وإذا طُرِحَ واحد من مخرجه تكون قيمته $\frac{1}{2}$
الجواب $\frac{3}{4}$

(٢٨) رجل له فرسان وسرج قيمته ١٠ دنانير . فاذا وُضع السرج على الفرس الأول تكون قيمته مضاعف قيمة الفرس الثاني . واذا وُضع على الثاني تكون قيمته اقل من قيمة الأول بثلاثة عشر ديناراً . فكم قيمة الفرسين
الجواب ٥٦ و ٢٢ ديناراً

(٢٩) انقسم ٩٠ الى اربعة اقسام بحيث اذا أُضيف الى الأول ٢ وطُرِحَ من الثاني ٢ وضرب الثالث في ٢ وانقسم الرابع على ٢ تكون الاقسام كلها متساوية

لنفرض ثلاثة اقسام ك وى ول فيكون الرابع ٩٠ - ك - ي - ل
فلنا ك + ٢ = ي - ٢

و ك + ٢ = ل

و $\frac{٩٠ - ك - ي - ل}{٢} = ل$

الجواب ١٨ و ٢٢ و ١٠ و ٤٠

(٤٠) ما ثلاثة اعداد يكون الأول منها مع نصف مجتمع الثاني والثالث ١٢٠ والثاني مع $\frac{1}{3}$ فضلة الثالث والأول ٧٠ ونصف مجتمع الثلاثة ٩٥

(٤١) ما عددان النسبة بين فضلتهما ومجموعهما وحاصلهما كالنسبة بين ٢ و ٣ و ٥
الجواب ١٠ و ٢

(٤٢) رجل باع ٢٠ رطلاً من الخمر الاسود و ٢٠ رطلاً من الاصفر وكان ثمن الجميع ١٢٠ غرشاً . ثم باع ٢٠ رطلاً من الاسود و ٢٥ رطلاً من الاصفر بالسعر الأول

وبلغ ثمن الجميع في المرة الثانية ١٤٠ غرشاً . فكم كان ثمن الرطل من كل صنف

الجواب الاسود = ٣ غروش والاصفر = غرشين

(٤٢) رجل مزج خمرًا بماء ولو زاد من كل صنف ٦ ارطال لكان في المزيج

٧ ارطال من الخمر لكل ٦ ارطال من الماء . ولو نقص من كل صنف ٦ ارطال

لكان في المزيج ٦ ارطال خمر لكل ٥ ارطال ماء . فكم رطلاً مزج من كل صنف

الجواب الخمر = ٧٨ والماء = ٦٦ رطلاً

(٤٤) اي كسر اذا تضاعفت صورته وأضيف ٧ الى مخرجه تكون قيمته $\frac{1}{2}$ واذا

تضاعف المخرج وأضيف ٢ الى صورته تكون قيمته $\frac{1}{3}$ الجواب $\frac{1}{6}$

(٤٥) رجل اشترى من التفاح والليمون ثلاثين غرشاً . وكان كل اربع تفاحات

بغرش وكل خمس ليمونات بغرش ايضاً . ثم باع نصف التفاح و $\frac{1}{4}$ الليمون بسعر ما

اشترى قبله الثمن ١٢ غرشاً فكم اشترى من كل صنف

الجواب التفاح = ٧٢ والليمون = ٦٠

(٤٦) استعلم مال كل واحد من ثلاثة اشخاص ا ب و ث على افتراض

(١) ان مال ا مع ل مرة مال ب و ث = ف (٢) ان مال ب مع م مرة

مال ا و ث = ق (٣) ان مال ث مع ن مرة مال ا و ب = ر

افرض مجموع مال ا و ب و ث = ص

الجواب $a = \frac{ل-ص}{١-ل} \quad b = \frac{م-ص}{١-م} \quad c = \frac{ق-ن}{١-ن}$

(٤٧) استعلم قيمة رزق كل واحد من ستة اشخاص ا ب ث ج ح على

افتراض (١) ان مجموع رزق ا و ب = د ومجموع رزق ث و ج = هـ ومجموع

رزق ج و ح = ص (٢) ان رزق ا = م مرة رزق ث و رزق ث = ن مرة

رزق ج و رزق ح = ف مرة رزق ث

هذه المسئلة تحل بمجهول واحد وبسنة مجاهل

١٦٧ متى وجد كى اوكى في كل جزء من المعادلتين تكونان على

احدى هاتين المبتدئين ث ك + ب كى + سى = د

ث ك + ب كى + سى = د

ولحلها افرض ك = ف ي اذا ك = ف ي

وبالتعويض عن ك وك في المعادلتين لنا

وبالمساواة بين هاتين لنا

مربعۃ تحلُّ باتمام التریع کما تقدم

$$z_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} z_2 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} 0$$

$$20 = 1 + 2 + 3 + \dots + 6$$

$$\frac{21}{2+2f} = \frac{20}{1+2f+2f^2} \quad \text{ثم بالمساواة}$$

ثم بالمويض عن ف لنا

۱ = ۲ × ۱/۲ = ۱ ۲ = ۱

في اصغرهما يحصل ١٢

قولنا $\text{ك}^1 + \text{ك}^2 \text{ ي} = \text{yy}$

و كى - ى = ۱۲

وأيضاً $f_1 - f_2 = 12$ $f_1 = \frac{12}{1-f_2}$

$\gamma = \text{ك}$ $\xi = \text{ي}$

الجواب ٩ و ٥

(٤) اي عددین ثلاثة امثال مربع اکبرها مع مضاعف مربع اصغرهما = ۱۱۰

ونصف حاصلها مع مربع الاصغر = ٤
 ١٦٨ متى ترفى المجهولان الى قوة واحدة لا نحل المعادلة حسبما تقدم بل نستعمل
 طريقة اخرى نوضحها هنا وعليها نحل كل مسألة واقعة تحت هذه القضية . وهي
 مفروض مجموع عددين ومجموع القوة التونية منها دلينا ان نجد العددين على شرط
 ان لا يتجاوز القوة التاسعة

مفروض كيتان اكبرها ك واصغرهما ي

مفروض ايضا ك + ي = ٢س ك - ي = ٢ل

ثم بالجمع ك = س + ل وبالطرح ي = س - ل

ثم لنفرض ك + ي = ٢ ت ك + ي = ٢ ب

ك + ي = ٢ ر ك + ي = ٢ د وهلم جرا فنجد قيمة ك و ي في اجزاء من

المعلومات ت ب ر د س على هذا الاسلوب

(١) ك = (س + ل) = ٢س + ٢ل + ٢ل

ي = (س - ل) = ٢س - ٢ل + ٢ل

بالجمع ك + ي = ٢ ت اي ٢س + ٢ل = ٢ ت ل = $\frac{٢ت - ٢س}{٢}$

ل = $\frac{٢ت - ٢س}{٢}$ فلنا قيمة ك و ي اي ك = س + $\frac{٢ت - ٢س}{٢}$ ي = س - $\frac{٢ت - ٢س}{٢}$

(٢) ك = (س + ل) = ٢س + ٢ل + ٢ل + ٢ل

ي = (س - ل) = ٢س - ٢ل + ٢ل + ٢ل

ك + ي = ٢ ف اي ٢س + ٢ل = ٢ ف ل = $\frac{٢ف - ٢س}{٢}$

لنا قيمة ك و ي بالتعويض اي

ك = س + $\frac{٢ف - ٢س}{٢}$ ي = س - $\frac{٢ف - ٢س}{٢}$

(٣) ك = (س + ل) = ٢س + ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل

ي = (س - ل) = ٢س - ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل

ك + ي = ٢ ر اي ٢س + ٢ل = ٢ ر ل = $\frac{٢ر - ٢س}{٢}$ وهي معادلة مربعة يستعمل

منها قيمة ل كما تقدم ثم يعوض بها عن ك و ي

(٤) ك = (س + ل) = ٢س + ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل

ي = (س - ل) = ٢س - ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل

ك + ي = ٢ ر اي ٢س + ٢ل = ٢ ر ل = $\frac{٢ر - ٢س}{٢}$

منها قيمة ل كما تقدم ثم يعوض بها عن ك و ي

(٥) ك = (س + ل) = ٢س + ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل

ي = (س - ل) = ٢س - ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل

ي = (س - ل) = س - ٥س ل + ١٠س ل - ١٠س ل +
 ٥س ل - ل ك + ي اي د = ٢س + ٢٠س ل + ١٠س ل وفي معادلة
 مربعة نستعلم منها قيمة ل ثم قيمة ك وي كما تقدم

١٦٩ مفروض ك + ي = ٢س وك - ي = ٢ل

$$\begin{aligned} \text{ثم لنفرض } \frac{ك}{ي} = \frac{٢}{١} \quad \frac{ت}{ب} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} \quad \frac{د}{ر} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} \\ \frac{٢}{١} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} \quad \frac{٢}{١} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} \end{aligned}$$

ثم بواسطة المعادلات المتقدمة (١٦٨) نجد قيمة ك وي في اجزاء من المعلومات
 س ت ب ر د

$$(١) \quad \frac{ك}{ي} = \frac{٢}{١} \quad \frac{ت}{ب} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} = ٤ \quad \frac{د}{ر} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} = ٤$$

وحسب (١٦٨) (١) لنا ك + ي = ٢س ل + ٢ل

فاذا ت س - ت ل = ٢س ل + ٢ل

$$\begin{aligned} \frac{٢س(٢-ت)}{٢+ت} = ل \quad \frac{٢س(٢-ت)}{٢+ت} = ل \\ \frac{٢س(٢-ت)}{٢+ت} = ل + س = ك \end{aligned}$$

$$\frac{٢س(٢-ت)}{٢+ت} = س - ي$$

$$(٢) \quad \frac{ك}{ي} = \frac{٢}{١} \quad \frac{ت}{ب} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} = ٤ \quad \frac{د}{ر} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} = ٤$$

حسب (١٦٨) (٢) لنا ك + ي = ٢س ل + ٢ل اي ب (س - ل) =
 ٢س ل + ٢ل

$$\frac{٢س(٢-ب)}{٢+ب} = ل \quad \frac{٢س(٢-ب)}{٢+ب} = ل$$

$$\frac{٢س(٢-ب)}{٢+ب} = س - ي \quad \frac{٢س(٢-ب)}{٢+ب} = س + ي = ك$$

$$(٣) \quad \frac{ك}{ي} = \frac{٢}{١} \quad \frac{ت}{ب} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} = ٤ \quad \frac{د}{ر} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} = ٤$$

ثم حسب (١٦٨) (٣) لنا

$$ك + ي = ٢س ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل$$

ر (س - ل) = ٢س ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل وفي معادلة مربعة نستعلم

منها قيمة ل وكذلك قيمة ك وي حسبنا تقدم

$$(٤) \quad \frac{ك}{ي} = \frac{٢}{١} \quad \frac{ت}{ب} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} = ٤ \quad \frac{د}{ر} = \frac{٢}{١} + \frac{٢}{١} = ٤$$

وحسب (١٦٨) (٤) لنا ك + ي = ٢س ل + ٢ل + ٢ل + ٢ل اذا

٢س + ٢٠س^ل + ١٠س^ل = د (س^ل - ل^ل) وفي معادلة مربعة نستعلم
منها قيمة ل كما تقدم

١٧٠ مفروض ك + ي = س ك ي = ف

ف نجد قيمة اية قوة فُرِضَتْ من ك وى في اجزاء من المعلومتين س وف هكذا

$$(١) \text{ ك} + ٢\text{ك ي} + \text{س} = \text{س}^٢$$

$$\text{ك} + \text{ي} = \text{س}^٢ - ٢\text{ك ي} = \text{س}^٢ - ٢\text{ف}$$

$$(٢) (\text{ك} + \text{ي}) (\text{ك} + \text{س}) = (\text{س}^٢ - ٢\text{ف}) \times \text{س}$$

$$\text{ك}^٢ + \text{ي}^٢ + \text{ك ي} (\text{ك} + \text{س}) = \text{س}^٣ - ٢\text{ف س} \quad \text{اي} \quad \text{ك}^٢ + \text{ي}^٢ + \text{ف س} =$$

$$\text{س}^٣ - ٢\text{ف س}$$

$$(٣) (\text{ك}^٢ + \text{ي}^٢) (\text{ك} + \text{س}) = (\text{س}^٣ - ٢\text{ف س}) \text{ س}$$

$$\text{ك}^٣ + \text{ي}^٣ + \text{ك ي} (\text{ك} + \text{س}) = \text{س}^٤ - ٢\text{ف س}^٢$$

$$\text{اي} \quad \text{ك}^٣ + \text{ي}^٣ + \text{ف} (\text{س}^٢ - ٢\text{ف}) = \text{س}^٤ - ٢\text{ف س}^٢$$

$$\text{اي} \quad \text{ك}^٣ + \text{ي}^٣ = \text{س}^٤ - ٤\text{ف س}^٢ + ٢\text{ف}^٢$$

$$(٤) (\text{ك}^٣ + \text{ي}^٣) (\text{ك} + \text{س}) = (\text{س}^٤ - ٤\text{ف س}^٢ + ٢\text{ف}^٢) \text{ س}$$

$$\text{اي} \quad \text{ك}^٤ + \text{ي}^٤ + \text{ك ي} (\text{ك} + \text{س}) = \text{س}^٥ - ٤\text{ف س}^٣ + ٢\text{ف}^٢\text{س}$$

$$\text{اي} \quad \text{ك}^٤ + \text{ي}^٤ + \text{ف} (\text{س}^٣ - ٢\text{ف س}) = \text{س}^٥ - ٤\text{ف س}^٣ + ٢\text{ف}^٢\text{س}$$

$$\text{ك}^٤ + \text{ي}^٤ = \text{س}^٥ - ٥\text{ف س}^٣ + ٥\text{ف}^٢\text{س}$$

$$\text{ومطلقاً} \quad \text{ك}^٥ + \text{ي}^٥ = \text{س}^٦ - ٥\text{ف س}^٤ + \frac{(٢-٥)}{٢}\text{ف}^٢\text{س}^٢ + \text{ف}^٥ \text{ الى آخره}$$

مثال (١) ما عددان مجتمعا ٦ ومجموع قوتيهما الخامسة ١٠٥٦

انظر (١٦٨) (٤)

$$\text{س} = ٢ = د \quad ١٠٥٦ = د$$

$$\text{س}^٢ = ٢٠ = ١٠س + ١٠س = د$$

$$٤٨٦ + ٥٤٠ = ١٠س + ١٠س = ١٠٥٦$$

$$\text{ل} + ١٨ = ١٩ \quad \text{ل} = ١$$

$$\text{ك} = \text{س} + \text{ل} = ٢ + ١ = ٣ \quad \text{ي} = \text{س} - \text{ل} = ٢ - ١ = ١$$

(٢) ما عددان مجتمعا ١٨ ومربع الأكبر على الأصغر مع مربع الأصغر على

الأكبر = ٢٧

انظر (١٦٩) (٢) س = ٩ ب = ٢٧

$$ل = \frac{(ب-س)(س+٢)}{س} = \frac{٨١ \times ٩}{٥٤ + ٢٧} = ٩$$

$$ك = س + ل = ٩ + ٩ = ١٨ \quad ي = س - ل = ٩ - ٩ = ٠$$

(٢) عددان مجتمعهما ٥ وحاصلهما ٦ فما هو مجتمع قوتيهما الرابعتين

انظر (١٧٠) (٣)

$$ك + ي = س - ٤ = ٩ - ٤ = ٥ \quad ف \quad س + ٢ = ٩ + ٢ = ١١ \quad ف \quad ١١ = ١١ + ٠ - ٠ = ١١$$

١٧١ متى كانت المعادلات الناتجة من مسئلة أكثر من عدد المجهولات المتضمنة

فيها تكون بعضها اما متناقضة واما فضولاً. فمثال المتناقضة ٣ ك = ٦٠ / ٢ ك = ٢٠ لان بالاولى ك = ٢٠ وبالثانية ك = ٤٠ ولو تخبرنا الثانية حتى نصير ٢ / ٢ ك = ١٠ لكأنت فضولاً لان قيمة ك تُستعمل بدونها. وان كان عدد المعادلات اقل من عدد المجهولات في المسئلة تكون المسئلة سيالة اي اجوبتها كثيرة. وسباني الكلام على بعض انواع هذه المسائل في محله

١٧٢ في حل المسائل المتضمنة عدة مجاهيل للنظم باب واسع لاستعمال فطنته

في اختراع طرق لتسهيل العمل. وهذه الطرق لا تنحصر في قواعد معلومة

$$(١) \text{ فلو فرض } م + ك + ي = ١٢$$

$$(٢) \text{ م + ك + ل = ١٧}$$

$$(٣) \text{ م + ي + ل = ١٨}$$

$$(٤) \text{ ك + ي + ل = ٢١}$$

فلنفرض مجتمع المجاهيل اي ك + ي + م + ل = س

ثم في الاولى نجد الجميع الا ل اي س - ل = ١٢

في الثانية نجد الجميع الا ي اي س - ي = ١٧

في الثالثة نجد الجميع الا ك اي س - ك = ١٨

في الرابعة نجد الجميع الا م اي س - م = ٢١

بالجمع ٤ س - ل - ي - ك - م = ٦٩

اي ٤ س - (ل + ي + ك + م) = ٦٩

اي ٤ س - س = ٦٩ ٢ س = ٦٩ س = ٣٤

$$\text{ثم بالتعويض } ٢٢ - ل = ١٢ \quad ١٠ = ل$$

$$٢٢ - ي = ١٧ \quad ٦ = ي$$

$$٢٢ - ك = ١٨ \quad ٥ = ك$$

$$٢٢ - م = ٢١ \quad ٢ = م$$

براهين على نظريات بالمعادلات

١٧٣ في ما تقدم استقدمنا المعادلات لحل مسائل عجيبة . وهي نتعمل ايضاً في برهان النظريات كما ترى هنا

نظرية اولى . اربعة امثال حاصل كيتين بعدل مربع مجتمعهما الا مربع فضلتهما

لنفرض اكبرها = ك اصغرها = ي

مجتمعهما = س فضلتهما = د

$$(١) \text{ بالشروط } ك + ي = س \quad (٢) ك - ي = د$$

$$(٣) \text{ بالجمع } ٢ ك = س + د$$

$$(٤) \text{ بالطرح } ٢ ي = س - د$$

$$(٥) \text{ بضرب (٢) في (٤) } ٤ ك ي = س^٢ - د^٢$$

نظرية ثانية . مجموع مربعي كيتين بعدل مربع فضلتهما مع مضاعف حاصلهما

لنفرض ك = الاكبر ي = الاصغر

د = فضلتهما ف = حاصلهما

$$(١) \text{ بالشروط } ك - ي = د \quad (٢) ك ي = ف$$

$$(٣) \text{ بتربيع الاولى } ك^٢ - ٢ ك ي + ي^٢ = د^٢$$

$$(٤) \text{ بضرب الثانية في } ٢ \quad ٢ ك ي = ٢ ف$$

$$(٥) \text{ بجمع هاتين } ك^٢ + ي^٢ = د^٢ + ٢ ف$$

نظرية ثالثة . نصف فضلة كيتين مع نصف مجتمعهما بعدل اكبرها . ونصف

مجتمعهما الا نصف فضلتهما بعدل اصغرهما

$$\text{لنفرض (١) } ك + ي = س \quad (٢) ك - ي = د$$

$$(٣) \text{ بالتقسمة على } ٢ \quad ١/٢ ك + ١/٢ ي = ١/٢ س$$

$$(٤) \text{ ايضاً } ١/٢ ك - ١/٢ ي = ١/٢ د$$

$$(٥) \text{ بجمع هاتين } ك = ١/٢ س + ١/٢ د$$

$$(٦) \text{ بطرحها } \text{ى} = \frac{1}{2} \text{س} - \frac{1}{3} \text{د}$$

وفس على ذلك نظائرهُ

في القيمة السلبية التي نخرج من حل معادلة

$$(١) \text{ مطلوب عدد اذا أضيف الى ب } = ١$$

$$\text{لنفرض ك} = \text{العدد المطلوب ثم ك} + \text{ب} = ١ \quad \text{ك} - ١ = \text{ب}$$

وهذه العبارة العامة تدل على قيمة ك في كل مسألة خصوصية من هذا النوع . مثاله

$$\text{لنفرض } ١ = ٤٧ \text{ وب } ٢٩ =$$

$$\text{فحيثذ ك} = ٤٧ - ٢٩ = ١٨$$

$$\text{ثم لنفرض } ١ = ٢٤ \text{ وب } ٢١ = \text{فحيثذ ك} = ٢٤ - ٢١ = ٣$$

اي قيمة ك سلبية وكمية سلبية مجردة ليس لها وجود اي - مجردة لاجود لها

ولكنها موجودة جبرياً او نسبياً واذا أضيف - ٣ الى ٢١ جبرياً يكون المجموع ٢٤

وذلك يستوفي شروط المسئلة وتصح بها المعادلة ويمكننا تركيب مسئلة جبرية (لا مجردة)

توافق هذه الشروط فاذا فرضنا ان مجموع مال شخصين = ١٢٠ درهماً ومال الواحد

منها ١٦٠ درهماً أكثر من مال الآخر فما هو مال كل واحد منها

$$\text{المجواب} = ١٤٠ \text{ درهماً و } ٢٠ \text{ درهماً ولكن } ٢٠ \text{ لاجود لما فيؤخذ على معنى}$$

الدين الذي علامته عكس علامة ما في اليد

$$(٢) \text{ رجل عاش سنين } = ١ \text{ وابنة عاش سنين } = \text{ب} . \text{ في كم سنة يكون عمر}$$

$$\text{الابن } \frac{1}{4} \text{ عمر الاب}$$

$$\text{لنفرض ك} = \text{السنين المطلوبة}$$

$$\text{ثم } ١ + \text{ك} = \text{عمر الاب عند نهاية المدة المطلوبة}$$

$$\text{ب} + \text{ك} = \text{عمر الابن عند نهاية المدة المطلوبة}$$

$$\text{ثم بشروط المسئلة } \frac{١ + \text{ك}}{٤} = \text{ب} + \text{ك} \quad \text{ك} = \frac{١ - \text{ب}}{٣}$$

$$\text{فلنفرض } ١ = ٥٤ \text{ وب } ٩ = \text{ثم ك} = \frac{٥٤ - ٩}{٣} = \frac{٤٥}{٣} = ١٥$$

فاذا كان عمر الاب ٥٤ سنة وعمر الابن ٩ سنين بعد ٦ سنين يكون عمر الاب

٦٠ سنة وعمر الابن ١٥ سنة وه اربع ٦٠ اي

ك = ٦ يستوفي شروط المسئلة

$$\text{ثم لنفرض } ١ = ٤٥ \text{ وب } ١٥ = \text{ثم ك} = \frac{٤٥ - ١٥}{٣} = ١٠$$

فاذا عوضنا عن ك بهذه القيمة في المعادلة السابقة اي $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ب + ك نصير $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ اي ك = ١٠ - ٥ = ٥ فقيمة ٥ - ٥ = ٠ يستوفي شروط المعادلة كما ان قيمة ٦ + ٥ = ١١ يستوفي شروط المسئلة فالجواب الايجابي يدل على ان عمر الاب يكون اربعة امثال عمر الابن بعد ٦ سنين والجواب السليبي يدل على ان عمر الاب كان ٤ امثال عمر الابن قبل خمس سنين فالمسئلة تطلب الوقت الذي فيه يكون عمر الاب ٤ امثال عمر الابن وعند افتراض المسئلة لاجل اصطناع المعادلة ففرض ذلك الوقت مستقبلاً وبالاقتراض الثاني انقضى ان يكون ذلك الوقت قد مضى ودلت على ذلك العلامة السلية في الجواب

ولاجل تحصيل جواب ايجابي بالاقتراض الثاني نغير المسئلة اي يقال كم سنة مضت منذ كان عمر الاب ٤ امثال عمر الابن فان فرضنا ك = السنين المطلوبة لنا بشروط المسئلة $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ك = ١٠ - ٥ = ٥ وك = $\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وان فرض ك = ٤٥ وب = ١٥ ك = ٥

(٢) رجل عند ما تزوج كان عمره ٣٠ سنة وعمر امرأته ١٥ سنة فبعد كم سنة يكون عمره ثلاثة امثال عمر امرأته

الجواب $\frac{1}{2}$ سنين قبل ما تزوجا وفي انظر المسئلة خلال اي يجب ان يسأل كم سنة قبل ما تزوجا كان الخ

فما تقدم لنا هذه القواعد الاربع من جهة القيمة السلية

(١) في كل معادلة من الدرجة الاولى القيمة السلية للجهول بعلامتها الواجبة توافق المعادلة التي استعملت منها

(٢) وهذه القيمة السلية بعلامتها الواجبة توافق شروط المسئلة على

معنى جبري

(٣) اذا اخذت قيمة ايجابية على معنى تؤخذ القيمة السلية الى عكسه (انظر عدد ١٣ صفحة ٦)

(٤) القيمة السلية بعد بدل علامتها توافق المسئلة بعد تغيير عباراتها بحيث صارت الكميات المضافة مطروحة والمطروحة مضافة

(٤) أي كسر اذا أضيف واحد الى صورته يصير $\frac{1}{2}$ وإذا أضيف واحد الى مخرجه يصير $\frac{1}{7}$

هنا الكسرين له وجود حسابياً ولكن العبارة الجبرية $\frac{1}{10} = \frac{1}{2}$ توافق شروط المسئلة
(٥) جسمان تحركا الى جهة واحدة من نقطتين بينها اميال = ١ الواحد على سرعة ن ميل كل ساعة والآخر لحضة على سرعة م ميل كل ساعة ففي كم ساعة يدرك الثاني الأول
الجواب في $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ساعة

على أي افتراض تكون قيمة المجهول في هذه المسئلة صفرًا
الجواب اذا كان $n < m$

فلنفرض $m = 20$ ون $= 25$ وا $= 60$ ميلاً

ثم $k = \frac{60}{20-25} = \frac{60}{-5} = -12$

ومعنى ذلك ان الثاني لا يمكن ان يلحق الأول لان حركته ابطأ وعند الانطلاق كانت المسافة بينها 60 ميلاً وهي تزيد كل ساعة وعلى افتراض حركتها قبل ذلك على هذا النسق نفسه كانا معاً في وقت ما قبل الوقت المفروض فيجب ان يقال بين جسمين 60 ميلاً وهما يتحركان الى جهة واحدة الواحد على سرعة 25 ميلاً كل ساعة والآخر على حركة 20 ميلاً كل ساعة فكم ساعة منذ كانا معاً

ثم لنفرض $k =$ الساعات المطلوبة

و $25 k =$ المسافة التي قطعها الأول

$20 k =$ المسافة التي قطعها الثاني

والآن بينهما 60 ميلاً أي $25 k - 20 k = 60$ $5 k = 60$ $k = 12$

فلنا للمجهول قيمة ايجابية

ولاجل اشتغال كلا الحالتين تكون المسئلة مطلوب وقت كونها معاً بدون تعيين

الماضي والمستقبل

في ما قيمته $\frac{1}{2}$

(٦) على أي افتراض تكون قيمة المجهول في هذه المسئلة نفسها صفرًا وما هو معنى

ذلك

الجواب اذا كان $a = 0$ والمعنى انها معاً وقت الافتراض اذا خرجت قيمة

المجهول صفرًا فقد توافق شروط المسئلة وقد تدل على كون المسئلة محالاً او متضمنة

محالاً

في ما قيمته $\frac{1}{n}$

(٧) على اي افتراض نصير قيمة المجهول لهذه المسئلة نفسها $\frac{1}{n}$ وما هو معنى ذلك

الجواب اذا كان $m = n$

اذا كانت بينها مسافة وتحركا على سرعة واحدة الى جهة واحدة لا يمكن ان يدرك احدهما الآخر فالعبارة $\frac{1}{n}$ تدل على محال وهي تعقد للادلة على عدم النهاية وذلك لانه اذا كانت فضلة m ون اي $m - n$ صغيرة جدا يكون الخارج $m - \frac{1}{n}$ كبيرا جدا . مثاله لنفرض $m - n = 0.001$

ثم $k = m - \frac{1}{n} = \frac{1}{1000} = 0.001$ واذا فرضنا $m - n = 0.0001$

ثم $m - \frac{1}{n} = \frac{1}{10000} = 0.0001$

فان لم يكن الفرق بين حركتهما صفرا لا بد من التفائهما معا بعد مدة من المرات وتلك المدة تزيد كلما قل الفرق بين الحركتين فان فرضنا ذلك الفرق اقل من اصغر كمية مدركة يكون $m - \frac{1}{n}$ اكبر من اكبر كمية مدركة اي غير متناه فاذا خرجت قيمة المجهول $\frac{1}{n}$ فذلك دليل على عدم امكانية استيفاء شروط المسئلة بالاعداد

في ما قيمته $\frac{1}{n}$

(٨) على اي افتراض نصير قيمة المجهول في هذه المسئلة نفسها $\frac{1}{n}$ وما هو معنى ذلك

الجواب اذا كان $a = 0$ و $m = n$

اذا كان a صفرا بنظرتان معا من نقطة واحدة واذا كان $m = n$ يتحركان على سرعة واحدة فيبتيان معا فنكون الساعة المطلوبة اية ساعة كانت لانها معا كل ساعة فالعبارة $\frac{1}{n}$ غير معينة وتدل على اية كمية متناهية فرضت مها كانت

في المرححات

المرححة عبارة جبرية دالة على كون كمية اعظم من كمية . مثاله $a < b$ فهي دالة على كون a اكبر او اكثر من b والكمية عن يمين علامة الترجيح سميت الاولى والتي عن يسارها سميت الثانية والقواعد الماضي ذكرها لمعاملة المعادلات نصح على الغالب في معاملة المرححات

في مرجحين اذا كانت الكمية الكبرى على جانب واحد من علامة الترجيح في كليهما قيل انها متفتتان معنى والأفها مختلفتان معنى

مثال النوع الأول $9 < 7$ و $7 < 6$ و $5 > 8$ و $4 > 3$

ومثال النوع الثاني $6 < 10$ و $7 > 3$

ومن القواعد لاجل معاملة المرجحات هذه الآتية

(١) اذا أُضيفت كمية واحدة الى جانبي مرجحة او طُرِحَتْ منها كمية واحدة فالمرجحة الحاصلة تكون من معنى الاولى . مثالة

$$\begin{aligned} \text{لفرض } ٨ < ٢ \quad \text{اضف } ٥ \text{ الى الجانبين} \\ ٨ + ٥ < ٢ + ٥ \quad \text{اطرح } ٥ \text{ من الجانبين} \\ ٨ - ٥ < ٢ - ٥ \end{aligned}$$

اذا كانت كميتا مرجحة سليبتين فاصغرها جبرياً اكبرها حسابياً . مثالة

$$\begin{aligned} ٢٥ - > ٢٠ - \quad \text{واذا اُضيف } ٢٠ \text{ الى الجانبين نصير } ١٠ > ٥ \\ \text{افرض } ٣ - > ٢ - \quad \text{اضف } ٦ \text{ الى الجانبين } ٦ + ٣ - > ٦ + ٢ - \text{ اي } ٩ - > ٨ - \\ ٩ > ٨ \quad \text{او اطرح } ٦ \text{ من الجانبين } ٦ - ٣ - = ٦ - ٢ - \text{ اي } ٦ - ٣ - > ٦ - ٢ - \text{ اي } ٩ - > ٨ - \\ \text{وعلى هذه القاعدة تنقل كمية من جانب مرجحة الى الجانب الآخر بعد بدل علامتها} \end{aligned}$$

مثالة

$$\begin{aligned} ١ + ٢ < ٢ + ٢ \quad \text{اي } ١٢ < ٢٢ \\ \text{بالمقابلة } ١ + ١٢ < ٢ + ٢٢ \quad \text{اي } ١٣ < ٢٤ \end{aligned}$$

(٢) اذا كانت مرجحتان على معنى واحد و اضيفت احدهما الى الاخرى الاولى للاولى والثانية الى الثانية فيكون المجموع مرجحة على نفس معنى الاوليين . مثالة

$$\begin{aligned} \text{لفرض } ١ < ٢ \quad \text{وس } ٤ < ٥ \text{ بالجمع } ١ + ٤ < ٢ + ٥ \\ \text{ولكن بالطرح قد نصح القاعدة وقد لا نصح} \\ \text{مثالة } ٤ > ٢ \quad \text{و } ٧ > ٢ \text{ بالطرح } ٢ > ٢ \text{ و } ٤ > ٢ \\ \text{ولكن } ١ > ١٠ \text{ و } ٦ > ٨ \text{ بالطرح } ٢ < ٢ \\ \text{فيجنب هذه المعاملة على قدر الامكان واذا اضطر اليها تبين معنى المرجحة الناتجة}$$

(٣) اذا ضُرِبَتْ مرجحة في كمية ايجابية تكون الحاصلة على نفس معنى الاولى وهكذا اذا قُسِمَتْ على كمية ايجابية

$$١ > ٢ \times ٢ \quad ١٢ > ٢ \times ٢ \quad ١ > ٢ \times ٢ \quad ١٢ > ٢ \times ٢$$

$$\frac{١}{٢} > \frac{١}{٢} \quad \frac{١}{٢} > \frac{١}{٢} \quad \frac{١}{٢} > \frac{١}{٢} \quad \frac{١}{٢} > \frac{١}{٢}$$

وعلى هذا القاعدة تزال الكسور من مرجحة

$$\text{مثال } \frac{١٢ - ٢}{١٢} < \frac{٢ - ١}{٢}$$

بالضرب في ٦ ا د نصير ١٢ (١ - ٢) < ٢ (٢ - ١)

(٤) اذا ضربت مرجحة في كمية سلبية او انقسمت عليها تكون المرجحة

الناججة على عكس معنى الاولى . مثال

$$٨ < ٧ \quad \text{اضرب في } -٢ \quad -٢٤ > -٢١$$

$$\text{وبالقسمة } -\frac{٧}{٢} > -\frac{٨}{٢}$$

وعند هذه المعاملة يتغير تعيين علامة المضروب فيه او المقسوم عليه واذا كانت سلبية تعكس علامة الحاصل او الخارج

(٥) اذا بدلت علامة جانبي مرجحة يجب قلب علامة الترجيح

لان ذلك مثل ضرب الجانبيين في -١

(٦) اذا كان الجانبان ايجابيين يمكن ترقيتها لاية قوة فُرِضَتْ

وتبقى المرجحة على معناها . مثال

$$٢ < ٥ \quad ٢ < ٥ \quad ٢ < ٥ \quad ٢ < ٥$$

يكونا ايجابيين فقد يبقى المعنى وقد يتقلب

$$\text{مثال } ٢ + > ٢ - \quad ٢ > ٢ \quad ٢ > ٢ \quad ٢ > ٢$$

$$٢ - < ٥ - \quad ٢ - > ٥ - \quad ٢ - > ٥ - \quad ٢ - > ٥ -$$

(٧) في تجذير مرجحة قد يلزم قلب علامة الترجيح

$$\text{مثال } ٢٥ > ١ \quad \text{بالتجذير } ٥ > ١ \quad \text{او } ٢ < ٥$$

امثلة

$$٤ > ٤$$

$$(١) ٢٥ > ٤$$

$$٥ < ك$$

$$(٢) ٥ ك - ٦ < ١٩$$

$$٤ < ك$$

$$(٣) ٢ ك + \frac{١٣}{٢} ك - ٣٠ < ١٠$$

$$٦ > ك$$

$$(٤) ٢ ك + \frac{٤}{٣} - ٨ > ٦$$

$$٦ < ك$$

$$(٥) \frac{١٧}{٣} < \frac{١٣}{٢} + \frac{٤}{٣} + ك - \frac{١}{٣} - \frac{٤}{٦}$$

$$(٦) ٩ < ٧ - \frac{٤}{١٢} + \frac{٤}{٦} + \frac{٤}{٤} + \frac{٤}{٣} + \frac{٤}{٣}$$

$$ك > ب$$

$$(٧) \frac{٢}{٧} - ك + ا > ا ب$$

(٨) سئل رجل كم ثمن ساعتك فقال ان ضرب ثمنها في ٤ واضيف ٦٠ الى الحاصل يكون المجموع اكثر من ٢٥٦ واذا ضرب الثمن في ٣ وطرح ٤٠ من الحاصل يكون المجموع اقل من ١١٢ مطلوب ثمن الساعة

(٩) اي عدد اذا جُمع نصفه مع ثلثه يكون المجموع اقل من ١٠٥ ونصفه الأربعة أكبر من ٢٢

(١٠) اي عدد ضعفه الأ ٦ أكثر من ٢٤ وثلاثة امثاله الأ ٦ اقل من مضاعفه ١٠ مع

(١١) اي عدد من مجتمعهما ٢٢ واذا انقسم اكبرها على اصغرها يكون الخارج اقل من ٥ واكثر من ٢

قد تقدم ان العبارة العامة لجسمين متحركين الى جهة واحدة هي $\frac{١}{م} - \frac{١}{ن}$ (انظر مسألة ٥) فذلك العبارة صحيحة مهما كانت المسافة بينها ومهما كانت سرعة كل واحد منها على افتراض الحركة الى جهة واحدة فلو فرض بينها ١٠٠ ميل وسرعة الأول ٤ اميال كل ساعة وسرعة الثاني ٦ اميال كل ساعة $\frac{١}{٤} - \frac{١}{٦} = \frac{١٠٠}{٤ \times ٦} = ٥٠$ ساعة اي البعد بينهما مقسوماً على فضله سرعتها يعدل الوقت المطلوب والمسافة التي ينقطعها كل واحد تعدل ذلك الوقت في السرعة ثم لنفرض ان بينها اميالاً = ١ والسرعة ن وم كما تقدم ولكن الحركة من طرفين الواحد نحو الآخر فاما العبارة الدالة على وقت الالتقاء

المجواب $\frac{١}{٤} + \frac{١}{٦} = \frac{١}{ن}$ الوقت والوقت في السرعة يعدل المسافة التي ينقطعها كل واحد فلو فرض بينها ١٠٠ ميل كما تقدم وسرعة الواحد ٦ والآخر ٤ كما تقدم

فلنا الوقت $\frac{١٠٠}{٤ + ٦}$ واذا فرض ك = مسافة الأول

وي = مسافة الثاني لنا ك $\frac{٤ \times ١٠٠}{٤ + ٦} = ي$ $\frac{٦ \times ١٠٠}{٤ + ٦} = ي$

ثم لنجعل المسئلة عامة اي جمان بينها ١ ميل وسرعة حركتهما ن ميل

وسرعة حركة الآخر م ميل كل ساعة فاي متى يلتقيان وك المسافة التي ينقطعها كل واحد منها

لنفرض ق = الوقت ك = مسافة الأول وي = مسافة الثاني ود = المسافة كلها

$$(١) \text{ ك + ي = د } \quad (٢) \text{ ك = ن } \times \text{ ق } \quad \text{ي = م } \times \text{ ق}$$

$$\text{و (ن + م) } \times \text{ ق = د او (٣) } \text{ ق = } \frac{\text{د}}{\text{ن + م}}$$

$$(٤) \text{ ك = ن } \times \text{ ق = } \frac{\text{ن} \times \text{د}}{\text{ن + م}} \quad \text{ك = م } \times \text{ ق = } \frac{\text{م} \times \text{د}}{\text{ن + م}}$$

فاذا كان ن = م ك = ١/٢ د وي = ١/٢ د لان السرعة واحدة للثنتين

$$\text{اذا كان ن = ٠ ك = } \frac{\text{ن} \times \text{د}}{\text{ن + م}} = ٠ \quad \text{ي = } \frac{\text{م} \times \text{د}}{\text{ن + م}} = \frac{\text{د}}{٢} \quad \text{د = } \frac{\text{د}}{٢}$$

اي الواحد ساكن والثاني ينقطع المسافة كلها

(١) غروب الساعات وغروب الدقائق متفنان عند الساعة ١٢ في اية ساعة

$$\text{يتفنان ايضا } \text{ق = } \frac{\text{د}}{\text{ن + م}}$$

وبما ان المينا منسومة الى ١٢ ساعة لنفرض د = ١٢

ون وم حركة الغروبين النسبية اي الاول م = ١٢

$$\text{ون = ١ اي ق = } \frac{١٢}{١١} = ١ \frac{١}{١١} \quad \frac{١٢}{١١} = ١ \frac{١}{١١}$$

وان سئل اي متى يتفق الغروبان بين الساعة ٢ و ٤ لنيل الثاني يتحرك ٢ عوضاً

عن ١ وق = $\frac{١٢ \times ٢}{١١}$ ولو سئل اي متى يجعل الغروب الواحد زاوية قائمة مع الآخر

بين الساعة ٢ و ٤ لنيل يقتضي للواحد ان يمر على مسافة د = ٢ ١/٢ وق = $\frac{١٢}{١١} \times ٢$

$٢ \frac{١}{٢} = ٢ \frac{١}{١١} \times ٢$ ولو سئل في اي وقت بين ٥ و ٦ يكون الغروبان على استقامة

واحدة لنيل

$$\text{د = } ٥ \frac{١}{٢} = ١ \frac{١}{٢} \times ١ \frac{١}{٢} = \text{ق}$$

ودائرة الساعة يمكننا ان نوسمها الي قدر ما شئنا فتكون عبارة عن دائرة جرمين

ساويين وهذه المعادلة نفسها تدل على نسبة حركة الشمس الى حركة القمر لانها يتحركان

مثل عقربي ساعة

الدائرة ٢٦٠ والقمر يتحرك كل يوم على المعدل ١٣١٧٦٤° والشمس ٩٨٥٦٥°

اي اقل من درجة فحركة القمر اسرع وتعديل ن وحركة الشمس = م ون = م =

١٣١٧٦٤° - ٩٨٥٦٥° = ٣٣١١٠° والوقت لالتحاق الجرم الواحد بالآخر

$$\text{اي ق = } \frac{\text{د}}{\text{ن - م}}$$

$$\frac{270}{112 \times 190.75} = 29^{\circ} 53' 08'' 887 \text{ يوماً أي } 29 \text{ يوماً و } 12 \text{ و } 4 \text{ و } 3 \text{ أي مدة دوران}$$

القمر القانوني أو الشهر القانوني

الزهرة لو نُظِرَ إليها من الشمس لكانت حركتها اليومية $26^{\circ} 1'$ والارض حركتها
إذا نُظِرَ إليها من الشمس $59'$ كل يوم ففي اية مدة تكون الارض والزهرة والشمس على
استقامة واحدة $ن = 23^{\circ} 1'$ $م = 59'$ $د = 260'$ $ن - م = 27'$
وق $= \frac{70 \times 260}{27} = 583^{\circ} 92'$ يوماً ونصف ذلك هو مدة مكث الزهرة بنجم الصبح

ونجم الغروب وهذه المعادلة الثالثة على النسبة بين المسافة والسرعة ثابتة صحيحة في اية
مسئلة كانت وإذا تعين الوقت بالرصد كما هو ممكن من جهة الارض وسيار من السيارات
العليا فيستعلم معدل حركة اي سيار كان اليومي لان $د = 260'$ ون $= 59'$ و $8'$
اي حركة الارض منظور إليها من الشمس ولنفرض ان $م$ اي حركة المربع مثلاً مجهول
ولنفرضها $= ك$ ثم $ق = ن - د$ $ق - ن = ك - د$ $ق - ن = ك - د$ $ق - ن = ك - د$
وقد ذكرت هذه الامثلة هنا للدلالة على كيفية استخدام الطرق الجبرية في المسائل
الفلكية وغيرها وسوف اذكر امثلة اخرى لذلك في عملها

— — —

الفصل السادس عشر

في التناسب والنسبة

١٧٤ التناسب هو التفاوت بين كميتين باعتبار المقدار . ولا يقع الا بين الكميات
المتشابهة اي بين عدد و عدد او بين خط و خط او بين مجسم و مجسم او بين سطح و سطح
وهلم جرا لانه لا يمكن مناسبة خطوط على اوطال ولا سطوح على اقسام الوقت . وإذا
اعتبرت زيادة كمية على اخرى فهو التناسب الحسابي وإذا اعتبرت مرار وجود احدها
في الاخرى فهو التناسب الهندسي

١٧٥ التناسب الحسابي حسبنا تقدم هو الفضلة بين كميتين او عدة كميات . والكميات
نفسها هي اجزاء التناسب . فالتناسب الحسابي بين ٥ و ٢ هو ٢ ويدل عليه بوضع
علامة الطرح بين الكميتين هكذا $٥ - ٢$ او بوضع نقطتين هكذا $٥ . ٢$ فان ضربت

اجزاء تناسب حسابي في كمية او انقسمت عليها بضرب تناسب او ينقسم على تلك الكمية
مثاله لو فرض $ت - ب = ر$

بضرب الجانبيين في $ح$ لنا $ح ت - ح ب = ح ر$
وبالقسمة على $ح$ $\frac{ت}{ح} - \frac{ب}{ح} = \frac{ر}{ح}$

اذا اضيفت اجزاء تناسب الى اجزاء تناسب آخر كل جزء الى نظيره او طرحت
اجزاء الواحد من اجزاء الآخر يعدل تناسب المجمع او الفضلة مجتمع التناسيب او
فضلتها . مثاله ليكن $ت - ب$ تناسيبين ثم $د - ح$

$(ت + د) - (ب + ح) = (ت - ب) + (د - ح)$ لان كل واحد من
الجانبيين $ت + د - ب - ح$ وكذلك $(ت - ب) - (د - ح) =$
 $(ت - ب) - (د - ح)$ لان كل واحد من الجانبيين $ت - د - ب + ح$

التناسب الحسابي بين ١١ و ٤ = ٧

التناسب الحسابي بين ٥ و ٢ = ٣

وتناسب المجمع ١٦ و ٦ = ١٠ = مجموع التناسيب

وتناسب الفضلة ٦ و ٢ = ٤ = فضلة التناسيب

١٧٦ التناسب الهندسي هو المداول عليه بالخارج من قسمة كمية على اخرى .
فالتناسب الهندسي بين ٨ و ٤ هو $\frac{٨}{٤} = ٢$ وبين ٢ و ١ هو $\frac{٢}{١} = ٢$ وبين ٤ و ٢
 $ح + ب = س$ هو $\frac{ح + د}{س}$ وبذلك عليه ايضا بنقطتين بين الكيتين . مثاله ت :
ب و ١٢ : ٤ ويقال للكيتين معاً زوج وتسمى الاولى سابقاً والثانية تالياً

١٧٧ في كل تناسب ثلاثة اقسام وهي السابق والتالي والتناسب الواقع بينهما . وان
فرض اثنان منها يستعلم منها الثالث هكذا
لفرض السابق $ت = س$ والتالي $ب = س$ والتناسب $ر$ ثم حسب الحد
المذكور آنفاً $ر = س$ اي التناسب يعدل الخارج من قسمة السابق على التالي بالمجبر
 $ت = س = ر$ اي السابق يعدل حاصل التالي في التناسب . وبالقسمة على $ر$
 $\frac{ت}{ر} = \frac{س}{ر} = ١$ اي التالي يعدل الخارج من قسمة السابق على التناسب

فرع أول في زوجين ان كان السابقان متساويين والتاليان متساويين ايضا
 يكون التناسبان متساويين (افلیدس ك ٥ ق ٧)
 فرع ثان في زوجين ان كان التناسبان متساويين والسابقان متساويين يكون
 التاليان متساويين. وان كان التناسبان متساويين والتاليان متساويين يكون السابقان
 متساويين (افلیدس ك ٥ ق ٩)

١٧٨ اذا تساوى السابق والتالي يكون التناسب واحداً ويقال له تناسب
 المساواة. مثاله $١٨:٦ = ٦:٢$ وإذا كان السابق أكبر من التالي يكون التناسب
 أكثر من واحد. مثاله $١٨:٦ = ٣$ ويُسمى تناسبا أعظم. وإذا كان السابق أصغر
 من التالي يكون التناسب أقل من واحد. مثاله $٢:٦ = \frac{١}{٣}$ ويُسمى تناسبا أصغر. أما
 التناسب بالقلب أو التناسب المكفوء فهو تناسب مكفوء كميّتين. فالتناسب بالقلب
 بين ٦ و ٣ هو $\frac{١}{٦} : \frac{١}{٣}$ أي $\frac{١}{٦} + \frac{١}{٣}$ والتناسب المستقيم بين ت و ب هو $\frac{ت}{ب}$ وبالقلب
 هو $\frac{ب}{ت}$ أي $\frac{١}{ت} + \frac{١}{ب} = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٦} = \frac{١}{٢}$ أي الخارج من قسمة التالي على
 السابق. فيدل على التناسب المكفوء أما بقلب الكسر الدال على المستقيم وأما بقلب
 رتبة السابق والتالي. فتناسب ت : ب بالقلب هو ب : ت

١٧٩ التناسب المركب هو التناسب بين حواصل اجزاء تناسبين فأكثر اذا
 ضرب كل جزء من الواحد في نظيره من الآخر. مثاله
 تناسب $٢ = ٤:٦$
 وتناسب $٣ = ٤:١٢$
 والمركب منها هو $٦ = ١٢:٢٢$

وهكذا المركب من ت : ب و س : د و ح : ي هو ت س ح : ب د ي
 $\frac{ت س ح}{ب د ي} =$

فرع كل تناسب مركب يعدل حاصل التناسبات البسيطة التي تركب منها. ا.
 مثاله تناسب ت : ب = $\frac{ت}{ب}$ و س : د = $\frac{س}{د}$ و ح : ي = $\frac{ح}{ي}$ والمركب هو ت س ح : ب د ي
 ب د ي = $\frac{ت س ح}{ب د ي}$ حاصل الكسور الثلاثة على التناسبات البسيطة

١٠٨ في عدة تناسبات اذا كان نالي الاول سابق الثاني وتالي الثاني سابق

الثالث وهم جراً يكون تناسب السابق الأول الى التالي الاخير مائلاً للتناسب المركب من التناسبات كلها . مثالة

ث : ا ب : ب : س : س : د : د ح
فالمركب من هذه التناسبات هو $\frac{ث : ب : س : د}{ب : س : د ح}$ وهو يعدل $\frac{ث}{ح}$ اي التناسب السابق الأول الى التالي الاخير

١٨١ التناسب المركب من مربع اجزاء تناسب بسيط يُسمى تناسباً مائلاً . فلو فرض $ث : ب$ لكان تناسبها المائلي $ث : ب$ والكمي هو المركب من تكرار ثلاثة تناسبات بسيطة اي $ث : ب$ وناسب الجذر المائلي هو $٦ : ٢$ والجذر الكمي $٦ : ٢$ فالتناسب البسيط بين ٦ و ٢ هو $٣ : ١$ اي $٣ = ٢ : ٦$

ومضاعفاته
وثلثه امثاله
والمائلي
والكمي

$٦ = ٢ : ١٢$
 $٩ = ٢ : ١٨$
 $٩ = ٢ : ١٨$
 $٢٧ = ٢ : ٢٧$

١٨٢ قد رأينا ان التناسب يدل عليه بكسري . ورأينا في فصل الكسوران ضرب صورة كسري هو كضرب قيمته وقسمه صورته وكقسمة قيمته (٤٥) فاذا ضرب سابق زوج في كمي ما بضرب التناسب في تلك الكمية . وقسمه السابق يُقسم التناسب . مثاله $٢ : ٦$
 $٢ = ٢ : ٢٤ = ١٢$ و $١٢ = ٢ : ٦$ و $١٢ = ٢ : ٦$ و $١٢ = ٢ : ٦$
فرع اذا بقي التالي على حاله فكلما زاد السابق زاد التناسب وبالفلب (اقليدس ك ٥ ق ٨ و ١٩)

١٨٣ ضرب تالي زوج كقسمة التناسب . وقسمه التالي كضرب التناسب .
مثاله $٦ = ٢ : ١٢$ و $٣ = ٤ : ١٢$ و $٣ = ٤ : ١٢$ و $٣ = ٤ : ١٢$
فرع اذا بقي السابق على حاله فكلما زاد التالي صغر التناسب وبالفلب (اقليدس ك ٥ ق ٨ و ١٠)

ثم انه قد انضح ما تقدم ان ضرب سابق زوج هو كقسمة التالي . وقسمه السابق كضرب التالي . مثاله

مفروض تناسب ت : ب مثل س : د ثم ت + س : ب + د = ت : ب
او س : د

$$(١) \text{ لان بالمفروض } \frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$$

$$(٢) \text{ بالجبهر } ت د = ب س$$

$$(٣) \text{ اضعف س د الى الجانبيين } ت د + د س = ب س + س د$$

$$(٤) \text{ بالقسمة على د } ت + س = \frac{ب س + س د}{د}$$

$$(٥) \text{ بالقسمة على ب + د } \frac{ت}{ب + د} = \frac{س}{د} = \frac{ب س + س د}{ب د + د د}$$

$$\text{وكذلك } \frac{ت}{ب} = \frac{س}{د} = \frac{ت س}{ب د}$$

$$(١) \text{ لان بالمفروض } \frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$$

$$(٢) \text{ وبالجبهر } ت د = ب س$$

$$(٣) \text{ بطرح س د من الجانبيين } ت د - د س = ب س - س د$$

$$(٤) \text{ بالقسمة على د } ت - س = \frac{ب س - س د}{د}$$

$$(٥) \text{ بالقسمة على ب - د } \frac{ت}{ب - د} = \frac{س}{د} = \frac{ت س}{ب د - د د}$$

$$\text{مفروض } ٢ = ٥ : ١٥$$

$$\text{وايضاً } ٢ = ٢ : ٩$$

$$\text{بجمع اجزاء الزوجين } ٢ = ٢ + ٥ : ٩ + ١٥$$

$$\text{بالطرح } ٢ = ٢ - ٥ : ٩ - ١٥$$

ومكناهما نعددت الازواج . مثلاً

$$٢ = ٦ : ١٢$$

$$٢ = ٥ : ١٠$$

$$٢ = ٤ : ٨$$

$$٢ = ٢ : ٦$$

$$\text{بالجمع } ٢ = (٢ + ٤ + ٥ + ٦) : (٦ + ٨ + ١٠ + ١٢)$$

$$\text{ق ا و ١٢) اقل يدس ك ه}$$

١٨٦ تناسب اعظم بصغر باضافة كمية واحدة الى جزءه . مثاله اذا فرض

$$\text{ت + ب : ت اي } \frac{ت + ب}{ت} \text{ واذا اضيف ك الى الجزئين فلنا } \frac{ت + ب + ك}{ت + ك}$$

$$\text{بالتحويل الى مخرج مشترك بصير الاول } \frac{ت + ب + ك}{ت + ك} \text{ والثاني } \frac{ت + ب + ك}{ت + ك}$$

$$\text{فالصورة الثانية اقل من الاولى ومن ثم صغر النسب}$$

تناسب اصغر يزداد باضافة كمية واحدة الى جزويه
 مفروض ت - ب : ت اي $\frac{ت - ب}{ت}$ ثم باضافة ك الى الجزوين لنا
 ت - ب + ك : ت + ك اي $\frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$ وبالتحويل الى مخرج مشترك يصير
 الاول $\frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$ والثاني $\frac{ت - ب + ك}{ت + ك}$ والصورة
 الثانية اكبر من الاولى فيكون التناسب قد زاد . واذا طرح كمية واحدة من الجزوين
 يكون النعل عكس ما ذكر

امثلة

- (١) اي تناسب اكبر ٩ : ١١ ام ٢٥ : ٤٤
- (٢) اي تناسب اكبر ت + ٣ : ١ : ٢ ت ام ٢ ت + ٧ : ٢ : ١ ت
- (٣) سابق زوج ٦٥ والتناسب ١٢ فما هو التالي
- (٤) اذا كان التالي ٧ والتناسب ١٨ فما هو السابق
- (٥) ما هو التناسب المركب من ٧ : ٢ و ٢ : ٥ ب و ٧ : ١ + ٢ : ١ ي - ٢
- (٦) ما هو التناسب المركب من ك + ١ : ي : ب وك - ١ : ي : ت + ب و ت + ب : ح
 الجواب ك : ٢ - ي : ١ : ب : ح
- (٧) اذا تركب ٥ ك + ٧ : ٢ ك - ٢ مع ك + ٢ : ٢ : ١ ك + ٢ فحل يحدث
 تناسب اعظم او اصغر الجواب تناسب اعظم
- (٨) اي تناسب من الانواع الثلاثة (١٧٨) يحدث من تركيب ك + ١ : ي : ت
 وك - ١ : ي : ب وب : ك : ٢ - ي : ت الجواب تناسب المساواة
- (٩) ما هو التناسب المركب من ٥ : ٧ و ٩ : ٤ المالي ٩ : ٢ والكعي ٢ : ٣
 الجواب ١٥ : ١٤
- (١٠) ما هو التناسب المركب من ٧ : ٢ وك : ي الكعي ٩ : ٤٩ والجذري ١٥ : ١٤
 الجواب ك : ٢ : ي المالي
- (١١) ما هو التناسب المركب من ت - ١ : ك : ٢ وت + ١ : ك : ب وب : ت - ١
 الجواب (ت + ١) : ك : ٢ : ت
- (١٢) اي تناسب اكبر ت + ٢ : ٢ : ١ ت + ٤ ام ت + ٤ : ٢ : ١ ت + ٥
 الجواب ت + ٤ : ٢ : ١ ت + ٥

نبذة

في النسبة

١٨٧ النسبة هي المساواة بين تناسلين فاكثر. وهي اما حساية واما هندسية.
فالحساية هي مساواة تناسبات حساية كما في ٦ : ٤ :: ١٠ : ٨ والهندسية هي
مساواة تناسبات هندسية كما في ٦ : ٢ :: ١٢ : ٤ فينبغي ان يميز بين التناسب
والنسبة ولو استعمل اللفظان مترادفين في بعض الاحيان. والفرق بينهما واضح اذ يقال
في تناسب ما انه اكبر من آخر. مثاله ١٢ : ٢ :: ٦ : ١ أكبر من ٦ : ٢ ولا يقال ذلك في
النسبة لانها مساواة تناسبات والمساواة تستلزم عدم التفاوت. وفي كل نسبة زوجان.
ويقال للسوابق الاجزاء المتشابهة وكذلك للتوالي. ويقال للسوابق والتوالي من كل
زوج الاجزاء المتناسبة ولا خلاف في رتبة زوجي نسبة لانه ان كان ت : ب :: س : د
تكون س : د :: ت : ب من حيث مساواة التبعيتين. واذا قصد الدلالة على
نسبة بين ثلاث كميات فلا بد من تكرار الوسطى. فيدل على النسبة بين ٨ و ٤ و ٢
هكلا ٨ : ٤ :: ٤ : ٢

ويسمى المكرر متناسبا متوسطا بين الآخرين. وتسمى الثالثة من الكميات الثلاث
متناسبا ثالثا للآخرين

١٨٨ النسبة بالقلب ويقال لها ايضا النسبة المكعوبة هي المساواة بين تناسب
مستقيم وناسب بالقلب. مثاله ٢ : ٤ :: ١/٢ : ١/٤ اي نسبة ٤ الى ٢ هي بالقلب كنسبة ١/٢
الى ١/٤ وتكتب احيانا هكلا ٢ : ٤ :: ١/٢ : ١/٤ بالقلب. ومتى تعددت الكميات وكانت
تناسب الاولى الى الثانية مثل تناسب الثانية الى الثالثة ولم تجرأ سميت النسبة متصلة.
مثاله ١٠ و ٨ و ٦ و ٤ و ٢ في النسبة الحساية المتصلة. و ٦ و ٢ و ٤ و ٢ و ١ و ٨ و ٤ في
النسبة الهندسية المتصلة. وهكلا ت : ب :: ب : س :: س : د :: د : ح الى آخره.
والنسبة الحساية انما هي معادلة بسيطة. مثالها ت - ب = س - د وفي كل نسبة
حساية يكون مجموع الطرفين مائلا لمجموع الوسطين اي ت + د = ب + س وهكلا
في ١٢ - ١٠ = ١١ - ٩ و ١٢ + ٩ = ١١ + ١٠ وان كانت ثلاث كميات على
نسبة حساية يكون مجموع الطرفين مضاعف الوسط. فاذا فرض ت - ب = ب - س
- س يكون ت + س = ٢ ب

نبذة

في النسبة الهندسية

١٨٩ متى كانت اربع كميات على نسبة هندسية يكون حاصل الطرفين مائلاً لحاصل الوسطين

مفروض $ت : ب :: س : د$ فإذا $ت = د = ب س$ لانه بالمفروض $\frac{ت}{ب} = \frac{س}{د}$ وبالمجهر $ت = د = ب س$ وهكذا $١٠ : ١٥ :: ٨ : ١٢$ $١٥ \times ٨ = ١٠ \times ١٢$ فإذا نُزل ضلع من طرفي الى آخر ومن وسط الى آخر لا تغير النسبة. فإذا فُرض $ت : م :: ب : ك$ ي تكون $ت : ب :: م : ك$ ي وإذا فُرض $ن : ت :: ب : ك$ ي تكون $ت : ب :: ك : ن$ ي

إذا كان حاصل كيتين مائلاً لحاصل كيتين أخريين تكون الأربع على نسبة هندسية إذا جُمِل ضلعا الجانب الواحد طرفين وضلعا الجانب الآخر وسطين. فإن فُرض $م ي = ن ح$ تكون $م : ن :: ح : ي$ وإن فُرض $(ت + ب) \times س = (د - م) \times ي$ تكون $ت + د :: م :: ي : س$

إذا كانت ثلاث كميات على نسبة هندسية يكون حاصل الطرفين مائلاً لمربع الوسط. مثاله إذا فُرض $ت : ب :: ب : س$ يكون $ت س = ب^2$ فنجده متناسباً متوسطاً بين كيتين بتعذير حاصلهما. فإذا فُرض $ت : ك :: ك : س$ لذا $ك^2 = ت س$ وك $= \sqrt{ت س}$

١٩٠ ينتج ما تقدم ان كل طرف من نسبة يعدل حاصل الوسطين مقسوماً على الطرف الآخر. وكل وسط يعدل حاصل الطرفين مقسوماً على الوسط الآخر. إذا فُرض $ت : ب :: س : د$ يكون $ت = د = ب س$ و $ت = \frac{ب س}{د}$ $\frac{ب س}{ت} = س = \frac{ت د}{ب}$ فان فُرض ثلاثة اجزاء من نسبة نستعلم الرابع بقسمة حاصل الثاني والثالث على الأول. وقد بُني على ذلك باب الاربعة المتناسبة في علم الحساب

١٩١ إذا كانت اربع كميات متناسبة يمكن مبادلة الطرفين او الوسطين او جزئي كل زوج بدون تغيير النسبة لان حاصل الطرفين لا يزال مائلاً لحاصل الوسطين بعد المعاملات المذكورة

إذا قُرِضَ ت : ب :: س : د

و ٤ : ٦ :: ٨ : ١٢

فإذا بمبادلة الوسطين

ت : س :: ب : د ٤ : ٨ :: ٦ : ١٢ (أقليدس ك ه ق ١٦)

وبمبادلة الطرفين

د : ب :: س : ت ١٢ : ٦ :: ٨ : ٤

وبمبادلة جزئي كل زوج

ب : ت :: د : س ٦ : ٤ :: ١٢ : ٨

ويُسمى هذا العمل الأخير قلباً

وبمبادلة ترتيب الزوجين

س : د :: ت : ب ٨ : ١٢ :: ٤ : ٦

وبقلب ترتيب النسبة كلها

د : س :: ب : ت ١٢ : ٨ :: ٦ : ٤

لان المعادلة من الجميع ت = د = ب = س و $٨ \times ٦ = ١٢ \times ٤$

١٩٢ لا تُنزع النسبة إذا ضربَ الجزآنِ المتناسبان معاً أو الجزآنِ المتشابهان معاً في كمية واحدة أو انقسما عليها

مفروض ت : ب :: س : د

(١) بضرب المتناسبين الأولين م : ت :: م : ب :: س : د

(٢) بضرب المتناسبين الآخرين ت : ب :: م : س :: م : د

(٣) بضرب السابقين (أقليدس ك ه ق ٣)

م : ت :: ب : س :: م : د

(٤) بضرب التاليين ت : م :: ب : س :: م : د

(٥) بقسمة الأولين $\frac{م}{م} : \frac{ت}{م} :: \frac{ب}{م} : \frac{س}{م}$

(٦) بقسمة الآخرين $\frac{ت}{م} : \frac{ب}{م} :: \frac{م}{م} : \frac{س}{م}$

(٧) بقسمة السابقين $\frac{ت}{م} : \frac{ب}{م} :: \frac{م}{م} : \frac{س}{م}$

(٨) بقسمة التاليين $\frac{ت}{م} : \frac{م}{م} :: \frac{ب}{م} : \frac{س}{م}$

فخرج إذا ضرب كل واحد من الأجزاء الأربعة أو انقسم لا تتغير النسبة (أقليدس

ك ه ق ٤)

ت م ب م س م د ت م ب م س م د
 فرع آخر في المعاملات الثاني المتقدمة يمكن ضرب الثاني عوضاً عن قسمه
 السابق وعكسه

١٩٣ إذا عدل تناسبان ثالثاً يكونان متساويين (اقليدس ك ه ق
 (١١) (اولى ١١)

إذا فرض ت : ب م : ن وس : د م : ن
 يكون ت : ب م : ن وس : د م : ن
 وإذا فرض ت : ب م : ن وم : ن س : د
 يكون ت : ب م : ن وس : د م : ن
 فرع إذا فرض ت : ب م : ن وم : ن س : د
 يكون ت : ب م : ن وس : د م : ن (اقليدس ك ه ق ١٢)

١٩٤ إذا فرض م : ت ن : ب ثم بالمبادلة م : ن ت : ب
 وإذا فرض م : س ن : د ثم بالمبادلة م : ن س : د
 فحسباً تقدم ت : ب م : ن

إذا فرض م : ت ن : ب ثم بالقلب والمبادلة ت : ب م : ن
 وإذا فرض م : س ن : د ثم بالمبادلة م : ن س : د فيكون
 ت : ب م : ن س : د حسباً تقدم

إذا فرض ت : ب م : ن ثم بالمبادلة ت : ب م : ن
 وإذا فرض م : س ن : د تكون ت : ب م : ن كما تقدم (اقليدس
 ك ه ق ٢٢)

١٩٥ في عدة ينسب إذا كان الجزآن الآخران من الأولى الأولين من الثانية
 والآخران من الثانية الأولين من الثالثة وهلم جرا تكون نسبة الأولين من الأولى كنسبة
 الآخرين من الأخيرة . مثالة

ت : ب م : ن
 س : د ح : ل
 ح : ل م : ن
 م : ن ك : ي
 تكون ت : ب م : ن ك : ي

وهكذا ان امكن تحويل النسب الى هذا الترتيب
 مثاله ت : س :: ب : د بالمبادلة ت : ب :: س : د
 س : ح :: د : ل بالمبادلة س : د :: ح : ل
 ح : م :: ل : ن بالمبادلة ح : ل :: م : ن
 م : ك :: ن : ي بالمبادلة م : ن :: ك : ي
 ت : ب :: ك : ي كما تقدم

196 متى كان الطرفان او الوسطان من نسبة واحدة كالطرفين او الوسطين
 من اخرى تكون الاجزاء الاربعة الباقية متناسبة بالقلب

مثاله ت : م :: ن : ب وس : م :: ن : د ثم ت : س :: ب : د
 لان ت : ب = م : ن وس : د = م : ن وت : ب = س : د اي ت : س :: د : ب
 وهكذا متى تشابه الطرفان . مثاله م : ت :: ب : ن وم : س :: د : ن ثم
 ت : س :: د : ب (اقليدس ك ه ق 24)
 واذا كانت ت : م :: ن : ب وم : س :: د : ن فيكون ت : س :: د : ب
 كما تقدم

197 اذا شابهت اجزاء نسبة اجزاء نسبة اخرى يكون مجموعها او فضلها
 ايضاً (اقليدس ك ه ق 2) مثاله
 اذا فرض ت : ب :: س : د
 وايضاً ت : ب :: م : ن

فبالجمع ت : م + ب :: ن : س + د وت : م - ب :: ن : س - د وت
 : ب :: س + م : د + ن وت : ب :: س - م : د - ن
 وبالمبادلة ت : م :: س : ب + ن : د وت : م :: س : ب - ن : د
 وهكذا تعددت النسب . مثاله

س : د
 ح : ل
 م : ن
 ك : ي
 مفروض ت : ب ::

ثم ت: ب :: س: ح + م + ك: د + ل + ن + ي (افلیدس ك ه ق ٢)
 اذا فُرض ت: ب :: س: د وم: ب :: ن: د
 يكون ت + م: ب :: س: ن: د لامة بالمبادلة ت: س :: ب: د
 وم: ن: ب: د فاذا ت + م: س: ن + ب: د وبالمبادلة ت + م: ب
 :: س: ن: د (افلیدس ك ه ق ٢٤)

١٨٨ في النسبة الواحدة اذا أُضيف احد الجزئين المتناسبين او المتشابهين الى
 الآخر او طرح احدهما من الآخر لا تتغير النسبة. فاذا فُرض ت: ب :: س: د
 و ١٢: ٤ :: ٦: ٢ ثم

(١) باضافة الجزئين الاخيرين الى الاولين

ت + س: ب + د :: ت: ب ١٢ + ٤: ٦ + ٢ :: ١٢: ٤

ت + س: ب + د :: س: د ١٢ + ٤: ٦ + ٢ :: ١٢: ٤

ت + س: ت: ب :: د: ب ١٢ + ٤: ٦ + ٢ :: ١٢: ٤

ت + س: س: ب :: د: د ١٢ + ٤: ٦ + ٢ :: ١٢: ٤

(٢) باضافة السابقين الى التاليين

ت + ب: ب: ب :: س: د ١٢ + ٤: ٤ + ٦ :: ١٢: ٤

ت + ب: ت: ب :: س: د ١٢ + ٤: ٦ + ٢ :: ١٢: ٤

وهكذا الى آخره. وينال لهذا العمل تركيب النسب (افلیدس ك ه ق ١٨)

(٣) بطرح الاولين من الاخيرين

س - ت: ت: ب :: س - ب: ب س - ت: س :: س - د: د الخ

(٤) بطرح الاخيرين من الاولين (افلیدس ك ه ق ١٧)

ت - س: س: ب - د :: ت: ب ت - س: ت :: س - د: د الخ

(٥) بطرح التاليين من السابقين

ت - ب: ب: ب - س :: د: د ت - ت: ت :: ب - س: س - د الخ

وبسي هذا الاخير قلب النسبة

(٦) بطرح السابقين من التاليين

ب - ت: ت: د - س :: س: س ب - ب: ب - ت :: د: د - س الخ

(٧) ت + ب: ب: ت - ب :: س + د: د - س د اي مجمع الاولين الى فضلها

كجمع الاخيرين الى فضلتهما
فرع اذا كانت اربع كميات مركبة متناسبة كما في الامثلة المتقدمة تكون البسيطة
التي تركبت منها متناسبة ايضاً . فاذا فرض $ت + ب : ب : س + د : د$ نكون
 $ت : ب :: س : د$ ويسمى هذا العمل قسمة النسبة (افلديس ك ٥ ق ١٧)

١٩٩ اذا ضربت اجزاء نسبة في اجزاء نسبة اخرى كل جزء في نظيره تكون
المحاصل متناسبة ايضاً . مثالة

$$\begin{array}{lcl} ت : ب :: س : د & ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ \\ و ح : ل : م :: ن : & ١٠ : ٥ :: ٨ : ٤ \\ ت ح : ب ل :: س م : د ن & ١٢٠ : ٢٠ :: ٤٨ : ٨ \end{array}$$

وهكذا مهما تعددت النسب . مثالة

$$\begin{array}{lcl} ت : ب :: س : د \\ ح : ل :: م : ن \\ ف : ق :: ك : ي \\ ت ح ف : ب ل ق :: س م ك : د ن ي \end{array}$$

وهكذا اذا ترقط اجزاء نسبة الى اية قوة فرضت . مثالة

$$\begin{array}{lcl} ت : ب :: س : د & ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ \\ ت : ب :: س : د & ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ \\ ت : ب :: س : د & ١٦٠ : ٤ :: ٢٦٤ : ١٤٤ \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} و ايضاً & ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ \\ و & ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ \\ و & ١٢ : ٤ :: ٦ : ٢ \end{array}$$

٢٠٠ اذا انقسمت اجزاء نسبة الى اجزاء نسبة اخرى تكون الخوارج متناسبة .

مثالة

$$٩:١٨::٦:١٢$$

$$ت:ب::س:د$$

$$٣:٩::٢:٦$$

$$ح:ل::م:ن$$

$$\frac{٩:١٨::٦:١٢}{٣:٩::٢:٦}$$

$$\frac{ت:ب::س:د}{ح:ل::م:ن}$$

٢٠١ في تركيب بعض النسب يمكن افناء الاجزاء المتساوية واخراجها قبل الضرب لاجل اختصار العمل . مثاله

$$ت:ب::س:د$$

$$م:ت::ن:س$$

$$ت:م::ب:ن::س:د$$

فإذا م:ب::ن:د وهكذا

$$٣:٩::٤:١٢$$

$$ت:ب::س:د$$

$$٦:٣::٨:٤$$

$$ب:ح::د:ل$$

$$١٥:٦::٢٠:٨$$

$$ح:م::ل:ن$$

$$١٥:٩::٢٠:١٢$$

$$ت:م::س:ن$$

٢٠٢ متى كانت اربع كميات متناسبة فاذا كانت الاولى اعظم من الثانية تكون الثالثة اعظم من الرابعة واذا كانت مثلها فمثلها او اصغر فاصغر

$$\left. \begin{array}{l} ت = ب \quad س = د \\ ت < ب \quad س < د \\ ت > ب \quad س > د \end{array} \right\} \begin{array}{l} ت:ب::س:د \text{ فاذا} \\ \\ \end{array}$$

فرع اذا كانت الاولى اعظم من الثالثة يكون الثانية اعظم من الرابعة (افليدس ك ه ق ١٤) فان فرض $ت:ب::س:د$ فبالمبادلة $ت:س::ب:د$ وحينئذ ان كان $ت = ب$ يكون $س = د$ الى آخره

فرع ثان اذا فرض $ت:م::س:ن$

وم:ب::ن:د فان كان $ت = ب$ يكون $س = د$

الى آخره (افليدس ك ه ق ٢٠) لان بالتركيب $ت:ب::س:د$ ومن ثم ان كان $ت = ب$ يكون $س = د$ الى آخره

$$\left\{ \begin{array}{l} ت:م::ن:د \\ م:ب::س:ن \end{array} \right.$$

فان كان $t = b$ يكون $s = d$ الى آخره (افلېدس ك ه ق ٢١)
اذا كانت اربع كميات متناسبة تكون مكفوءاتها متناسبة ايضا . فاذا فرض
 $t : b :: s : d$ يكون $t : b :: \frac{1}{d} : \frac{1}{s}$ لان الحاصل من تحويلها كلها هو
 $t d = b s$

نبذة

في النسبة المتصلة

٢٠٢ في النسبة المتصلة (١٨٨) تكون جميع التناسبات متساوية . فاذا فرض
 $t : b :: b : s :: s : d :: d : y$ يراد ان تناسب $t : b$ يعدل تناسب
 $b : s$ وناسب $s : d$ الى آخره . ونناسب الاولى الى الاخيرة يعدل الحاصل
من التناسبات المتوسطة بينها اي تناسب $t : y$ يعدل $\frac{t}{b} \times \frac{b}{s} \times \frac{s}{d} \times \frac{d}{y}$
ولكن هذه التناسبات كلها متساوية فيمكن الضرب في ايها شئت اي $\frac{t}{b} \times \frac{b}{s} \times \frac{s}{d} \times \frac{d}{y}$
 $\frac{t}{b} = \frac{t}{b}$ فيكون $t : y :: b : b$ ولنا من ذلك هذه القاعدة

وهي اذا كانت عدة كميات على نسبة متصلة تكون نسبة الاولى الى الاخيرة كنسبة
احد التناسبات المتوسطة مرقاة الى قوة دليلها اقل من عدة الكميات بواحد . مثاله
اذا فرض $t : b :: b : s :: s : d :: d : y$ تكون $t : y :: b : b$ وان فرض
 $t : b :: b : s :: s : d :: d : y$ تكون $t : y :: y : b$

٢٠٤ اذا كانت عدة كميات على نسبة متصلة تكون متناسبة ايضا اذا انعكس
ترتيبها حسب ما تقدم (١٩١) فاذا فرض

٤ ٨ ١٦ ٢٢ ٦٤

فالتناسبات

وبالعكس

فالتناسبات

اي متى انعكس ترتيب الكميات تكون التناسبات مكفوءات التناسبات المستقيمة
ومكفوءات كميات متساوية هي متساوية كما يتضح من الاولية الرابعة

في النسبة الموسيقية

اذا كانت النسبة بين ثلاث كميات بحيث تكون نسبة الاولى الى الثالثة كنسبة فضلة

الاولى والثانية الى فضلة الثانية والثالثة قيل انها على نسبة موسيقية . مثالة ٢ و ٢ و ٦ لان

$$٢ : ٦ :: ٢ : ٦$$

فاذا كانت ا وب وس على نسبة موسيقية فحينئذ

$$ا : س :: ا - ب : ب - س$$

بالتحويل الى معادلة نصير $س = \frac{ا \cdot ب}{ا - ب}$

فاذا اردت متناسبا ثالثا موسيقيا لكيتين فاقسم حاصل الاولى والثانية على مضاعف الاولى الا الثانية

مثال ١ مطلوب متناسبا ثالثا موسيقيا بين ٢ و ٥

مثال ٢ مطلوب متناسبا ثالثا موسيقيا بين ٥ و ٨

اربع كيات هي على نسبة موسيقية اذا كانت نسبة الاولى الى الرابعة كنسبة فضلة الاولى والثانية الى فضلة الثالثة والرابعة . مثالة ٢ و ٢ و ٤ و ٨ لان

$$٢ : ٨ :: ٢ : ٨$$

واذا كانت ا ب س د على نسبة موسيقية فحينئذ

$$ا : د :: ا - ب : ب - س$$

بالتحويل $د = \frac{ا \cdot س}{ا - ب}$

اي اذا اردت متناسبا موسيقيا رابعا لثلاث كيات فاقسم حاصل الاولى والثانية على مضاعف الاولى الا الثانية

مثال ١ مطلوب متناسبا موسيقيا رابعا بين ٤ و ٥ و ٦

مثال ٢ مطلوب متناسبا موسيقيا رابعا بين ٥ و ٨ و ١٠

مسائل

(١) اقسام ٦٠ الى قسمين تكون نسبة حاصلها الى مجموع مربعيها كنسبة ٢ الى ٥

لفرض ك = قسما و ٦٠ - ك = القسم الآخر

$$(١) \text{ بالشروط } ٦٠ - ك - ك : ٢ :: ٢٠ - ٢٦٠٠ + ك : ٢ :: ٥ : ٢$$

$$(٢) \text{ بالتحويل الى معادلة } ٢٠٠ - ك = ٥ - ك = ٤ + ك = ٢٤٠ - ٧٢٠٠ + ك$$

$$(٣) \text{ بالمقابلة والقسمة } ٦٠ - ك = ٨٠٠ -$$

$$(٤) \text{ باتمام التوزيع والتجذير والمقابلة } ٤٠ = ٤٠ - ٦٠ = ٢٠$$

(٢) اقسام ٤٩ الى قسمين تكون نسبة اكبرها مع ستة الى الاصغر الا واحد عشر كنسبة ٢ : ٩

لنفرض $ك = \text{الأكبر}$ $٤٩ - ك = \text{الاصغر}$

بالشروط $ك + ٦ : ٢٨ - ك :: ٢ : ٩$

باضافة السابقين الى التاليين $ك + ٦ : ٤٤ :: ٩ : ١١$

بقسمة التاليين $ك + ٦ : ٤ :: ٩ : ١$

ثم بالتحويل $ك + ٦ = ٢٦$ $ك = ٢٠$

(٣) اي عدد اذا اضيف اليه ١ ثم ٥ ثم ١٢ تكون نسبة المجموع الاول : الثاني :: الثاني : الثالث

لنفرض العدد $ك$

ثم بالشروط $ك + ١ : ك + ٥ :: ك + ٥ : ك + ١٢$

بالطرح $ك + ١ : ٤ :: ك + ٥ : ٨$

بقسمة التاليين $ك + ١ : ١ :: ك + ٥ : ٢$

ثم $ك + ٢ = ٢ + ك$ $٥ + ك = ك$ $٢ = ك$

(٤) ما عددان نسبة اكبرها الى الاصغر كجميعهما الى ٤٢ وكفضلتهما الى ٦

لنفرض العددين $ك$ و $ي$

ثم بالشرط الاول $ك : ي :: ك + ٤٢ : ي + ٤٢$

وبالثاني $ك : ي :: ك - ٦ : ي - ٦$

بالمساواة $ك + ي : ٤٢ :: ك - ي : ٦$

بقلب الوسطين $ك + ي : ٦ :: ك - ي : ٤٢$

بالجمع والطرح $٢ ك : ٢ ي :: ٤٨ : ٢٦$

بالقسمة $ك : ي :: ٤ : ٢$

$٢ ك = ٤ ي$ $ك = ٢ ي$ ثم بالتعويض في النسبة الثانية $٢٤ = ي$ $٢٢ = ك$

(٥) اقسام ١٨ الى قسمين بين مربعيهما نسبة ٢٥ : ١٦

لنفرض القسمين $ك$ و $١٨ - ك$

ثم بالشروط $ك : (١٨ - ك) :: ٢٥ : ١٦$

بالتحذير $ك : ١٨ - ك :: ٥ : ٤$

بالجمع ك : ١٨ :: ٩ : ٥

بالقسمة ك : ٢ :: ١ : ٥ ك = ١٠

(٦) اقسام ١٤ الى قسمين تكون نسبة الخارج من قسمة الاكبر على الاصغر الى

الخارج من قسمة الاصغر على الاكبر كنسبة ١٦ : ٩

لنفرض اكبرها ك والاصغر ١٤ - ك

بالشروط $\frac{ك}{١٤ - ك} : \frac{١٤ - ك}{ك} :: ٩ : ١٦$

بالضرب ك : (١٤ - ك) :: ٩ : ١٦

بالتعذير ك : ١٤ - ك :: ٩ : ٤

بالجمع ك : ١٤ :: ٧ : ٤

بالقسمة ك : ٢ :: ١ : ٤ ك = ٨

(٧) اقسام ٢٠ الى قسمين بينها نسبة ٢ المالية الى ١ المالية واستعلم متناسبا متوسطا

بينها

لنفرض احدهما ك والآخر ٢٠ - ك

بالشروط ك : ٢٠ - ك :: ٢ : ١

بالجمع ك : ٢٠ :: ٢ : ١٨ ك = ١٨ والآخر = ٢ والمتناسب المتوسط

(حسب ١٨٩) $٦ = \frac{٢٠ \times ٢}{١٨}$

(٨) اي عدد من حاصلها ٢٤ ونسبة فضله كميها الى كعب فضلها كنسبة ١٩ : ١

لنفرض ك احدهما وى الآخر

بالمفروض كى = ٢٤

وايضاً ك - ي : (ك - ي) :: ١٩ : ١

بالسط ك - ي : ك - ي + ٢ كى - ٢ كى :: ١٩ : ١

بالطرح (١٩٤) ٢ كى - ٢ كى : (ك - ي) :: ١٨ : ١

بالقسمة على ك - ي ٢ كى : (ك - ي) :: ١٨ : ١

٢ كى = ٢٤ × ٢ = ٧٢ حسب المفروض

فبالعويض ٧٢ : (ك - ي) :: ١٨ : ١

بالضرب والقسمة (ك - ي) : ٤ :: ك - ي : ٢ كى = ٢٤ ك = ٦

ي = ٤

(٩) مفروض (ت + ك) : (ت - ك) :: ك + ي : ك - ي

هات البرهان من ذلك على ان ت : ك :: ٢ : ٢ - ت - ي : ٢
 بالسط ٢ + ت : ك + ك : ٢ - ت : ٢ + ك + ك : ٢ - ت - ي : ك - ي
 بالجمع والطرح ٢ : ٢ + ت : ك : ٢ : ٢ - ت : ٢ : ك : ٢ : ي
 بالنسبة ٢ : ٢ + ت : ك : ٢ : ٢ - ت : ك : ٢ : ي
 بنقل ك : ٢ + ت : ٢ : ٢ - ت : ٢ : ك : ٢ : ي
 بقلب الوسطين ٢ : ٢ + ت : ك : ٢ : ٢ - ت : ٢ : ك : ٢ : ي
 بالطرح ٢ : ٢ : ك : ٢ : ٢ - ت - ي : ي
 بالتعذير ت : ك :: ٢ : ٢ - ت - ي : ٢

(١٠) مفروض ك : ي :: ٢ : ٢
 وايضا ت : ب :: ٢ : ٢ + د + ي

هات البرهان على ان د ك = س ي
 بالتزوية ٢ : ٢ : ب :: س : ك + د + ي
 بالمساواة س : ك + د + ي :: ك : ي
 بقلب الوسطين س : ك + د + ي :: ك : ي
 بالطرح س : ك :: د : ي

ثم د ك = س ي
 (١١) مفروض $\frac{٢ - ب}{ب} = ٤$ ت برهان ان ت + ك : ٢ : ٢ : ب
 ت - ك :

(١٢) مفروض ك : ي :: ٢٥ : ٢٦ ونسبة ٢ : ك + ي : ٢ : ك + ٢ كالنسبة
 المركبة من ١٧ : ٢٠ و ٢ : ٧ فها هي قيمة ك وي الجواب ك = ١٢ ي = ١٠
 (١٣) مطلوب ثلاثة اعداد على نسبة متصلة اوسطها ٦٠ ومجموع الطرفين ١٢٥

الجواب ٤٥ ٦٠ ٨٠

(١٤) ما عددان حاصلها ١٢٥ ونسبة فضلة مربعها الى مربع فضلها :: ٤ : ١
 الجواب ١٥ و ٩

(١٥) ما عددان نسبة فضلها ومجموعها وحاصلها كنسبة ٢ و ٢ و ٥
 الجواب ١٠ و ٢

(١٦) اقس ٢٤ الى قسمين نسبة حاصلها الى مجموع مربعيها :: ٣ : ١٠
 الجواب ١٨ و ٦

(١٧) مزيج من خمر وماء كانت فيه نسبة فضلتها : الماء :: ١٠٠ : الخمر ونسبة نفس هذه الفضلة الى الخمر :: ٤ : الماء . فكم في المزيج من الصنفين

الجواب خمر ٢٥ ماء ٥

(١٨) ما عددان نسبة احدهما الى الآخر :: ٢ : ٤ وإذا أضف ٦ الى الأكبر

وطرح ٦ من الأصغر كانت نسبة المجموع الى الفضلة :: ١ : ٢ الجواب ٢٤ و ١٦

(١٩) ما عددان حاصلهما ٢٢٠ ونسبة فضلة كبيرهما الى كسب فضلتهما :: ٦١ : ١

الجواب ٢٠ و ١٦

(٢٠) ما عددان نسبة احدهما الى الآخر كالنسبة المئوية ٤ و ٢ والمتناسب

المتوسط بينهما هو ٢٤ الجواب ٢٢ و ١٨

(٢١) مطلوب عددان نسبة أكبرهما الى أصغرهما كنسبة مجموعهما الى ٤٢ وكنسبة

فضلتهما الى ٦ الجواب ٢٢ و ٢٤

(٢٢) مطلوب عددان نسبة أكبرهما الى أصغرهما كنسبة مجموعهما الى ١ وكنسبة

فضلتهما الى ب الجواب $\frac{(ب+١)}{٢}$ و $\frac{(ب-١)}{٢}$

(٢٣) مطلوب عددان نسبة احدهما الى الآخر كنسبة ٢ : ٢ ونسبة فضلة قوتها

الرابعة الى مجموع كبيرهما كنسبة ٢٦ : ٧ الجواب ٦ و ٤

(٢٤) مطلوب عددان نسبة احدهما الى الآخر كنسبة م : ن ونسبة فضلة قوتها

الرابعة الى مجموع مكبيهما كنسبة ف : ق الجواب $\frac{ن}{ق} \times \frac{ن+٢}{ن-٢}$ و $\frac{ن}{ق} \times \frac{ن-٢}{ن+٢}$

الفصل السابع عشر

في التغير او النسبة المئوية

٢٠٥ قد يحدث أحياناً ان اجزاء نسبة يتعلق بعضها ببعض حتى يتغير احدهما

بتغير آخر منها فتعفظ النسبة . مثالة اذا قبل ان ثمن ٥٠ ذراعاً من قماش = ١٠٠

غرش فان طرّح من الاذرع ١٠ نصير ٤٠ فيطرح من الثمن ٢٠ فيصير ٨٠ وان

صارت الاذرع ٢٠ يصير الثمن ٦٠

	ذ	ذ	ذ	ذ	
اي	٥٠	٤٠	١٠٠	٨٠	
و	٥٠	٢٠	١٠٠	٦٠	
و	٥٠	٢٠	١٠٠	٤٠	وهلم جراً

فكلما تغيرت نالي الزوج الأول يتغير مثله نالي الثاني حتى تبقى النسبة محفوظة

إذا فرض سابقان ت وب وفرضت ت كمية من جنس ت ولكن أكبر منهما او اصغر. وب كمية من جنس ب أكبر او اصغر مراراً مساوية للآحاد التي في فضلة ت وت فتكون ت : ت :: ب : ب فإن تغيرت ت فصارت ت تتغير ب وتصبح ب ويقال ان ت تغيرت بتغير ب او بالاختصار ان تاء كباء كما يقال ان اجرة فاعل يتغير كنغير مدة عمله وان ربح مبلغ يتغير كنغير راس المال . ولنا هنا جزآن من نسبة وكل نسبة لما اربعة اجزاء . فاذا قولنا السابق انما هو عبارة مختصرة تذكر جزئين من النسبة عوضاً عن الاربعة . ولو بسطنا العبارة لقلنا نسبة راس مال : راس مال آخر :: ربح الأول : ربح الثاني

٢٠٦ نحتاج في بعض المسائل التعليمية او الفلسفية الى معرفة نسبة شيء الى آخر بدون معرفة قيمتها الخصوصية . ويكفي لذلك جزأاً نسبة غيرائه ينبغي ان نذكر كون المجزئين الآخرين متضمنين في المذكورين . كما لو قيل ان ثقل الماء هو بالنسبة الى مقداره فانه يراد به ان رطلاً : عدة ارطال مفروضة :: ثقل رطل : ثقل الاوطال المفروضة وبديل على نسبة بين كميات غير ثابتة بهذه العلامة - او بهذه ∞ مثالها ت - ب فيراد ان ت تتغير كنغير ب اي ان ت : ت :: ب : ب ويقال لهذه العبارة اي ت - ب نسبة عمومية

٢٠٧ متى زادت كمية عند زيادة اخرى او نقصت عند نقصانها قيل ان الاولى تغيرت كالاخري بالاستقامة . فان ربا دين مثلاً يزيد او ينقص بالنسبة الى راس المال فان تضاعف راس المال تضاعف الربا وهلم جراً . اذا فرض ا ∞ ب فحينئذ ا = م ب حيث تكون م كمية ثابتة . فاذا كانت الفسحة (س) تتغير كمربع الوقت (ت) فحينئذ س = م ت واذا نقصت كمية عند زيادة اخرى او بالعكس

قيل ان الاولى تتغير كثمانية بالقلب . مثالها ان الوقت الذي فيه يجمع الفاعل مبلقا يكون بالقلب كاجرتي اي كلما زادت الاجرة قل الوقت وبالقلب

٢٠٨ متى زادت كمية او نقصت كزيادة حاصل كيتيت او نقصانه قيل انها تغيرت كغيرها معا . مثالها ربا دين يتغير كحاصل راس المال في الوقت . فان تضاعف راس المال وتضاعف الوقت زاد الربا اربعة امثال . ومتى كانت كمية متناسبة ابداً مع اخرى مقسومة على كمية ثالثة قيل انها تتغير بالاستقامة كالثانية وبالقلب كاللثة . مثاله ان كانت ت : ت :: س : س تكون ت : س

ومن امثلة ذلك قاعدة الجاذبية اي ج تتغير بالاستقامة كالمادة م وبالقلب كمرع البعد د اي ج ∞ د

فترى ما سبق ان هذا الباب لا يلزم له شيء سوى ان يناس على قواعد النسبة المتقدم ذكرها . وان النسبة العمومية انما هي عبارة مختصرة يذكر فيها جزوان من اربعة اجزاء متناسبة . وان اشكل شيء من مسائله يوضع جلياً بذكر الجزوين المزدوجين

٢٠٩ يتضح ما سبق انه يصح عكس ترتيب الاجزاء في نسبة عمومية كما في نسبة خصوصية . فان كان ت : س ب فكذلك ب : س ت لان ت : ت :: ب : ب اذا ب : ب :: ت : ت

وان ضرب جزء او جزوان من نسبة عمومية في كمية واحدة ثابتة وانقسم عليها فلا تتغير النسبة (١٩٢) مثاله

اذا فرض ت : ت :: ب : ب اي ت : س ب فيكون م : م :: ت : ت :: ب : ب اي م : س ب وم : م :: ت : ت :: ب : ب اي م : س م ب الخ
وهكذا ان ضرب كلا الجزوين في كمية غير ثابتة وانقسم عليها لا تتغير النسبة . فان فرض م كمية متغيرة وت : ت :: ب : ب اي ت : س ب يكون م : م :: ت : ت :: ب : ب اي م : س م ب

فرع اول اذا تغيرت كمية كاخري يكون الخارج من قسمه احداها على الاخرى كمية ثابتة كما يتضح من انه اذا تغيرت صورة كسر كغير مخرجه لا تتغير قيمته
مثاله ت : ت :: ب : ب اي ت : س ب اذا ت : ت :: ب : ب :: ١ : ١
فرع ثان اذا كان حاصل كيتين ثابتاً تتغير احداها ككنهوه الاخرى . مثاله

ت ب : ت ب :: ١ : ١ يكون $\frac{ت}{ب} : \frac{ت}{ب} :: \frac{١}{ب} : \frac{١}{ب}$ او ت : ت :: ب : ب
 فرع ثالث يصح نقل كمية من احد جزئي نسبة عمومية الى الآخر. فاذا كان
 مضروباً فيه في احدهما يصير منسوماً عليه في الآخر. مثالة ت س ب س يكون ايضاً
 $\frac{ت}{ب} - س$ وان كان ت س س يكون ت س س

٢١٠ اذا تغيرت كلتا كميتين كثالة بتغير احدهما كالآخري

مثالة ت : ت :: ب : ب اي ت س ب

س : س :: ب : ب اي س س ب

اذا ت : ت :: س : س اي ت س س

واذا تغيرت كميتان كثالة بتغير مجتمعهما وفضلتها ايضاً كالثالة. مثالة اذا فرض

ت : ت :: ب : ب اي ت س ب

وس : س :: ب : ب اي س س ب

فاذا ت + س : ت + س :: ب : ب اي ت + س س ب و ت - س :

ت - س :: ب : ب اي ت - س س ب

وهكذا مها تعددت الكميات التي تتغير ككمية واحدة. مثالة اذا فرض ت س

ب وس س ب ود س ب وي س ب

فحينئذ (ت + س + د + ي) س ب

واذا تغير مربع مجتمع كميتين كمربع فضلتهما بتغير مجتمع مربعيهما كحاصلهما

فان فرض (ت + ب) - (ت - ب) يكون ت + ب - (ت - ب) لانه

بالفروض (ت + ب) : (ت - ب) :: (ت + ب) : (ت - ب)

البسط والجمع والطرح حسب ما تقدم في النسبة لنا

٢ ت + ٢ ب : ٤ ت ب :: ٢ ت + ٢ ب : ٤ ت ب

وبالقسمة ت + ب : ت ب :: ت + ب : ت ب اي ت + ب س ب

٢١١ يصح ايضاً ان تضرب اجزاء نسبة عمومية في اجزاء اخرى او تنقسم عليها

فان فرض ت : ت :: ب : ب اي ت س ب

وس : س :: د : د اي س س د

فحينئذ ت س : ت س :: ب د : ب د اي ت س س د

فرعٌ اذا تغيرت كفا كيتين كثالثه يتغير حاصل الاثنين كربع الاخرى
مثاله اذا فرض

ت س ب

و س س ب

اذا ت س س ب

واذا تغيرت كمية كاخرى لتغير اية قوة او اى جذر فرض من الواحدة مثل ذلك
الجذرا وتلك القوة من الاخرى (ع ١٦٩)

مثاله اذا فرض

ت : ت :: ب : ب اي ت س ب

ت : ت :: ب : ب اي ت س ب

و ت : ت :: ب : ب اي ت س ب

٢١٢ في تركيب نسب عمومية يصح طرح كميات متساوية من الجزئين

مثاله ت : ت :: ب : ب اي ت س ب

وب : ب :: س : س اي ب س س

وس : س :: د : د اي س س د

اذا ت : ت :: د : د اي ت س د

فرع اذا تغيرت كمية كثانية والثانية كثالثه والثالثة كرابعة وهلم جرا فالاولى
تغير كالاخيرة . مثاله اذا فرض ت س س س د فحينئذ ت س د واذا
فرض ت س س س د فحينئذ ت س د اي ان تغيرت الاولى كالثانية والثانية
كمكثوه الثالثة فالاولى تتغير كمكثوه الثالثة

٢١٣ اذا تغيرت كمية كحاصل كيتين اخريين وكانت احدى الاخرين ثابتة

فالاولى تتغير كالاخري غير الثابتة . مثاله

اذا فرض ك س ل ب وكانت ب ثابتة فاذا ك س ل ومثال ذلك ايضا

نقل اللوح فانه يتغير كتغير طولوه وعرضوه وعمقوه فان بقي العمق على ما هو كان تغيير

نقلوه كتغير طولوه وعرضوه

فرع ومكثامها تعددت الكميات . فان فرض

ك س ب ط

فان جُعِلَتْ ل ثابتة ك س ب ط

وان جعلت ل ب ثابتة ك س ط

وان كانت قيمة كمية متوقفة على اخرين وان قُرِضَت الثانية تغيرت الاولى كالثالثة
وان قُرِضَت الثالثة تغيرت الاولى كالثانية فالاولى تتغير كحاصل الاخرين . مثاله ان
تغير ثقل لوح كالطول مع عرض مروض وكالعرض مع طول مروض ثم ان تغير
الطول والعرض يتغير الثقل كحاصلها . ومكناهما تعددت الكميات
اذا تغيرت كمية كاخري تكون الاولى مساوية للثانية في كمية ثابتة . فان كان
ت س ب فلا بد ان تكون نسبة ت : ب ثابتة . ويصح ان تُضْرَبَ في كمية ما
حتى يكون الحاصل ت وان كانت نسبة ربح ١٠٠ غرش : رأس المال :: ٢٠ : ١
يكون لربح ١٠٠ غرش او ١٠٠٠ غرش نفس هذه النسبة الى رأس المال
تنبيه . ان لفظة مفروض في مسائل هذا الباب ولا سيما في الفلسفة الطبيعية يراد
بها كميات ثابتة كما انه في غير هذا الباب يراد بها كميات معروفة لتمييزها من المجهولة

الفصل الثامن عشر

في السلسلة الحسابية والهندسية

٢١٤ السلسلة ويقال لها النسبة المتصلة نوعان حسابية وفيها كلامنا الآن .
وهندسية وسباني الكلام عليها . اما الحسابية فهي عبارة عن طائفة من الكميات تعلو او
تهبط بزيادة كمية مفروضة او طرحها على التوالي . مثاله ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠
ومكنا بالعكس ١٠ ٨ ٦ ٤ ٢ ويقال للاولى سلسلة صاعدة وللثانية
سلسلة نازلة

٢١٥ في السلسلة الصاعدة نستعلم كل حلقة باضافة الفضل المشترك الى ما قبلها .
فان كانت الحلقة الاولى ٢ والفضل المشترك ٢ تكون السلسلة ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢
الى آخره . وان كانت الحلقة الاولى ت والفضل المشترك د تكون الحلقة

٢١٦ لنا ما سبق هذه القاعدة وهي ان الحلقة الاخيرة من السلسلة الحسابية تعدل الحلقة الاولى مضافة الى حاصل الفضل المشترك في عدة الحلقات الا واحداً . ويمكننا نستعلم اية حلقة فُرِضَتْ بان نحسبها الحلقة الاخيرة فنعدل عليها العبارة السابقة ثم ان كانت الحلقة الاولى والفضل المشترك متساويين تصير العبارة ل = ت + (ع - ١) × ت = ت + ع - ت اي ل = ت ع

٢١٧ نرى في العبارة السابقة اربع كميات اي ت الحلقة الاولى ل الاخيرة
ع عدد الحلقات ف الفضل المشترك . فان فرض منها ثلاث تستعلم منها
الاخرى

$$(١) \text{ لئان كما تقدم ل} = \text{ت} + (\text{ع} - ١) \text{ ف} = \text{الاخيرة}$$

$$(٢) \text{ بالمقابلة ل} - (\text{ع} - ١) \times \text{ف} = \text{ت} = \text{الاولى}$$

$$(٣) \text{ بالمقابلة والتسمية في الاولى } \frac{\text{ل} - \text{ع}}{١} = \text{ف} = \text{الفضل المشترك}$$

$$(٤) \text{ ايضاً بالمقابلة والتسمية في الاولى } \frac{\text{ل} - \text{ت}}{\text{ف}} + ١ = \text{ع} = \text{عدد الحلقات}$$

ومن المعادلة الثالثة تستعلم اية عدة فرضت من اوساط حسانية بين عددين لان
عدة الحلقات تماثل الطرفين مع جميع الحلقات المتوسطة بينها . فان فرض ط = عدة
الوساط يكون ط + ٢ = ع اي عدة الحلقات . ثم بوضع ط + ٢ عوضاً عن ع
في المعادلة الثالثة تصير $\frac{\text{ل} - \text{ت}}{\text{ط} + ٢} = \text{ف} = \text{الفضل المشترك}$

مفروض الحلقة الاولى من سلسلة صاعدة ٧ والفضل المشترك ٢ وعدة الحلقات

٩ فما في الاخيرة

$$\text{ل} = \text{ت} + (\text{ع} - ١) \text{ ف} = ٧ = ٢ \times (١ - ٩) + ٢١$$

والسلسلة ٧ ١٠ ١٢ ١٦ ١٩ ٢٢ ٢٥ ٢٨ ٣١

مفروض الحلقة الاخيرة من سلسلة صاعدة ٦٠ وعدة الحلقات ١٢ والفضل

المشترك ٥ فما في الاولى

$$\text{ت} = \text{ل} - (\text{ع} - ١) \times \text{ف} = ٦٠ = ٥ \times (١ - ١٢) + ٥٠$$

استعلمت اوساط حسانية بين ١ و ٤٣

الفضل المشترك ٦ والسلسلة ١ ٧ ١٢ ١٩ ٢٥ ٣١ ٣٧ ٤٣

٢١٨ يلزم احياناً معرفة مجتمع حلقات سلسلة ويتوصل اليها بجميع الحلقات

لا محالة . ولكن لنا طريقة اخصر من ذلك وهي انه لا بد ان يكون مجتمع سلسلة صاعدة

مثل ٢ ٥ ٧ ٩ ١١

مساوياً لمجتمع سلسلة نازلة ١١ ٩ ٧ ٥ ٣

فيكون مجتمع الاثنين مضاعف مجتمع احدهما فنجد جميعها مضاعف مجتمع احدهما .

ثم ان اخذ نصفه يكون مجتمع احدهما

١١	٩	٧	٥	٣	فلنفرض
٣	٥	٧	٩	١١	وعكسها
١٤	١٤	١٤	١٤	١٤	يكون المجموع

ت	ت + د	ت + د ^۲	ت + د ^۳	ت + د ^۴	}	ومكلا	
ت + د ^۴	ت + د ^۳	ت + د ^۲	ت + د	ت		وعكسها	
							المجمع
ت + د ^۴	ت + د ^۳	ت + د ^۲	ت + د ^۲	ت + د ^۲			

فلما من ذلك هذه القضية وهي ان مجموع طرفي سلسلة بعدل مجموع اي هاتين
 قُرِصتا على بعد واحد من الطرفين، ولكي نتعلم مجموع الحلقات في السلسلتين لابلزم الأ
 ان تضرب مجموع الطرفين في عدد الحلقات اي $14 + 14 + 14 + 14 + 14 =$
 5×14

وفي الثانية يكون المجموع $(ن + ٢) \times ٥$ وهذا مضاعف لجميع حلقات سلسلة واحدة. ثم ان فرض $ن =$ الاولى $ل =$ الاخيرة $ح =$ عدد الحلقات $وم =$ مجموع الحلقات اما $م = \frac{ن + ل}{٢} \times ح$ وهذه المعادلة مشتقة على هذه القاعدة وهي ان مجموع حلقات سلسلة حسابية يعدل نصف مجموع الطرفين في عدد الحلقات

ما هو مجموع سلسلة الأعداد الطبيعية أي 1 2 3 4 5 6 إلى 1000
 الجواب م = $\frac{n+1}{2} \times c = \frac{1000+1}{2} \times 1 = 500500$

ثم ان عوضنا عن ل في هذه المعادلة بقيمتها في ع ٢١٧ نصير المعادلة

$$(1) \quad m = \frac{t^2 + (1 - e)x}{2} \text{ ع وفيها اربع كميات اي الحلقة الاولى والنصل}$$

المشترك وعدة الحلقات ومجموعها . وان فرض منها ثلاث نستعلم منها الرابعة . فبالتحويل

نصير

$$(2) \quad \text{ن} = \frac{2^2 - 2^2 \text{ف} + 2^2 \text{ع}}{2} = \text{الحلقة الاولى}$$

(٢) $\text{ف} = \frac{٢٢ - ٢٣}{٤ - ٤} = \frac{\text{الفضل المشترك}}{\text{الجله الاو}}$

$$(4) \quad \frac{(2-f) + f(2-f) + f^2(2-f) + \dots}{f} = e$$

بتفرع من هذه المعادلات والمنفروضات عشرون حالاً نحل بواسطة العبارات المذكورة او بما بتفرع منها وهذه الاحوال المذكورة في هذا الجدول

مفروض	مطلوب	عبارة
١ ت ف ع		$ل = ت(ع - ا) ف$
٢ ت ف م	ل	$ل = -\frac{ا}{٢} ف + \frac{١}{٢} (٢ ف - ت) + \frac{١}{٢} (٢ ف - ت)$
٣ ت ع م		$ل = \frac{١}{٢} ع - ت$
٤ ف ع م		$ل = \frac{١}{٢} ع + \frac{١}{٢} (١ - ع) ف$
٥ ت ف ع		$م = \frac{١}{٢} ع [٢ ت + (ع - ا) ف]$
٦ ت ف ل		$م = \frac{ل + ت}{٢} + \frac{ت - ل}{٢ ف}$
٧ ت ع ل	م	$م = \frac{ل + ت}{٢} \times ع$
٨ ف ع ل		$م = \frac{١}{٢} ع [٢ ل - (ع - ا) ف]$
٩ ت ع ل		$ف = \frac{ل - ت}{١ - ع}$
١٠ ت ع م	ف	$ف = \frac{١ - ع}{٢} \frac{٢ ت - ل}{١ - ع}$
١١ ت ل م		$ف = \frac{ل - ت}{٢}$
١٢ ع ل م		$ف = \frac{٢ ل - ل ع}{٢ (١ - ع)}$
١٣ ف ع ل		$ت = ل - (ع - ا) ف$
١٤ ت ع م	ت	$ت = \frac{١}{٢} (١ - ع) ف$
١٥ ف ل م		$ت = \frac{١}{٢} ف + \frac{١}{٢} (ل + ف) - \frac{١}{٢} (٢ ف - ل)$
١٦ ع ل م		$ت = \frac{ل - ل}{٢}$
١٧ ت ف ل		$ع = \frac{ل - ت}{١ + ف}$
١٨ ت ف م	ع	$ع = \frac{١}{٢} (٢ ف - ت) + \frac{١}{٢} (٢ ف - ت) - \frac{١}{٢} (٢ ف - ت)$
١٩ ت ل م		$ع = \frac{٢ ت}{ل + ت}$
٢٠ ف ل م		$ع = \frac{٢ ل + ف + (٢ ف + ل) - ٢ (٢ ف - ل) - ٢ (٢ ف - ل)}{٢ ف}$

(١) مفروض الحلقة الاولى من سلسلة صاعدة ٣ والنصل المشترك ٢ وعدد

الجواب ٤٤٠

الحلقات ٢٠ فما هو مجموعها

(٢) اذا وُضع مئة حجر على خط مستقيم بين كل اثنين منها ذراعٌ واحدة فكم يمتد من يجمع الجميع في مكان بينه وبين الحجر الأول ذراع اذا كان كل مرة يحمل حجراً واحداً
الجواب ١٠١٠٠ ذراع

(٣) ما هو مجتمع ١٥٠ حلقة من سلسلة صاعدة مثل $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}, \frac{2}{3}$ الى آخره
الجواب ٢٧٧٥

(٤) اذا كان مجتمع سلسلة حسابية ١٤٥٥ والحلقة الاولى ٥ وعدد الحلقات ٢٠ فما هو الفضل المشترك
الجواب ٢

(٥) مجتمع سلسلة ٥٦٧ والحلقة الاولى ٧ والفضل المشترك ٢ فما هو عدد الحلقات
الجواب ٢١

(٦) ما هو مجتمع ٢٢ حلقة من هذه السلسلة ١ $\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$ الخ
الجواب ٢٨٠

(٧) رجل اشترى ٤٧ كتاباً وكان ثمن الأول ١٠ غروش وثن الثاني ٢٠ غرشاً والثالث ٥٠ غرشاً ولم يجزاً فكم بلغ ثمن الجميع
الجواب ٢٢٠٩٠ غرشاً

(٨) رجل اعطى صدقة للفقراء في اليوم الأول من السنة غرشاً وفي الثاني غرشين وفي الثالث ثلاثة غروش ولم يجزاً فكم اعطى في السنة
الجواب ٦٦٧٩٥

(٩) رجل اشترى اثواباً وكان ثمن الأول دينارين والثاني ٤ والثالث ٦ ولم يجزاً الى آخره وبلغ ثمن الجميع ١١٠ دنانير فكم ثوباً اشترى
الجواب ١٠ اثواب

٢١٩ في سلسلة اعداد وترية مثل ١ ٢ ٥ ٧ ٩ الى آخره تكون الحلقة الاخيرة اقل بواحد من مضاعف عدد الحلقات ابداً لان $ل = ت + (ع - ١) ف$ حسباً تقدم. وفي السلسلة المفروضة $ت = ١$ و $ف = ٢$ فتكون المعادلة $ل = ١ + (ع - ١) \times ٢ = ع - ١$ وكذلك في سلسلة اعداد وترية مثل ١ ٢ ٥ ٧ ٩ الى آخره مجتمع الحلقات يعدل مربع عدد الحلقات لان $م = \frac{1}{2}(ت + ل \times ع)$ وفي هذه السلسلة $ت = ١$ وحسباً تقدم $ل = ع - ١$ فتصير المعادلة $م = \frac{1}{2}(١ + ع - ١ + ع \times (١ + ع - ١))$

مثالة

$$\left\{ \begin{array}{l} ٤ = ٣ + ١ \\ ٩ = ٥ + ٢ + ١ \\ ١٦ = ٧ + ٥ + ٣ + ١ \end{array} \right.$$

مربعات عدد الحلقات

٢٢٠ اذا كان ص٢ان من كميات في سلسلة حساية تكون مجتمعاتها او فضلاتها ايضا على سلسلة حساية لان ذلك جمع تناسبات او طرحها فقط

مثال ٢ ٦ ٩ ١٢ ١٥ ١٨ ٢١ التناسب = ٣

٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢ ١٤ التناسب = ٢

المجموع ٥ ١٠ ١٥ ٢٠ ٢٥ ٣٠ ٣٥ التناسب = ٥

الفضلة ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ التناسب = ١

واذا ضرب جميع حلفات سلسلة حساية في كمية واحدة او انفس عليها تكون الحواصل او الخواارج على سلسلة حساية ايضا لان ذلك كضرب تناسبات او قسمتها

في سلسلة ٢ ٥ ٧ ٩ ١١ اذا ضرب في ٤

نصير ١٢ ٢٠ ٢٨ ٣٦ ٤٤ ثم اذا انقسم هلا على ٢

نصير ٦ ١٠ ١٤ ١٨ ٢٢ الى آخره

(١) مطلوب اربعة اعداد على سلسلة حساية مجتمعها ٥٦ ومجتمع مربعاتها ٨٦٤

ك = الثاني ي = الفضل المشترك فتكون السلسلة ك - ي ك ك + ي

ك + ٢ ي

وبالشروط (ك - ي) + ك + (ك + ي) + (ك + ٢ ي) = ٥٦

وايضاً (ك - ي) + ك + (ك + ي) + (ك + ٢ ي) = ٨٦٤

بالاولى ٤ ك + ٢ ي = ٥٦

بالثانية ٤ ك + ٤ ي + ٦ ي = ٨٦٤

وتحويل هذه المعادلات لنا ك = ١٢ ي = ٤

والاعداد ٨ ١٢ ١٦ ٢٠

(٢) ثلاثة اعداد في سلسلة حساية مجتمعها ٩ ومجتمع كموبها ١٥٢ فما هي هذه

الاعداد

الجواب ١ و ٢ و ٥

(٣) ثلاثة اعداد في سلسلة حساية مجتمعها ١٥ ومجتمع مربعي الطرفين ٥٨ فما هي

الاعداد

(٤) اربعة اعداد في سلسلة حساية مجتمع مربعي الاولين ٢٤ ومجتمع مربعي

الآخرين ١٣٠ فما هي الاعداد

(٥) مطلوب عدد ذو ثلاثة ارقام على سلسلة حساية واذا انقسم العدد على مجموع

ارقامه يكون الخارج ٢٦ واذا اضيف اليه ١٩٨ ينتقل ترتيب الارقام

لنفرض الأرقام ك-ى وك+ى فيكون العدد ١٠٠ (ك-ى)

$$١٠٠ + ك = (ك + ى) = ١١١ - ك - ٩٩$$

$$\text{وبالشروط} \quad ٢٦ = \frac{١١١ - ك - ٩٩}{ك}$$

$$\text{و} \quad ١١١ - ك - ٩٩ = ١٩٨ + ى = ١٠٠ + (ك + ى) + ١٠٠ + (ك - ى)$$

$$ك = ٢ = ى \quad \text{والعدد} \quad ٢٢٤$$

(١) مطلوب أربعة أعداد في سلسلة حسابية مجموع مربعي الطرفين فيها ٢٠٠

ومجموع مربعي الوسطين ١٢٦

(٢) ساعسعى الى مكان بعد ١٩٨ ميلاً. ففي اليوم الاول قطع من المسافة ٣٠

ميلاً وفي الثاني ٢٨ ميلاً وفي الثالث ٢٦ ميلاً ولم يجرأ في كم يوم قطع المسافة كلها

الحلقة الاولى = ٣٠ الفصل المشترك = ٢ الجواب ٩

(٣) مطلوب أعداد على سلسلة حسابية فضلها المشترك ٢ ومجموعها يعدل عدة

الحلقات ثمان مرات واذا اضيف ١٢ الى الحلقة الثانية وانقسم المجموع على عدة الحلقات

يكون الخارج الحلقة الاولى

لنفرض ك = الاولى ى = عدة الحلقات ك + ٢ = الثانية ك + (ى - ١)

$$= ٢ \text{ الاخيرة}$$

$$\text{حسباً تقدم} \quad م = \frac{٢ + (١ - ع) + ٢}{٢} \times ع = ك - ى = ع$$

$$\text{ثم بالتعويض} \quad م = \frac{٢ + (١ - ى) + ك}{٢} \times ى = ك - ى + ى - ١$$

$$\text{وبالمسئلة} \quad ك - ى + ى - ١ = ٨ - ى \quad ى - ٩ = ك$$

$$\text{وايضاً} \quad \frac{١٢ + ٢ + ك}{ك - ٩} = ك \quad ك = ٥ \text{ او } ٢$$

$$ى = ٤ \text{ او } ٦$$

والأعداد ٥ ٧ ٩ ١١ او ٢ ٥ ٧ ٩ ١١ ١٣

(١) مطلوب أربعة أعداد على سلسلة حسابية مجموعها ٢٨ وحاصلها ٥٨٥

(١٠) جسم سقط في الثانية الاولى ١٦ قدماً وفي كل ثانية بعد الاولى سقط ٢٢

قدماً أكثر مما سقط في الثانية السابقة فكم قدماً يسقط في الثانية الاخيرة اذا بقي ساقطاً

٢٠ دقيقة وك في المدة كلها الجواب في الاخيرة ٦٢٤ قدماً والكل ٦٤٠٠ قدم

(١١) سافر زيد وفي اليوم الاول من سفره قطع ميلاً واحداً وفي اليوم الثاني قطع

ميلين وفي اليوم الثالث ٣ اميال ولم يجرأ وبعد ٥ ايام لحنة عمرو وقطع ١٢ ميلاً كل

يوم ففي كم يوم يلحق زيدا الجواب ١٥ يوماً او ٨ ايام

اي جذراً المعادلة من الدرجة الثانية كلاهما ايجابيان في المسئلة السابقة
(١٢) قطع زيد في اليوم الاول ميلاً واحداً وفي الثاني ميلين وفي الثالث ثلاثة
اميال ثم بعد ا يوم سافر عمرو وقطع ب ميلاً كل يوم ففي كم يوم يلحق زيداً

$$\frac{2b^2 - 1 - (b-1)^2}{3} = \text{الجواب الايام}$$

(١٢) على اي شرط لا يلحق عمرو زيداً ابداً الجواب اذا كان $\frac{(1-b)}{b} < 1$

ففي المسئلة السابقة او تأخر عمرو يوماً واحداً لما لحقه زيد ابداً

(١٤) سافر سائح في اليوم الاول ميلاً واحداً وفي الثاني ثلاثة اميال وفي الثالث
خمسة اميال وبعد ثلاثة اميال تبعه آخر وقطع في اليوم الاول ١٢ ميلاً وفي الثاني ١٤
ميلاً وهلم جرا ففي كم يوم يلحق الاول الجواب في يومين او في ٩ ايام

في السلسلة الهندسية

٢٢١ السلسلة الهندسية هي نسبة هندسية متصلة كما ان الحسابية هي نسبة حسابية
متصلة. فالاعداد ٦٤ ٣٢ ١٦ ٨ ٤ هي على نسبة هندسية متصلة
واذا انقسم كل جزء على التناسب المشترك يخرج الجزء الذي يتلوهُ. مثاله $\frac{64}{32} = \frac{32}{16}$
و $\frac{32}{16} = \frac{16}{8}$ الى آخره. وهكذا اذا انعكس الترتيب وصار المقسوم عليه
المشترك مضروباً فيه. مثاله ٤ ٨ ١٦ ٣٢ ٦٤ الى آخره $8 = 2 \times 4$
و $16 = 2 \times 8$ و $32 = 2 \times 16$ و $64 = 2 \times 32$ الخ

وانا في ذلك هذه النضية وهي ان الكميات التي تهبط بمقسوم عليه مشترك او تعلق
بمضروب فيه مشترك هي على سلسلة هندسية. ويسمى المقسوم عليه او المضروب فيه
التناسب المشترك. وان جعلنا المقسوم عليه كسراً يصح ان نحسب المضروب فيه ابداً كما
في السلسلة السابقة فانها تهبط بالقسمة على ٢ او بالضرب في ٢

٢٢٢ في السلسلة الهندسية الصاعدة نعرف كل حلقة بضرب التناسب المشترك
في التي قبلها. فان فرضت الاولى ت والتناسب المشترك ب تكون الحلقات على
هذا النسق ت × ب = ت ب = الثانية ت ب × ب = ت ب² = الثالثة
ت ب² × ب = ت ب³ = الرابعة ت ب³ × ب = ت ب⁴ = الخامسة الخ وتكون
السلسلة ت ت ب ت ب² ت ب³ ت ب⁴ الخ

وإذا كانت الأولى والتناسب متساويين تكون السلسلة سرّد قوّاتٍ أي تكون الأولى ب والتناسب ب فتكون السلسلة ب ب^١ ب^٢ ب^٣ ب^٤ الخ

٢٢٢ في السلسلة النازلة نستعمل كل حلقة بقسمة التي قبلها على التناسب المشترك أو ضربها في التناسب المشترك الكسري. فإن كانت الحلقة الأولى ت ب^١ بالقسمة على ب تصبح ت ب^٢ أو بالضرب في $\frac{1}{ب}$ تصبح ت ب^٢ × ب = $\frac{ت ب^١}{ب} = ت ب^٢$

وتكون السلسلة ت ب^١ ت ب^٢ ت ب^٣ ت ب^٤ ت ب^٥ ت ب^٦ الخ. وإن كانت الأولى ت والتناسب ب تكون السلسلة ت ب^١ ت ب^٢ ت ب^٣ ت ب^٤ ت ب^٥ الخ. وإذا كانت الأولى ت ب^١ ت ب^٢ ت ب^٣ ت ب^٤ الخ وإن نظرنا إلى السلسلة

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦
ت ت ب ت ب^٢ ت ب^٣ ت ب^٤ ت ب^٥ الخ

نرى أن دليل القوة في كل حلقة أقل من عدد تلك الحلقة بواحد. فرى في الثانية الدليل ١ وفي الثالثة الدليل ٢ وهلمّ جراً. فإن فرض ت = الحلقة الأولى ل = الأخيرة ب = التناسب وع = عدد الحلقات لنا ل = ت ب^٤ = ١ فلنا من ذلك هذه القضية وهي أن الحلقة الأخيرة من سلسلة هندسية تعدل الحلقة الأولى مضروبة في قوّة من التناسب دليلها أقل من عدد الحلقات بواحد. ومتى كانت الأولى والتناسب متساويين نصير المعادلة ل = ب ب^٤ = ١ ب^٤

٢٢٤ إذا عُرِفَت ثلاث من الكميات المذكورة أي من ت ب ل ع تُعرَف منها

الأخرى

(١) لنا ما سبق ل = ت ب^٤ = الأخيرة

(٢) بالقسمة ت = $\frac{ل}{ب^٤}$ = الأولى

(٣) بالقسمة والتجذير ب = $\sqrt[٤]{\frac{ل}{ت}}$ = التناسب

أما عدة الحلقات فتستعمل من هذه المعادلة بالانساب أي اللوغرثمات وليس هذا موضعاً لذكر طريقتهما

ثم إننا بالمعادلة الأخيرة نجد أية عدّة فُرِضت من أوساط هندسية بين عددين. فإن فُرِض ط = الأوساط يكون ط + ٢ عدد الحلقات أي ط + ٢ = ع ثم

$$\frac{121}{173} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{173} \times \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \text{والجتميع}$$

الجواب: ٢٦٥٧٢٠

الجواب $\frac{174.25}{59.49}$

لنفرض سلسلة ت ت ب ث ب ث ب ث ب الخ فحسب كيفية
السلسلة : ت : ت ب :: ت ب : ت ب :: ت ب : ت ب :: ت ب : ت ب الى
آخره . ثم في كل زوج بطرح السابق من قاليه فتصير : ت : ت ب - ت ب -
ت : ت ب - ت ب - ت ب - ت ب - ت ب - ت ب - ت ب - ت ب - ت ب -

اي نسبة الاولى الى الثانية كنسبة فضلة الاولى والثانية الى فضلة الثانية والثالثة .
وكنسبة فضلة الثانية والثالثة الى فضلة الثالثة والرابعة وهم جراً الى آخره

فرعاً اذا كانت كميات على سلسلة هندسية تكون فضلائها ايضاً على سلسلة

فَالْمُؤْمِنُونَ وَالْمُؤْمِنَاتُ

مثاله	٢	٩	٢٧	٨١	٢٤٣ الى آخره
وفضلاتها	٦	١٨	٥٤	١٦٢	ايضا على سلسله

عدة كميات تكون على سلسلة موسيقية اذا كانت اية ثلاثاً متواليه من السلسلة بحيث تكون نسبة الاولى الى الثالثة كنسبة فضله الاولى والثانية الى فضله الثانية والثالثة . مثالاً الكميات ٦٠ ٣٠ ٢٠ ١٥ ١٢ ١٠ هي على سلسلة موسيقية لان

$$12-10:10-20::12:20, \quad 20-20:20-70::20:70$$
$$10-12:12-10::10:10, \quad 10-20:20-30::10:20,$$

يتفرع ما تقدم ٢٠ حالاً كما في السلسلة الحسائية وماك جدول العبارات اللازمة

لحل كل مسائل هذا الباب

المفروض	المطلوب	العبارة
١ ث ب ع		$ل = ث ب^{١-٤}$
٢ ث ب م	ل	$ل = \frac{ث + (١ - ب)}{ب}$
٣ ث ع م		$ل (م - ل)^{١-٤} = ث (م - ث)^{١-٤}$
٤ ب ع م		$ل = \frac{ب (١ - ب)^{٢-٤}}{١ - ع}$
٥ ث ب ع		$م = \frac{ث ب^{١-٤} - ع}{١ - ب}$
٦ ث ب ل		$م = \frac{ل ب - ث}{١ - ب}$
٧ ث ع ل	م	$م = \frac{\frac{ل^{١-٤}}{١ - ع} - \frac{ث^{١-٤}}{١ - ع}}{\frac{ل^{١-٤}}{١ - ع} - \frac{ث^{١-٤}}{١ - ع}}$
٨ ب ع ل		$م = \frac{ل ب^{١-٤} - ع}{١ - ع}$
٩ ث ع ل		$ب = \frac{ل^{١-٤} - ع}{١ - ع}$
١٠ ث ع م	ب	$ث ب^{١-٤} - ب م = ث - م$
١١ ث ل م		$ب = \frac{ث - م}{ل - م}$
١٢ ع ل م		$(م - ل) (ل - ب)^{١-٤} = ل - م$
١٣ ب ع ل		$ث = \frac{ل}{١ - ع}$
١٤ ب ع م	ث	$ث = \frac{م (١ - ب)}{١ - ع}$
١٥ ب ل م		$ث = ل ب - (١ - ب) م$
١٦ ع ل م		$ث (م - ث)^{١-٤} = ل (م - ل)^{١-٤}$
١٧ ث ب ل		$ع = \frac{نسب ل - نسب ث}{نسب ب}$
١٨ ث ب م	ع	$ع = \frac{نسب [ث + (١ - ب) م] - نسب ث}{نسب ب}$
١٩ ث ل م		$ع = \frac{نسب ل - نسب ث}{١ + \frac{نسب (م - ث) - نسب (م - ل)}{نسب ب}}$
٢٠ ب ل م		$ع = \frac{نسب ل - نسب [ل ب - (١ - ب) م]}{١ + \frac{نسب ب}{نسب ب}}$

مسائل

(١) مطلوب ثلاثة أعداد على سلسلة هندسية مجموعها ١٤ ومجموع مربعاتها ٨٤

لتفرض الاعداد ك وى ول

بالشروط ك: ي: ي: ل: اي: كل = ي:

وك + ي + ل = ١٤ وك + ي + ل = ٨٤ الأعداد ٢ و ٤ و ٨

(r) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية حاصلها ٦٤ ومجموع كمائها ٥٨٤.

لنفرض $K =$ الحلقة الاولى و $\bar{K} =$ التناصف فتكون السلسلة $K \subset \bar{K} \subset K^2 \subset \bar{K}^2 \subset K^3 \subset \bar{K}^3 \subset \dots$

بالشرط الأول ك X كى X كى اى كى = ٦٤

بالثاني $ك^2 + ك^2 + ك^2 = ٥٨٤$ $ك = ٢$ $٢ = ٢$

والاعداد ٢ ٤ ٨

(٢) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية مجموع الاول والثالث ٥٢ ومربع

الجواب ۲۰۱۰ ۵۰

الوسط ۱۰۰

(٥) مطلوب أربعة أعداد على سلسلة هندسية مجتمع الأولين ٥٠ ومجموع الأخيرين ٦٠

لنفرض السلسلة $K_1 K_2 K_3$ الأعداد ٥ ١٠ ٢٠ ٤٠

(٥) رجل قسم ٢١٠ دنانير بين بنيه الثلاثة وكانت اقسامهم على سلسلة هندسية .

وكان الاول ٩٠ ديناراً اكثر من الاخير فكم كان قسم كل واحد منهم

(٦) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة هندسية وفضلة اكبرها واصغرهما ١٥ ونسبة

فضلة مربعي الأكبر والأصغر إلى مجموع مربعات الأعداد الثلاثة :: ٥ : ٧

المجواب ٥ ١٠ ٢٠

(٧) مطلوب اربعة اعداد على سلسله هندسية الثانية منها اقل من الرابعة باربعة

وعشرين ونسبة مجتمع الطرفين : مجتمع الوسطين :: ٧ : ٢

الجواب ١ ٢ ٩ ٢٧

(١) رجل استخدم خادماً الى مدة ١١ سنة . ووعده ان يعطيه في السنة الاولى

حبة قمح و غلة هذه الحبة في الثانية و غلة الغلة في الثالثة و هلم جراً الى نهاية المدة المذكورة.

فان اثمرت كل حبة عشر حبات كل سنة فكم حبة تبلغ

الجواب ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱

- (١) رجل هندي اخترع الشطرنج وقدمه الى الملك فاعجبه جداً وقال له مهما طلبت اعطيك. فطلب الرجل حبة قمح للبيت الاول من رفعة الشطرنج وحتين الثاني واربع حبات للثالث وثمانى للرابع ولم يجرأ الى الاربعه والستين بيتاً فكم حبة اخذ
- (١٠) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية مجتمعا ٢٦ وحاصل الاول في الثالث ٧٢
الجواب ١٢ ٨ ٦
- (١١) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية مجتمعا الاول والثالث ١٨ وحاصل الثلاثة ٥٧٦
الجواب ١٢ ٨ ٦
- (١٢) مطلوب ثلاثة اعداد على سلسلة موسيقية فضلة فضلها ٢ وثلاثة امثال حاصل الاول في الثالث ٢١٦
الجواب ٦ ٨ ١٢
- (١٣) مطلوب ستة اعداد على سلسلة هندسية مجتمعا ١٨٩ ومجموع الثائب والخامس ٥٤
الجواب ٣ ٦ ١٢ ٢٤ ٤٨ ٩٦
- (١٤) مطلوب ستة اعداد على سلسلة هندسية مجتمعا ١٨٩ ومجموع الوسطين ٣٦
الجواب ٣ ٦ ١٢ ٢٤ ٤٨ ٩٦

الفصل التاسع عشر

في غير المتناهيات ونظير غير المتناهي

٢٢٧ غير المتناهي بحسب مفهومه المطلق شيء لا يقبل زيادة ولا ينوّم له زيادة. وهذا هو المراد به في الادبيات والاهليات. واما في العدد فلا يمكن تصويره اذ يمكن ان يزداد عدد حتى يتجاوز اي عدد فيّرض. وبحسب ذلك يكون العدد الاعظم ما يستحيل الوصول اليه. ومما زيد عدد يمكن ان تنوّم له زيادة فيكون المراد بغير المتناهي في التعليمات غير المراد به في غيرها كما مرّ

٢٢٨ الكمية التعليمية اذا نُوهِمَتْ زيادتها فوق حدود مفروضة سميت غير متناهية. والمراد بالحدود المفروضة ما يستطيع العقل ادراكه. وعلى هذا المعنى تكون الاعداد الطبيعية التي هي ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الى آخره غير متناهية لانها مهما زيدت

تقبل الزيادة أيضاً. وبناء على ذلك يصح ان يقال في غير متناه انه اعظم من غير متناه آخر. مثاله ٢ ٢ ٢ ٢ الى غير نهاية و ٤ ٤ ٤ الى غير نهاية. فيها زاد السرّكان يكون الثاني مضاعف الاول وهكذا ت + ت + ت + ت + ت الخ و ٩ ت + ٩ ت + ٩ ت الخ. يكون الثاني تسعة امثال الاول

يجب ان نميز بين كمية غير متناهية وعدة اجزاء غير متناهية لانه يمكن ان تعدد الاجزاء الى غير نهاية وتكون الكمية كلها متناهية وصغيرة. مثاله اذا اخذ واحد ثم نصفه ثم رבעه وهلم جرا يكون $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ الى آخره. فيها تعددت الاجزاء لا يمكن ان تنفوق الواحد. وهكذا $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ الى آخره لا يمكن ان تنفوق الثانية

٢٢٩ اذا مبطت كمية تحت حد مفروض سميت نظير غير المنتهي. مثاله $\frac{1}{10000} \frac{1}{1000} \frac{1}{100}$

وعلى المعنى المذكور تقسم كمية الى غير نهاية. والكمية التي هي اصغر ما يكون لا يمكن الوصول اليها اذ لا يمكن تجزئتها الى حد لا يؤولهم تجزئتها ايضاً وعلى هذا المعنى ايضاً يمكن ان يكون نظير غير متناه اصغر من نظير غير متناه آخر. مثاله $\frac{1}{10000} \frac{1}{1000} \frac{1}{100}$ الى آخره و $\frac{1}{1000} \frac{1}{100} \frac{1}{10}$ الى آخره. فيكون الثاني نصف الاول منها تعددت الاجزاء. وهكذا $\frac{1}{10000} \frac{1}{1000} \frac{1}{100} \frac{1}{10}$

٢٣٠ اذا حدثت في الاعمال الجبرية كمية نظير غير المنتهي يمكن طرحها من العمل بدون ان يجعل فرقا في الحاصل اذ لا اعتبار لما هو صغير حتى لا يشعر بحضوره او غيابه. مثاله في تحويل $\frac{1}{10}$ الى كسر عشري فان قسمنا الصورة على المخرج يكون لنا $\frac{1}{10}$ وهي تعدل $\frac{1}{10}$ تقريباً و $\frac{1}{100}$ اكثر تقريباً و $\frac{1}{1000}$ اكثر تقريباً وهلم جرا حتى يصير الفرق بين $\frac{1}{10}$ والكسر العشري صغيراً جداً لا اعتبار له

ونرى ما سبق ان كمية ربما تقرب الى اخرى الى غير نهاية بدون ان تبلغ اليها. مثاله في تحويل $\frac{1}{10}$ الى كسر عشري منها امتد في منازل الكسر العشري لا يمكن ان يبلغ الى $\frac{1}{10}$ تماماً. ومما تعددت المنازل فلا بد ان يبقى بينها وبين $\frac{1}{10}$ فرق ولو

كان صغيراً الى غير نهاية . وفي كميات من هذا النوع سُميت احدهما حد الاخرى . فان
 $\frac{1}{2}$ هو حد $\frac{1}{4}$ الى آخره و $\frac{1}{4}$ هو حد $\frac{1}{8}$ الى غير نهاية . ثم ان
 نظير غير المنتهي وان لم يكن له اعتبار في ذاته ان وقع مضروباً فيه او منسوماً عليه
 يكون له احياناً اعتبار كلي . واذا كان نظير غير المنتهي لا يفرق عن صفر بما يشعر
 به فيدل عليه احياناً بصفر ويدل على غير المنتهي بهذه العلامة :-

٢٢١ لما كان غير المنتهي اعظم من نظير غير المنتهي بما لا يوصف كان يمكن
 عدد ارتباطها بعلامة الجمع او الطرح اخراج نظير غير المنتهي من العمل بالكلية . ويمكننا
 اذا ارتبط نظير غير المنتهي بكمية متناهية . ولكن اذا ضرب غير متناه في متناه يزداد
 بذلك غير المنتهي كبنية الكميات . مثاله $2 \times 2 = 4$ يكون
 الحاصل $8 \times 8 = 64$ الخ اي اربعة امثال الاولى . واذا انقسم غير متناه على
 متناه ينقص الاول كبنية الكميات . مثاله $6 \div 2 = 3$ الخ $2 \div 2 = 1$
 $3 \div 2 = 1.5$ الخ اي نصف الاولى . وان ضربت كمية متناهية في نظير غير المنتهي
 يكون الحاصل نظير غير المنتهي . مثاله اذا فرض $l =$ المتناهية و $0 =$ نظير غير
 المنتهي لنا $l \times 0 = 0$. لانه او كان المضروب فيه واحداً لكان الحاصل مساوياً
 للمضروب . وان كان اقل من واحد يكون الحاصل اقل من المضروب . وهنا فرضنا
 المضروب فيه اقل من واحد الى غير نهاية فيكون الحاصل اقل من المضروب فيه الى
 غير نهاية . واذا انقسمت كمية متناهية على نظير غير المنتهي يكون الخارج غير متناه
 اي $l \div 0 = \infty$ لانه كلما قل المقسوم عليه زاد الخارج وهنا قد قل المقسوم عليه الى غير
 نهاية فزاد الخارج الى غير نهاية ومثله $2 \div 3 = \frac{2}{3}$ و $20 \div 6 = \frac{10}{3}$
 $200 \div 6 = \frac{100}{3}$ الخ واذا انقسمت متناهية على غير متناه يكون
 الخارج نظير غير المنتهي اي $l \div l = 1$. لانه كلما زاد المقسوم عليه قل الخارج . فان زاد
 المقسوم عليه الى غير نهاية قل الخارج الى غير نهاية

الفصل العشرون

في الكسور المتصلة

إذا انقسمت صورة هذا الكسر $\frac{247}{272}$ على نفسها والمخرج على الصورة تكون القيمة $\frac{1}{126} + 1$ وإذا انقسم $\frac{126}{247}$ صورته ومخرجه على 126 بصير $\frac{1}{126} + 1$ أي $\frac{247}{272} = \frac{1}{126} + 1$

$$\frac{1}{126} + 1 = \frac{1}{126} + 1 = \frac{127}{126}$$

$$\frac{1}{126} + 1 = \frac{127}{126}$$

$$\frac{1}{126} + 1 = \frac{127}{126}$$

$$\frac{1}{126} + 1 = \frac{127}{126}$$

$$\frac{1}{126} + 1$$

فالكسر المتصل هو كسر صورته واحد ومخرجه صحيح مع كسر صورته واحد ومخرجه صحيح مع كسر الخ وعبارته العامة في

$$\frac{1}{126} + 1$$

$$\frac{1}{126} + 1$$

أي كسر كان يتحول إلى كسر متصل بواسطة استعلام العاد الأكبر الصورة والمخرج كما تقدم في ع ١٢٢ صيغة ٧٤

(١) حول $\frac{114}{247}$ إلى كسر متصلالجواب $\frac{1}{126} + 1$

$$\frac{1}{126} + 1$$

(٢) حول $\frac{201}{276}$ إلى كسر متصلالجواب $\frac{1}{126} + 1$

$$\frac{1}{126} + 1$$

$$\frac{1}{126} + 1$$

(٣) حول $\frac{421}{113}$ الى كسر متصل

(٤) حول $\frac{101}{764}$ الى كسر متصل

(٥) حول $\frac{120}{431}$ الى كسر متصل

لاجل استعلام قيمة كسر متصل حول الصحيح والكسر في المخرج الاخير الى كسر غير صحيح ثم اقلبه اي اجعل المخرج صورة والصورة مخرجاً ثم حول الصحيح في المخرج قبله الى كسر من اسم الكسر الذي قد وجدته واجمع الصورتين

(١) استعلم قيمة هذا الكسر المتصل

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{13} = \frac{1}{\frac{1}{4} + 2} \quad \frac{12}{4} = \frac{1}{\frac{1}{4} + 2} + 2$$

$$\frac{12}{30} = \frac{1}{1+2} + \frac{20}{13} = \frac{1}{\frac{1}{4} + 2} + 2$$

(٢) استعلم قيمة هذا الكسر المتصل

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$$

(٣) استعلم قيمة هذا الكسر المتصل

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

بعد تحويل كسر الى كسر متصل نستعلم له قيمة تقريبية باخذ بعض الاجزاء الاول من ذلك الكسر لاجل تلك القيمة مثاله في $\frac{114}{374}$ له قيمة تقريبية $\frac{1}{3}$ وهو الجزء الاول من الكسر المتصل واذا اخذ منه جزءان تكون $\frac{22}{77}$ وذلك اكثر تقريباً وثلاثة اجزاء تكون اكثر تقريباً

الجواب $\frac{22}{74} \frac{4}{9} \frac{1}{2}$

(١) استعلم قيمات تقريبية للكسر $\frac{522}{1193}$

(٢) استعلم قيمات تقريبية للكسر $\frac{110}{434}$

(٣) استعلم قيمات تقريبية للكسر $\frac{119}{409}$

وعلى هذه الكيفية نستعلم قيمات تقريبية للكسور الكثيرة المنازل وذلك كثير الفائدة في بعض مسائل علم الهيئة

(٤) تناسب محيط الدائرة الى قطرها هو ٣١٤١٥٩٢٦ فاستعلم لذلك قيمات

تقريبية

الجواب $\frac{22}{7} \frac{223}{71} \frac{200}{113}$

- (٥) في ٨٧٩٦٩ سنة تقترن الأرض وعطارد ٢٧٧٢٨٧ مرة فاستعلم قيمات
 تقريبية للكسر $\frac{٨٧٩٦٩}{٢٧٧٢٨٧}$ الجواب $\frac{١}{١٩} \frac{٧}{٢٢} \frac{١٣}{٤١} \frac{٢٣}{١٠٤}$
- (٦) في ٥٧٥٥١ سنة تقترن الأرض والزهرة ٢٦٠٠٠ مرة فاستعلم قيمات
 تقريبية للكسر $\frac{٥٧٥٥١}{٢٦٠٠٠}$ الجواب $\frac{١}{١٤٧} \frac{٨}{٢٣٥}$
- (٧) في ٢٩٥٢٠٦ سنة يدور القمر ٢٦٥٢٤٢٢ دورة فانونية فاستعلم قيمة تقريبية
 للكسر $\frac{٢٩٥٢٠٦}{٢٦٥٢٤٢٢}$ الجواب $\frac{١٩}{٢٣٥}$

الفصل الحادي والعشرون

في المبادلات والتراكيب

يراد بالمبادلات الترتيب المختلفة التي يمكن ترتيب عدة كميات عليها . مثالة

ا ب ت
 ا ت ب
 ب ا ت
 ب ت ا
 ت ا ب
 ت ب ا

المحروف الثلاثة ا ب ت يمكن ترتيبها

ا ب
 ا ت
 ب ا
 ت ب
 ت ا

إذا أخذت اثنين اثنين يمكن ترتيبها

ا
 ب
 ت

إذا أخذت فرداً فرداً ترتب

لأجل استعمال عدة احرف = ن متخذة م وم مرة
 لنفرض ا ب ت ث س = ن حرف فالمبادلات اذا أخذت الاحرف
 فرداً فرداً تعدل عدة الاحرف اي ن وعدة المبادلات اذا اخذت اثنين اثنين هي
 ن (ن - ١) لانه اذا بقينا حرفاً ا مثلاً بقي (ن - ١) حرف

اي ب ت ث س

ثم اذا وضعنا ا قبل كل واحد لنا

ا ب ا ت ا ث ا س

اي لنا مبادلات ن - ١ للاحرف ن اثنين اثنين فيها يكون الالف الاول
 واذا فعل مثل ذلك بالباء لنا مبادلات ن - ١ للاحرف ن اثنين اثنين فيها
 يكون الباء الاول وهكذا الاحرف ن كلها فتكون كل المبادلات ن (ن - ١)
 اذا أخذت ثلاثة ثلاثة تكون المبادلات ن (ن - ١) X (ن - ٢) لانه اذا
 بقينا حرفاً ا مثلاً بقي (ن - ١) حرف وقد تبهرن ان مبادلات ن حرف
 اثنين اثنين هي ن (ن - ١) فتكون مبادلات (ن - ١) حرف اثنين اثنين (ن - ١)
 X (ن - ٢) فاذا وضعت ا اولاً في هذه المبادلات لنا (ن - ١) X (ن - ٢)
 مبادلة الاحرف ن ثلاثة ثلاثة فيها يكون الف الاول واذا قيل مثل ذلك بالباء لنا
 (ن - ١) X (ن - ٢) مبادلة الاحرف ن فيها ب الاول وهكذا في كل الاحرف
 ن فتكون كل المبادلات ن (ن - ١) X (ن - ٢)

وهكذا يبرهن ان المبادلات لاحرف ن مأخوذة اربعة اربعة تكون ن (ن - ١)
 X (ن - ٢) X (ن - ٣)

اذا أخذت الاحرف اثنين اثنين يكون الضلع الاخير في العبارة الثلاثة على عدة
 المبادلات (ن - ١) واذا أخذت ثلاثة ثلاثة يكون الضلع الاخير (ن - ٢) واذا أخذت
 اربعة اربعة يكون الضلع الاخير (ن - ٣) فاذا أخذت م وم معاً يكون الضلع الاخير
 ن - (م - ١) او ن - م + ١ وعدة المبادلات لاحرف ن مأخوذة م وم معاً هي
 ن (ن - ١) X (ن - ٢) X (ن - ٣) (ن - م + ١)

أمثلة

(١) ما المبادلات الممكنة للاحرف الثلاثة ا ب ج مأخوذة خمسة خمسة

ن = ٨ م = ٥ ن - م + ١ = ٤ فتصير العبارة

الجواب ٦٧٢٠

$$٥ \times ٥ \times ٦ \times ٧ \times ٨$$

(١) ما المبادلات الممكنة لستة وعشرين حرفاً مأخوذة أربعة أربعة

الجواب ٢٥٨٨٠٠

(٢) ما المبادلات الممكنة لاثني عشر حرفاً مأخوذة ستة ستة

الجواب ٦٦٥٢٨٠

إذا دخل كل حرف في كل مبادلة أي إذا كان $m = n$ نصير العبارة

$$n(1-n) \times (2-n) \times \dots \times 2 \times 1 \text{ أو بقلب ترتيب الضالع}$$

$$1 \times 2 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n$$

(٤) كم نغمة تدق على ٨ أجراس

$$٤٠٢٢٠ = ٨ \times ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١$$

(٥) كم مبادلة ممكنة للأحرف الجبد

٤٧٩٠٠١٦٠٠

(٦) على كم ترتيب يمكن وضع ١٢ شخصاً

أما التراكيب فيراد بها المجموعات المختلفة التي يمكن أن نوضع كميات عليها بدون التناث إلى ترتيبها. مثالة الأحرف ا ب ت معاً لها مركب واحد فقط أي ا ب ت إذا أخذت اثنين اثنين لها ثلاثة تراكيب

ا ب ا ت ب ت

لأجل استعمال التراكيب الممكنة لأحرف ن مأخوذة م وم معاً

إذا أخذت فرداً فرداً فهي ن

$$\frac{n(1-n)}{2 \times 1}$$

$$\frac{n(2-n) \times (1-n)}{2 \times 2 \times 1}$$

فتكون العبارة العامة لأحرف ن مأخوذة م وم معاً

$$n(1-n) \times (2-n) \times \dots \times (m-n+1) + m$$

$$1 \times 2 \times \dots \times m$$

مثال أول كم تركيب ممكن لعدة أحرف مأخوذة ثلاثة ثلاثة

$$n=6 \quad m=3 \quad n-m+1=4$$

$$٢٠ = \frac{٤ \times ٥ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١}$$

الجواب ٧٠

(٢) كم تركيب لثمانية أحرف مأخوذة أربعة أربعة

الجواب ٢١٠

(٣) كم تركيب لعشرة أحرف مأخوذة ستة ستة معاً

تكون $\frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ و $\frac{1}{8} = \frac{1}{16}$ و $\frac{1}{16} = \frac{1}{32}$ الخ
 ويكون السرد $\frac{1}{1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = \frac{1}{16} = \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} = 2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}$ الخ
 فكلما امتد في العمل يقترب أكار فاكثرا الى اثنين

مثال ٢ ابسط $\frac{1}{1} + \frac{1}{2}$

هنا يكون السرد كما تقدم في $\frac{1}{1} + \frac{1}{2}$ غير ان كل جزء دليله ونري تكون علامته
 سلبية فلنا $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{16} - \frac{1}{32} = \frac{1}{32} - \frac{1}{64} = \frac{1}{64} - \frac{1}{128} = \frac{1}{128} - \frac{1}{256} = \frac{1}{256} - \frac{1}{512} = \frac{1}{512} - \frac{1}{1024} = \frac{1}{1024} - \frac{1}{2048} = \frac{1}{2048} - \frac{1}{4096} = \frac{1}{4096} - \frac{1}{8192} = \frac{1}{8192} - \frac{1}{16384} = \frac{1}{16384} - \frac{1}{32768} = \frac{1}{32768} - \frac{1}{65536} = \frac{1}{65536} - \frac{1}{131072} = \frac{1}{131072} - \frac{1}{262144} = \frac{1}{262144} - \frac{1}{524288} = \frac{1}{524288} - \frac{1}{1048576} = \frac{1}{1048576} - \frac{1}{2097152} = \frac{1}{2097152} - \frac{1}{4194304} = \frac{1}{4194304} - \frac{1}{8388608} = \frac{1}{8388608} - \frac{1}{16777216} = \frac{1}{16777216} - \frac{1}{33554432} = \frac{1}{33554432} - \frac{1}{67108864} = \frac{1}{67108864} - \frac{1}{134217728} = \frac{1}{134217728} - \frac{1}{268435456} = \frac{1}{268435456} - \frac{1}{536870912} = \frac{1}{536870912} - \frac{1}{1073741824} = \frac{1}{1073741824} - \frac{1}{2147483648} = \frac{1}{2147483648} - \frac{1}{4294967296} = \frac{1}{4294967296} - \frac{1}{8589934592} = \frac{1}{8589934592} - \frac{1}{17179869184} = \frac{1}{17179869184} - \frac{1}{34359738368} = \frac{1}{34359738368} - \frac{1}{68719476736} = \frac{1}{68719476736} - \frac{1}{137438953472} = \frac{1}{137438953472} - \frac{1}{274877906944} = \frac{1}{274877906944} - \frac{1}{549755813888} = \frac{1}{549755813888} - \frac{1}{1099511627776} = \frac{1}{1099511627776} - \frac{1}{2199023255552} = \frac{1}{2199023255552} - \frac{1}{4398046511104} = \frac{1}{4398046511104} - \frac{1}{8796093022208} = \frac{1}{8796093022208} - \frac{1}{17592186044416} = \frac{1}{17592186044416} - \frac{1}{35184372088832} = \frac{1}{35184372088832} - \frac{1}{70368744177664} = \frac{1}{70368744177664} - \frac{1}{140737488355328} = \frac{1}{140737488355328} - \frac{1}{281474976710656} = \frac{1}{281474976710656} - \frac{1}{562949953421312} = \frac{1}{562949953421312} - \frac{1}{1125899906842624} = \frac{1}{1125899906842624} - \frac{1}{2251799813685248} = \frac{1}{2251799813685248} - \frac{1}{4503599627370496} = \frac{1}{4503599627370496} - \frac{1}{9007199254740992} = \frac{1}{9007199254740992} - \frac{1}{18014398509481984} = \frac{1}{18014398509481984} - \frac{1}{36028797018963968} = \frac{1}{36028797018963968} - \frac{1}{72057594037927936} = \frac{1}{72057594037927936} - \frac{1}{144115188075855872} = \frac{1}{144115188075855872} - \frac{1}{288230376151711744} = \frac{1}{288230376151711744} - \frac{1}{576460752303423488} = \frac{1}{576460752303423488} - \frac{1}{1152921504606846976} = \frac{1}{1152921504606846976} - \frac{1}{2305843009213693952} = \frac{1}{2305843009213693952} - \frac{1}{4611686018427387904} = \frac{1}{4611686018427387904} - \frac{1}{9223372036854775808} = \frac{1}{9223372036854775808} - \frac{1}{18446744073709551616} = \frac{1}{18446744073709551616} - \frac{1}{36893488147419103232} = \frac{1}{36893488147419103232} - \frac{1}{73786976294838206464} = \frac{1}{73786976294838206464} - \frac{1}{147573952589676412928} = \frac{1}{147573952589676412928} - \frac{1}{295147905179352825856} = \frac{1}{295147905179352825856} - \frac{1}{590295810358705651712} = \frac{1}{590295810358705651712} - \frac{1}{1180591620717411303424} = \frac{1}{1180591620717411303424} - \frac{1}{2361183241434822606848} = \frac{1}{2361183241434822606848} - \frac{1}{4722366482869645213696} = \frac{1}{4722366482869645213696} - \frac{1}{9444732965739290427392} = \frac{1}{9444732965739290427392} - \frac{1}{18889465931478580854784} = \frac{1}{18889465931478580854784} - \frac{1}{37778931862957161709568} = \frac{1}{37778931862957161709568} - \frac{1}{75557863725914323419136} = \frac{1}{75557863725914323419136} - \frac{1}{151115727451828646838272} = \frac{1}{151115727451828646838272} - \frac{1}{302231454903657293676544} = \frac{1}{302231454903657293676544} - \frac{1}{604462909807314587353088} = \frac{1}{604462909807314587353088} - \frac{1}{1208925819614629174706176} = \frac{1}{1208925819614629174706176} - \frac{1}{2417851639229258349412352} = \frac{1}{2417851639229258349412352} - \frac{1}{4835703278458516698824704} = \frac{1}{4835703278458516698824704} - \frac{1}{9671406556917033397649408} = \frac{1}{9671406556917033397649408} - \frac{1}{19342813113834066795298816} = \frac{1}{19342813113834066795298816} - \frac{1}{38685626227668133590597632} = \frac{1}{38685626227668133590597632} - \frac{1}{77371252455336267181195264} = \frac{1}{77371252455336267181195264} - \frac{1}{154742504910672534362390528} = \frac{1}{154742504910672534362390528} - \frac{1}{309485009821345068724781056} = \frac{1}{309485009821345068724781056} - \frac{1}{618970019642690137449562112} = \frac{1}{618970019642690137449562112} - \frac{1}{1237940039285380274899124224} = \frac{1}{1237940039285380274899124224} - \frac{1}{2475880078570760549798248448} = \frac{1}{2475880078570760549798248448} - \frac{1}{4951760157141521099596496896} = \frac{1}{4951760157141521099596496896} - \frac{1}{9903520314283042199192993792} = \frac{1}{9903520314283042199192993792} - \frac{1}{19807040628566084398385987584} = \frac{1}{19807040628566084398385987584} - \frac{1}{39614081257132168796771975168} = \frac{1}{39614081257132168796771975168} - \frac{1}{79228162514264337593543950336} = \frac{1}{79228162514264337593543950336} - \frac{1}{158456325028528675187087900672} = \frac{1}{158456325028528675187087900672} - \frac{1}{316912650057057350374175801344} = \frac{1}{316912650057057350374175801344} - \frac{1}{633825300114114700748351602688} = \frac{1}{633825300114114700748351602688} - \frac{1}{1267650600228229401496703205376} = \frac{1}{1267650600228229401496703205376} - \frac{1}{2535301200456458802993406410752} = \frac{1}{2535301200456458802993406410752} - \frac{1}{5070602400912917605986812821504} = \frac{1}{5070602400912917605986812821504} - \frac{1}{10141204801825835211973625643008} = \frac{1}{10141204801825835211973625643008} - \frac{1}{20282409603651670423947251286016} = \frac{1}{20282409603651670423947251286016} - \frac{1}{40564819207303340847894502572032} = \frac{1}{40564819207303340847894502572032} - \frac{1}{81129638414606681695789005144064} = \frac{1}{81129638414606681695789005144064} - \frac{1}{162259276829213363391578010288128} = \frac{1}{162259276829213363391578010288128} - \frac{1}{324518553658426726783156020576256} = \frac{1}{324518553658426726783156020576256} - \frac{1}{649037107316853453566312041152512} = \frac{1}{649037107316853453566312041152512} - \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} = \frac{1}{1298074214633706907132624082305024} - \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} = \frac{1}{2596148429267413814265248164610048} - \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} = \frac{1}{5192296858534827628530496329220096} - \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} = \frac{1}{10384593717069655257060992658440192} - \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} = \frac{1}{20769187434139310514121985316880384} - \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} = \frac{1}{41538374868278621028243970633760768} - \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} = \frac{1}{83076749736557242056487941267521536} - \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} = \frac{1}{166153499473114484112975882535043072} - \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} = \frac{1}{332306998946228968225951765070086144} - \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} = \frac{1}{664613997892457936451903530140172288} - \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} = \frac{1}{1329227995784915872903807060280344576} - \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} = \frac{1}{2658455991569831745807614120560689152} - \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} = \frac{1}{5316911983139663491615228241121378304} - \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} = \frac{1}{10633823966279326983230456482242756608} - \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} = \frac{1}{21267647932558653966460912964485513216} - \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} = \frac{1}{42535295865117307932921825928971026432} - \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} = \frac{1}{85070591730234615865843651857942052864} - \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} = \frac{1}{170141183460469231731687303715884105728} - \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} = \frac{1}{340282366920938463463374607431768211456} - \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} = \frac{1}{680564733841876926926749214863536422912} - \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} = \frac{1}{1361129467683753853853498429727072845824} - \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} = \frac{1}{2722258935367507707706996859454145691648} - \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} = \frac{1}{5444517870735015415413993718908291383296} - \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} = \frac{1}{10889035741470030830827987437816582766592} - \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} = \frac{1}{21778071482940061661655974875633165533184} - \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} = \frac{1}{43556142965880123323311949751266331066368} - \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} = \frac{1}{87112285931760246646623899502532662132736} - \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} = \frac{1}{174224571863520493293247799005065324265472} - \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} = \frac{1}{348449143727040986586495598010130648530944} - \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} = \frac{1}{696898287454081973172991196020261297061888} - \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} = \frac{1}{1393796574908163946345982392040522594123776} - \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} = \frac{1}{2787593149816327892691964784081045188247552} - \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} = \frac{1}{5575186299632655785383929568162090376495104} - \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} = \frac{1}{11150372599265311570767859136324180752990208} - \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} = \frac{1}{22300745198530623141535718272648361505980416} - \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} = \frac{1}{44601490397061246283071436545296723011960832} - \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} = \frac{1}{89202980794122492566142873090593446023921664} - \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} = \frac{1}{178405961588244985132285746181186892047843328} - \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} = \frac{1}{356811923176489970264571492362373784095686656} - \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} = \frac{1}{713623846352979940529142984724747568191373312} - \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} = \frac{1}{1427247692705959881058285969449495136382746624} - \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} = \frac{1}{2854495385411919762116571938898990272765493248} - \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} = \frac{1}{5708990770823839524233143877797980545530986496} - \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} = \frac{1}{11417981541647679048466287755595961091061972992} - \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} = \frac{1}{22835963083295358096932575511191922182123945984} - \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} = \frac{1}{45671926166590716193865151022383844364247891968} - \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} = \frac{1}{91343852333181432387730302044767688728495783936} - \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} = \frac{1}{182687704666362864775460604089535377456991567872} - \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} = \frac{1}{365375409332725729550921208179070754913983135744} - \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} = \frac{1}{730750818665451459101842416358141509827966271488} - \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} = \frac{1}{1461501637330902918203684832716283019655932542976} - \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} = \frac{1}{2923003274661805836407369665432566039311865085952} - \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} = \frac{1}{5846006549323611672814739330865132078623730171904} - \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} = \frac{1}{11692013098647223345629478661730264157247460343808} - \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} = \frac{1}{23384026197294446691258957323460528314494920687616} - \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} = \frac{1}{46768052394588893382517914646921056628989841375232} - \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} = \frac{1}{93536104789177786765035829293842113257979682750464} - \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} = \frac{1}{187072209578355573530071658587684226515959365500928} - \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} = \frac{1}{374144419156711147060143317175368453031918731001856} - \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} = \frac{1}{748288838313422294120286634350736906063837462003712} - \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} = \frac{1}{1496577676626844588240573268701473812127674924007424} - \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} = \frac{1}{2993155353253689176481146537402947624255349848014848} - \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} = \frac{1}{5986310706507378352962293074805895248510699696029696} - \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} = \frac{1}{11972621413014756705924586149611790497021399392059392} - \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} = \frac{1}{23945242826029513411849172299223580994042798784118784} - \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085597568237568} = \frac{1}{47890485652059026823698344598447161988085$

في المسميات غير المعينة

٢٢٥ لنا واسطة اخرى لبسط عبارة جبرية وهي ان يؤخذ سردها لمسميات غير معينة ثم تستعمل قيمتها فنفرض ان عبارة جبرية تعدل هذا السرد

$$ت + ب + ك + س + ك + د + ك + ر + ك = الخ$$
 العبارة ثم ينقل العبارة الى الجانب الاول بصير الجانب الثاني صفراً والامر واضح ان المعادلة تكون حينئذ صحيحة لان
 السرد = العبارة فاذا السرد - العبارة = ٠

ثم ان عين لكل المسميات $ت + ب + ك + س + ك + د + ك + ر + ك = الخ$ قيمات حتى تكون قيمة كل جزء صفراً
 فالامر واضح ان الكل = ٠ وتستعمل قيمة كل مسمى من المعادلة التي وقع فيها
 مثال اول ابسط $س + ب + ك$

نفرض $س + ب + ك = ت + ب + ك + س + ك + د + ك + ر + ك = الخ$
 بضرب الجانبين في $س + ب + ك$ ونقل $ت$ نصير ٠ = $(ت + س - ت) +$
 $(ت + ب + س) + ك + (ب + ب + س + س) + ك + (س + ب + د + س) + ك + الخ$
 فان جعل $(ت + س - ت) + (ت + ب + س + س) + (س + ب + د + س) + ك + الخ$
 كل واحد = ٠ يكون الكل = ٠ فلنا

$$\begin{aligned} ت + س - ت &= ٠ \\ ت + ب + س &= ٠ \\ ب + ب + س &= ٠ \\ س + ب + د + س &= ٠ \\ ت &= \frac{ت}{س} \\ ب &= \frac{ب}{س} \\ س &= \frac{س}{س} \\ د &= \frac{د}{س} \end{aligned}$$

اي كل واحد من هذه المسميات = الذي قبله $\times \frac{س}{س}$

فلنا بالتعويض عن المسميات بهذه القيمات

$$س + ب + ك = \frac{ت}{س} + \frac{ب}{س} + \frac{س}{س} + \frac{د}{س} + \frac{ك}{س} + \frac{ك}{س} + \frac{ك}{س} + \frac{ر}{س} + \frac{ك}{س} = الخ$$

٢ ابسط $د + ح + ك + س + ك$

نفرض $د + ح + ك + س + ك = ت + ب + ك + س + ك + د + ك + ر + ك = الخ$
 ثم بالضرب في المخرج ونقل $ت + ب + ك$ الى الجانب الآخر نصير ٠ = $(ت + ب + ك + د + ح + س + س) + ك + (س + د + ب + ح + ت + س) + ك + (د + د +$
 $س + ح + ب + س) + ك = الخ$

التناسب الأجزاء الأصغر نسوفاً على التناسب الأواحداً في سردها بطر يكون الجزء
الأصغر صغيراً الى غير نهاية فيحسب لاشيء فتصير العبارة $m = \frac{b}{1-b}$ او $m = \frac{b}{1-b}$

مثال ١ ما هو مجتمع هذا السرد

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{100000} + \frac{1}{1000000} + \dots$$

الجزء الأعظم $\frac{1}{1}$ والتناسب $10 =$

$$m = \frac{b}{1-b} = \frac{1}{1-10} = \frac{1}{-9} = -\frac{1}{9}$$

٢ ما هو مجتمع هذا السرد $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$

$$m = \frac{1 \times 2}{1-2} = \frac{2}{-1} = -2$$

٣ ما هو مجتمع هذا السرد $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625} + \dots$

$$\frac{1}{5} + 1 = \frac{6}{5}$$

٢٢٨ ثم انه يستعمل مجتمع بعض انواع السرد بواسطة الطرح لانه حسب قواعد

الكسور

$$\begin{array}{r} \frac{1}{3 \times 2} = \frac{2-2}{2 \times 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4 \times 3} = \frac{3-2}{3 \times 2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5 \times 4} = \frac{4-3}{4 \times 3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6 \times 5} = \frac{5-4}{5 \times 4} = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} \end{array}$$

فان جعلت الكسور الواقعة عن اليسار في سرده فالامر واضح انه يعدل فضلة
السردين المركبين من الكسور عن اليمين . وتستعمل تلك الفضلة بسهولة لانه ان طرح
الجزء الأول من احد هذين السردين فالباقي يعدل السرد الآخر

فلنفرض سردياً غير متناه $\frac{1}{1 \times 0} + \frac{1}{0 \times 4} + \frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}$ المطلوب

مجتمعه فلنصنع منه سردياً جديداً بطرح الضلع الثاني من الخارج وليكن مجتمع هذا السرد
الجديد $m =$

$$m = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\text{إذاً } m = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\text{وبالطرح } \frac{1}{3} = \frac{1}{1 \times 0} + \frac{1}{0 \times 4} + \frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}$$

مثال ٢ ما هو مجتمع السرد $\frac{1}{7 \times 0} + \frac{1}{0 \times 4} + \frac{1}{4 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 1}$

$$\frac{٢}{٧ \times ٥} + \frac{٢}{٦ \times ٤} + \frac{٢}{٥ \times ٣} + \frac{٢}{٤ \times ٢} + \frac{٢}{٣ \times ١} = \frac{٢}{٢} = \frac{١}{٢} + ١$$

$$\text{مفروض م} = ١ + \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٦} + \frac{٢}{٥} + \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٢}$$

اضرب الجانبيين في ٢ ك - ٢ ك + ١ فلنا

$$\text{م} \times (٢ ك - ٢ ك + ١) = ١ - \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٣} + \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٥} + \frac{٢}{٦} + \frac{٢}{٧}$$

وان فرض ك = ١ لنا

$$\frac{١}{٦ \times ٥ \times ٤} + \frac{١}{٥ \times ٤ \times ٣} + \frac{١}{٤ \times ٣ \times ٢} + \frac{١}{٣ \times ٢ \times ١} = \frac{٢}{٢}$$

فترى من المثالين الاخيرين ان سردين مختلفين قد يكونان على قيمة واحدة

نبذة

في انعكس الاسرار

٢٤٠ لكي نعكس سردياً مثل هذا

$$\text{ك} = \text{ت} + \text{ب} + \text{ن} + \text{س} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ح}$$

اي لنجد قيمة ن في اجزاء من ك افرض سردياً له مسميات غير معينة

$$\text{فلنفرض ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{ك} + \text{د} + \text{ك} + \text{ر} + \text{ك} + \text{ح}$$

ثم لنجد قيمة قوات ن بموجب هذا المفروض لنا

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ح} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ن} + \text{س} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ح}$$

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ح} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ن} + \text{س} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ح}$$

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ح} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ن} + \text{س} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ح}$$

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ح} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ن} + \text{س} + \text{د} + \text{ر} + \text{ن} + \text{ح}$$

ثم بالتعويض عن قوات ن في السرد الاول بهذه القيات لنا

$$\begin{aligned} \text{س} &= \frac{٢ - \text{ب}}{\text{ب} - \text{س}} = \text{د} = \frac{\text{ب} - ٥}{٥ - \text{ب}} + \text{ت} + \text{د} \\ \text{ر} &= \frac{١٤ - \text{ب}}{\text{ب} - \text{ر}} = \frac{٢١ - \text{ب}}{\text{ب} - \text{ر}} + \frac{٢ - \text{س}}{\text{س} - \text{ر}} + \frac{٦ - \text{ت}}{\text{ت} - \text{ر}} + \frac{\text{د} - \text{س}}{\text{س} - \text{ر}} \end{aligned}$$

فهذه قيمات المسميات غير المعينة في السرد الذي فرضناه سابقاً اي

$$\text{ن} = \text{ت} + \text{ك} + \text{ب} + \text{ك} + \text{س} + \text{ك} + \text{د} + \text{ك} + \text{ر} + \text{ك} + \text{الح}$$

ثم لنفرض سردياً

$$\text{ك} = \text{ن} - \frac{١}{٢} \text{ن} + \frac{١}{٢} \text{ن} - \frac{١}{٤} \text{ن} + \frac{١}{٤} \text{ن} - \frac{١}{٨} \text{ن} + \frac{١}{٨} \text{ن} - \frac{١}{١٦} \text{ن} + \frac{١}{١٦} \text{ن} - \frac{١}{٣٢} \text{ن} + \frac{١}{٣٢} \text{ن} - \frac{١}{٦٤} \text{ن} + \frac{١}{٦٤} \text{ن} - \frac{١}{١٢٨} \text{ن} + \frac{١}{١٢٨} \text{ن} - \frac{١}{٢٥٦} \text{ن} + \frac{١}{٢٥٦} \text{ن} - \frac{١}{٥١٢} \text{ن} + \frac{١}{٥١٢} \text{ن} - \frac{١}{١٠٢٤} \text{ن} + \frac{١}{١٠٢٤} \text{ن} - \frac{١}{٢٠٤٨} \text{ن} + \frac{١}{٢٠٤٨} \text{ن} - \frac{١}{٤٠٩٦} \text{ن} + \frac{١}{٤٠٩٦} \text{ن} - \frac{١}{٨١٩٢} \text{ن} + \frac{١}{٨١٩٢} \text{ن} - \frac{١}{١٦٣٨٤} \text{ن} + \frac{١}{١٦٣٨٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٢٧٦٨} \text{ن} + \frac{١}{٣٢٧٦٨} \text{ن} - \frac{١}{٦٥٥٣٦} \text{ن} + \frac{١}{٦٥٥٣٦} \text{ن} - \frac{١}{١٣١٠٧٢} \text{ن} + \frac{١}{١٣١٠٧٢} \text{ن} - \frac{١}{٢٦٢١٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٦٢١٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٥٢٤٢٨٨} \text{ن} + \frac{١}{٥٢٤٢٨٨} \text{ن} - \frac{١}{١٠٤٨٥٧٦} \text{ن} + \frac{١}{١٠٤٨٥٧٦} \text{ن} - \frac{١}{٢٠٩٧١٥٢} \text{ن} + \frac{١}{٢٠٩٧١٥٢} \text{ن} - \frac{١}{٤١٩٤٣٠٤} \text{ن} + \frac{١}{٤١٩٤٣٠٤} \text{ن} - \frac{١}{٨٣٨٨٦٠٨} \text{ن} + \frac{١}{٨٣٨٨٦٠٨} \text{ن} - \frac{١}{١٦٧٧٧٢١٦} \text{ن} + \frac{١}{١٦٧٧٧٢١٦} \text{ن} - \frac{١}{٣٣٥٥٤٤٣٢} \text{ن} + \frac{١}{٣٣٥٥٤٤٣٢} \text{ن} - \frac{١}{٦٧١٠٨٨٦٤} \text{ن} + \frac{١}{٦٧١٠٨٨٦٤} \text{ن} - \frac{١}{١٣٤٢١٧٢٨} \text{ن} + \frac{١}{١٣٤٢١٧٢٨} \text{ن} - \frac{١}{٢٦٨٤٣٤٥٦} \text{ن} + \frac{١}{٢٦٨٤٣٤٥٦} \text{ن} - \frac{١}{٥٣٦٨٦٩١٢} \text{ن} + \frac{١}{٥٣٦٨٦٩١٢} \text{ن} - \frac{١}{١٠٧٣٧٣٨٢٤} \text{ن} + \frac{١}{١٠٧٣٧٣٨٢٤} \text{ن} - \frac{١}{٢١٤٧٤٧٦٤٨} \text{ن} + \frac{١}{٢١٤٧٤٧٦٤٨} \text{ن} - \frac{١}{٤٢٩٤٩٥٢٩٦} \text{ن} + \frac{١}{٤٢٩٤٩٥٢٩٦} \text{ن} - \frac{١}{٨٥٨٩٩٠٥٩٢} \text{ن} + \frac{١}{٨٥٨٩٩٠٥٩٢} \text{ن} - \frac{١}{١٧١٧٩٠١٨٤} \text{ن} + \frac{١}{١٧١٧٩٠١٨٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٤٣٥٨٠٣٦٨} \text{ن} + \frac{١}{٣٤٣٥٨٠٣٦٨} \text{ن} - \frac{١}{٦٨٧١٦٠٧٣٦} \text{ن} + \frac{١}{٦٨٧١٦٠٧٣٦} \text{ن} - \frac{١}{١٣٧٤٣٢١٥٢} \text{ن} + \frac{١}{١٣٧٤٣٢١٥٢} \text{ن} - \frac{١}{٢٧٤٨٦٤٣٠٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٧٤٨٦٤٣٠٤} \text{ن} - \frac{١}{٥٤٩٧٢٨٦٠٨} \text{ن} + \frac{١}{٥٤٩٧٢٨٦٠٨} \text{ن} - \frac{١}{١٠٩٩٤٥٧٢١٦} \text{ن} + \frac{١}{١٠٩٩٤٥٧٢١٦} \text{ن} - \frac{١}{٢١٩٨٩١٤٤٣٢} \text{ن} + \frac{١}{٢١٩٨٩١٤٤٣٢} \text{ن} - \frac{١}{٤٣٩٧٨٢٨٨٦٤} \text{ن} + \frac{١}{٤٣٩٧٨٢٨٨٦٤} \text{ن} - \frac{١}{٨٧٩٥٦٥٧٧٢٨} \text{ن} + \frac{١}{٨٧٩٥٦٥٧٧٢٨} \text{ن} - \frac{١}{١٧٥٩١٣١٥٤٥٦} \text{ن} + \frac{١}{١٧٥٩١٣١٥٤٥٦} \text{ن} - \frac{١}{٣٥١٨٢٦٣٠٩١٢} \text{ن} + \frac{١}{٣٥١٨٢٦٣٠٩١٢} \text{ن} - \frac{١}{٧٠٣٦٥٢٦١٨٢٤} \text{ن} + \frac{١}{٧٠٣٦٥٢٦١٨٢٤} \text{ن} - \frac{١}{١٤٠٧٣٠٥٢٣٦٤٨} \text{ن} + \frac{١}{١٤٠٧٣٠٥٢٣٦٤٨} \text{ن} - \frac{١}{٢٨١٤٦١٠٤٧٣٩١٦} \text{ن} + \frac{١}{٢٨١٤٦١٠٤٧٣٩١٦} \text{ن} - \frac{١}{٥٦٢٩٢٢٠٩٤٧٧٣٢} \text{ن} + \frac{١}{٥٦٢٩٢٢٠٩٤٧٧٣٢} \text{ن} - \frac{١}{١١٢٥٨٤٤١٩٤٧٤٦٤} \text{ن} + \frac{١}{١١٢٥٨٤٤١٩٤٧٤٦٤} \text{ن} - \frac{١}{٢٢٥١٦٨٨٣٩٤٧٩٢٨} \text{ن} + \frac{١}{٢٢٥١٦٨٨٣٩٤٧٩٢٨} \text{ن} - \frac{١}{٤٥٠٣٣٧٦٧٩٤٧٨٥٦} \text{ن} + \frac{١}{٤٥٠٣٣٧٦٧٩٤٧٨٥٦} \text{ن} - \frac{١}{٩٠٠٦٧٥٣٥٩٤٧٧١٢} \text{ن} + \frac{١}{٩٠٠٦٧٥٣٥٩٤٧٧١٢} \text{ن} - \frac{١}{١٨٠١٣٥٠٧١٩٤٧٤٢٤} \text{ن} + \frac{١}{١٨٠١٣٥٠٧١٩٤٧٤٢٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٦٠٢٧٠١٤٣٩٤٧٨٤٨} \text{ن} + \frac{١}{٣٦٠٢٧٠١٤٣٩٤٧٨٤٨} \text{ن} - \frac{١}{٧٢٠٥٤٠٢٨٧٩٤٧٧٩٦} \text{ن} + \frac{١}{٧٢٠٥٤٠٢٨٧٩٤٧٧٩٦} \text{ن} - \frac{١}{١٤٤١٠٨٠٥٧٥٩٤٧٥٩٢} \text{ن} + \frac{١}{١٤٤١٠٨٠٥٧٥٩٤٧٥٩٢} \text{ن} - \frac{١}{٢٨٨٢١٦١١٥١٩٤٧١٨٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٨٨٢١٦١١٥١٩٤٧١٨٤} \text{ن} - \frac{١}{٥٧٦٤٣٢٢٣٣٩٤٧٣٦٨} \text{ن} + \frac{١}{٥٧٦٤٣٢٢٣٣٩٤٧٣٦٨} \text{ن} - \frac{١}{١١٥٢٨٦٤٤٦٧٩٤٧٧٣٦} \text{ن} + \frac{١}{١١٥٢٨٦٤٤٦٧٩٤٧٧٣٦} \text{ن} - \frac{١}{٢٣٠٥٧٢٨٩٣٥٩٤٧٤٦٨} \text{ن} + \frac{١}{٢٣٠٥٧٢٨٩٣٥٩٤٧٤٦٨} \text{ن} - \frac{١}{٤٦١١٤٥٧٨٧١٩٤٧٩٣٦} \text{ن} + \frac{١}{٤٦١١٤٥٧٨٧١٩٤٧٩٣٦} \text{ن} - \frac{١}{٩٢٢٢٩١٥٧٥٣٩٤٧٨٧٢} \text{ن} + \frac{١}{٩٢٢٢٩١٥٧٥٣٩٤٧٨٧٢} \text{ن} - \frac{١}{١٨٤٤٥٨٣١٥١٠٧٩٤٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٨٤٤٥٨٣١٥١٠٧٩٤٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٦٨٩١٦٦٣٠٢١٩٤٧٤٨٨} \text{ن} + \frac{١}{٣٦٨٩١٦٦٣٠٢١٩٤٧٤٨٨} \text{ن} - \frac{١}{٧٣٧٨٣٣٢٦٠٤٣٩٤٧٩٣٦} \text{ن} + \frac{١}{٧٣٧٨٣٣٢٦٠٤٣٩٤٧٩٣٦} \text{ن} - \frac{١}{١٤٧٥٦٦٦٥٢٠٨٧٩٤٧٨٧٢} \text{ن} + \frac{١}{١٤٧٥٦٦٦٥٢٠٨٧٩٤٧٨٧٢} \text{ن} - \frac{١}{٢٩٥١٣٣٣٠٤٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٩٥١٣٣٣٠٤٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٥٩٠٢٦٦٦٠٨٧٩٤٧٤٦٨} \text{ن} + \frac{١}{٥٩٠٢٦٦٦٠٨٧٩٤٧٤٦٨} \text{ن} - \frac{١}{١١٨٠٥٣٣٢١٧٩٤٧٩٣٦} \text{ن} + \frac{١}{١١٨٠٥٣٣٢١٧٩٤٧٩٣٦} \text{ن} - \frac{١}{٢٣٦١٠٦٦٤٣٥٩٤٧٨٧٢} \text{ن} + \frac{١}{٢٣٦١٠٦٦٤٣٥٩٤٧٨٧٢} \text{ن} - \frac{١}{٤٧٢٢١٣٢٨٧١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٤٧٢٢١٣٢٨٧١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٩٤٤٤٢٦٥٧٤٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٩٤٤٤٢٦٥٧٤٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٨٨٨٨٥٣١٤٨٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٨٨٨٨٥٣١٤٨٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٧٧٧٧٠٦٢٨٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٣٧٧٧٧٠٦٢٨٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٧٥٥٥٤٠٢٤٧١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٧٥٥٥٤٠٢٤٧١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٥١١٠٨٠٤٩٤٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٥١١٠٨٠٤٩٤٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٠٢٢١٦١٩٨٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٣٠٢٢١٦١٩٨٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٦٠٤٤٣٢٣٩٧٥٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٦٠٤٤٣٢٣٩٧٥٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٢٠٨٨٦٤٧٩٥٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٢٠٨٨٦٤٧٩٥٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٢٤١٧٧٢٩٥٩٠١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٤١٧٧٢٩٥٩٠١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٤٨٣٥٤٥٩١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٤٨٣٥٤٥٩١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٩٦٧٠٩١٨٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٩٦٧٠٩١٨٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٩٣٤١٨٣٦٧٢١٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٩٣٤١٨٣٦٧٢١٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٨٦٨٣٦٧٤٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٣٨٦٨٣٦٧٤٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٧٧٣٦٧٣٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٧٧٣٦٧٣٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٥٤٧٣٤٦٩٧٧٣٢٩٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٥٤٧٣٤٦٩٧٧٣٢٩٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٠٩٤٦٩٣٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٣٠٩٤٦٩٣٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٦١٨٩٣٨٧٩١٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٦١٨٩٣٨٧٩١٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٢٣٧٨٧٧٥٨٢١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٢٣٧٨٧٧٥٨٢١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٢٤٧٥٧٥٥١٦٤٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٤٧٥٧٥٥١٦٤٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٤٩٥١٥١١٢٢٧٢١٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٤٩٥١٥١١٢٢٧٢١٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٩٩٠٣٠٢٢٤٤٣٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٩٩٠٣٠٢٢٤٤٣٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٩٨٠٦٠٤٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٩٨٠٦٠٤٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٩٦١٢٠٨٩٧٧٣٢٩٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٣٩٦١٢٠٨٩٧٧٣٢٩٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٧٩٢٢٤١٧٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٧٩٢٢٤١٧٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٥٨٤٤٨٣٩٩٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٥٨٤٤٨٣٩٩٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٣١٦٨٩٦٧٩٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٣١٦٨٩٦٧٩٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٦٣٣٧٩٣٥٩٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٦٣٣٧٩٣٥٩٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٢٦٧٥٨٧١٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٢٦٧٥٨٧١٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٢٥٣٥١٧٤٣٩٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٥٣٥١٧٤٣٩٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٥٠٧٠٣٤٨٧٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٥٠٧٠٣٤٨٧٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٠١٤٠٦٩٧٥٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٠١٤٠٦٩٧٥٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٢٠٢٨١٣٩٥١٢٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٠٢٨١٣٩٥١٢٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٤٠٥٦٢٧٩٠٢٤٤٣٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٤٠٥٦٢٧٩٠٢٤٤٣٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٨١١٢٥٥٨٠٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٨١١٢٥٥٨٠٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٦٢٢٥١٦٠٩٧٧٣٢٩٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٦٢٢٥١٦٠٩٧٧٣٢٩٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٢٤٥٠٣٢١٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٣٢٤٥٠٣٢١٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٦٤٩٠٠٦٤٣٩٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٦٤٩٠٠٦٤٣٩٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٢٩٨٠١٢٨٧٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٢٩٨٠١٢٨٧٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٢٥٩٦٠٢٥٧٥٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٥٩٦٠٢٥٧٥٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٥١٩٢٠٥١٥١٢٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٥١٩٢٠٥١٥١٢٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٠٣٨٤١٠٣٠٢٥٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٠٣٨٤١٠٣٠٢٥٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٢٠٧٦٨٢٠٦٠٥٠٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٠٧٦٨٢٠٦٠٥٠٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٤١٥٣٦٤١٢٠٩٧٧٣٢٩٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٤١٥٣٦٤١٢٠٩٧٧٣٢٩٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٨٣٠٧٢٨٢٤١٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٨٣٠٧٢٨٢٤١٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٦٦١٤٥٦٨٣٩٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٦٦١٤٥٦٨٣٩٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٣٢٢٩١٣٦٧٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٣٣٢٢٩١٣٦٧٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٦٦٤٥٨٢٧٣٥٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٦٦٤٥٨٢٧٣٥٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٣٢٩١٦٥٤٧١٢٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٣٢٩١٦٥٤٧١٢٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٢٦٥٨٣٣٠٩٤٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٦٥٨٣٣٠٩٤٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٥٣١٦٦٦١٨٨٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٥٣١٦٦٦١٨٨٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٠٦٣٣٣٢٣٦٩٧٧٣٢٩٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٠٦٣٣٣٢٣٦٩٧٧٣٢٩٢١٥١٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٢١٢٦٦٦٤٧٣٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢١٢٦٦٦٤٧٣٩٥٤٦٤٣٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٤٢٥٣٣٢٩٤٦٧٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٤٢٥٣٣٢٩٤٦٧٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٨٥٠٦٦٥٨٩٣٥٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٨٥٠٦٦٥٨٩٣٥٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٧٠١٣٣١٧٨٧١٢٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٧٠١٣٣١٧٨٧١٢٦٢٤٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٣٤٠٢٦٦٣٥٧٤٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٣٤٠٢٦٦٣٥٧٤٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٦٨٠٥٣٢٧١٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٦٨٠٥٣٢٧١٤٨٨٦٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٣٦١٠٦٥٤٣٩٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{١٣٦١٠٦٥٤٣٩٠٩٢٤٦٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٢٧٢٢١٣٠٨٧٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٢٧٢٢١٣٠٨٧٨١٨٠٣٠٣٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{٥٤٤٤٢٦١٧٥٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} + \frac{١}{٥٤٤٤٢٦١٧٥٦٣٦٠٦٠٧٩٤٧٧٧٤٤} \text{ن} - \frac{١}{١٠٨٨٨٥٣٥١٢٦٢٤$$

ان كان قياس النسبة مركباً من ثلاثة اجزاء مثل الثاني المفروض سابقاً فلتكن

$$م + ن + ر$$

$$ثم د = م + ك + ب + ن + ك + ت + ر ك = \text{الجزء الرابع}$$

$$ي = د + م + ك + ن + ك + ب + ر ك = \text{الخامس}$$

$$ف = ي + م + ك + د + ن + ك + س + ر ك = \text{السادس الخ}$$

٢٤٢ في كل سردي دائري يستعمل قياس النسبة بتحويل معادلتين من هذه المعادلات
ان كان مركباً من جزئين وتحويل ثلاث منها ان كان مركباً من ثلاثة اجزاء
فلنفرض ك = ١ ولناخذ الجزء الرابع والخامس ما سبق ذكرها واذا فرضنا ك
= ١ فلنا

$$\left. \begin{aligned} د &= م + ب + ن \\ ي &= د + م + ن \end{aligned} \right\} \text{مطلوب قيمة م ون}$$

بتحويل هاتين المعادلتين لنا

$$م = \frac{د - م - ب - ن}{د - م - ب - ن} \quad ن = \frac{م - ي - د}{م - ي - د}$$

$$\text{ثم في هذا السرد } ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢ \left\{ \begin{array}{l} ت \\ ب \\ س \\ د \\ ي \\ ف \\ الخ \end{array} \right.$$

ان جعل ك = ١ فلنا

$$٢ = \frac{٩ \times ٢ + ٥ \times ٧}{٧ \times ٢ - ١٥} = م \quad ن = \frac{٧ - ٩ \times ٥}{٧ \times ٢ - ١٥} = ١$$

فيكون قياس النسبة ١ - ٢

٢٤٣ متى عرفنا قياس النسبة لسرد ما بطر نستعلم من ذلك مجتمع السرد

$$\left\{ \begin{array}{l} ت \\ ب \\ س \\ د \\ ي \\ ف \end{array} \right. \text{ لنفرض } \left\{ \begin{array}{l} ت + ب + ك + س + ك + د + ك + ي + ك + ف + ك \\ \text{الخ سردياً دائرياً} \end{array} \right.$$

قياس النسبة له م + ن

فيكون ت = الجزء الأول ب = الثاني

$$س = م + ك + ت + ن + ك = \text{الثالث}$$

$$د = س + م + ك + ب + ن + ك = \text{الرابع}$$

$$ي = د + م + ك + س + ن + ك = \text{الخامس الخ}$$

فترى هنا م ك مضروباً في كل جزء الأول والاخير ون ك في كل جزء
الأاخيرين وان وهم امتداد السرد الى غير نهاية يجوز ترك الاخيرين كأن لا قيمة لما
كما علمت وان فرض ع = مجتمع السرد فلنا

$$ع = ت + ب + م ك \times (ب + س + د الخ) + ن ك \times (ت + ب + س الخ)$$

$$وع - ت = ب + س + د الخ \quad وع = ت + ب + س الخ$$

$$فاذا ع = ت + ب + م ك \times (ع - ت) + ن ك \times ع$$

$$\text{وتحويل هذه المعادلة نصير ع} = \frac{ت + ب + م ك}{١ - م ك - ن ك} ع$$

$$\text{مثال ١ ما هو مجتمع } ١ + ٦ ك + ١٢ ك^٢ + ٤٨ ك^٣ + ١٢٠ ك^٤ \text{ الخ}$$

$$\text{قياس النسبة} = ٦ + ١$$

$$\text{اذا ت} = ١ \quad ب = ٦ ك \quad م = ١ \quad ن = ٦$$

$$\text{والجنع} = \frac{١ + ٥ ك}{١ - ٦ ك - ٦ ك^٢}$$

$$٢ \quad \text{ما هو مجتمع } ١ + ٢ ك + ٤ ك^٢ + ٧ ك^٣ + ١١ ك^٤ + ١٨ ك^٥ + ٢٩ ك^٦ \text{ الخ}$$

$$\text{الجواب} = \frac{٢ + ١ ك}{١ - ٦ ك - ٦ ك^٢}$$

$$٣ \quad \text{ما هو مجتمع } ١ + ك + ٥ ك^٢ + ١٢ ك^٣ + ١٤ ك^٤ + ٤١ ك^٥ + ١٢١ ك^٦ + ٢٦٥ ك^٧ \text{ الخ}$$

$$\text{الجواب} = \frac{١ - ١ ك}{١ - ٦ ك - ٦ ك^٢}$$

$$٤ \quad \text{ما هو مجتمع } ١ + ٢ ك + ٢ ك^٢ + ٤ ك^٣ + ٥ ك^٤ \text{ الخ}$$

$$\text{الجواب} = \frac{١}{١ - ٦ ك - ٦ ك^٢}$$

$$٥ \quad \text{ما هو مجتمع } ١ + ٢ ك + ٥ ك^٢ + ٧ ك^٣ + ٩ ك^٤ + ١١ ك^٥ \text{ الخ}$$

$$\text{الجواب} = \frac{١ + ١ ك}{١ - ٦ ك - ٦ ك^٢}$$

$$٦ \quad \text{ما هو مجتمع } ١ + ٢ ك + ٨ ك^٢ + ٢٨ ك^٣ + ١٠٠ ك^٤ \text{ الخ}$$

$$\text{الجواب} = \frac{١ - ١ ك}{١ - ٦ ك - ٦ ك^٢}$$

في ترتيب الفضلات

٢٤٤ لكي نستعلم قيمة بعض اجزاء سردي الى حد ما يلزم التدقيق المقصود في

عمل ما يؤخذ عدة رنبر من فضلات اجزاء السرد . مثالة ان فرض سرد

$$١ \quad ٨ \quad ٢٧ \quad ٦٤ \quad ١٢٥ \quad \text{بطرح كل جزء ما بعده}$$

$$\text{لنا} \quad ٧ \quad ١٩ \quad ٢٧ \quad ٦١ \quad \text{الرتبة الاولى من الفضلات}$$

$$١٢ \quad ١٨ \quad ٢٤ \quad \text{الرتبة الثانية}$$

$$٦ \quad ٦ \quad \text{الثالثة وعلم جراً}$$

$$x = \frac{r-1}{r} \times \frac{r-1}{r} - 1 + \frac{r-1}{r}(1-1) + 1(1-1) + 1$$

مثال أول ما هو الجزء العشرون من هذا السرد

1 2 7 10 15 51

الرتبة الاولى من فضلات = ٢ ٣ ٤ ٥ ٦

الثانية = 1 1 1 1

الثالثة =

هناك ١ = د' ٢ = د'' ١ = د'''

والجزء العشرون = $171 + 28 + 1 = 200$ والجزء الخمسون = 1270

مثال ٣ ما هو الجزء العشرون من ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الح

العدد ١ ٨ ٢٧ ٦٤ ١٢٥ الخ

الرتبة الاولى من فضلات = ٧ ١٩ ٢٧ ٦١

الثانية = ١٢ ١٨ ٢٤

٦ ٦ = الثالثة

منات = ا د = و د = ۱۲ د = ۶

والجزء العشرون = ٨٠٠٠

٢ ما هو الجزء الثاني عشر من ٢ ٦ ١٢ ٢٠ ٢٠ الخ

الجواب ۱۵۶

٤ ماهو الجزء الخامس عشر من ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢

الجواب ۲۲۵

٢٤٦ لنا أيضاً هذه العبارة اللدالة على مجتمع ع اجزاء من سردي اوله ت

$\frac{1-\epsilon}{r} \times \frac{1-\epsilon}{r} \times \frac{1-\epsilon}{r} + \dots$

$$\frac{(r-x)(r-x)(1-x)x}{1 \times 2 \times 3} + \frac{(r-x)(1-x)x}{2 \times 3} + \frac{(1-x)x}{3} + x = r$$

مثال اول ماه و مجموع ۲۰ جزء من ۱ ۲ ۵ ۷ ۹ الخ

السرد ١ ٢ ٥ ٢ ١
 = الرتبة الاولى من فضلات ٢ ٢ ٢ ٢
 = الثانية . . .

هنا ١ = د' ٢ = د'' ٥ = د'''

المجموع = ٢٠ + ٢٠ = ٤٠ = ٢ × $\frac{١-٢٠}{٢}$ اي ع'

(١) ما هو مجموع ٢٠ جزءا من ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الخ

ت = د' = ٢ = د'' ٢ = د''' . . . ومجموع عشرين جزءا = ٢٨٧٠

(٢) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد ١ ٢ + ١

٢ + ٢ + ١ ٤ + ٣ + ٢ + ١ الخ

السرد ١ ٢ ٦ ١٠ ١٥ ٢١

الرتبة الاولى للفضلات ٢ ٢ ٤ ٥ ٦

الثانية ١ ١ ١ ١

الثالثة . . .

ت ١ = د' ٢ = د'' ١ = د''' الخ

فحسب العبارة العامة السابقة

$$م = ع' = \frac{٢٢ + ٢٠٤ + ٢٠}{٢ \times ٢ \times ١} = \frac{(٢-٢٠)(١-٢٠)}{٢ \times ٢ \times ١} + ٢ \times \frac{(١-٢٠)}{٢ \times ١}$$

$$\text{اي م} = \frac{(٢+٢٠)(١+٢٠)}{٢ \times ٢ \times ١}$$

(١) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد ١ ٢ ٣ ٤ ٥ الخ

ت = ١ = د' ٢ = د'' ٢ = د''' . . . الخ

وبالتعويض في العبارة المشار اليها السابقة انا

$$م = \frac{(١+٢٠)(١+٢٠)}{٢ \times ٢ \times ١}$$

(٥) ما هو مجموع ن حلقة من هذا السرد

١ × (١ + م) ٢ (٢ + م) ٣ (٣ + م) ٤ (٤ + م) الخ

ت = م + ١ = د' = م + ٢ = د'' ٢ = د''' الخ

$$وم = ن(١ + م) + (٢ + م) \times \frac{(١-٢٠)}{٢ \times ١} + \frac{(٢-٢٠)(١-٢٠)}{٢ \times ٢ \times ١}$$

$$\text{اي م} = \frac{(٢٢ + ٢ + ١) \times (١ + ن)}{٢ \times ٢ \times ١}$$

تنبيه . هذا الباب كثير الاستعمال في علم الهيئة والطبيعات فلا يسع المتعلم جهلة

(٦) ما هو مجموع ٥٠ جزءاً من ١ ٢ ٣ ٤ الخ
 ت = ١ د = ٧ د = ١٢ د = ٦ د = ٠

المجموع ١٦٢٥٦٣٥

(٧) ما هو مجموع ١٥ جزءاً من ٢ ٦ ١٢ ٢٠ الخ
 (٨) ما هو مجموع ٢٠ جزءاً من ١ ٢ ٦ ١٠ ١٥ الخ
 (٩) ما هو مجموع ١٢ جزءاً من ٤ ٢ ٣ ٤ ٥ الخ

في تكويم الكرات او الكلال

ان العبارات في المثال الثالث والرابع والخامس من الامثلة المتقدمة نعتدّم لمعرفة عدد الكلال او الكرات في كُومٍ على هيئات مختلفة

اولاً الكومة المثلثة الاضلاع

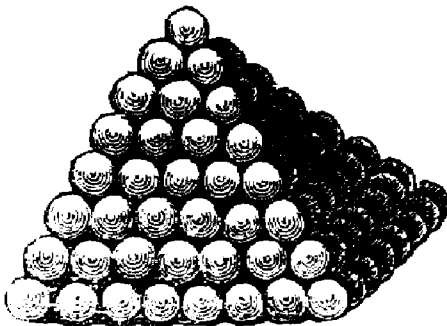


الكومة المثلثة الاضلاع مؤلفة من كلال موضوعة بعضها فوق بعض صفوفًا او اعراقًا بحيث ينقص عدد الكلال واحدًا في كل ضلعٍ حتى ينتهي الى واحدة في العرق الاعلى فعدد الكلال في كومة مثلثة الاضلاع كاملة هو مجموع سرد ١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦ + ٧ + ٨ + ٩ + ١٠ + ١١ + ١٢ + ١٣ + ١٤ + ١٥ + ١٦ + ١٧ + ١٨ + ١٩ + ٢٠ = ٢١٠

وعلى افتراض ن عدد الكلال في ضلع واحد من القاعدة او العرق الاسفل فمن العبارة المذكورة في المثال الثالث السابق لنا

$$(١) \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 210$$

ثانياً الكومة المربعة

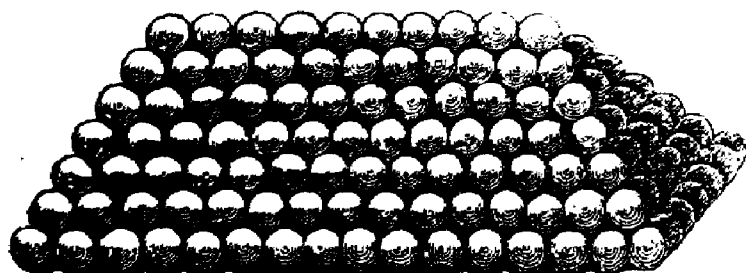


الكومة المربعة مؤلفة كما في الشكل اي في العرق الاعلى كلة واحدة وفي الثانية ٢ وفي الثالثة ٣ ولمّ جراً فاذا كانت الصفوف او الاعراق ن يكون عدد الكلال مجموع السرد ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠

$$(٢) \quad \frac{n(n+1)^2}{6} = 210$$

ثالثاً الكومة المستطيلة

عدد الكلال في الصف الاعلى (١ + م) وفي الثاني ٢ (٢ + م) وفي الثالث ٣ (٣ + م) وهلم جرا فجميع الكلال في الكومة تدل عليه العبارة في المثال الخامس السابق اي



$$م = \frac{ن(١ + ن)(٢ + ن)}{٢ \times ٢ \times ١}$$

اذا كانت الكومة ناقصة فاحسب عدد الكلال الذي كان فيها او كانت كاملة والعدد اللازم لتكميلها فتكون الفضلة عدد الكلال في الكومة

وقد تكتب العبارات (١) و (٢) و (٣) السابقة هكذا

(١) في المثلثة $م = \frac{١}{٢} \times \frac{١ + ن}{٢} \times (١ + ١ + ن)$

(٢) في المربعة $م = \frac{١}{٢} \times \frac{١ + ن}{٢} \times (١ + ن + ن)$

(٣) في المستطيلة $م = \frac{١}{٢} \times \frac{١ + ن}{٢} \times ((١ + ن) + (١ + ن) + (١ + ن))$

وبما ان $\frac{ن(١ + ن)}{٢}$ هو عدد الكلال في الوجه المثلث لكل كومة والضلع الثاني من

العبارة هو عدد الكلال في الصف الاطول من القاعدة مع العدد الذي في السطح

المتقابل مع الذي في الصف الاعلى فلنا هذه القاعدة

الى عدد الكلال في الصف الاطول من القاعدة اضعف عدد الكلال في السطح

المتقابل والعدد الذي في الصف الاعلى واضرب المجمع في ثلث العدد الذي في الوجه

المثلث من الكومة فالحاصل عدد الكلال في الكومة كلها

(١) كم كلة في كومة مثلثة لما ١٥ عرقاً

$$٦٨٠ = \frac{١}{٢} \times ١٧ \times \frac{١٥ \times ١٦}{٢}$$

(٢) كم كلة في كومة مربعة لما ١٤ عرقاً وكم تنبي بعد نزع ٥ اعراق منها

الجواب ١٠١٥ و ٩٦٠

(٣) كم كلة في كومة مستطيلة اذا كان طول القاعدة ٦٠ كلة وعرضها ٢٠ كلة

الجواب ٢٢٤٠٥

- (٤) في كومة مستطيلة ناقصة طول القاعدة ٤٦ وعرضها ٢٠ والطول في الصف الاعلى ٣٥ والعرض ٩ فكم كلة فيها
الجواب ٧١٩٠
- (٥) في كومة مثلثة ناقصة عدد الكلال في كل ضلع من العرق الاسفل ٢٠ وفي كل ضلع من الاعلى ١٠ فكم كلة فيها
- (٦) في كومة مربعة ناقصة عدد الكلال في ضلع من القاعدة ١٥ وفي ضلع من العرق الاعلى ٦ فكم كلة فيها
- (٧) في كومة مستطيلة عدد الكلال في ضلع من القاعدة ٩٢ وفي الضلع الآخر ٤٠ وفي العرق الاعلى عدد الكلال في ضلع ٧٠ وفي الضلع الآخر ١٨ فكم كلة فيها

الفصل الثالث والعشرون

في المعادلات النامة من الدرجة الثالثة

٢٤٧ متى وُجد في معادلة مكعب المجهول ومربعة سُميت معادلة نامة من الدرجة الثالثة وهذه عبارة عمومية لمعادلات من هذا النوع بعد نقل الاجزاء الى جانب واحد

$$ت ك^٣ + ب ك^٢ + س ك + د = ٠$$

ولا بد اكل معادلة من هذا النوع من ثلاثة اجوبة كما ان المعادلات من الدرجة الثانية لها جوابان

$$\text{فلو فرضنا } (١-ك) \times (٢-ك) \times (٣-ك) = ٠ \text{ لكان لنا من ذلك } ك^٣ - ٦ك^٢ + ١١ك - ٦ = ٠$$

ولكي تعدل هذه الكميات صفراً لا بد ان يكون احد الاضلاع التي حصلت المعادلة منها صفراً اي تكون ك - ١ = ٠ وك - ٢ = ٠ او ك - ٣ = ٠ وك - ٢ = ٠ او ك - ٣ = ٠ وك - ٢ = ٠ وك - ٣ = ٠ واذا عوضنا عن المجهول بكمية اخرى ابنة كانت غير واحدة من هذه الثلاث لم يكن الحاصل صفراً فلا يكون للمعادلة غير هذه الاجوبة الثلاثة واجوبة المعادلات هذه نسي اصولها

٢٤٨ لاجل ابضاج كيفية استعمال اصول معادلة من هذا النوع لنفرض
ك- ف- ك- ق- ك- ر

وبضرب الاولى في الثانية لنا ك- (ف+ق) ك+ ف+ ق وان ضربت
هذه في ك- ر فلنا

ك- (ف+ق+ر) ك+ (ف+ق+ر) ك- ف+ ق+ ر وهذه
العبارة تعدل صفراً متى كان ك- ف= . وك= ف او ك- ق= .
وك= ق او ك- ر= . وك= ر فلنعوض عن هذه المعادلة باخرى مثل ك-
ت+ ك+ ب+ ك- س= . فلكي تكون الاصول الثلاثة على ما تقدم اي ك= ف
او ك= ق او ك= ر يلزم ان يكون

$$(١) ت = ف + ق + ر$$

$$(٢) ب = ف + ق + ر$$

$$(٣) س = ف + ق + ر$$

فدري ان الجزء الثاني من المعادلة مشتمل على مجموع اصولها الثلاثة وان الجزء
الثالث منها مشتمل على مجموع حاصل كل اثنين اثبت من الاصول الثلاثة . والجزء
الرابع مشتمل على حاصل الاصول الثلاثة . ونرى ايضاً ان كل معادلة من الدرجة
الثالثة لا يكون لها اصول منطقاً الا الكميات التي تنفي الجزء الرابع منها . فمن حيث ان
ذلك الجزء هو حاصل الاصول الثلاثة لا بد ان يقبل الانقسام على كل واحد منها .
ومن ذلك نستدل بسهولة على الكميات التي يجب ان نستعملها في تنقيشنا عن اصول
المعادلة . فلو فرض ك= ٦+ ٦ لكان لنا بالمقابلة ك- ٦- ٦= . ومن حيث
ان هذه المعادلة ليس لها اصول منطقاً الا التي تنقسم ٦ عليها نعلم ان تلك الاصول هي
ثلاثة من هذه الاربعة اي ١ ٢ ٣ ٦ لان ٦ لا تنقسم الا على هذه الاربعة

$$\text{فان فرض ك= ١ لنا } ١-١-١-٦= ٦$$

$$\text{وان فرض ك= ٢ لنا } ٢-٢-٨-٦= ٠$$

$$\text{وان فرض ك= ٣ لنا } ٣-٣-٢٧-١٨= ٠$$

$$\text{وان فرض ك= ٦ لنا } ٦-٦-٢١٦-٢٠٤= ٠$$

فلنا من ذلك ك= ٢ واحد من الاصول الثلاثة

فيكون ك- ٢ ضلعاً من الاضلاع التي حصلت المعادلة من ضرب بعضها في
بعض . ونستعلم الآخر بالقسمة هكذا

٢٥١ متى كانت العلامات في المعادلة ايجابية وسلبية بالتناوب كما في المعادلات المذكورة آنفاً وفي هذه كـ + ت كـ + ب كـ س = . نكون جميع الاصول ايجابية . ولو كانت جميع العلامات ايجابية كما في هذه كـ + ت كـ + ب كـ س = . لكانت جميع الاصول سلبية كما ينضح من ضربها . مثالة ك = ٢ ك = ٣ ك = ٤ بالمقابلة ك - ٢ = ٠ ك - ٣ = ٠ ك - ٤ = ٠ .

وبالضرب $(2-k) \times (3-k) \times (4-k) = 24 -$

ولو فرض كـ = ٢ كـ = ٣ كـ = ٤

الكان $\cdot = ٢ + ك$ $\cdot = ٢ + ك$ $\cdot = ٤ + ك$

فبالضرب لنا $١٢٤ + ١٢٦ + ١٢٩ + ١٣٢$

فندى ان عدد الاصول السلبية يماثل مرار تغيير العلامات في المعادلة . وعدد
الاصول الايجابية يماثل مرار تتابع العلامات المتشابهة
وفي هذه المعادلة $K^2 + K^1 - 24K + 56 = 0$.

نرى العلامات بتغير من + الى - ثم من - الى + اربع مرتين و + يتبع + مرة واحدة فقط . ونستدل بذلك ان المعادلة اصلين ايجابيين واعلاماً واحداً سلبياً . ولا بد ان ٥٦ يقبل الانقسام على هذه الاصول و ٥٦ ينقسم على + ١ ٢ ٤ ٧ ٨ ١٤ ٢٨ ٥٦ فاذا فرضنا $ك = ٢$ قلنا $٨ + ٤ - ٦٨ + ٥٦ = ٠$ فاذا $ك = ٢$ هو اصل واحد . واكي نستعمل الاخرين نقسم على

$$\begin{array}{r} \Gamma A - \Delta \Gamma + \Delta \quad 0\Gamma + \Delta \Gamma \Delta - \Gamma \Delta + \Gamma \Delta (\Gamma - \Delta) \\ \hline \Delta \Gamma \Delta - \Delta \Gamma \\ \Delta \Gamma - \Delta \Gamma \\ \hline 0\Gamma + \Delta \Gamma A - \\ 0\Gamma + \Delta \Gamma A - \end{array}$$

والخارج $ك' + ٢ك - ٢٨ = ٠$ و $ك' + ٢ك = ٢٨$ $ك = ٤$ و $ك = ٧$
(مسئلة ١) ما عددان فضلتهما ١٢ وإذا ضرب حاصلهما في مجموعها كان
الحاصل ١٤٥٦٠

نفرض $K =$ اصغرها. و $K + 12 =$ اكبرها. وحاصلها $K + 12$ ك ومجموعها $K + 12$ وهذا في حاصلها يعطينا $K^2 + 36K + 144 = 14060$ وبالقسمه على 2 $K^2 + 18K + 72 = 7030$ ولو اردنا ان نخرج جميع الاعداد التي قبل

الحاصل ٢٠٧٣٦ لنفرض الأصغر ك والأكبر ك + ٧٢٠ فلنا ك + ٧٢٠ =

$$٨١ \times ٤ \times ٨ \times ٨ = ٢٠٧٣٦$$

بتربيع الجانبين ك + ٧٢٠ = ٨١ × ٤ × ٨ × ٨

ثم لنفرض ك = ٨ ي فبالتعويض لنا

$$٨١ \times ٤ \times ٨ \times ٨ = ٨ \times ٨ \times ٧٢٠ + ٨ ي$$

بالقسمة على ٨ لنا ي + ٩٠ = ٨١ × ٤ × ٨

ثم لنفرض ي = ٢ ل فبالتعويض لنا

$$٨١ \times ٤ \times ٨ = ٩٠ \times ٤ + ٢ ل$$

بالقسمة على ٨ لنا ل + ٤٥ = ٨١ × ٤

ثم لنفرض ل = ٩ م فلنا بتعويض

$$٩ \times ٤ = ٩ \times ٤٥ + ٢ م$$

بالقسمة على ٩ لنا م + ٥ = ٩ × ٤

$$٩ \times ٤ = (٥ + م) \times ٩$$

إذا م = ٤ وم = ٥ + ٩ = ١٤

فلنا ل = ٤٥ ي = ٧٢ ك = ٥٧٦ = الأصغر

$$\text{والأكبر} = ١٢٩٦ = ٧٢٠ + ٥٧٦$$

ولنا طريقة أخرى لحل هذه المسئلة

لنفرض أكبرها ك فالأصغر ك - ٧٢٠

بالضرب في ٨ لنا ك - ٧٢٠ = ٢٠٧٣٦

$$٨١ \times ٢٧ \times ٦٤ = ك - ٧٢٠$$

لنفرض ك = ٤ ي فلنا ٦٤ ي - ٤ × ٧٢٠ = ٨١ × ٢٧ × ٦٤

بالقسمة على ٦٤ لنا ي - ٤٥ = ٨١ × ٢٧

لنفرض ي = ٢ ل فلنا ٢٧ ل - ١٢٥ = ٨١ × ٢٧

بالقسمة على ٢٧ لنا ل - ٥ = ٨١

وهنا نرى من أول نظرة أن ل = ٢ ومن ثم لنا

$$٩ = ي ك = ٢٦ ك = ١٢٩٦ = أكبرها$$

(مسئلة ٤) ما عددان فضلتهما ١٢ وإذا ضربت هذه الفضلة في مجموع كليهما كان

الحاصل ١٠٢١٤٤

لنفرض ك = اصغرها وك + ١٢ = اكبرها
كعب الاول = ك^٣ وكعب الثاني = ك^٣ + ٢٦ ك^٢ + ٤٢ ك + ١٧٢٨ فلنا

$$١٢ (٢ ك^٢ + ٢٦ ك + ٤٢ ك + ١٧٢٨) = ١٠٢١٤٤$$

بالقسمة على ١٢ و ٢ لنا ك^٢ + ١٨ ك + ٢١٦ ك - ٨٦٤ + ٤٢٥٦

$$٥٢ \times ٨ \times ٨ = ٣٣٩٢ = ك^٢ + ٢١٦ ك + ١٨ ك$$

لنفرض ك = ٢ ي ونقسم على ٨ فلنا

$$٤٢٤ = ٥٢ \times ٨ = ي٩ + ي٥٤ = ي$$

و ٤٢٤ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٨ و ٥٢ الى آخره

$$٤٢٤ = ي = ٤ فلنا ٦٤ + ١٤٤ + ٢١٦ = ٤٢٤$$

$$فاذا ي = ٤ ك = ٨ ٨ = ١٢ + ٢٠$$

(مسئلة ٥) رجال عندوا شركة على شرط ان يضع كل واحد منهم في راس المال
من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء عشر مرات فربحوا في المئة ٦ اكثر من عدد الشركاء
وكان كل الربح ٢٩٢ ديناراً فكم عدد الشركاء

لنفرض ك = عدد الشركاء ثم ١٠ ك = ما وضعه كل واحد و ١٠ ك^٢ = ما
وضعه جميعهم والربح في المئة ك + ٦ فيكون ربح دينار واحد $\frac{٦+ك}{١٠٠}$ وهنا في ١٠ ك^٢ =
 $\frac{٦+ك}{١٠٠} = \frac{٦+ك}{١٠٠}$ الربح كله

$$فلنا \frac{٦+ك}{١٠٠} = ٢٩٢$$

$$و \frac{٦+ك}{١٠٠} = ٢٩٢٠$$

لنفرض ك = ٢ ي ثم ننقسم على ٨ فلنا

$$ي٢ + ي٢٠ = ٤٩٠$$

و ٤٩٠ يقبل الانقسام على ١ و ٢ و ٥ و ٧ و ١٠ الى آخره

فنرى من اول وهلة ان ١٠ هي اكثر ما يلزم و ٢ و ٥ اصغر ما يلزم. فلنفرض

$$ي = ٧ فلنا$$

$$١٤٧ + ٢٤٢ = ٤٩٠ فاذا ي = ٧ ك = ١٤$$

الشركاء ١٤ وكل واحد وضع في راس المال ١٤٠ ديناراً

(مسئلة ٦) شركة في تجارة كان راس مالم ٨٢٤٠ ديناراً فاضاف اليوكل
شريك من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء ٤٠ مرة فربحوا في المئة من الدنانير ما يماثل
عدد الشركاء وعند قسمة الربح اخذ كل واحد من الدنانير ما يماثل عدد الشركاء

عشر مرات وبقي ٢٢٤ ديناراً فكم عدد الشركاء

لنفرض ك = الشركاء. و ٤٠ ك = ما اضافة كل واحد من راس المال و ٤٠ ك^١
ما اضافة الجميع و ٤٠ ك^٢ + ٨٢٤٠ = راس المال كله بعد الاضافات المذكورة ورجع في
المنة ك فيكون كل الرمح $\frac{٨٢٤٠}{١٠٠} + \frac{٤٠ ك}{١٠٠}$ اي $\frac{٨٢٤٠}{١٠٠} + \frac{٤٠ ك}{١٠٠}$ ومن هذا المبلغ
اخذ كل واحد ١٠ ك والكل اخذوا ١٠ ك وبقي ٢٢٤ فلما $\frac{٨٢٤٠}{١٠٠} + \frac{٤٠ ك}{١٠٠} = ١٠ ك$
٢٢٤ +

$$٠ = ٥٦٠ - ك + ٢٠٦ = ٠$$

فترى العلامات تنغير ثلاث مرات فتكون الاصول جميعها الجيبية و ٥٦٠ بفيل
الانقسام على ١ و ٢ و ٤ و ٥ و ٧ و ٨ الخ فان فرضنا ك = ٤ نجد ان المعادلة لا تنصح
وكذلك اذا فرضنا ك = ٥ واذا فرضنا ك = ٧ نجد المعادلة صحيحة فاذا ك = ٧
ونجد الاصلين الآخرين بالقسمة فلذا بعد القسمة ك - ١٨ = ٨٠ + ك = ٠ = ٩ + ١
اي ك = ٨ او ١٠ وكل واحد من هذه الاجوبة الثلاثة يطابق شروط المسئلة هكذا

١٠	٨	٧	عدد الشركاء
٤٠٠	٢٢٠	٢٨٠	كل واحد اضاف ٤٠ ك
٤٠٠٠	٢٥٦٠	١٩٦٠	الكل اضافوا ٤٠ ك ^١
٨٢٤٠	٨٢٤٠	٨٢٤٠	راس المال
١٢٢٤٠	١٠٨٠٠	١٠٢٠٠	= ٨٢٤٠ + ٤٠ ك ^٢
١٢٢٤	٨٦٤	٧١٤	رجعوا في المنة ما يماثل عدد الشركاء
١٠٠	٨٠	٧٠	كل واحد اخذ
١٠٠٠	٦٤٠	٤٩٠	الكل اخذوا
٢٢٤	٢٢٤	٢٢٤	فبقي

(مسئلة ٧) ما عددان مجتمعهما ١٢ وان ضرب كل واحد في جذر الآخر كان

مجتمع الحاصلين ٣٠

لنفرض احدهما ك^١ والآخر ي^١

(١) بشروط المسئلة ك^١ + ي^١ = ١٢

(٢) اضع ٢ كى الى الجانبين ك + ٢ كى + ٢ = ١٢ + ٢ كى

(٣) بالتخدير ك + ٢ = ١٢ + ٢ كى

(٤) بالشرط الثاني كى + ٢ = ٢٠

اي كى (ك + ٢) = ٢٠

(٥) بالقسمة ك + ٢ = $\frac{٢٠}{١}$

(٦) بالمساواة بين (٢) و (٥) $\frac{٢٠}{١} = ١٢ + ٢ كى$

(٧) بالترقية $\frac{٢٠}{١} = ١٢ + ٢ كى$

(٨) بالجبر ٢ كى + ١٢ = ٢٠

(٩) افرض كى = ف ٢ ف + ١٢ = ٢٠

اي ف + $\frac{١}{٢}$ ف = ٤٥٠

او اذا فرض ك + ٢ = س وكى = ف

فلنا من (٤) كى (ك + ٢) = ف س

و ك + ٢ كى + ٢ = س

اي ك + ٢ ف + ٢ = س

و ك + ٢ = س - ٢

ومن (١) لنا س - ٢ = ١٢

بالمقابلة ٢ = س - ١٢

لنا من (٤) ف س = ٢٠

بالقسمة ف = $\frac{٢٠}{٢}$ ف = ١٠

وبالمساواة س - ١٢ = ١٠

بالجبر س - ١٢ = ١٠

افرض س = ٥ فلنا ١٢ - ٥ = ٧

و ف س = ٢٠ ف = ٤

ك = ٦ $\frac{٦}{٢} = ٣$ كى = ٥

ك = ٢ = ١ كى = ٤

الفصل الرابع والعشرون

في حل المعادلات من كل درجة بالاستقراء

٢٥٢ قد تقدم القول ان حاصل اصول معادلة يعدل جزءها الاخير . فن النظر الى هذا الجزء يمكننا ان نفرض احد الاصول فرضاً تقريبياً . وإذا فرضنا للاصل قيمتين واختارنا بالتعويض بهما عن المجهول في المعادلة نستعلم الخطأ . ثم نصلح المفروضين على موجب هذه النسبة

نسبة فضلة الخطأين الى فضلة المفروضين كالخطأ الاصغر الى الاصلاح المقتضي له

ونكرر هذا العمل حتى ننهي الى المطلوب ونسئ هذه الطريقة استقراء . ويسهل العمل اذا فرضنا عددين فضلتهما ١ او ١٠٠ الى آخره

$$(١) \text{ مفروض } ك^٢ - ٨ك + ١٧ = ١٠ - ٠ = \text{مطلوب قيمة } ك$$

نرى في هذه المعادلة ان العلامات تغيرت ثلاث مرات فيقتضي ان تكون الاصول الثلاثة ايجابية وان يكون حاصلها ١٠ ومجموعها ٨ فلنفرض احدهما ١٥ او ٢٥

بالاوّل	بالثاني
$ك^٢ = ١٢٢٦٥١$	١٤٠٦٠٨
$- ٨ك = - ٢٠٨٠٨$	$- ٢١٦٢٢$
$+ ١٧ك = ٨٦٧$	٨٨٤
$- ١٠ = ١٠٠$	$- ١٠٠$
$\text{الخطآن} = ١٢٧١ +$	$٢٦٨٨ +$
بالطرح	١٢٧١
فضلة الخطأين	$١٤١٧ +$

ثم بالنسبة $١٤ : ١ : ١٢٧ :: ٠٩ : ٠٩$ اي ٠٩ يجب طرحها من المفروض الاوّل فلنا $١٥ - ٠٩ = ٥٠١$

ثم لنفرض $ك = ٠.١$ او ٠.٢

بالثاني

$$١٢٦٠٠٦$$

$$٢٠١٦ -$$

$$٨٥٢٤$$

$$١٠ -$$

$$٢٤٦ +$$

بالاول

$$١٢٥٧٥١ = ك$$

$$٢٠٠٨ - = ك٨ -$$

$$٨٥١٧ = ك١٧$$

$$١٠ - = ١٠ -$$

$$١٢١ + الخطآن$$

$$وبالطرح ٠.٢٤٦ - ٠.١٢١ = ٠.١٢٥$$

$$ثم ٠.١٢٥ : ٠.١ :: ٠.١٢١ : ٠.١ = الاصلاح$$

وا $٠.١ - ٠.١ = ٠$ وهي تطابق المعادلة فلنا $ك = ٠$ واحد من الاصول

الثلاثة. وبالقسمه

$$ك - ٠ = (ك٨ - ك١٧ + ١٠ - ك) (ك٢ - ك٣ + ٢ = ٠$$

وبانتماء التوزيع الى آخره $ك = ٢$ او ١ وهذه الاصول الثلاثة اي ٠ و ٢ و ١

بعد تبديل علاماتها يكون مجتمعا ٨ وحاصلها ١٠

$$(٢) ما هي اصول هذه المعاداة ك٨ - ك٢ + ك٤ + ٤٨ = ٠$$

$$الجواب ٢ - ٤ + ٦$$

$$(٢) ما هي اصول هذه المعاداة ك٨ - ك١٦ + ك٦٥ - ٥٠ = ٠$$

$$الجواب ١ ٥ ١٠$$

$$(٤) ما هي اصول هذه المعاداة ك٢ + ك٢ - ك٢٣ = ٩٠$$

$$الجواب ٦ - ٥ - ٢$$

$$(٥) مطلوب اصل من اصول هذه المعاداة تقريبا وهي ك٩ + ك٤ + ك٤$$

$$٨٠ =$$

$$(٦) مطلوب اصل من اصول هذه المعاداة تقريبا وهي ك٢ + ك٢ + ك٢ = ١٠٠$$

٢٤٢ طريقة اخرى

لنفرض $ر =$ عددا قد وجدنا بالامتحان انه يعدل قيمة المجهول $ك$ تقريبا
ولنفرض $ل =$ الفرق بين $ر$ والاصل الحقيقي $ك$ ثم في المعاداة المفروضة نفرض

عن ك بواسطة ر + ل ونستط الاجزاء المخوية قوات من ل فتصير المعادلة بسيطة . مثالة

$$(1) \text{ مفروض ك}^{\circ} - 16 \text{ ك}^{\circ} + 60 = 0$$

$$\text{لنفرض ك} = \text{ر} - \text{ل}$$

$$\text{فلما ك}^{\circ} = \text{ر}^{\circ} - \text{ل}^{\circ} \text{ ر}^{\circ} 16 + \text{ل}^{\circ} 16 - \text{ل}^{\circ}$$

$$0 = 16 \text{ ك}^{\circ} - 16 \text{ ر}^{\circ} + 16 \text{ ل}^{\circ} - \text{ل}^{\circ}$$

$$60 = 60 \text{ ك} - 60 \text{ ر} + 60 \text{ ل}$$

باستقاط الاجزاء التي فيها ل ولنا

$$\text{ر}^{\circ} 16 - \text{ر}^{\circ} 60 + \text{ل}^{\circ} 16 - \text{ل}^{\circ} 60 = 0$$

$$\text{و } \text{ل} = \frac{16 - 60}{60 - 16} = \frac{44}{44} = 1$$

$$\text{ثم لنفرض ر} = 11 \text{ فاذا ل} = 1 \text{ تقريباً } 0.8 = \frac{7}{8}$$

$$\text{ك} = \text{ر} - \text{ل} = 11 - 1 = 10$$

$$\text{ثم افرض ر} = 10.2 \text{ في المعادلة الاخيرة فلما ل} = 1.88 \text{ و ر} - \text{ل} =$$

$$10.12$$

$$\text{افرض ر} = 10.12 \text{ فلما ل} = 0.12$$

$$\text{و } \text{ر} - \text{ل} = 10 = 10.12 - 0.12 = 10$$

$$(2) \text{ مطلوب اصل لهذه المعادلة تقريباً وهي ك}^{\circ} + 10 \text{ ك}^{\circ} + 5 = 2600$$

$$\text{الجواب } 11.67$$

$$(2) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة ك}^{\circ} + 2 \text{ ك}^{\circ} - 11 \text{ ك}^{\circ} = 12$$

$$(1) \text{ ما هي اصول هذه المعادلة ك}^{\circ} + 4 \text{ ك}^{\circ} - 7 \text{ ك}^{\circ} - 34 \text{ ك}^{\circ} = 24$$

—oo—

الفصل الخامس والعشرون

في المسائل غير المحدودة وهي السبالة

٢٥٤ ان كانت المعادلات التي تتركب من شروط مسئلة اقل عدداً من مجاهيلها تكون المسئلة غير محدودة. ويمكن ان يفرض لاحد المجاهيل اية قيمة كانت

فتخرج البقية بالنسبة الى المفروض . وفي مسائل هذا الباب نستعمل القواعد السابقة ولكن ينبغي التبصر والاحتياط لكي توجد الطريقة الفضلى لاستعمالها في كل مسألة بمفردها .
فلو طُلب عددان صحيحان ايجابيان مجموعهما عشرة وفرضنا احدهما ك والآخرى
كان لنا $ك + ي = ١٠$ $ك = ١٠ - ي$ فكيفى لا توافق المسئلة سوى ان تكون
صحيحة ايجابية فيمكن ان نفرض لها اية قيمة صحيحة كانت من ١ الى ١٠ ولكن يجب ان
نكون ك ايضا صحيحة ايجابية فلا تُفرض ي اكثر من ١٠ والا لكانت ك سلبية فلا
نكون ي اكثر من ١

فان فُرض $ي = ١$ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ تكون $ك = ٩$ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١
والجذومات الاربع الاخيرة هي مثل الاربع الاولى .
فيكون للمسئلة خمسة اجوبة

(مسألة ١) اقسم ٢٥ الى قسمين احدهما قابل الانقسام على ٢ والاخر على ٣

لنفرض احدهما ٢ ك والاخر ٣ ي

$$\text{فلنا } ٢ ك + ٣ ي = ٢٥ \quad ك = \frac{٢٥ - ٣ ي}{٢}$$

فدري من هذا الكسر ان ٣ ي اقل من ٢٥ فيكون ي اقل من ٨ واذا
قسمنا صورة الكسر على المخرج فلنا $ك = ١٢ - ي + \frac{١ - ي}{٢}$ فدري ان $١ - ي$
او بالاحرى $١ - ي$ يقبل الانقسام على ٢

فلنفرض $١ - ي = ٢ ل$ فاذا $ي = ١ - ٢ ل$

وبالتعويض $ك = ١٢ - ٢ ل - ١ - ٢ ل = ١١ - ٤ ل$ ولا يمكن ان تكون
ي اكثر من ٨ فنفرض اي عدد كان على شرط ان لا يكون $١ + ٢ ل$ اكثر من
٨ فلا بد ان تكون ل اقل من ٤ ولا تكون اكثر من ٢

$$\text{فان فُرض } ل = ٠ \quad ل = ١ \quad ل = ٢ \quad ل = ٣$$

$$\text{لنا } ي = ١ \quad ي = ٣ \quad ي = ٥ \quad ي = ٧$$

$$\text{و } ك = ١١ \quad ك = ٧ \quad ك = ٥ \quad ك = ٣$$

$$\text{فاذا } ٢ ك + ٣ ي = ٢٢ + ٣ = ٢٥ \quad \text{او } ١٦ + ٩ = ٢٥ \quad \text{او } ١٠ + ١٥ = ٢٥ \quad \text{او } ٤ + ٢١ = ٢٥$$

(مسألة ٢) اقسم ١٠٠ الى قسمين احدهما يقبل الانقسام على ٧ والاخر على ١١

لنفرض القسمين ٧ ك و ١١ ي فلنا $٧ ك + ١١ ي = ١٠٠$ $ك = \frac{١٠٠ - ١١ ي}{٧}$

$$= \frac{١٠٠ - ١١ ي}{٧} = \frac{٩١ + ٢ - ١١ ي - ٤ ي}{٧} = \frac{٩١ - ١٥ ي}{٧} = ١٤ - ي + \frac{١ - ي}{٧}$$

فاذا $١ - ي$ يقبل الانقسام على ٧ وان كان $٤ - ي = ٢$ يقبل الانقسام على ٧ فنصفها

$$1 + 3\gamma = 5$$

۱ + ۱ فلنا

५५, ०८

الثاني على ٧ بقي ٤

$$\frac{52-4}{0} + 5 - 18 = 3 \quad 52$$

افل من $\frac{17}{7}$ ای لا تكون ل اکثر من ۲

$$1\lambda = \varepsilon + \gamma \times \Gamma, \quad \lambda \Gamma = \Gamma$$
$$\sigma = \xi + \gamma \chi \gamma \quad \xi \gamma =$$
$$\lambda = \xi + \gamma \chi \quad \text{if } \gamma =$$

معي ثمانية ثمانية يبقى ٧ يضاف وقالت الاخرى ان عددت الذي معي عشرة عشرة يبقى

ايضا ٧ بيضات فكم بيضة مع كل واحدة منها . لنفرض ما مع الواحدة ٨ ك + ٧ وما
مع الاخرى ١٠ اى + ٧ فلنا ٨ ك + ١٠ اى = ١٤ + ١٠٠ = ٨ ك = ٨٦ - ١٠ اى
٤ ك = ٤٢ - ٥ اى = ٤٠ + ٣ - ٤ اى - ٤ اى = ٤٠ - ١٠ اى = ٤ اى - ٢ اى
فاذا ٢ - اى او ٢ - اى يقبل الانقسام على ٤
فلنفرض ٢ - اى = ٤ فلنا ٤ = ٢ + ٢ وك = ١٠ - ٤ - ٤ -
٢ - ٢ = ٤ - ٧ = ٥ ل فلا بد ان تكون ٥ ل اقل من ٧ ول اقل من ٢ فان
فرض ل = ٠ فلنا ك = ٧ اى = ٢ وكان للاولى ٦٣ وللثانية ٢٧ بيضة
وان فرض ل = ١ فلنا ك = ٢ اى = ٧ وكان للاولى ٢٢ وللثانية ٧٧
بيضة .

(مسئلة ٥) اعجام وعرب صنعوا وليمة وانفقوا فيها ١٠٠٠ غرش اما الاعجام فلحق
كل واحد منهم ١٩ غرشا واما الاعراب فلحق كل واحد منهم ١٢ غرشا فكم نفرا كان
كل فريق منهم

لنفرض الاعجام = ك والعرب = اى فلنا

$$١٩ ك + ١٢ اى = ١٠٠٠ \quad ١٢ ك - ١٩ اى = ١٢٨$$

ك - ٦

اى = ٧٦ - ك + ك = ٧٦ - ١٢ فلنا ١٢ - ٦ ك او ٦ ك - ١٢ يقبل الانقسام
على ١٢ وك - ٢ كذلك لنفرض ك - ٢ = ١٢ فلنا ك = ١٤ + ٢ = ١٦
وى = ٧٦ - ١٢ - ٢ = ٦٢ - ٢ = ٦٠ ل

فلا بد ان تكون ل اقل من $\frac{٧٤}{١٩}$ اى اقل من اربع فتكون للمسئلة اربعة اجوبة
فاذا فرض ل = ٠ فلنا ك = ٢ اى = ٧٤ و ٢٨ = ١٩ × ٢ و ١٢ × ٧٤ = ٩٦٢
ل = ١ ك = ١٥ اى = ٥٥ و ٢٨٥ = ١٩ × ١٥

$$٧١٥ = ١٢ × ٥٥$$

$$ل = ٢ ك = ٢٨ ر = ٢٦ و ٥٢٢ = ١٩ × ٢٨$$

$$٤٦٨ = ١٢ × ٢٦$$

$$ل = ٢ ك = ٤١ اى = ١٧ و ٧٧٩ = ١٩ × ٤١ و ٢٢١ = ١٢ × ١٧$$

(مسئلة ٦) رجل انفق ١٧٧٠ دينار في شراء خيل وبئر وكان ثمن راس الخيل
٢١ دينارا وثن راس البئر ٢١ دينار فكم راسا اشترى من كل جنس .
لنفرض ك = الخيل وى = البئر فلنا

$$\begin{aligned}
 ٢١ ك + ٢١ ي = ١٧٧٠ \quad \text{اي} \quad ٢١ ي = ١٧٧٠ - ٢١ ك = ١٧٦٤ + \\
 ٦ - ٢١ ك - ١٠ ك \\
 ي = ٨٤ - ك + \frac{٦ - ١٠ ك}{٢١}
 \end{aligned}$$

فلا بد من ان $١٠ ك - ٦$ يقبل الانقسام على ٢١ وكذلك نصفها اي $٥ ك - ٣$
 فلنفرض $٥ ك - ٣ = ٢١ ل$ فلنا $٥ ك = ٢١ ل + ٣$ وبالتعويض $ي = ٨٤ -$
 $ك - ٢ ل$ $ك = \frac{٢١ ل + ٣}{٥} = ٤ ل + \frac{٣ + ل}{٥}$ فلنفرض $٣ + ل = ٥ ر$
 $ل = ٥ ر - ٣$ $ك = ٢١ ر - ١٢$

$$ي = ٨٤ - ٢١ ر + ١٢ - ١٠ ر + ٦ = ١٠٢ - ٣١ ر$$

فلا بد ان تكون $ر$ اكبر من صفر واقل من ٤

فلنفرض $ر = ١$ فلنا $ك = ٩$ $ي = ٧١$ $٢٧٩ =$ ثمن الخيل و $١٤٩١ =$ ثمن البقر

$ر = ٢$ فلنا $ك = ٣٠$ $ي = ٤٠$ $٩٢٠ =$ ثمن الخيل $٨٤٠ =$ ثمن البقر
 $ر = ٣$ $ك = ٥١$ $ي = ٩$ $١٥٨١ =$ ثمن الخيل $١٨٩ =$ ثمن البقر

٢٥٥ في المسائل المتقدم ذكرها كانت المعادلات على هيئة $ت ك + ب$
 $ي = س$ وكانت $ت$ و $ب$ وس كميات ايجابية صحيحة. وفيه $ك$ و $ي$ كذلك.
 ولكن ان كانت $ب$ سلبية والمعادلة على هيئة $ت ك - ب ي = س$ تكون المسائل
 من نوع آخر غير المتقدمة ولها اجوبة كثيرة الى ما لا نهاية له. مثاله لو قيل اي
 عدد ين فضلنها ٦

فلو فرضنا اصغرهما $ك$ واكبرهما $ي$ لكان لنا

$ي - ك = ٦$ $ي = ٦ + ك$ فيمكننا ان نفرض $ي$ اي عدد شئنا كما هو واضح
 من اول نظره

٢٥٦ متى كان $س = ٠$ تكون $ت ك = ب ي$

كما لو قيل مطلوب عدد يقبل الانقسام على ٥ وعلى ٧

ولنفرض ان فلنا $٥ ك = ٧ و$ $٧ ي = ٥ ك$ $ي = ٥ ك$ $٧ ي = ٥ ك$ فلان
 ٧ لا يقبل الانقسام على ٥ فلا بد ان $ي$ يقبل الانقسام عليها. فلنفرض $ي = ٥$ فاذا
 $ك = ٧$ ل فيكون $٥ = ٢٥ ل$ ويمكننا ان نفرض $ل$ اي عدد شئنا. فلنا ٢٥

$$11 + ق = 17 \quad 11 - ٥ = ٦ \quad ٦ + ٢ = ٨ = \frac{11 - ٥}{١٧} = ق \quad 11 + ٢ = ١٣$$

$$افرض \quad 11 - ٥ = ٦ \quad ٦ + ٢ = ٨ = \frac{11 - ٥}{١٧} = ق \quad 11 + ٢ = ١٣$$

$$افرض \quad 11 + ٢ = ١٣ \quad ١٣ - ٥ = ٨ = \frac{11 + ٢}{١٧} = ق$$

$$١١ - ٥ = ٦ \quad ٦ + ٢ = ٨ = \frac{١١ - ٥}{١٧} = ق$$

$$افرض \quad ١١ - ٥ = ٦ \quad ٦ + ٢ = ٨ = \frac{١١ - ٥}{١٧} = ق$$

فقد نخلصنا من الكسور ولنعوّض عن كل كمية بقيمتها

$$١١ + ٥٢ = ت$$

$$٢٢ + ٥٥ = س$$

$$٧٧ + ١٧ = ر$$

$$١٧٦ + ٥٢٩ = ق$$

$$٢٥٢ + ٥٥٦ = ف$$

$$٩٨٨٢ + ٥٥٦ \times ٢٩ = ١٦ + (٢٥٢ \times ٢٩) + ٥٥٦ \times ٢٩ = ن$$

$$٩٨٨٢ + ٥٢٩ \times ٥٦ = ٢٧ + (١٧٦ \times ٥٦) + ٥٢٩ \times ٥٦ = ون$$

$$اي ن = ٩٨٨٢ + ٥٢٩ \times ٥٦ = ٢٧ + (١٧٦ \times ٥٦) + ٥٢٩ \times ٥٦ = ٢١٨٤$$

$$وعلى هذا المفروض لنا ن = ١١٤٧ وان فرضنا د = ك - ٤ فلنا ن = ٢١٨٤ ك$$

$$١١٤٧ + ١١٤٧ = ٢٢٩٤ وهما على سلسلة حسابية الختلة الاولى منها ١١٤٧ وفضلها المشترك ٢١٨٤$$

$$فلنا ١١٤٧ و ٢٢٩٤ و ٥٥١٥ و ٧٦٩٩ و ٩٨٨٢ الى آخره$$

$$(مسئلة ٩) رجال ونساء جمعوا صدقة فدفعت كل رجل ٢٥ غرشاً وكل امرأة$$

$$١٦ غرشاً . فكان ما دفعة النساء جميعاً اكثر مما دفعة الرجال جميعهم بغرش واحد .$$

$$فكم رجلاً وكم امرأة كانوا$$

$$لنفرض الرجال ق والنساء ف فلنا$$

$$١٦ ف = ٢٥ ق + ١ ف = \frac{١ + ٢٥ ق}{١٦} = ق + ١ = ر اي$$

$$١٦ ر = ٩ ق + ١$$

$$ق = \frac{١ - ٩ ق}{١٦} + ٩ ق = \frac{١ - ٩ ق}{١٦} + ٩ ق = ٩ ق - ٩ ق + ١ = ١$$

$$ر = \frac{١ + ٩ ق}{١٦} + ٩ ق = \frac{١ + ٩ ق}{١٦} + ٩ ق = ٩ ق + ١ = ١٠$$

$$س = \frac{١ - ٩ ق}{١٦} + ٩ ق = \frac{١ - ٩ ق}{١٦} + ٩ ق = ٩ ق - ٩ ق + ١ = ١$$

$$باخراج ٩ ق من الجانبين لنا ١ = ٩ ق - ٩ ق + ١$$

ت = د + ١ ٢ ثم بالتعويض في هذه المعادلات

$$ت = د + ١ ٢ \quad س = ت + ٢ = د + ٣$$

$$ر = س + ت = د + ٩ + ٤$$

$$ق = ر + س = د + ١٦ + ٧$$

$$ف = ق + ر = د + ٢٥ + ١١$$

فكان عدد النساء ٢٥ + د ١١ وعدد الرجال ١٦ + د ٧ فنرض د أي
عدد صحيح شتينا فلنا الرجال = ٧ ٢٢ ٢٩ ٥٥ ٧١ الى آخره
والنساء ١١ ٢٦ ٦١ ٨٦ ١١١ الى آخره

وعلى موجب الجواب الاول دفعت النساء ١٧٦ والرجال ١٧٥ غرشاً

(مسئلة ١٠) رجل اشترى خيلاً وبقرًا وكان ثمن راس الخيل ٢١ ديناراً وثن
راس البقر ٢٠ ديناراً فكان ثمن البقر بقدر ثمن الخيل و ٧ دنانير زيادة فكم رأساً
اشترى من كل جنس

لنرض ف = البقر وق = الخيل فلنا

$$ف = ق + \frac{٢١ + ق}{٢} = \frac{٢٠ + ق}{٢} + ر \quad ر + ق = ٢٠ \quad ١١ + ق = ٧ + ر$$

$$ق = \frac{٢٠ - ر}{١} + ر = \frac{٢٠ - ر + ر}{١} = ٢٠$$

$$ر = \frac{١١ + س}{١} + س = \frac{٢ + س}{١} + س = ٢ + ٢س$$

$$س = \frac{٢ - ت}{٢} + ت = \frac{٢ - ت + ٢ت}{٢} = \frac{٢ + ت}{٢}$$

$$ت = د + ١ ٢$$

$$س = ت + د = ٩ + د + ٢٨$$

$$ر = س + ت = ١١ + د + ٣٥$$

$$ق = ر + س = ٢٠ + د + ٦٢$$

$$ف = ق + ر = ٢١ + د + ٩٨$$

ونستعلم قيمة ف وق اذا فرضنا د = - ٢

فلنا البقر = ٥ ٢٦ ٦٧ ٩٨ ١٢٩ ١٦٠ الى آخره

فلنا الخيل = ٢ ٢٢ ٤٣ ٦٣ ٨٣ ١٠٢ الى آخره

(مسئلة ١١) أي عدد اذا انقسم على ١١ يبقى ٢ واذا انقسم على ١٩ يبقى ٥

$$لنرض ن = ١١ف + ٢ = ١٩ق + ٥$$

فاذا تصرفنا في هذه المسئلة على نسق المسائل المتقدم ذكرها يكون لنا سجل الاعداد الراقعة فيها

$$٨ + ١١ \times ١ = ١٩ \quad \text{ف} = \text{ق} + \text{ر}$$

$$٢ + ٨ \times ١ = ١١ \quad \text{ق} = \text{ر} + \text{س}$$

$$٢ + ٢ \times ٢ = ٨ \quad \text{ر} = ٢\text{س} + \text{ت}$$

$$١ + ٢ \times ١ = ٢ \quad \text{س} = \text{ت} + \text{د}$$

$$٠ + ١ \times ٢ = ٢ \quad \text{ت} = ٢\text{د} + ٢$$

$$٢ + ٢\text{د} = \text{ث} \quad \text{س} = ٢\text{د} + ٢$$

$$٦ + ٨\text{د} = \text{ر} \quad \text{ق} = ٨\text{د} + ٨$$

$$١٤ + ١٩\text{د} = \text{ف} \quad \text{لنفرض د} = ٠$$

فلنا $١١ = \text{ق} + \text{ف} = ٢ + ١١ = (١٤ + ١٩\text{د})$ $١٥٧ + ٢٠٩ = ١٥٧$ ولكن $٢٠٩ = \text{د} = ٠$ فاذا ١٥٧ هو اقل عدد نصح عليه شروط المسئلة

(مسئلة ١٢) ما العدد الذي اذا انقسم على ١١ يبقى ٢ واذا انقسم على ١٩ يبقى ١٠ واذا انقسم على ٢٩ يبقى ١٠

قد مضى حساب الشرطين الأولين في المسئلة السابقة فلنا هنا زيادة عما هناك

$$\text{ن} = ٢٩\text{ف} + ١٠ \quad \text{وقد وجدنا هناك ان}$$

$$\text{ن} = ١٥٧ + ٢٠٩\text{د} \quad \text{فلنفرض هنا ن} = ٢٠٩\text{ق} + ١٥٧$$

$$\text{فلنا } ٢٩\text{ف} + ١٠ = ٢٠٩\text{ق} + ١٥٧ \text{ اي}$$

$$٢٩\text{ف} = ٢٠٩\text{ق} + ١٤٧ \quad \text{ثم لنا حجتا تقدم}$$

$$٦ + ٢٩ \times ٧ = ٢٠٩ \quad \text{ف} = ٧\text{ق} + \text{ر}$$

$$٥ + ٦ \times ٤ = ٢٩ \quad \text{ق} = ٤\text{ر} + \text{س}$$

$$١ + ٥ \times ١ = ٦ \quad \text{ر} = \text{س} + \text{ت}$$

$$٠ + ١ \times ٥ = ٥ \quad \text{س} = ٥\text{ب} - ١٤٧$$

$$\text{ثم بالتعويض س} = ٥ - \text{ت} - ١٤٧$$

$$\text{ر} = ٦ - \text{ت} - ١٤٧ \quad \text{ق} = ٢٩ - \text{ت} - ٧٢٥$$

$$\text{ف} = ٢٠٩ - \text{ت} - ٥٢٩٢$$

$$\text{ن} = ٦٠٦١ - \text{ت} - ١٥٢٤٥٨ \quad \text{ونستعلم العدد الاقل اذا فرضنا}$$

$$\text{ت} = ٢٦ \text{ ثم } ٤١٢٨$$

(مسئلة ١٢) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش في بشالك بسعر ٩ غروش
وانصاف المائوت بسعر ٩ غروش

لنرض ٥ ك = البشالك ٩ ي = علة انصاف المائوت

$$٥ ك + ٩ ي = ١٠٠ \quad ٥ ك = ١٠٠ - ٩ ي \quad ١٠٠ - ٩ ي - ٥ ي = ٤ ي$$

$$ك = ٢٠ - ٥ ي$$

فاذا ي قبل الانقسام على ٥ فلنرض $\frac{٤}{٥} = ف$ ي = ٥ ف ك = ٢٠
٥ - ف = ٤ ف = ٢٠ - ٥ ف فاذا تكون ف اقل من $\frac{٢٠}{٥}$ اي اقل من ٤ واكثر
من صفراي ١ فلنرض ف = ١ فاذا ك = ١١ ١١ = ٥ × ٢ = ٥٥

ي = ٥ و ٥ × ٩ = ٤٥ و ٤٥ + ٥٥ = ١٠٠ اي ليس لذلك الا طريقة واحدة

(مسئلة ١٤) على كم طريقة يمكن دفع ١٠٠ غرش غوازي بسعر ٢٠ غرشا
وفرنكات بسعر ٤ غروش . لنرض الغوازي = ٢٠ ك والفرنكات = ٤ ي

$$٢٠ ك + ٤ ي = ١٠٠ \quad ٤ ي = ١٠٠ - ٢٠ ك$$

ي = ٢٥ - ٥ ك لنرض ٥ - ٢٥ = ك ف ثم

$$٥ ك - ٢٥ = ف \quad ٥ = ك - \frac{٢٥}{٥} \quad \text{لنرض } ٥ = ف \quad ٥ = ك - ٥ = ٥$$

ي = ٥ فلا بد ان تكون د اكثر من صفر واقل من ٥ اي المسئلة اربعة اجوبة.
فعلى فرض

$$١ = د \quad ٤ = ك \quad ٥ = ي \quad ١٠٠ = ٢٠ + ٨٠ \quad \text{اي}$$

$$٢ = د \quad ٢ = ك \quad ١٠ = ي \quad ١٠٠ = ٤٠ + ٦٠ \quad \text{اي}$$

$$٣ = د \quad ٣ = ك \quad ١٥ = ي \quad ١٠٠ = ٦٠ + ٤٠ \quad \text{اي}$$

$$٤ = د \quad ١ = ك \quad ٢٠ = ي \quad ١٠٠ = ٨٠ + ٢٠ \quad \text{اي}$$

(مسئلة ١٥) ثلاثون نفرا من رجال ونساء واولاد انفقوا ٥٠ دينارا وكل رجل
منهم انفق ٣ دنانير وكل امرأة دينارين وكل ولد دينارا واحدا . فكم كان كل فريق .
لنرض الرجال = ف والنساء = ق والاولاد = ر

$$\text{فلنا (١) } ٢٠ = ر + ق + ف$$

$$\text{وابضا (٢) } ٥٠ = ر + ٢ ق + ٣ ف$$

من الاولى لنا $٢٠ = ر + ق + ف$

فترى ان $٢٠ = ر + ق + ف$ اقل من ٢٠

$$\text{وبالتعويض في (٢) } ٥٠ = ٢٠ + ق + ٢ ف$$

بالمقابلة والجمع $ق = ٢٠ - ٢$ ف

ينقل ف واحدة $ق + ٢٠ = ف$

وذلك ايضاً اقل من ٢٠ فيشروط المسئلة لا تكون ف اكثر من ١٠ ويمكن

ان نفرض ف اي عدد شئنا من ١ الى ٩ فلنا

٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١ = ف
٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨ = ق
١٩	١٨	١٧	١٦	١٥	١٤	١٣	١٢	١١ = ر

(مسئلة ١٦) رجل اشترى من البقر والمعزى والغنم ١٠٠ رأس بئنه دينار وكان

ثمن الرأس من البقر $\frac{٣}{٢}$ دينار وثن الرأس من المعزى $\frac{١}{٢}$ دينار وثن الرأس من الغنم $\frac{١}{٢}$ دينار فكم رأساً اشترى من كل جنس

انفرض $ف = \text{البقر}$ $ق = \text{المعزى}$ $ر = \text{الغنم}$

فلنا (١) $ف + ق + ر = ١٠٠$

(٢) $\frac{٣}{٢}ف + \frac{١}{٢}ق + \frac{١}{٢}ر = ١٠٠$

اضرب في ٦ $٢١ف + ٨ق + ٢ر = ٦٠٠$

بالاولى لنا $ر = ١٠٠ - ف - ق$

عوّض عن ر في (٢) $١٨ف + ٥ق = ٢٠٠$

$٥ق = ٢٠٠ - ١٨ف$ $ق = \frac{٢٠٠ - ١٨ف}{٥}$

فلا بد ان ف تقبل الانقسام على ٥ فلنفرض $ف = ٥س$ فلنا $ق = ٦٠ - ٤س$

١٨ س

$ر = ١٢س + ٤٠$ فيمكن ان نفرض قيمة س اي عدد شئنا على شرط ان ق

لا تصير بذلك سلبية ولا يمكن ذلك الا على فرض س اقل من ٤

فلنا س = ١ ٢ ٣

ف = ٥ ١٠ ١٥

ق = ٥٢ ٤٢ ٣٤

ر = ٥٣ ٦٦ ٧٩

٢٥٨ في اختراع مسائل من هذا الباب ينبغي الاحتراس من استعمالها . ولا بد

في ذلك من ملاحظة ما سنذكره هنا . فنضع عوضاً عن المعادلتين اللتين في المسئلة

السابقة هاتين

$$ك + ي + ل = ت$$

$$ف ك + غ ي + ح ل = ب$$

حيث تكون ف غ ح ت ب معلومات

فان فرضنا ف اكبر من غ وح اصغر من غ وضربنا الجانبين في ف اي
(ك + ي + ل) ف = ف ت فلا شك ان تكون ف ك + ف ي + ف ل اكبر
من ف ك + غ ي + ح ل وتكون ف ت اكبر من ب اي ب > ف ت وايضا
اذا فرضنا (ك + ي + ل) ح = ح ت تكون ح ك + ح ي + ح ل اصغر من
ف ك + غ ي + ح ل وتكون ح ت اصغر من ب اي ب < ح ت فاذا
ان لم تكن ب اصغر من ف ت واكبر من ح ت نستحيل المسئلة فاذا يجب ان
تقع ب بين الحدين ف ت ح ت ولا يجب ان تكون قريبة جدا من احدهما والّا
فلا يمكن اشارة علام الاحرف الاخر في المسئلة السابقة ت = ١٠٠ ف = ٢ ١/٢ ح = ١/٢
والحدان هما ٢٥٠ و ٥٠ وان فرضنا ب = ٥١ عوضا عن ١٠٠ كما في المسئلة فلنا
ك + ي + ل = ١٠٠

$$٢ ١/٢ ك + ١ ١/٢ ي + ١/٢ ل = ٥١ \quad \text{اضرب الاولى في ٢}$$

$$٢ ك + ٢ ي + ٢ ل = ١٠٠ \quad \text{اضرب الثانية في ٦}$$

$$٢١ ك + ٨ ي + ٢ ل = ٢٠٦$$

$$\text{بالطرح ١٨ ك + ٥ ي = ٦}$$

وذاك محال لانه يفرض كون ك و ي صحيحين

(مسئلة ١٧) صائغ عنده من النضة ثلاثة انواع

الاول في كل ٨ دراهم منه ٧ فضة ودرهم زيف

الثاني " " " ٥ ١/٢ " " ٢ ١/٢

الثالث " " " ٤ ١/٢ " " ٢ ١/٢

فاراد ان يصوغ مصاغاً وزنه ٢٤٠ درهماً في كل ٨ دراهم منه ٦ دراهم فضة ودرهمان

زيف فكم درهماً يجب ان يأخذ من كل صنف

لفرض ما يجب اخذه من النوع الاول = ك ومن الثاني = ي ومن الثالث

$$ل = فلنا ك + ي + ل = ٢٤٠ ويكون في الكل ٧ ك + ٥ ١/٢ ي + ٤ ١/٢ ل =$$

$$\text{النضة الخالصة ووزن هذا المزيج} = ٢٤٠ \text{ درهماً و } \frac{٢٤٠}{٨} = ٣٠$$

$$\text{و } ٢ \times ٦ = ١٢٠ = \text{النضة الخالصة في المزيج}$$

$$\text{فلنا } ٧ك + ٥\frac{١}{٢}ي + ٤\frac{١}{٢}ل = ١٨٠$$

$$\text{اضرب في } ٢ \quad ١٤ك + ١١ي + ٩ل = ٣٦٠$$

$$\text{اضرب الاولى في } ٩ \quad ٩ك + ٩ي + ٩ل = ٢٧٠$$

$$\text{بالطرح} \quad ٥ك + ٢ي = ٩٠$$

$$\text{من الاولى} \quad ٢٠ك - ٤ي = ٢٠$$

$$\text{وايضاً } ٢ي = ٩٠ - ٥ك \quad ٤٥ = ٤٥ - \frac{٥ك}{٢}$$

$$\text{انفرض } ٢ك = ٢٠ \text{ فلنا } ٤٥ - ٤٥ = ٥٥$$

$$\text{وايضاً} \quad ١٥ - ٢٢ = ١٥$$

فلا بد ان تكون د اكبر من ٤ واصغر من ١٠ فلنا

$$٥ = د \quad ٦ \quad ٧ \quad ٨ \quad ٩$$

$$١٠ = ك \quad ١٢ \quad ١٤ \quad ١٦ \quad ١٨$$

$$٢٠ = ي \quad ١٥ \quad ١٠ \quad ٥$$

$$٠ = ل \quad ٢ \quad ٦ \quad ٩ \quad ١٢$$

(مسئلة ١٨) رجل اشترى من الخيل والبقر والحمار والغنم ١٠٠ رأس بمئة دينار وكان ثمن رأس الخيل ١٠ دنانير وثن رأس البقر ٥ دنانير وثن الحمار دينارين وثن رأس الغنم نصف دينار فكم اشترى من كل جنس. لنفرض الخيل = ف البقر = ق الحمار = ر والغنم = س

$$\text{فلنا (١)} \quad ١٠٠ = س + ر + ق + ف$$

$$\text{و (٢)} \quad ١٠ = ف + ٥ق + ٢ر + \frac{١}{٢}س$$

$$\text{اضرب في } ٢ \quad ٢٠ = ف + ١٠ق + ٤ر + س$$

$$\text{بالطرح} \quad ١٠ = ف + ٩ق + ٣ر$$

$$\text{بالمقابلة والقسمة} \quad ٢٣ = ٦ - \frac{١}{٢}ف - \frac{١}{٣}ق \quad ٢ق - ٢٢ = ٦ - ف$$

$$\text{فاذا } ١ - ف \text{ او } ١ - ف \text{ يقبل الانقسام على } ٢$$

$$\text{فلنفرض } ١ - ف = ٢ \quad ٢ = ف + ١ \quad ٢ق - ٢٧ = ١٩$$

$$٢ق - ٢٧ = ١٦ + ٢ق + ٧٢$$

فاذا تكون ١٩ - ٢ق اقل من ٢٧ وعلى هذا الشرط نفرض ك وت

اي عدد شئنا

$$(1) \text{ ت} = 0 \quad (2) \text{ ت} = 1$$

$$\text{ف} = 1 \quad \text{ف} = 4$$

$$\text{ق} = \text{ق} \quad \text{ق} = \text{ق}$$

$$\text{ر} = 27 - \text{ق} \quad \text{ر} = 8 - \text{ق}$$

$$\text{س} = 72 + \text{ق} \quad \text{س} = 88 + \text{ق}$$

ولا يمكن ان نفرض $\text{ت} = 2$ لان بذلك نصير ر سلبية . وعلى المفروض الاول
لا تكون ق اكثر من ٩ وعلى الثاني لا تكون اكثر من ٢ فعلى الاول لنا

$$\text{ق} = 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 \quad 10$$

$$\text{ف} = 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

$$\text{ق} = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

$$\text{ر} = 27 \quad 24 \quad 21 \quad 18 \quad 15 \quad 12 \quad 9 \quad 6 \quad 3 \quad 0$$

$$\text{س} = 72 \quad 74 \quad 76 \quad 78 \quad 80 \quad 82 \quad 84 \quad 86 \quad 88 \quad 90$$

$$\text{وعلى الثاني ت} = 1 \quad 2 \quad 3$$

$$\text{ف} = 4 \quad 4 \quad 4$$

$$\text{ق} = 0 \quad 1 \quad 2$$

$$\text{ر} = 8 \quad 5 \quad 2$$

$$\text{س} = 88 \quad 90 \quad 92$$

(مسئلة ١٩) مطلوب ثلاثة اعداد صحيحة اذا ضرب الاول منها في ٢ والثاني في ٥
والثالث في ٧ يكون مجموع الحواصل ٥٦٠ واذا ضرب الاول في ٩ والثاني في ٢٥
والثالث في ٤٩ يكون مجموع الحواصل ٢٩٢٠

$$\text{لنفرض (١) } ٢\text{ك} + ٥\text{ى} + ٧\text{ل} = ٥٦٠$$

$$(2) \quad ٩\text{ك} + ٢٥\text{ى} + ٤٩\text{ل} = ٢٩٢٠$$

$$\text{اضرب الاولى في ٢ } ٢\text{ك} + ١٥\text{ى} + ٢١\text{ل} = ١٦٨٠$$

$$\text{بالطرح } ١٠\text{ى} + ٢٨\text{ل} = ١٢٤٠$$

$$\text{بالقسمة على ٢ } ٥\text{ى} + ١٤\text{ل} = ٦٢٠$$

$$\text{وبالمقابلة والقسمة } ١٢٤ = \text{ى} - \frac{١٤}{٥}\text{ل}$$

$$\text{لنفرض ل} = ٥\text{د} \text{ فاذا } ١٢٤ = \text{ى} - ١٤$$

$$\text{ثم بالتعويض في الاول لنا } ٥٦٠ = ٦٢٠ + ٥\text{د} - ٢\text{ك}$$

$$\text{اي } ٢ = \text{ك} = ٢٥ - \text{د} - ٦٠$$

$$\text{ك} = \frac{٢٥}{٢} - ٢٠ \quad \text{فلنفرض د} = ٢ \text{ ت}$$

$$\text{فإذا } \text{ك} = ٢٥ - \text{ت} = ٢٠ \quad \text{ي} = ١٢٤ - ٤٢ \text{ ت} \quad \text{ل} = ١٥ \text{ ت} \quad \text{فتكون}$$

ت أكبر من صفر وأصغر من ٢ ولنا جوابان فقط اي

$$\text{ت} = ١ \quad \text{ك} = ١٥ \quad \text{ي} = ٨٢ \quad \text{ل} = ١٥$$

$$\text{ت} = ٢ \quad \text{ك} = ٥٠ \quad \text{ي} = ٤٠ \quad \text{ل} = ٢٠$$

(مسئلة ٢٠) مطلوب عدنان مجتمعا مع حاصلها ٧٩

لنفرض العددين ك وى فلنا كى + ك + ي = ٧٩ كى + ي = ٧٩

$$\text{ك} - \text{ي} = \frac{٧٩ - \text{ك}}{١ + \text{ك}} = ١ - \frac{٨٠}{١ + \text{ك}} \quad \text{فترى ان } ٨٠ \text{ يقبل الانقسام على ك + ١}$$

و ٨٠ يقبل الانقسام على ١ ٢ ٤ ٥ ٨ ١٠ ١٦ ٢٠ ٤٠ ٨٠

$$\text{فإذا } \text{ك} = ٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٤ \quad ٥ \quad ٧ \quad ٩ \quad ١٥ \quad ١٦ \quad ٢٠ \quad ٢٩ \quad ٧٩$$

$$\text{ي} = ٧٩ \quad ٢٩ \quad ١٩ \quad ١٥ \quad ٩ \quad ٧ \quad ٤ \quad ٣ \quad ١ \quad ٠$$

ومن هذه العشرة الخمسة الاخيرة مثل الخمسة الاولى. فلنا في الحقيقة ٥ اجوبة فقط وهي

$$\text{ك} = ٠ \quad ١ \quad ٢ \quad ٤ \quad ٧$$

$$\text{ي} = ٧٩ \quad ٢٩ \quad ١٩ \quad ١٥ \quad ٩$$

(مسئلة ٢١) اربعة رجال نزلا الى السوق فوجدوا جوهرة تباع. فقالوا كم ثمن

الجوهرة فقبل اذا اخذ ما مع الاول منكم مع ١/٢ ما مع الثاني و ١/٤ ما مع الثالث و ١/٥ ما

مع الرابع كان المجموع ثمن الجوهرة. واذا اخذ ما مع الثاني و ١/٥ ما مع الاول و ١/٦ ما مع

الثالث و ١/٧ ما مع الرابع كان المجموع ثمن الجوهرة. واذا اخذ ما مع الثالث مع ١/٨ ما

مع الاول و ١/٩ ما مع الثاني و ١/١٠ ما مع الرابع كان المجموع ثمن الجوهرة. واذا اخذ ما مع

الرابع و ١/١١ ما مع الاول و ١/١٢ ما مع الثاني و ١/١٣ ما مع الثالث كان المجموع ثمن الجوهرة

مطلوب اصغر الاعداد الصحيحة التي تصح عليها شروط المسئلة

نرى من شروط المسئلة ان الحصة الصغرى للاول من الاربعة فلنفرض الرجال

ك وى ول ون و ثمن الجوهرة ت فلنا

$$\frac{١٢ - \text{ت} - ١٢ - \text{ك} - ٦ - \text{ي} - ٤}{٢} = \text{ن} \quad \text{ت} = \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢} + \frac{٢}{٢}$$

$$\frac{٢١٠ - \text{ت} - ٤٢ - \text{ك} - ٢١٠ - \text{ي} - ٢٥}{٢٠} = \text{ن} \quad \text{ت} = \frac{٢}{٧} + \frac{٢}{٦} + \frac{٢}{٥} + \frac{٢}{٤}$$

$$\frac{٣٦٠ - \text{ت} - ٤٥ - \text{ك} - ٤٠ - \text{ي} - ٢٦٠}{٣٦} = \text{ن} \quad \text{ت} = \frac{٢}{١٠} + \frac{٢}{٩} + \frac{٢}{٨} + \frac{٢}{٧}$$

$$\frac{١٧١٦ - \text{ت} - ١٥٦ - \text{ك} - ١٤٢ - \text{ي} - ١٣٢}{١٧١٦} = \text{ن} \quad \text{ت} = \frac{٢}{١٣} + \frac{٢}{١٢} + \frac{٢}{١١} + \frac{٢}{١٠}$$

ثم بالمساواة

$$\begin{aligned} ١٢ ت - ١٢ ك - ٦ ي - ٤ ل &= ٢١٠ ت - ٤٢ ك - ٢١٠ ي - ٢٥ ل \\ ٢١ ت - ٤٢ ك - ٢١٠ ي - ٢٥ ل &= ٢٦٠ ت - ٤٥ ك - ٤٠ ي - ٢٦٠ ل \\ ٢٦ ت - ٤٥ ك - ٤٠ ي - ٢٦٠ ل &= ١٧١٦ ت - ١٥٦ ك - ١٤٢ ي - ١٢٢ ل \\ ١٧١٦ ت - ١٥٦ ك - ١٤٢ ي - ١٢٢ ل &= ١٥٠ ي - ٧٨ ك - ٩٠ ت \\ ١٥٠ ي - ٧٨ ك - ٩٠ ت &= ٥٤٠ ت + ٢٧ ك + ١٠٦ ي \\ ٥٤٠ ت + ٢٧ ك + ١٠٦ ي &= ٤٦٣٢ ت - ٥٩٦٧ ك - ٥٢٩١ ي \\ ٤٦٣٢ ت - ٥٩٦٧ ك - ٥٢٩١ ي &= ١٠٨٤ \end{aligned}$$

بالمساواة ايضا

$$\begin{aligned} ١٥٠ ي - ٧٨ ك - ٩٠ ت &= ٥٤٠ ت + ٢٧ ك + ١٠٦ ي \\ ٥٤٠ ت + ٢٧ ك + ١٠٦ ي &= ٤٦٣٢ ت - ٥٩٦٧ ك - ٥٢٩١ ي \\ ٤٦٣٢ ت - ٥٩٦٧ ك - ٥٢٩١ ي &= ١٠٨٤ \\ ٤٦٣٢ ت + ٢٩١٦ ك &= ٤٦٦٤٠ \\ ٤٦٦٤٠ - ١٨١١١٢٣ ك &= ١٠٤٣٦٩٥٥ \end{aligned}$$

بالمساواة ايضا

$$\begin{aligned} ٤٦٣٢ ت + ٢٩١٦ ك &= ٤٦٦٤٠ \\ ٤٦٦٤٠ - ١٨١١١٢٣ ك &= ١٠٤٣٦٩٥٥ \\ ٢٤٠٧٣٢٦٠ ت &= ١٥٣٦١٤٦٥٠١ ك \end{aligned}$$

فإذا ت قبل الانقسام على مخرج هذا الكسر ولكي يكون لنا عدد صحيح يجب

ان ن فرض ت هذا المخرج نفسه . فلنا ت = ١٥٣٦١٤٦٥٠١

$$٢٤٠٧٣٢٦٠ = ك \quad ١٠٨٢٢٢٢٩٨٨ = ي$$

$$١٢٤٢٩٥٧٨٠٦ = ل \quad ١٢١٨٢٧٨١٨٠ = ن$$

$$٢٤٠٧٣٢٦٠ = ك \quad ١٠٨٢٢٢٢٩٨٨ = ي$$

$$٥٤١١٧٦٩٩٤ = \frac{ك}{٢} \quad ٤٨١٤٦٤٧٢ = \frac{ك}{٥}$$

$$٤١٤٦٥٢٦٠٢ = \frac{ك}{٣} \quad ٢٠٧٣٢٦٩٠١ = \frac{ك}{٦}$$

$$٣٢٩٥٩٤٥٤٥ = \frac{ك}{٤} \quad ١٨٨٢٢٢٩٧٤٠ = \frac{ك}{٧}$$

$$١٥٣٦١٤٦٥٠١ = ت \quad ١٥٣٦١٤٦٥٠١$$

$$١٢١٨٢٧٨١٨٠ = ن$$

$$٢١٨٨٤٧٦٠ = \frac{ك}{١١}$$

$$٩٠١٩٤٤٩٩ = \frac{ي}{١٢}$$

$$٩٥٦٨٩٠٦٢ = \frac{ل}{١٣}$$

$$١٥٢٦١٤٦٥٠١$$

$$١٢٤٢٩٥٧٨٠٦ = ل$$

$$٢٠٠٩١٥٤٥ = \frac{ك}{٨}$$

$$١٢٠٢٥٩٢٢٢ = \frac{ي}{٩}$$

$$١٢١٨٢٧٨١٨ = \frac{ن}{١٠}$$

$$١٥٢٦١٤٦٥٠١ = ت$$

(مسئلة ٢٢) مطلوب عدنان مربعان يكون مجموعهما مربعاً ايضاً
 لنفرض العددين ك' وت' فيكون ك' + ت' مربعاً. وكية ك' + ت' هي اكبر
 من كمية (ك - ت) لان هذه الاخيرة = ك' - ٢ ك ت + ت' فلنفرض ك' + ت'
 = (م - ك - ت) فلنا ك' + ت' = م' - ك' - ٢ م ك ت + ت' وبالمقابلة
 ك' = م' - ك' - ٢ م ك ت اي ك' = م' - ك' - ٢ م ت م' - ك' - ٢ م ت
 ك' = \frac{٢ م ت}{١ - ٢ م} فاذا العدنان هما ت' و \frac{٢ م ت}{١ - ٢ م} فيمكن ان نفرض ت' وم اي
 عددين شئنا ولكن لكي يكون \frac{٢ م ت}{١ - ٢ م} صحيحاً ينبغي للصورة ان تقبل الانقسام على المخرج
 ويكون الخارج صحيحاً. فان فُرض م = ٢ وت = ٢ فلنا العدنان ١٦ و ٩ ومجموعهما
 ٢٥ واذا فُرض م = ٢ وت = ٥ فلنا العدنان \frac{٢٢٥}{١٦} و ٢٥ ومجموعها \frac{٣٢٥}{١٦} واذا فُرض
 م = ٢ وت = ٨ فلنا ٢٦ و ٦٤ ومجموعها ٩٠ ولم جراً

(مسئلة ٢٣) مطلوب عدد ك بحيث يكون ك + ت وك - ت مربعين

انفرض ك + ت = م' ثم ك - ت = م' - ٢ م ت
 افرض م' - ٢ م ت = (م - ت) = م' - ٢ م ت + ت' ثم م' - ٢ م ت = ت' - ٢ م ت
 م' + ت' او ٢ م ت = ت' + ت' وم' = \frac{٢ + ت}{٢} م' = \frac{٢ + ت + ٢ + ت}{٤} = \frac{٤ + ت + ٢}{٤} فلنا هذه القضية العمومية وهي
 اذا رُبِع عدد و اضيف الى مربعه ٤ وانقسم المجموع على ٤ يكون الخارج عدداً مجتمعاً مع
 العدد المفروض وفضلتها عدنان مربعان. فاذا فرضنا
 ت = ١ لنا ك = \frac{٤ + ١}{٤} = \frac{٥}{٤} = ١ + \frac{١}{٤} = ك + ت = ١ + \frac{١}{٤} = ك - ت = \frac{١}{٤} = ١ - \frac{١}{٤} =

$$ت = ٢ \text{ ثم } ك = \frac{٤ + ٢}{٤} = \frac{٦}{٤} = ١ + \frac{١}{٢} = ك + ت = ٢ + \frac{١}{٢} = ك - ت = \frac{١}{٢}$$

$$ت = ٣ \text{ ك} = \frac{٤ + ٣}{٤} = \frac{٧}{٤} = ١ + \frac{٣}{٤} = ك + ت = ٣ + \frac{٣}{٤} = ك - ت = \frac{٣}{٤}$$

$$ك - ت = \frac{٣}{٤} = ٣ - \frac{٣}{٤}$$

$$ت = ٤ \quad ك = \frac{٤ + ١٦}{٤} = ٥ \quad ك + ت = ٩$$

ك - ت = ١ ولم جراً

(مسئلة ٢٤) مطلوب ثلاثة اعداد مربعة على سلسلة حماية

لفرض الاعداد ك وى ول ثم ك + ل = ٢ اى افرض ك = ف + ق

ول = ف - ق ثم ك + ل = ٢ ف + ق = ٢ اى اى

ف + ق = ٢ اى فتحولت المسئلة الى نوع مسئلة ٢٢ فلنفرض ف = $\frac{٢٢}{١ - ٢}$ حيث

ق = ت

$$ثم ك = ف + ق = \frac{٢٢}{١ - ٢} + ت$$

$$ل = ف - ق = \frac{٢٢}{١ - ٢} - ت$$

$$ى = \frac{٢(١ + ٢)ت}{١ - ٢} = ٢ف + ٢ق$$

فيمكن ان نفرض ت وم اى عدد شتينا

لفرض ت = ٢ وم = ٢ ثم ك = ٧ ى = ٥ ل = ١ والاعداد

المطلوبة هي ١ ٢٥ ٤٩

افرض ت = ٨ م = ٢ ثم ك = ١٤ ى = ١٠ ل = ٢ والاعداد هي

٤ ١٠٠ ١٩٦

(مسئلة ٢٥) مفروض ٢٤ ك = ١٢ ى + ١٦ فما هي قيمة ك وى صحيحة

الجواب ك = ٥ ى = ٨

(٢٦) مفروض ٨٧ ك + ٢٥٦ ى = ١٥٤١٠ مطلوب قيمة ك الصغرى وقيمة

ى الكبرى في صحيح الجواب ك = ٣٠ ى = ١٢٨٠٠

(٢٧) كم قيمة صحيحة للاحرف في ٥ ك + ٧ ى + ١١ ل = ٢٢٤ الجواب ٦٠

(٢٨) رجل اشترى ٢٠ طائراً بعشرين غرشاً اي اوزاً بسعر الطير اربعة غروش

وجاماً بسعر الطير نصف غرش وعصافير بسعر الطير ١/٤ غرش فكم اشترى من كل

جنس الجواب اوز ٢ حمام ١٥ عصافير ٢

(٢٩) ما هو العدد الاصغر الذي يقبل الانقسام على الاعداد الطبيعية من ١ الى

٩ بدون باقى الجواب ٢٥٢٠

نتية. هذا الباب واسع جداً ويمكن الامتداد فيه الى ما لا نهاية له. وقد اكتبنا

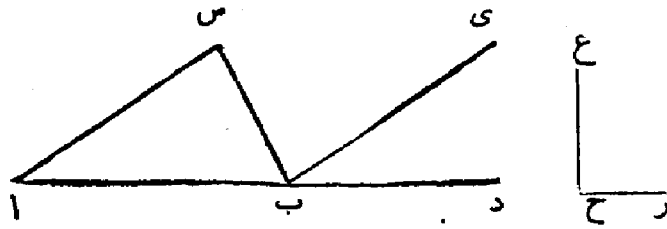
بما ذكرناه طلب الاختصار. ولا يمكن وضع قواعد خصوصية لكثير من مسائله وما تقدم

شرحه كافٍ للدلالة على الجليل التي يستعان بها في حل غيره.

الفصل السادس والعشرون

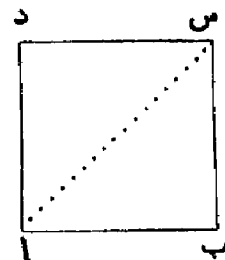
في استخدام الجبر لحل المسائل الهندسية

٢٥٩ قد نُكْتَبَ البراهين الهندسية في عبارات جبرية . مثالة ابن الزوايا
الثلاث الداخلة من كل مثلث تعدل قائمتين



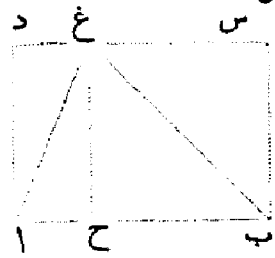
- (١) حسب اقليدس (ق ٢٩ ك ١) $AB = BD + DC$
 - (٢) $AB = BD + DC$
 - (٣) بالجمع $AB + BD + DC = BD + DC + AB$
 - (٤) اضف AB للجانبين فتصير $AB + BD + DC = AB + BD + DC$
 - $AB + BD + DC$
 - (٥) حسب اقليدس (ق ١٢ ك ١) $AB + BD + DC = AB + BD + DC$
 - (٦) بمساواة (٥) و (٤) $AB + BD + DC = AB + BD + DC$
- قائمتين

٢٦٠ تُعرَف مساحة معين بضرب القاعدة في العمود عليها . مثالة في شكل
ابن م تكون مساحة $AB \times BD$ او $AB \times DC$
لان $AB \times BD =$ مساحة شكل $ABDC$ وحسب
اقليدس (ق ٢٦ ك ١) اشكال متوازية الاضلاع على
قواعد متساوية وبين خطين متوازيين في متساوية اي $AB = DC$



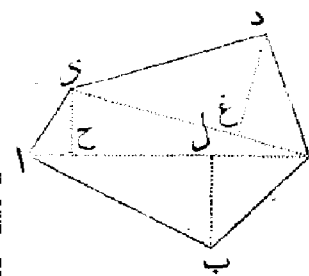
٢٦١ تُعرَف مساحة المربع بضرب احد اضلاعه في
نفسه . مثالة مساحة المربع $AB \times AB = AB^2$ لانه
 $AB \times AB = AB^2$

٢٦٣ مساحة المثلث في نصف حاصل القاعدة في عو المثلث. مثالة مساحة



المثلث اب غ = نصف اب $\times$ غ ح او $\overline{ب س} \times \frac{1}{2} \text{ او } \frac{1}{2} \overline{ب س}$
 $\times \overline{ب س} \text{ او } \overline{ب س} \times \frac{1}{2} \text{ لان شكل اب س د } = \overline{اب} \times \overline{ب س}$
 وحسب اقليدس (ق ٤٦ ك ١) ان كان مثلث وشكل
 متوازي الاضلاع على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين

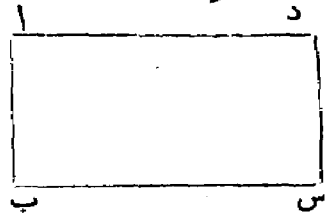
يكون المثلث نصف الشكل. وعلى هذا القياس لنا عبارة جبرية دالة على مساحة اي
 شكل فريض اضلاعه مستقيمة. لان كل شكل نظير ذلك يمكن انقسامه الى مثلثات.



مثالة في شكل اب س د ي فيو مثلثات اب س اس ي
 $\overline{س د} \text{ ومساحة اب س} = \frac{1}{2} \overline{اس} \times \overline{ب ل} \text{ ومساحة}$
 $\overline{اس ي} = \frac{1}{2} \overline{اس} \times \overline{ح ي} \text{ و } \overline{وي س د} = \frac{1}{2} \overline{ي س} \times \overline{د غ س}$
 وكل الشكل = $(\frac{1}{2} \overline{اس} \times \overline{ب ل}) + (\frac{1}{2} \overline{اس} \times \overline{ح ي}) +$
 $(\frac{1}{2} \overline{ي س} \times \overline{د غ}) +$

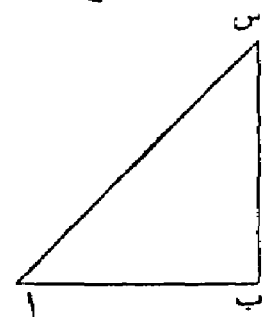
٢٦٤ نحتاج احيانا الى عكس هذا العمل وان نستعمل اضلاع شكل من مساحته.

فيعرف طول مستطيل من قسمة المساحة على عرضه. مثالة ان فريض مساحة د ب



= ك فضع $\overline{ا د} = \overline{س د} \times \overline{ك د}$ ويستعمل ضلع مربع باستعمال
 الجذر المائي من مساحته. وتعرف قاعدة مثلث بنسبة
 مساحته على نصف دايه.

٢٦٤ رأينا ان مساحة سطح يدل عليها بمجاصل طوله في عرضه فيدل على مساحة



الجسم بطوله في عرضه في عمنه

(عملية ١) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية اب س
 ومجتمع الوتر والساق مطلوب الساق

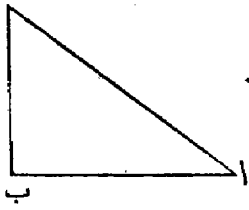
لنفرض اب = ن ب س = ك مجتمع الوتر والساق
 ك + اس = ت وبمقابلة ك نهي اس = ت - ك

(١) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ب س} + \overline{اب} = \overline{اس}$

(٢) وحسب ما فريض ك + ن = (ت - ك) = ت - ك = ت - ك + ك

بالمقابلة ت - ك = ت - ن وك = $\frac{ت - ن}{٢}$ ب س = الضلع المطلوب

اي في كل مثلث قائم الزاوية يعدل العمود مربع مجنec الوتر والعمود الأ مربع القاعدة
منسوماً على مضاعف مجتبع الوتر والعمود



(ع ٢) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية وفضلة الوتر
والعمود مطلوب العمود

لنفرض $اب = ت = ٢٠$ و $ب س = ك$ وفضلتها
 $ف = ١٠$ فيكون الوتر $اس = ك + ف$

(١) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $اس^2 = اب^2 + ب س^2$

(٢) وبالمفروض $(ك + ف)^2 = ت^2 + ك^2$

(٣) بالبسط $ك^2 + ٢ ك ف + ف^2 = ت^2 + ك^2$

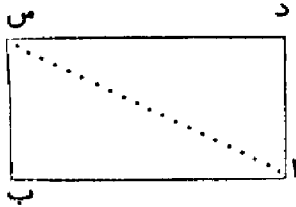
(٤) بالمقابلة والقسمة $ك = \frac{ت^2 - ف^2}{٢ ف} = ١٥$

(ع ٣) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٢٠ ذراعاً. وفضلة الضلعين الآخرين
٦ اذرع. فما هو طول القاعدة

الجواب ٢٤ ذراعاً

(ع ٤) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٥٠ ذراعاً. ونسبة القاعدة الى العمود
كنسبة ٤ : ٣ فما هو طول العمود

الجواب ٢٠ ذراعاً



(ع ٥) مفروض محيط شكل متوازي الاضلاع
وقطره مثل شكل $اب س د$ مطلوب اضلاعه

لنفرض القطر $اس = ح = ١٠$

والضلع $اب = ك$

نصف المحيط $ب س + اب = ب س + ك = د = ١٤$

بمقابلة $ك$ نصير $ب س = د - ك$

حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $اس^2 = اب^2 + ب س^2$

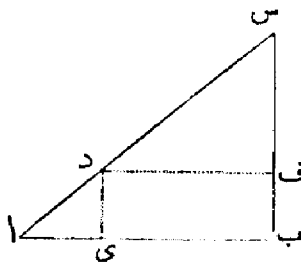
وحسب المفروض $ك^2 + (د - ك)^2 = ح^2$

اي $ك = \frac{د^2 - ح^2}{٢ د} = ٨$

و $ب س = د - ك = ٦$

(ع ٦) مفروض مساحة مثلث قائم الزاوية $اب س$
واضلاع شكل متوازي الاضلاع مرسوم فيه . مطلوب

الضلع $ب س$



لنفرض المساحة = ع و $دي = ف = ب$

ي ب = د ف = د ب س = ك اذا س ف = ب س - ب ف = ف - ب

(١) بمشابهة المثلثات ب س ف : د ف :: ب س : ا ب

(٢) ا وحسب المفروض ك - ب : د :: ك : الضلع ا ب

(٣) و د ك = (ك - ب) × ا ب

(٤) المساحة ع = ا ب × ١/٢ ب س = ا ب × ١/٢ ك

(٥) بالقسمة على ١/٢ ك ا ب = $\frac{ع}{ك}$

(٦) د ك = (ك - ب) × $\frac{ع}{ك}$ = $\frac{ع}{ك}$ × (ك - ب) = $\frac{ع}{ك}$ × ك - $\frac{ع}{ك}$ × ب

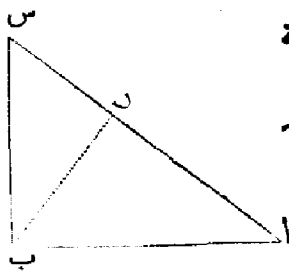
(٧) وك = $\frac{ع}{ك}$ × ك + $\frac{ع}{ك}$ × ب = $\frac{ع}{ك}$ × (ك + ب)

(ع ٧) مفروض ثلاثة اضلاع مثلث قائم الزاوية

ا ب س مطلوب قسّي الوتر المحدثين من عمودي مرسوم

من القائمة على الوتر. حسب اقليدس (ق ٨ ك ٦) يقسم

المثلث الى اثنين كل واحد منها قائم الزاوية



(١) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ب س} = \overline{ب د} + \overline{د س}$

(٢) بالشكل س د = ا س - ا د

(٣) ربع الجانين $\overline{س د} = (ا س - ا د)^2$

(٤) بالتعويض في (١) $\overline{ب س} = \overline{ب د} + (ا س - ا د)^2$

(٥) بالبسط $\overline{ب س} = \overline{ب د} + ا س^2 - ٢ ا س ا د + ا د^2$

(٦) بالمقابلة $\overline{ب س} = \overline{ب د} + ا س^2 - ٢ ا س ا د + ا د^2$

(٧) حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ب د} = ا ب - ا د$

(٨) بمساواة (٦) و (٧) $\overline{ب س} = ا س^2 - ٢ ا س ا د + ا د^2$

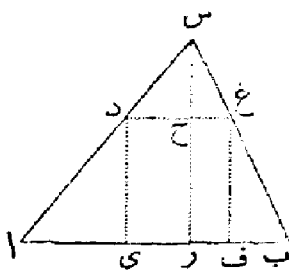
(٩) بالمقابلة $\overline{ب س} = ا س^2 - ٢ ا س ا د + ا د^2$

(١٠) بالقسمة ا د = $\frac{ا س^2 - ٢ ا س ا د + ا د^2}{ا س}$

ا س

(ع ٨) مفروض مساحة شكل د ي ف غ

متوازي الاضلاع مرسوم في المثلث ا ب س مطلوب اضلاعه



ارسم س ر عمودياً على ا ب وحسب المفروض

د غ يوازي ا ب فاذا

المثلث س غ ح يشبه المثلث س ر ب

والمثلث س د غ يشبه المثلث س ا ب

فلنفرض س ر = د و ا ب = ب و د غ = ك والمساحة = ع

(١) بمشابهة المثلثات س ب : س غ :: ا ب : د غ

(٢) و س ب : س غ :: س ر : س ح

(٣) وبساواة النسب ا ب : د غ :: س ر : س ح

(٤) اي $\frac{د غ \times س ر}{ا ب} = س ح$

(٥) بالشكل س ر - س ح = ح ر = د ي

(٦) بالتعويض س ر - $\frac{د غ \times س ر}{ا ب} = د ي$

(٧) وبالمفروض د - $\frac{د ك}{ب} = د ي$

(٨) ع = د غ $\times$ د ي = $\frac{د ك}{ب} \times (د - \frac{د ك}{ب})$

(٩) اي ع = د ك - $\frac{د ك^2}{ب}$

(١٠) بالتحويل ك = $\frac{ب}{٤} + \frac{ا ب}{٤} - \frac{ع ب}{د} = د غ$

ثم نعرف د ي بقسمة المساحة على د غ

(٩ع) لنا ان نرسم من نقطة مفروضة في دائرة مفروضة خطاً مستقيماً حتى يكون

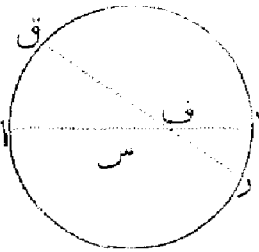
بين جزئيه الواقعين بين النقطة والمحيط فضلة مفروضة

في الدائرة ا ب ر لكن ف نقطة مفروضة في

القطر ا ب ثم لنفرض ا ف = ت و ب ف = ب

و ف ر = ك والفضلة المفروضة = د اذا ف ق =

ك + د



(١) حسب اقليدس (ق ٢٥ ك ٢) ف ر $\times$ ق = ا ف $\times$ ب ف

(٢) وبالمفروض ك $\times$ (د + ك) = ت $\times$ ب

(٣) اي ك + د ك = ت ب

(٤) باتمام التربيع ك + د ك + $\frac{د^2}{٤} = \frac{د^2}{٤} + د ك + ت ب$

(٥) بالتجذير والمقابلة ك = $\frac{١}{٢} د + \frac{١}{٢} د + ت ب = ف ر$

(ع ١٠) مفروض مجتمع ضلعي مثلث ١١٥٥ وطول العمود من الزاوية الواقعة

بينهما على الضلع الثالث ٣٠٠ وفضلة قسي الضلع الثالث الحادئين من وقوع العمود

عليه ٤٩٥ فما هو طول الاضلاع الثلاثة الجواب ٩٤٥ و ٣٧٥ و ٧٨٠

(ع ١١) مفروض محيط مثلث قائم الزاوية ١٢٠ وطول العمود الواقع من القائمة على الوتر ١٤٤ فا هو طول الاضلاع
الجواب ٢٠٠ و ٢٤٠ و ١٨٠

(ع ١٢) مفروض فضلة قطر مربع واحد اضلاعه مطلوب الاضلاع ليكن ك = الضلع المطلوب وف = الفضلة بينه وبين القطر اذا ك = ف + ف ٢٦

(ع ١٣) مفروض قاعدة مثلث مستوي وعلوه مطلوب ضلع مربع مرسوم في المثلث قائم على القاعدة مثل دى ف غ في (ع ٨) لنفرض ك = ضلع المربع وق = قاعدة المثلث وع = علوه ك = $\frac{ق \times ع}{ق + ع}$

(ع ١٤) مفروض ضلعاً مثلث وطول خط ينصف الزاوية الواقعة بينهما . مطلوب طول القاعدة اي الضلع الثالث الذي يقع عليه الخط المنصف للزاوية

لنفرض ك = القاعدة ت = احد الضلعين المفروضين وس = الآخر وب الخط المنصف = ك = $(ت + س) \times \frac{ت - س}{ت + س}$

(ع ١٥) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ٢٥ وضلع مربع مرسوم فيه (مثل شكل دى ف ب في (١٦) = ١٢ مطلوب الضلعان الآخران من المثلث

الجواب ٢٨ و ٢١

(ع ١٦) في مثلث قائم الزاوية كانت الاذرع في محيطه مساوية للاذرع المربعة في مساحته ونسبة القاعدة الى العمود :: ٤ : ٣ مطلوب طول كل ضلع من اضلاعه

الجواب ٦ و ٨ و ١٠

(ع ١٧) دار طولها ١٨ ذراعاً وعرضها ١٢ ذراعاً يحيط بها مشى متساوي العرض ومساحته تساوي مساحة الدار . فا هو عرض المشى

(ع ١٨) حقل زواياها قائمة نسبة ضلع منها الى آخر :: ٦ : ٥ وسُدُس مساحتها ١٢٥ قصبة مربعة فا هو طول الاضلاع

(ع ١٩) في مثلث قائم الزاوية نسبة مساحته الى مساحة مستطيل مفروض :: ٨ : ٥ والضلع الاقصر من كل واحد منها ٦٠ قصبة . والضلع الآخر من المثلث المتوالي للقائمة مساوي لقطر المستطيل فا هي مساحة المثلث والمستطيل

الجواب ٤٨٠٠ و ٣٠٠٠ قصبة مربعة

(ع ٢٠) صندوقان زواياها قائمة اعظمها يسع ٢٠ قدماً مكعباً اكثر من اصغرها ومساحة الاصغر الى مساحة الاكبر :: ٤ : ٥ وقاعدتاها مربعان وضلع الواحد مساوي لعنق الصندوق الآخر فا هو عمق الصندوق
الجواب ٤ و ٥ اقدام

(ع ٢١) مفروض طول ثلاثة خطوط عمودية مرسومة من نقطة داخل مثلث متساوي الاضلاع الى الاضلاع الثلاثة فطول الاضلاع

لنفرض ت وب وس = الخطوط العمودية وك = نصف احد الاضلاع
إذا ك = $\frac{ت + ب + س}{٢}$

(ع ٢٢) مساحة مربعة احاط بها سوق متساوي العرض وطول ضلع الساحة ثلاث قصبات اقل من تسعة اضعاف عرض السوق والقصبات المربعة في السوق اكثر من القصبات في محيط الساحة بمئتين وثمانية وعشرين فما هي مساحة الساحة

الجواب ٥٧٦ قصبة مربعة

(ع ٢٣) مفروض طول خطين مرسومين من الزاويتين الحادتين من مثلث قائم الزاوية الى نقطة اتصاف الضلعين المتقابلين . مطلوب طول الاضلاع لنفرض ك = نصف القاعدة وي = نصف العمود وت وب = الخطين المفروضين

$$ك = \frac{ب - ت}{٥} \quad وي = \frac{ت - ب}{١٥}$$

(ع ٢٤) مفروض قاعدة مثلث ب وعلوه العمودي ح مطلوب ضلع مربع مرسوم فيه ك

برهن صحة هذا الجواب هندسياً

(ع ٢٥) مفروض قاعدة مثلث ب وعلوه ح مطلوب ان يرسم فيه مستطيل بين ضلعيه نسبة مفروضة اي نسبة ك : ي افرض علو الشكل ك وطوله او قاعدته ي وافرض ك : ي :: ا : ن اي ي = ن ك

(ع ٢٦) مفروض قطر دائرة ق مطلوب ك ضلع مثلث متساوي الاضلاع مرسوماً في الدائرة

برهن صحة هذا الجواب هندسياً

(ع ٢٧) مفروض قاعدة مثلث قائم الزاوية ب وفضله الوتر والساق ف مطلوب الساق

(ع ٢٨) مفروض وتر مثلث قائم الزاوية ح ونسبة القاعدة الى الساق :: م : ن مطلوب الساق

(ع ٢٩) مفروض قطري زوايا قائمة ق والمحيط ط مطلوب الاضلاع

الجواب ط = $\frac{ق}{٢}$

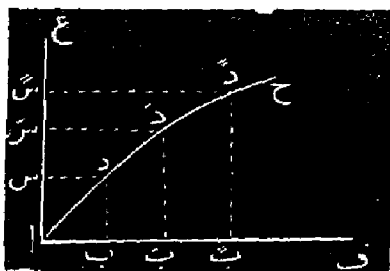
- (٢٠٤) مفروض قطري زوايا قائمة ١٠ ومحيطه ٢٨ فما هو طول الاضلاع
 (٢١٤) مفروض قطر دائرة قى مطلوب ضلع مثلث متساوي الاضلاع
 محيطاً بها الجواب ف ٢٦
 (٢٢٤) من اية نقطة كانت داخل مثلث متساوي الاضلاع رُسِمَت خطوط
 عمودية على الاضلاع مطلوب م مجموع طول تلك الخطوط م = عا والمثلث
 (٢٣٤) مفروض فضلة قطر مربع وضلعه = ف مطلوب الضلع
 الجواب ف + ٢٦
 (٢٤٤) مفروض طول ثلاثة خطوط عمودية ا ب س من نقطة مفروضة
 داخل مثلث متساوي الاضلاع على الاضلاع الثلاثة مطلوب طول الاضلاع
 الجواب $\frac{(٢+٣+٤)}{٢}$
 ٢٦

الفصل السابع والعشرون

في تعديل المنحنيات

٢٦٥ قد نظرنا في ما تقدم الى استعمال الجبر في معرفة اشكال هندسية محاطة
 بخطوط مستقيمة . فلننظر الآن الى مناسبة الجبر لمعرفة الخطوط المنحنية وكيفية الدلالة
 على خصائصها ونسبة بعضها الى بعض بواسطة معادلة

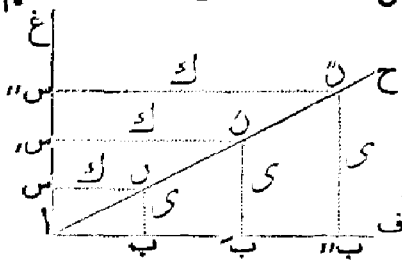
ان اوضاع نقط خطي منحني مرسوم على سطح مستوي تُعَيَّن من بُعد كل واحدة عن
 خطين مستقيمين احدهما عمودي على الآخر
 ليكن ا غ ا ف عمودين احدهما على الآخر
 ود ب و د ب و د ب اعمدة على ا ف
 وس د وس د وس د اعمدة على ا غ
 فيعرف وضع د من طول خطي



ب د وس د ووضع د بطول خطي ب د وس د ووضع د من خطي ب د
 وس د وقد سمي الخطان المرسومان كما ذكر من نقطة في خطي منحني معيني تلك
 النقطة ولأجل التمييز بين الخطين قد سمي ب د مثلاً معين نقطة د وس د فصلنا

فستعمل غالباً المعينة على الخط $\overline{اف}$ وهي مساوية للفصلة على $\overline{اغ}$ اي $اب = اس$
وب $ب' = س'س'$ الح (اقليدس ك ١ ق ٢٢) وسي $\overline{اف}$ و $\overline{اغ}$ محورَي المعين

٢٦٦ ان رُسِّمَت خطوط معينة من كل نقطة في خطٍ مُعَيَّنٍ ودُلَّ على نسبة كل المعينة الى فصلتها بواسطة معادلة فيعين بذلك كل نقطة من المنحنى لا محالة . ويُعَلَمُ شكله وكثير من خصائصه بواسطة تحويل المعادلة بالمقابلة والقسمة والترقية والتخدير وهلمَّ جراً . ونقط المنحنى غير معدودة فلا يمكن رسم معين لكل واحدة منها ولكن لنا طريقة للحصول معادلة دالة على جميع اجزاء المنحنى وهي ببناء المعادلة على خاصية مشتركة بين كل زوج مركب من معين وفصلته وفي ابضاح ذلك لننظر اولاً الى خطٍ مستقيم

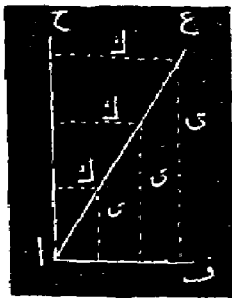


فليكن $\overline{اح}$ خطاً وليرسم منه معينات وفصلات على المحورين $\overline{اف}$ و $\overline{اغ}$ العمودين احدهما على الآخر ولنجعل زاوية $\overline{فاح}$ حتى تكون الفصلة $\overline{سد}$ او $\overline{اب}$ مضاعف المعين $\overline{ب د}$ فتكون

المثلثات $\overline{اب د}$ $\overline{اب' د'}$ و $\overline{اب'' د''}$ متشابهة اقليدس (ق ٢٩ ك ١) ونسبة

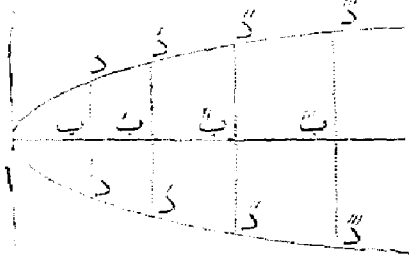
$اب : ب د :: اب' : ب' د' :: اب'' : ب'' د''$ وان فُرض $اب = ٢$ $ب د$ فحينئذٍ $اب' = ٢$ $ب' د' = ٢$ و $اب'' = ٢$ $ب'' د'' = ٢$ الح اي كل فصلة = مضاعف معينها . ولكن لا نحتاج الى معادلة لكل زوج من معين مع فصلته بل تكفي واحدة للجميع . فلنفرض $ك =$ احدى الفصلات و $و =$ معينها اذاً $ك = ٢$ $و = ١$ او $و = ١/٢$ $ك$ وهذه معادلة دالة على نسبة المعينات والفصلات بعضها لبعض . ولا فرق بينها وبين ما سواها من المعادلات غير انه ليس لحرقي $ك$ و $و$ قيمة معلومة الا انها دالتان على معين نقطة وفصلتها . ثم ان فُرض $ك = اب$ اذاً $و = ب د$
وان فُرض $ك = اب'$ " $و = ب' د'$
" " $ك = اب''$ " $و = ب'' د''$ الح

فان عُيِّن طول احد الزوجين تُعرَف الآخر من المعادلة فان فُرض $ك = ٢$ اذاً $و = ١$ وان فُرض $ك = ٨$ فاذاً $و = ٤$ وان فُرض $ك = ١٠٠$ فاذاً $و = ٥٠$ الح



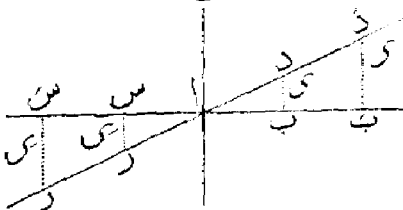
٢٦٧ اذا اختلفت زاوية ح ا ف عما سبق - في الرسم السابق كما يرى في هذا الرسم تبقى المعادلة على حالها الا في مسمى ك فلنفرض ت دالة على نسبة ي الى ك اي ي : ك :: ت : ا فتصير المعادلة . ت ك = ي فيكون المسمى ت صحيحاً او كسراً حسبما كانت ي اكبر من ك او اصغر منها

ثم لنستعمل ما قد اوضح في تحصيل معادلة دالة على خط منحن . ولنفرض انه يراد معادلة دالة على شكل ثلجي . فن خصائص هذا الشكل كما ينضج في حساب قطع الخروط ان النصلات متناسبة الى مربعات المعينات . فلذلك ت نسبة مربع احدى المعينات الى فصلتها . ولما كانت هذه النسبة هي في بين كل زوج من معين وفصلة في الشكل كلو يحدث من ذلك هذه المعادلة ي : ك :: ت : ا وت ك = ي وهي معادلة المنحنى ونصح في كل نقطة منه ومهما تغيرت ك وي تبقى ت على حالها ثم ان كان ت ك = ي فبالتهذيب ي = مات ك وان كان ت = ٢ اذا ي = ٢٦ = ٢٦



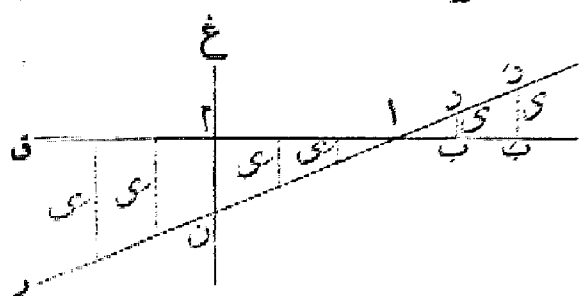
وان فرض ك = ٤٥ = ا ب
فاذا ي = ٢٦ = ٤٥٠ × ٢٦ = ١١٧٠٠
ب د وان فرض ك = ٨ = ا ب فاذا
ي = ١٦ = ٨ × ٢٦ = ٢٠٨
فرض ك = ١٢٥ = ا ب فاذا ي =
١٢٥٠ × ٢٦ = ٣٢٥٠٠ = ب د
= ١٨ × ٢٦ = ٤٦٨ = ب د

٢٦٨ متى رُسمت المعينات على جانبي القطر تكون الواقعة فوقه ايجابية والواقعة تحته سلبية . مثاله في الرسم السابق ان حُبيت المعينات فوق ا ف ايجابية تكون التي تحته سلبية والنصلات الواقعة عن اليمين مثل ا ب ا ب الخ ان حُبيت ايجابية فتكون الواقعة عن اليسار مثل اس اس سلبية . وفي حل مسألة ان خرج معين ان فصلة سلبياً يؤخذ على جانب المحور المقابل للجانب المحسوب ايجابياً



٢٦٩ اننا في ما تقدم نرى الخط المستقيم او المنحنى ينقطع المحور في نقطة تقاطع

المحورين كما يرى من الرسوم السابقة ولكن ليس كذلك في كل حين . فيمكن ان نحسب
النصلات على المحور $\overline{ق}$ مبتدئاً من الخط $\overline{غ}$ فلنفرض $ك = احدى النصلات م ب$



او $م ب = الخ وى = معينها$

ولنفرض $ل = اب ود =$

$٢ و ت = نسبة ب د : اب$

اذا $ت ل = ل و ل = ت$

وبالشكل $اب = م ب - م ا$

اي $ل = ك - ب$ وبماواة المعادلتين $ك - ب = ب = ت$ و $ك = ت + ب$

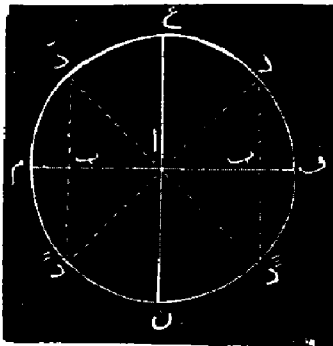
٢٧٠ يجب ان يتحقق كون المعينات والنصلات ايجابية او سلبية والى اين تنتهي
احدهما . فنرى ان النصلة تنتهي وتلاشى في نقطة التقاء الخط المنحني بالمحور الذي تقاس
النصلات عليه . والمعينة تلاشى عند نقطة التقاء المنحني بالمحور الذي تقاس المعينات
عليه . مثالة في رسم الشجعي السابق نرى المعينات تقاس على الخط $\overline{ا ب}$ فيقل طولها
شيئاً فشيئاً بتقريب المنحني الى المحور الى ان تزول بالكلية في نقطة التقاءهما . والنصلات
تقاس على الخط $\overline{ا غ}$ ونقل ايضاً كما سبق الى ان تلاشى عند $\overline{ا}$

٢٧١ الامر واضح انه اذا التقى المحوران بالمنحني في نقطة واحدة تلاشى المعينات
والنصلات معاً كما في الرسم المشار اليه . ولكن (في رسم رقم ٢٦٩) نرى المحور $\overline{م ق}$ يقطع
الخط $\overline{ن د}$ في $\overline{ا}$ و $\overline{غ}$ يقطع في $\overline{ن}$ فالمعينات اي $\overline{م ق}$ تلاشى عند $\overline{ا}$ والنصلات
اي $\overline{غ ن}$ تلاشى عند $\overline{م ا و ن}$

٢٧٢ كل معين او فصلة يتغير من ايجاب الى سلب عند مروره في نقطة التلاشى
اي النقطة التي فيها تكون قيمة صفراً . مثالة في رسم رقم ٢٦٨ نرى المعين $\overline{ق ي}$ يقل شيئاً
فشيئاً الى ان يتلاشى في $\overline{ا}$ ثم يصير سلباً لانه يقع تحت المحور $\overline{س ق}$ وكذلك النصلات
عن $\overline{ي ن ا غ}$ نقل شيئاً فشيئاً الى ان تلاشى عند $\overline{ا}$ ثم يصير سلبية عن يسار $\overline{ا غ}$ ونرى
هنا ان الاثنين تغيرنا معاً في نقطة واحدة ولكن في رسم رقم ٢٦٩ نرى المعينات تتغير
عند $\overline{ا}$ والنصلات تبقى ايجابية الى $\overline{غ ن}$ وبين $\overline{ا و غ ن}$ تكون المعينات سلبية
والنصلات ايجابية

٢٧٣ ان استعمال هذه القواعد وغيرها هو من متعلقات حساب قطع المخروط ومنصودنا الآن انما هو ذكر بعض امثلة لايضاح ما قيل ولتسهيل ادراك بعض اشياء تقع تحت نظرنا قبل الوصول الى حساب قطع المخروط الذي هو الطبقة العليا من العلوم التعليمية

(ع ١) مطلوب معادلة الدائرة فلنفرض دائرة ف غ م ولنرسم القطرين غ م ف م احدهما عمودي على الآخر ا رسم من اية نقطة شئت في المنحنى اي محيط الدائرة المعين د ب عموديا على ا ف فيكون ا ب الفصلة المناظرة للمعين د ب



ثم لنفرض نصف القطر ا د = ر و ا ب = ك وب د = ي

حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١) $\overline{ا د}^2 = \overline{ا ب} \cdot \overline{ا د}$

وبالمفروض $\overline{ا د} = \overline{ا ب} = \overline{ا د}$

بالتجذير $\overline{ا د} = \overline{ا ب}$

وعلى هذا السبيل $\overline{ا د} = \overline{ا ب}$ اي ان الفصلة تساوي الجذر المائي من فصلة مربع نصف القطر ومربع المعين . فان حسب نصف قطر الدائرة واحدا نصير المعادلتان $\overline{ا د} = \overline{ا ب}$ و $\overline{ا د} = \overline{ا ب}$ ونحصل هذه المعادلة مهما كانت النقطة المفروضة في المحيط لان المعين والفسلة يكونان ضلعي مثلث ذي قائمة و ا د الوتر لانه نصف قطر الدائرة ونرى للمعادلتين قيمة ملتبسة اي تكون ايجابية ان سلبية فتحسب المعينات والفسلات في الربع الاول غ م ايجابية وفي الربع الثاني غ م تبقي المعينات ايجابية وتصبح الفصالات سلبية وفي الربع الثالث م ن تصيران سلبيتين وفي الربع الرابع ن ف تبقي المعينات سلبية وتعود الفصالات ايجابية اي

ف غ	تكون ك + و ي +	في الربع
غ م	" ك - و ي +	
م ن	" ك - و ي -	
ن ف	" ك + و ي -	

٢٧٤ قد بحسب في الهندسة ان المخطوط حاصلة من حركة نقطة . فان تحركت الى جهة واحدة حصل خط مستقيم . وان تغيرت الجهة في كل وقت حصل خط

تنبيه . في هذا الشكل يجب ان يوصل بين م وف بخط عمودي على ا ب

ان يوصل بينم وف بخط عمودي على اب

والتعريف $اب = ب$

ولان ف م رن عمودان على اب فالثلث اف م يشبه المثلث ارن (افلديس

(1) بالمثلثات المشابهة اف : فم :: ار : رن

(۲) او بوض ف ب عوضاً عن آر نصیر اف : فم : ف ب : رن

(۲) ای $\frac{f_m \times f_b}{f}$ = رن

$$\frac{\overline{م} \times \overline{م}}{\overline{س}} = \overline{ري} \quad (٢) \text{ و}$$

$$\frac{\overline{م} \times \overline{م}}{\overline{س}} = \overline{ري} \quad (٢) \text{ بترييع الجانبين}$$

$$\overline{ري} - \overline{ري} = \overline{ري} \quad (٤) \text{ حسب اقليدس (ق ٤٧ ك ١)}$$

$$\overline{ري} - \overline{ري} = \overline{ري} \quad (٤) \text{ و (٢) بمساواة (٢) و (٤)}$$

$$\overline{ري} - \overline{ري} = \overline{ري} \quad (٦) \text{ اي بالمفروض ب} - \text{ي} = \overline{ري}$$

$$\overline{ري} - \overline{ري} = \overline{ري} \quad (٧) \text{ او (ت + ي) } \times \overline{ري} = \overline{ري} - \overline{ري} = \overline{ري}$$

٢٧٥ نرى في الامثلة المتقدمة ان المعادلة اخذت من وصف كيفية المنحنى . وقد يعكس العمل اي نفرض المعادلة ومنها يرسم المنحنى بأخذ فصلات مختلفة وجعل معينات لها فيبر المنحنى باطراف هذه المعينات

(٤ع) لئان نرسم منحنياً معادلة $\overline{ري} = \overline{ري}$ او $\overline{ري} = \overline{ري}$ (انظر رسم الشلجي) خذ على خط اف فصلات مختلفة طولاً اي

$$\overline{ري} = \overline{ري} \quad \text{فيكون المعين ب} = \overline{ري}$$

$$\overline{ري} = \overline{ري} \quad \text{فيكون المعين ب} = \overline{ري}$$

$$\overline{ري} = \overline{ري} \quad \text{فيكون المعين ب} = \overline{ري}$$

$$\overline{ري} = \overline{ري} \quad \text{فيكون المعين ب} = \overline{ري}$$

ثم ركب هذه المعينات مع فصلاتها واصل بين اطرافها بخط $\overline{ري} = \overline{ري}$ فيرسم المنحنى المطلوب . ولا ريب ان الخط يكون اقرب الى المطلوب كلما زاد عدد المعينات والنصلاات المأخوذة

٢٧٦ اذا وُهمت حركة نقطة حتى نمر باطراف جميع المعينات المفروضة في معادلة يُسمى الخط الحادث طريق النقطة اي الطريق التي تتحرك فيها والتي توجد فيها ابداً . ويسمى ايضاً طريق المعادلة التي منها تؤخذ مواضع النقطة في حركتها . مثاله ان الشلجي يسمى طريق نقط $\overline{ري} = \overline{ري}$ او طريق المعادلة $\overline{ري} = \overline{ري}$ وقوس الدائرة هي طريق المعادلة $\overline{ري} = \overline{ري}$ فمعرفة طريق معادلة انما هي معرفة الخط المنحني او المستقيم التي هي له

(٥٤) مطلوب طريق المعادلة $ك = ت$ او $ك = ي$ التي فيها افترض $ك$ و $ي$ معينات وفصلات مختلفة و $ت$ كمية ثابتة معينة فان اخذ المعين $ك$ على اطوال مختلفة فلا بد للفصل $ي$ ان تتغير بالنسبة الى $ك$ حتى تبقى المعادلة $ت = ي$ او بحل المعادلة الى نسبة $ي : ك :: ت : ١$ اي لا تتغير نسبة $ي : ك$ لان $ت$ كمية معينة اي تكون نسبة فصله الى معينها كنسبة فصله اخرى الى معينها مها كان . فلنفرض فصلين $اب$ $اب$ (رسم رقم ٢٦٦) و $ب د$ و $ب د$ معينهما اذا $اب : ب د :: اب : ب د$ فيكون خط $اد$ مستقيماً (افلديس ق ٢٢ ك ٦) وهو طريق المعادلة ثم ان كانت المعادلة المفروضة $ك = ت + ب$ فزيادة $ب$ لا تسبب تغييراً في الطريق . لان $ب$ انما يزيد طول الفاصلات فقط . وعوضاً عن ان تقاس من $ا$ تقاس من نقطة اخرى مثل $م$ في رسم رقم ٢٦٦ وتبقى نسبة $اب$ او $اب$ الى $ب د$ او $ب د$ كما كانت فيكون المخطط مستقيماً

٢٧٧ يبرهن ما سبق ان كل معادلة تكون $ك = ي$ اي الفاصلات والمعينات في اجزاء مختلفة منها وليس لما الا القوة الاولى تكون طريقها خطأ مستقيماً لان كل معادلة من هذا النوع يمكنها ان تتحول الى $ك = ت + ب$ كما يتضح من هذه العملية (٦٤) مطلوب طريقة المعادلة

$س = ك - د + ح - ي + م = ن$
بالمقابلة $س = ك + ح - ي + ن - م + د$
وبالقسمة على $س + ح$ نصير $ك = \frac{س + ح}{س + ح} + \frac{ن - م + د}{س + ح}$
فيمكن هنا ان يدل على الكميات الثابتة بالتعويض عنها بحرف واحد . فلنفرض $س + ح = ت$ و $\frac{ن - م + د}{س + ح} = ب$ فتصير المعادلة $ك = ت + ب$ التي طريقها خط مستقيم كما تقدم

٢٧٨ ثم انه متى كانت المعينات مناسبة لمربعات الفاصلات او لكتوبها او للقوة الرابعة منها . وهم جراً يكون طريق المعادلة خطأ منحنياً لان المعينات الموضوعة على خط مستقيم تكون نسبة بعضها الى بعض ذات النسبة الكائنة بين فاصلاتها . ولكن لا تكون نسبة كميات بعضها الى بعض كنسبة مربعاتها او كعوبها او قوائنها الرابعة والخامسة وهم جراً كما علم من باب النسبة . مثاله ان فرض $ك = ي$ فتزيد المعينات

أكثر من الفصالات فان اخذت الفصالات ١ و ٢ و ٣ و ٤ الخ تكون المعينات مساوية لاربعتها اي ١ و ٤ و ٩ و ١٦ الخ

٢٧٩ ان عدة المعادلات التي يمكن ان تتركب من قوات المعينات والفصالات المختلفة في غير متناهية . وكل معادلة لها طريق مختصة بها . اذا تكون اشكال المعينات غير متناهية ولكنها تنحصر في انواع . وقد جرت العادة عند المولدين ان يرتبوا في انواع حسب درجات معادلاتها فيبدل على انواع الخطوط بالدليل الاعظم ان يجمع دلائل المعينات والفصالات في جزء من المعادلة . مثالة $ت ك = ي$ تخصص بخط من النوع الاول لان الدليل في كل معين وفصلة انما هو واحد وليس في هذا النوع من رأينا سابقا

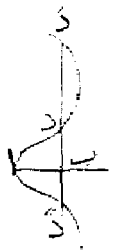
والمعادلة $س ك - ت ك = ي$ مختصة بالنوع الثاني من الخطوط والنوع الاول من المعينات لان الدليل الاعظم هو ٢ وت $ي + ك = ب ك$ تخصص بالنوع الثاني ايضا . لانه وان لم يكن فيها دليل اكبر من واحد لكن يجمع دلائل $ك$ و $ي$ في الجزء الثاني اي $١ + ١ = ٢$ و $ي - ت ك = ب ك$ مختصة بالنوع الثالث من الخطوط والثاني من المعينات لان دليل $ي$ الاعظم هو ٢

٢٨٠ في المعينات من الانواع العالية قد يمكن ان تكون لمعين فصلة قيمات مختلفة فيلتي المعين بالمعني في نقط متعددة لان طول المعين متوقف على معادلة المعني . وان كانت المعادلة فوق الدرجة الاولى . يكون لها قيمتان فاكثرا رأينا سابقا فتكون للمعين قيمات مختلفة

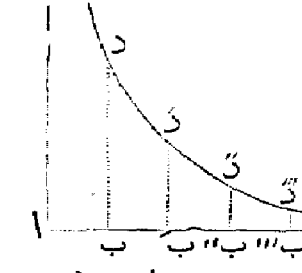
ان المعادلة من الدرجة الاولى لها قيمة واحدة فقط وخطها يقطع المعين في نقطة واحدة فقط . مثالة معادلة خط $آ ح$ (رسم رقم ٢٦٦) في $ا ك = ي$ فنرى ان $ي$ لها قيمة واحدة فقط وك لا تتغير . فان اخذ الفصلة $ك = ا ب$ يكون المعين $ي = ب د$ الذي يمكن ان يلاقي $آ ح$ في $د$ فقط

ولكن معادلة الشلجي $ي = ت ك$ لها قيمتان كما نرى من تجذير الجانبيين اي $ي = + م ت ك$ احدها ايجابية والاخرى سلبية وذلك دال على امكان اخراج المعين الى جهتيه من طرف الفصلة فيمكن ان يلاقي جزءا آخر من المعني . مثالة معين الفصلة

أب الشلجي قد يمكن أن يكون ب د فوق الفصلة أوب د نحتها
قد رأينا سابقاً أن معادلة مكعبة لها ثلاثة جذور أي ثلاث قيمات
فكون لمعين منحن من نوعها ثلاث قيمات فيمكن أن يلاقي المنحن في
ثلاث نقط . مثالة معين الفصلة أب قد يمكن أن يكون ب د أو
ب د أو ب د



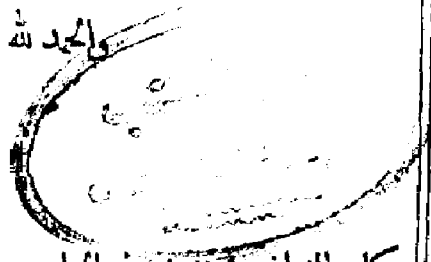
٢٨١ إذا التقى المنحن بالمحور الذي تقاس عليه الفصالات نقل المعينات شيئاً
فشيئاً إلى أن ثلاثي كما تقدم . وقد يمكن أن يتقرب منحن إلى خطٍ أبداً بدون أن
يلاقيه . فلنفرض على خط آف إبعاداً متساوية أ ب
وب ب' وب'' وب''' ونفرض شكل المنحن
د د' د'' على كيفية حتى يكون كل معين عند نقط
ب ب' ب'' ب''' الخ نصف الذي عن يساره أي ب' د' ف
نصف ب د وب' د' نصف ب' د' الخ فالأمر واضح أنه مها أخرج المنحن على هذه
الكيفية لا يلاقي آف بل يبقى متفرقاً إليه أبداً . وكل خطٍ على هذه الكيفية أي الذي
يتقرب أبداً إلى منحن بدون أن يلتقي به يسمى متقارباً بالمحور آف هو متقارب المنحن
د د' فلما زادت الفصلة فل المعين . ومتى حُسبت الفصلة غير متناهية حسبما ذكر
في فصل غير المتناهيات يصير المعين شيئاً بغير المتناهي فيدل عليه بصفر
والامتداد في هذا الباب من خصائص حساب قطع المخروط .



هذا ما انتضى وضعة في علم الجبر والمقابلة

والحمد لله الذي لا يحاط به علماً

انتهى



وكان الفراغ من تبييضه في الحادي والعشرين من شهر كانون الثاني سنة ١٨٥٢ مسيحية

وكان الفراغ من هذه الطبعة الثالثة في ١٢ خلت من شهر حزيران سنة ١٨٩١