الملحق أ

عناصر ميكانيك الكم Elements of Quantum Mechanics

لسنا في حاجة إلى معرفة ميكاينك الكم حتى نفهم المبادئ الأساسية للفيزياء الحرارية، ولكن لكي نتنبأ بالصفات الحرارية المفصلة لبعض الأنظمة الفيزيائية (كغاز من جزيئات النيتروجين أو الإلكترونات في قطعة معدنية)، نحتاج إلى معرفة الحالات المحتملة للنظام والطاقات الملازمة لتلك الحالات. وتحدد تلك حالات وطاقاتها عن طريق مبادئ ميكانيك الكم.

ومع ذلك، فإنك لست في حاجة كبيرة إلى معرفة ميكانيك الكم حتى تتمكن من قراءة هذا الكتاب وكلما ظهرت الحاجة إلى نتيجة من نتائج ميكانيك الكم، خلال هذا الكتاب، تم تلخيص تلك النتيجة ومرجعها، فبإمكانك ألا تقرأ هذا الملحق. لكن عند لحظة ما، قد ترغب في رؤية مراجعة كلية منهجية لميكانيك الكم الذي استخدم في هذا الكتاب. إن المقصود بهذا الملحق هو تقديم تلك المراجعة بغض النظر إن قررت أن تقرأها قبل قراءة النص الرئيس لهذا الكتاب أو بعد قراءته[91].

أ.1 الأدلة على ثنائية التصرف بوصفها موجة والتصرف بوصفها جسيمات Evidence for Wave–Particle Duality

إن الجذور التاريخية لميكانيك الكم مرتبطة بقوة مع تطور الميكانيكا الإحصائية في بداية القرن العشرين. إن فشل نظرية تساوي التجزيء للأمواج الكهرومغناطيسية (الكارثة فوق البنفسجية الجزء 4.7) وللطاقة الاهتزازية لبلورة صلبة (التي ظهرت بسعات حرارية منخفضة بطريقة غير عادية عند درجات حرارة منخفضة. السؤالان 24.3 و25.3، وفي الجزء 5.7).

(91) هناك كثير من كتب ميكانيك الكم الجيدة التي تود الاطلاع عليها لمعالجة أكثر جدية. وأنصح بالكتاب An Introduction to Quantum Physics by A. P. French and Edwin F. Taylor (Norton, New york, 1978) والكتاب Introduction to Quantum Mechanics by David J. Griffiths (Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ,1995).

اكتسب أهمية تاريخية خاصة، لكن هناك الكثير من الأدلة الأكثر مباشرة لميكانيك الكم الذي هو أصلًا الفكرة التي تقول: إن نموذج الأمواج أو نموذج الجسيمات كل وحدة غير كافٍ لفهم المادة والطاقة على المستوى الذري. وفي هذا الجزء سنصف باختصار بعض هذه الأدلة.

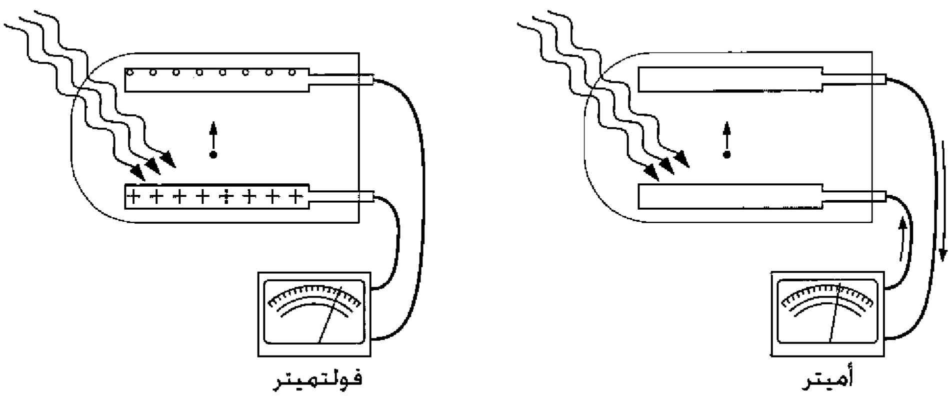
التأثير الكهروضوئي The Photoelectric Effect

إذا سقط شعاع ضوئي على سطح معدني، فإن الضوء سيطرد بعض الإلكترونات من المعدن لتنطلق طائرة خارج سطح المعدن. وتسمى هذه الظاهرة التأثير الكهروضوئي، وتكوّن الآلية الأساسية لعمل آلات تصوير الفيديو، والكثير من مجسات الضوء الإلكترونية.

ولدراسة التأثير الكهروضوئي كميًّا، نضع قطعة المعدن (تسمى مهبطًا) في أنبوب مفرغ مع قطعة أخرى من المعدن (المصعد) لالتقاط الإلكترونات المنطلقة. وبعد ذلك يقاس، إما الجهد الذي يتزايد مع تجمع الإلكترونات على المصعد، وإما التيار الذي ينتج عن مرور تلك الإلكترونات حول الدائرة الكهربائية لتعود إلى المهبط. (انظر الشكل أ.1).

ويقيس التيار عدد الإلكترونات لوحدة الزمن، المنطلقة من المهبط، التي تتجمع على المصعد. وليس مفاجئًا أن التيار يزداد عندما ترتفع شدة مصدر الضوء. والضوء الأكثر سطوعًا يطلق إلكترونات أكثر.

ومن ناحية أخرى، فإن الفرق في الجهد مقياس للطاقة التي يحتاج إليها الإلكترون ليقطع الفجوة بين المهبط والمصعد. ويكون الجهد في البداية مساويًا للصفر، لكن مع تجميع الإلكترونات على المصعد، فإنه يكوّن مجالًا كهربائيًّا يدفع الإلكترونات الأخرى للخلف في اتجاه المهبط. وبعد فترة ليست بالقصيرة يستقر الجهد عند قيمة نهائية، مشيرًا إلى عدم انطلاق إلكترونات بطاقات كافية لقطع المسافة بين المهبط والمصعد. إن الجهد يساوي الطاقة لوحدة الشحنة، وعليه، فإذا كان الجهد النهائي V، فإن أكبر قيمة للطاقة الحركية للإلكترونات (عند تركها المهبط) يجب أن تكون $K_{max}= eV$، حيث e هي مقدار شحنة الإلكترونات.



الشكل أ.1: تجربتان لدراسة التأثير الكهروضوئي. فعندما يوصل فولتميتر مثالي (مقاومة داخلية عالية جدًّا) في الدائرة، تتراكم الإلكترونات على المصعد، وتتنافر مع الإلكترونات الأخرى، ويقيس الفولتميتر الطاقة (لوحدة الشحنة) التي يحتاج إليها الإلكترون لينتقل من المهبط إلى المصعد. وعندما يوصل الأميتر في الدائرة، فإنه يقيس عدد الإلكترونات (لوحدة الزمن) المتجمعة على المصعد، وبعد ذلك يعود إلى المهبط خلال الدائرة الكهربائية.

لكن المفاجأة، هي أن الجهد النهائي، وبناءً على ذلك، فإن الطاقة الحركية العظمى للإلكترون لا تعتمد على سطوعية مصدر الضوء. إن الضوء الأكثر سطوعًا يؤدي إلى إطلاق عدد أكبر من الإلكترونات، لكنه لا يعطي أي إلكترون طاقة حركية أكبر من ضوء خافت. لكن من جهة أخرى، فإن الجهد النهائي يعتمد على لون الضوء، أي إنه يعتمد على طول الموجة (λ) أو تردد $(f = c / \lambda)$ الضوء المستخدم. وفي الواقع توجد علاقة خطية بين أقصى قيمة لطاقة حركة الإلكترون المنطلق وتردد الضوء المستخدم، وهي:

$$k_{max} = hf - \phi \qquad \text{(أ.1)،}$$

حيث h ثابت عام، يسمى ثابت بلانك ، و ϕ ثابت يعتمد على نوع المعدن. لقد تنبأ أينشتاين، أول مرة بهذه العلاقة عام 1905 معتمدًا على تفسيرات بلانك السابقة لإشعاع الجسم.

إن تفسير أينشتاين للتأثير الكهروضوئي بسيط وسهل، حيث يأتي الضوء بحزم صغيرة جدًّا أو جسيمات، تسمى الآن **فوتونات**، طاقة كل منها تساوي حاصل ضرب ثابت بلانك في تردد الضوء.

$$E_{\text{photon}} = hf \qquad \text{(أ.2)،}$$

ويحتوي الضوء الأكثر سطوعًا على عدد أكبر من الفوتونات، لكن طاقة كل فوتون لا تزال تعتمد فقط على تردد الضوء، وليس على شدته. وعندما يصطدم الضوء بالمهبط، فإن كل إلكترون يمتص فوتونًا واحدًا. الثابت ϕ (يسمى دالة الشغل) هي الطاقة الصغرى التي يحتاج إليها الإلكترون ليفلت من المعدن، وعندما يصبح الإلكترون حرًّا، فإن أقصى قيمة للطاقة الحركية التي يمتلكها ذلك الإلكترون تساوي طاقة الفوتون مطروحًا منها دالة الشغل ϕ.

ونحن في العادة لا نلاحظ أن الضوء يأتي بحزم منفصلة لصغر تلك الحزم، فقيمة ثابت بلانك هي فقط (6.63×10^{-34} J·s)، وعليه، فإن طاقة فوتون للضوء المرئي تكون في حدود 2-3 eV. ويعطي المصباح الكهربائي التقليدي عددًا من الفوتونات لوحدة الزمن في حدود 10^{20} فوتونات. لكن التكنولوجيا المطلوبة للكشف عن فوتون واحد (أنابيب مضاعفة الفوتونات، وكاميرات CCD للفلك) أصبحت متوافرة هذه الأيام.

السؤال أ.1: أساسيات الفوتونات.

(أ) بيّن أن hc تساوي 1240 eV.nm.

(ب) احسب طاقة الفوتون عند كل طول موجة من الأمواج الآتية:

ضوء (650nm) ، ضوء أزرق (450nm)، أشعة سينية (0.1nm) وخلفية الإشعاعات الكونية ([illegible] mm)

(ج) احسب عدد الفوتونات المنبعثة في الثانية الواحدة من جهاز He-Ne ليزر (λ=633 nm) قدرته 1 milliwatt.

السؤال أ.2: افترض أنه بتجربة التأثير الكهروضوئي، أُسقط ضوء بطول موجة ([illegible]00nm) فأنتج قراءة جهد مساوية 0.8 V.

(أ) ما دالة شغل المهبط؟

(ب) ما قراءة الجهد التي تتوقعها إذا استخدم ضوء بطول موجة (300nm)؟ وماذا لو غيرت طول الموجة إلى 500nm أو 600nm؟

حيود الإلكترونات Electron Diffraction

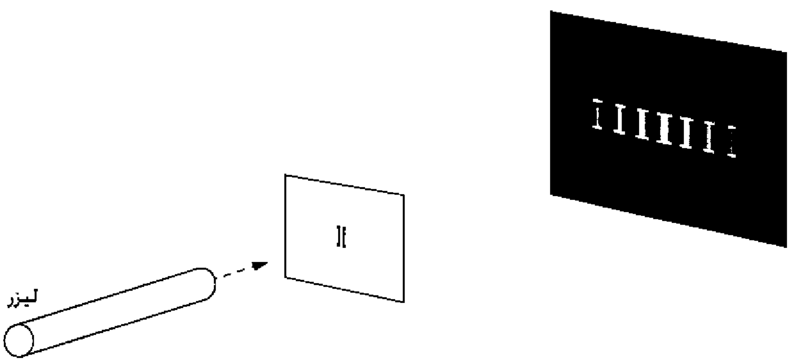
إذ' كان الضوء، الذي اعتقد الجميع أنه موجة، يتصرف أحيانًا على صورة جسيمات، ربما لن يكون أمرًا مفاجئًا أن الإلكترونات، التي يعتقد الجميع أنها جسيمات، تتصرف أحيانًا تصرف أمواج. لكن لنعد قليلًا، ونسأل: ماذا نقصد عندما نقول: إن الضوء يتصرف تصرف أمواج؟ نحن لا نرى أي شيء يتموج (كما نرى الأمواج المائية، أو الأمواج على وتر جيتار). لكننا نستطيع مشاهدة الحيود والتداخل عندما يمر الضوء من فتحة صغيرة، أو حول عائق صغير، وربما يكون التداخل الناتج عن شقين أسهل الأمثلة، عندما يمر ضوء أحادي الموجة ناتج عن مصدر واحد، من خلال زوج من الفتحات القريبة جدًّا من بعضها، فإنه يتداخل، ويكوِّن نموذجًا من النقاط المضيئة والمعتمة على شاشة، على بعدٍ ما من الفتحتين (انظر الشكل أ.2).

إن الإلكترونات تقوم بالشيء نفسه: خذ شعاعًا من الإلكترونات (كما في أنبوب الصورة في التلفاز، أو في مجهر إلكتروني) وسلّطه على زوج من الفتح القريبة جدًّا، من بعضها. على شاشة عرض (شاشة تلفاز أو على أي لاقط آخر) ستحصل على نموذج تداخل، تمامًا كما هو الحال مع الضوء (انظر الشكل أ.3) ويمكن إيجاد طول موجة الإلكترون من البعد بين الشقين، وحجم نموذج التداخل تمامًا على نحو ما يفعل في حالة الضوء. وقد تبين أن طول موجة الإلكترون تتناسب عكسيًّا مع الزخم الخطي للإلكترون، وأن معامل التناسب هو ثابت بلانك.

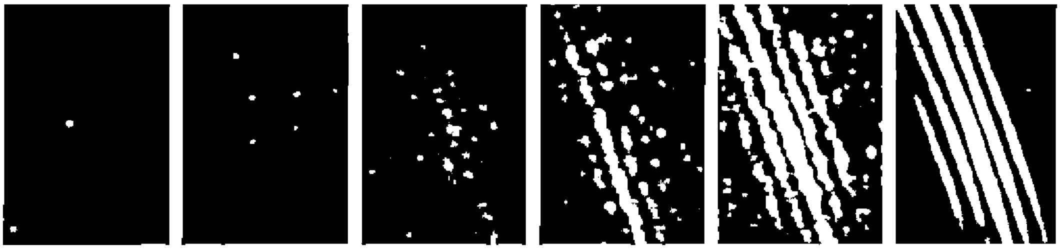
$$\lambda = \frac{h}{p} \qquad \text{(3.أ)}$$

لقد تنبّأ بهذه المعادلة المشهورة لويس ديبرولي عام 1923.

وتصلح المعادلة للفوتونات أيضًا، وهي نتاج مباشر لعلاقة أينشتاين $E = hf$، والعلاقة $p = E/c$ بين الطاقة والزخم الخطي لأي شيء يتحرك بسرعة الضوء. لقد أدرك ديبرولي بصحة أن الإلكترونات (جميع الجسيمات الأخرى) تمتلك أطوال أمواج مرتبطة بزخمها الخطي نفسها بالطريقة (علاقة أينشتاين $E = hf$ تنطبق على الإلكترونات والجسيمات الأخرى، لكن هذه العلاقة ليست نفسها الفائدة؛ لأن تردد الإلكترون لا يمكن أن يقاس مباشرة).



الشكل أ.2: في تجربة التداخل من شقين، يسلط ضوء أحادي الموجة على شقين في شاشة. ويظهر نموذج تداخل مُكوّن من مناطق معتمة ومناطق مضيئة على شاشة العرض التي هي على بعدٍ ما من الشقين.



الشكل أ.3: لقد تم إنتاج هذه الصورة باستخدام الشعاع الخاص بالميكروسكوب الإلكتروني. لقد وضع سلك مشحون بشحنات موجبة في طريق الشعاع جاعلة الإلكترونات تنحني حول جهتي السلك، وتتداخل كما لو كانت قد مرت من خلال شقين. إن التيار في شعاع الإلكترونات يتزايد من صورة إلى الصورة التي تليها، مظهرًا أن نموذج التداخل يبنى من الومضات الضوئية الموزعة إحصائيًّا، الناتجة عن إلكترونات فردية.

وحقيقة، إن الإلكترونات والفوتونات كلها، يمكن أن تتصرف على شكل صورة، ويمكنها إنتاج نموذج تداخل يطرح بعض الأسئلة الصعبة. إن كل جسيم (إلكترونًا أو فوتونًا) يمكنه السقوط فقط على نقطة واحدة على شاشة المشاهدة، وعليه، فإذا أرسلت هذه الجسيمات من خلال الجهاز ببطء، فإن نموذج التداخل سيبدأ بالتكوّن تدريجيًّا، نقطة بعد نقطة على نحو ما هو مبين في الشكل (أ.3)، ومن الظاهر أن الموقع الذي يقع عليه الجسيم عشوائيًّا وباحتمال يتغير على الشاشة، على نحو ما هو محدد بفعل شدة إضاءة النموذج النهائي. ويعني هذا أن كل فوتون أو إلكترون لا بد، بطريقة أو بأخرى، من أن يمر من خلال الشقين، ومن ثم يتداخل مع نفسه لتحديد توزيع الاحتمال للمكان الذي سيقع عليه. وبكلمات أخرى، فإن الجسيم يتصرف كأنه موجة عند مروره من الشق، وإن سعة الموجة عند موقع الشاشة يحدد الاحتمال الذي يتحكم في الموقع النهائي. (وبدقة أكثر، إن احتمال السقوط في موقع معين يتناسب مع مربع سعة الموجة النهائية، تمامًا مثل شدة الأمواج الكهرومغناطيسية التي تتناسب مع مربع سعة المجال الكهربائي).

السؤال أ.3: استخدم علاقة أينشتاين $E = hf$ والعلاقة $E = pc$ لتبين أن علاقة ديبرولي تنطبق على الفوتونات.

السؤال أ.4: استخدم التعريف النسبي للطاقة والزخم لتبين أن الطاقة $E = pc$ لأي جسيم تنتقل بسرعة الضوء. (ويمكن اشتقاق هذه المعادلة للأمواج الكهرومغناطيسية من معادلات ماكسويل، لكن ذلك صعب).

السؤال أ.5: يتم تحول الإلكترونات تقليديًّا في أنبوب الصورة في التلفاز إلى طاقة 10,000 eV. احسب الزخم الخطي لتلك الإلكترونات، ثم استخدم علاقة ديبرولي لحساب طول موجتها.

السؤال أ.6 : إن المسافة بين الفُتَح في التجربة المبينة في الشكل (أ.3) تساوي $6\ \mu$m، أما البعد بين الفُتَح وشاشة الالتقاط فيساوي 16 cm. المسافة بين مركز أحد الخطوط المضيئة والخط المضيء الذي يليه تساوي 100 nm. حدّد طول موجة شعاع الإلكترونات، وما الفرق في الجهد الذي استخدم لتسريع الإلكترونات؟

السؤال أ.7: إن علاقة ديبرولي تنطبق على الجسيمات جميعها، وليس على الإلكترونات أو الفوتونات فقط.

(أ) احسب طول موجة نيوترون، طاقته الحركية تساوي 1 eV.

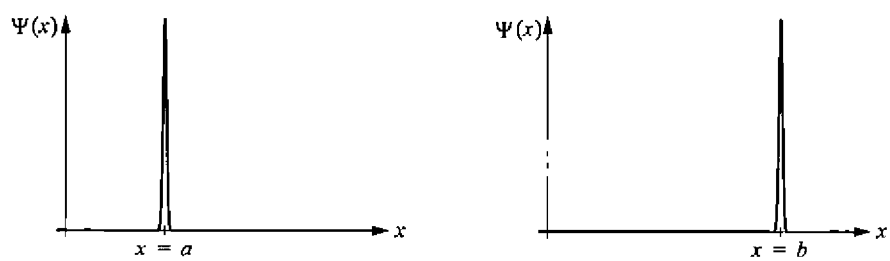
(ب) قدّر طول موجة كرة القاعدة. (استخدم أي قيم معقولة لكتلة الكرة وسرعتها).

وضح لماذا لا نرى كرة القاعدة تحيد عن المضرب؟

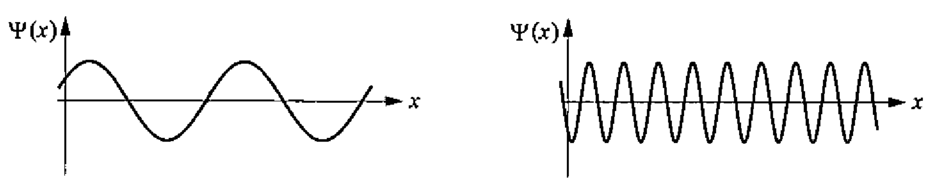
أ.2 دوال الأمواج Wavefunctions

آخذين في الحسبان أن الجسيمات يمكن لها التصرف بوصفها أمواجًا، فإننا نحتاج إلى طريقة لوصف الجسيمات، تسمح بصفات موجية وجسيمية. ولهذا الغرض، فقد اخترع الفيزيائيون دالة الموجة الكمية. وفي وصفها لحالة الجسيم، فإن دالة الموجة، في ميكانيك الكم، تخدم الهدف نفسه الذي تصفه متجهات الزخم والموقع في الميكانيكا الكلاسيكية: فهي تخبرنا بكل شيء يمكن معرفته عن الجسيم، وما يقوم به عند أي لحظة زمنية. ويرمز إلى دالة الموجة بالرمز ψ، وهي دالة من الموقع أو الإحداثيات الثلاثة x, y, z. لكنه أسهل أن نبدأ بدالة موجة تصف جسيمًا لا يتحرك إلاّ على محور واحد، وهو اتجاه x، في هذه الحالة، فإن دالة الموجة، عند أي فترة زمنية، تعتمد على x فقط.

ويمكن للجسيم أن يكون له دالة موجة بأنواع مختلفة. فهناك دوال أمواج ضيقة ومرتفعة ملازمة لحالات يكون موقع الجسيم محددًا جيدًا (انظر الشكل أ.4). لكن هناك أيضًا دوال أمواج اهتزازية وعريضة ملازمة لحالات يكون فيها زخم الجسيم محددًا جيدًا. (انظر الشكل أ.5). وفي هذه الحالة الأخيرة، فإن الزخم الخطي للجسيم يرتبط بطول الموجة λ بعلاقة ديبرولي،



الشكل أ.4: دوال الأمواج لحالات يكون فيها موقع الجسيم محددًا جيدًا (عند $x=a$ و $x=b$). عندما يكون الجسيم في حالة كهذه، فإن زخمه الخطي غير محددٍ على الإطلاق.



الشكل أ.5: دوال الأمواج لحالات يكون فيها الزخم للجسيم محددًا جيدًا (لقيم صغيرة وقيم

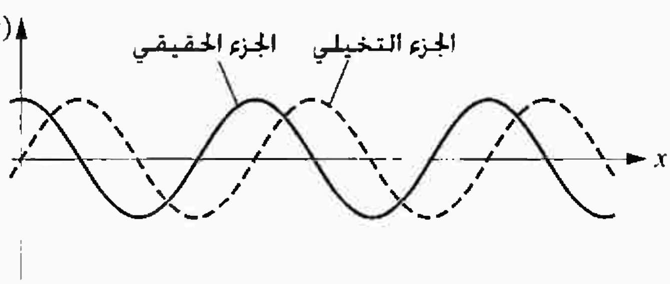
كبيرة على الترتيب). عندما يكون الجسيم في حالة كهذه، فإن موقعه غير محدد على الإطلاق.

وفي الحقيقة، فإن طول موجة دالة الموجة يعطي فقط قيمة زخم الجسيم. حتى في اتجاه واحد، p_x قد يكون موجبًا أو سالبًا، ولا يمكن تمييز ذلك بالنظر إلى الشكل (أ.5).

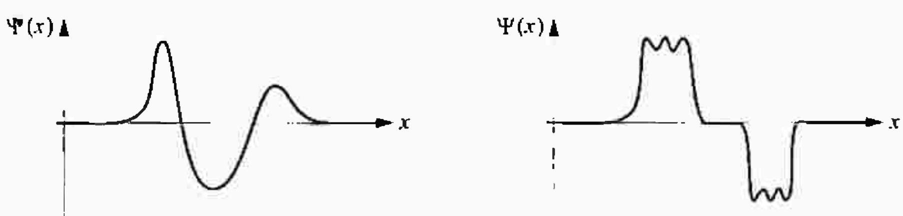
ولكي تحدد Ψ حالة الجسيم بالكامل، فلا بد من جعلها دالة بمركّبتين أو زوج من الدوال. ولجسيم ذي زخم محدد جيدًا، ويكون للمركّبة الثانية طول الموجة نفسها كالمركبة الأولى، لكن بفرق طول مقداره $90°$ معها (انظر الشكل أ.6). وللحالة المبينة في الشكل، فإن الزخم الخطي يتجه في اتجاه x الموجب. ولإعطاء الجسيم زخمًا في الاتجاه العكسي نعكس اتجاه المركبة الثانية، حيث تصبح ذات فرق طول $90°$، ولكن في الاتجاه الآخر. وتُمثَّل المركّبتان عادة، بدالة مركبة واحدة، حيث قيمتها الحقيقية هي المركبة الأولى، وأما قيمتها التخيلية (لا أكثر ولا أقل حقيقية) فهي المركبة الثانية. وإذا أردت، فبإمكانك تخيل رسم الجزء التخيلي من Ψ في اتجاه محور يتجه إلى أعلى خارجًا من الصفحة. وعليه، فإن الرسم البياني ثلاثي الأبعاد لدالة الموجة لجسيم محدد الزخم تظهر على صورة لولب أو برغي. وبدوران يميني لقيم p_x الموجبة ودوران يساري لقيم p_x السالبة.

إضافة إلى دوال الأمواج التي تصف حالات كل من الموقع والزخم المحددين، يوجد الكثير من دوال الأمواج المختلفة. (انظر الشكل أ.7) ومع ذلك فيوجد تفسير مهم لكل دالة موجة. في البداية لنحسب معامل دالة الموجة المربع.

$$|\Psi(x)|^2 = (Re\Psi)^2 + (Im\,\Psi)^2 \qquad (4.أ)$$



الشكل أ.6: توضيح أكثر كمالًا لدالة الموجة لجسيم بزخم محدد جيدًا، يبين كلا الجزأين؛ الحقيقي والتخيلي لدالة الموجة.



الشكل أ.7: دوال أمواج أخرى محتملة، حيث الموقع والزخم غير محددين جيدًا.

وعند تكامل هذه الدالة بين أي نقطتين x_2 و x_1 نحصل على احتمال وجود الجسيم في أي مكان بين هاتين النقطتين إذا كنا سنقيس موقعها عند ذلك الوقت، (فإن، $|\Psi|^2$ دالة تعطي معلومات عند تكاملها). وبالطريقة الوصفية، فإن وجود الجسيم في منطقة ما يكون أكثر احتمالًا، إذا كان مقدار دالة الموجة كبيرًا في تلك المنطقة، وأقل احتمالًا إذا كان مقدار دالة الموجة صغيرًا. ولدوال الأمواج الضيقة المرتفعة، فمن المؤكد إيجاد الجسيم عند موقع الارتفاع، في حين أنه لحالة دالة الموجة بزخم محدد، فمن الممكن أن يكون الجسيم في أي مكان. وهناك أيضًا طريقة لحساب احتمال الحصول على نتائج مختلفة إذا كنا سنقيس الزخم الخطي للجسيم. ولكن لسوء الحظ، فإن الطريقة رياضيًّا متشابكة، وصعبة التحليل، حيث لا بد من أخذ تحويل فورييرلدالة الموجة التي هي دالة من العدد الموجي $k=\frac{2\pi}{\lambda}$. وبعد استبدال المتغيرات $p_x=\frac{hk}{2\pi}$، ثم تربيع الدالة لنحصل على دالة عند تكاملها بين قيمتين من p_x نحصل على احتمال الحصول على الزخم في هذا المدى. وصفيًّا، يمكن عادة معرفة ما إذا كان الزخم محدَّدا جيدًا، بالنظر إلى دالة الموجة. فمثلًا دالة جيبية تمامًا (بعلاقة ملائمة يبين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي) لها طول موجة دقيق تمامًا، وعليه زخم خطي محدد تمامًا. في حين أن دالة موجة ضيقة ومرتفعة، بموقع محدد جيدًا لا يوجد لها طول موجة على الإطلاق، وإذا ما حاولنا قياس الزخم الخطي لمثل هذا الجسيم، فإنه يمكن الحصول على أي نتيجة مهما كانت.

السؤال أ.8: يُعبَّر عن دالة الموجة في حالة الزخم المحدد جيدًا بالعلاقة:

$$\Psi(x)=A(\cos kx+i\sin kx)$$ حيث A و k ثابتان.

(أ) كيف يرتبط الثابت k بزخم الجسيم؟ (برر إجابتك).

(ب) بيّن أن احتمال وجود جسيم يوصف بهذه الدالة الموجية، عند أي موقع x ثابت.

(جـ) بيّن لماذا يجب أن يكون الثابت متناهي الصغر، إذا أردنا أن تكون هذه الصيغة صالحة لجميع قيم x.

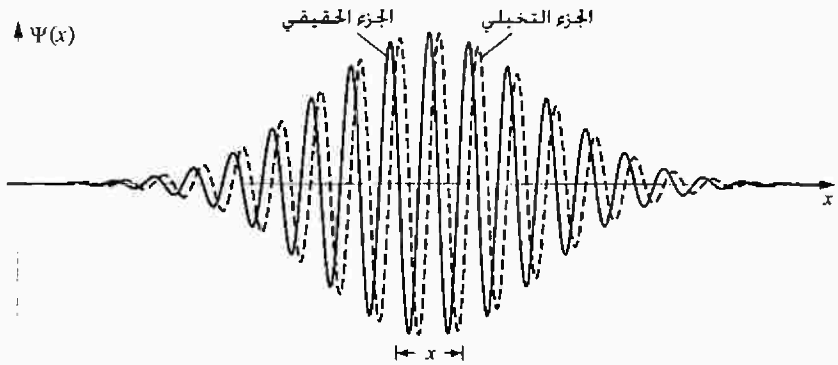
(د) بيّن أن دالة الموجة تحقق المعادلة التفاضلية $\frac{d\Psi}{dx}=-ik\Psi$.

(و) في كثير من الأحيان، تكتب الدالة $\cos\ \theta+\ i\ \sin\ \theta$ على الصورة $e^{i\theta}$.

حيث i يساوي $\sqrt{-1}$ ، بوصفه ثابتًا عاديًّا، وبيّن أن الدالة Ae^{ikx} تحقق المعادلة التفاضلية نفسها في الجزء (ت).

مبدأ عدم التحديد The Uncertainty Principle

هناك نوع آخر من دوال الأمواج يسمى في بعض الأحيان دوال أمواج « توافقية»، وأحيانًا أكثر يسمى حزمة موجية. وتبقى الحزمة الموجية، إلى حد معقول، جيبية في منطقة معينة، وتتناقص بسرعة خارج تلك المنطقة، لذا تبقى متمركزة في الفضاء. (انظر الشكل (أ.8). إن كلتا x و p_x لمثل هذه الدوال الموجية، محددة تقريبًا. لكن ليس أي منهما محددًا تمامًا. وإذا كنا سنقيس موقع الجسيم في مثل هذه الحالة، فيمكن أن نحصل على مدى من القيم لموقع الجسيم، فإذا كان لدينا مليون من تلك الجسيمات، جميعها في الحالة نفسها، وقسنا موقعها، فإن قيم تلك المواقع ستتمركز حول قيمة متوسطة ما، وبانتشار يمكن إعطاؤه كمية بأخذ الانحراف المعياري المقيسة جميعها. وسنشير إلى هذا الانحراف المعياري بالرمز Δx وهو مقياس تقريبي لعرض الحزمة الموجية.



الشكل أ.8: حزمة موجية يكون فيها كل من x و p_x محددًا تقريبًا، لكن ليس تمامًا، ويرمز إلى عرض الحزمة الموجية بالرمز Δx، وفنيًّا الانحراف المعياري لمربع دوال الأمواج. يلاحظ أن Δx أقل بعدد من المرات من العرض الكلي للحزمة.

وعلى نحوٍ مشابه، إذا كان لدينا مليون جسيم في الحالة نفسها، وقسنا زخم كل جسيم، فسنجد أن القيم تتمركز حول قيمة متوسطة ما، وبانتشار يمكن إعطاؤه قيمة بأخذ الانحراف المعياري. سنشير أيضًا إلى هذا الانحراف المعياري بالرمز Δp_x وهو مقياس تقريبي لعرض الحزمة الموجية في فراغ الزخم.

ويمكننا بناء حزمة موجية بعرض Δx، أقل، وذلك بجعل الاهتزازات تتناقص بسرعة أكبر على الطرفين، لكن هناك ثمن لذلك، حيث يصبح لدينا عدد أقل من الاهتزازات الكاملة، وعليه يصبح الزخم وطول الموجة محددين بطريقة سيئة أكثر. وبالمنطق نفسه، إذا أردنا حزمة موجية وبزخم خطي محدد تمامًا، فلا بد من تضمينها عددًا كبيرًا من الاهتزازات، وهذا يؤدي إلى قيمة كبيرة من Δx. إن هناك علاقة عكسية بين عرض الحزمة الموجبة في فراغ الموقع وعرض تلك الحزمة في فراغ الزخم.

وحتى نكون أكثر دقة حول هذه العلاقة، نفترض أننا أنتجنا حزمة موجية ضيقة جدًّا، بحيث تحتوي فقط على اهتزازة واحدة كاملة قبل تناقصها للصفر. عندئذٍ سيكون الانتشار في الموقع طول موجة واحدة تقريبًا، في حين يكون الانتشار في الزخم كبيرًا جدًّا، وقريبًا من قيمة الزخم نفسه.

$$\Delta p_x \sim p_x = \frac{h}{\lambda} \sim \frac{h}{\Delta x} \tag{5.أ}$$

ونظرًا إلى أن قيمة أصغرمن Δx تعني قيمة أكبر، Δp_x فإننا نحصل على العلاقة الآتية:

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \sim h \tag{6.أ}$$

وهي علاقة تنطبق على أي حزمة موجية، ليس لحزمة ضيقة فقط. ولعمومية أكثر، يمكن استخدام تحليلات فورييز لإثبات العلاقة الثابتة لأي دالة موجة مهما كانت:

$$(\Delta x)(\Delta p_x) \geq \frac{h}{4\pi} \tag{7.أ}$$

وهذا هو مبدأ **عدم التحديد الشهير لهايسنبرج**. وتعني هذه الصيغة أنه في حالة تحضيرنا مليون جسيم بدوال أمواج متماثلة، ثم قمنا بقياس مواقع نصف تلك الجسيمات، وقياس الزخم للنصف الآخر منها، وحسبنا الانحرافين المعياريين، فإن حاصل ضرب الانحرافين المعياريين لا يمكن أن يكون أقل من $h/4\pi$. وعليه بغض النظر عن طريقة تحضير الجسيم، فلن يمكنك وضعه في حالة يكون فيها كل من Δx و Δp_x بالصغر الذي تشاء. ولدالة موجة مبنية بطريقة ملائمة، يمكننا الوصول إلى نهاية أفضل الحالات التي يكون فيها حاصل الضرب مساويًا $h/4\pi$ تمامًا، ولمعظم دوال الأمواج، فإن حاصل الضرب يكون أكبر من $h/4\pi$.

السؤال أ.9: الصيغة التي تصف حزمة موجية مبينة بطريقة ملائمة هي:

$$\Psi(x) = Ae^{ik_o x}e^{-ax^2}$$

حيث A و a و k_o ثوابت. (الدالة الأُسّية لعدد تخيلي معرّفة في السؤال (أ.7) في هذا السؤال افترض إمكانية التعامل مع i كأي ثابت آخر).

(أ) احسب، ثم ارسم $|\Psi(x)|^2$ لدالة الموجة هذه.

(ب) بيــن أن الثابــت A يجــب أن يســاوي $(2a/\pi)^{1/4}$. (إن احتمــال وجــود الجســم فــي أي مــكان بين $x = -\infty$ و $x = \infty$ يساوي 1. انظر الجزء 1 من الملحق ب للمساعدة على إجراء التكامل).

(ج) يمكن حساب الانحراف المعياري Δx، على الشكل $\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}$ وإن القيمة المتوسطة لمربع x، هي مجموع كل قيم x^2 مضروبة في احتمالاتها.

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,|\Psi(x)|^2\,dx$$

مستخدمًا تلك العلاقات، بين أن $\Delta x = 1/(2\sqrt{a})$

(د) يعرف تحويل فوريير للدالة $\tilde{\Psi}(x)$ بالعلاقة:

$$\tilde{\Psi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\tilde{\Psi}(x)dx$$

بين أن $\tilde{\Psi}(k) = (A/\sqrt{2a})\exp[-\frac{(k-k_o)^2}{4a}]$ لحزمة موجية مبنية بطريقة ملائمة: ارسم بيانيًّا هذه الدالة.

(هـ) استخدم علاقات مماثلة لتلك في الجزء (جـ)، بين أن $\Delta k = \sqrt{a}$ لهذه الدالة.

(الانحراف المعياري لا يعتمد على k_0، لذلك يمكنك تسهيل الحسابات بوضع $k_0 = 0$ في البداية).

(و) احسب Δp_x لدالة الموجة هذه، وتحقق من أن مبدأ عدم التحديد يتحقق لهذه الدالة.

السؤال أ.10: ارسم دالة موجة يكون فيها $(\Delta x)(\Delta p_x)$ أكبر كثيرًا من $h/4\pi$. اشرح كيف يمكن تقدير Δx و Δp_x لدالة الموجة المعنية.

دوال الأمواج المستقلة خطيًّا Linearly Independent Wavefuctions

وكما هو ظاهر من التوضيحات السابقة، فإن عدد دوال الأمواج المحتملة، التي يمكن لجسم أن يمتلكها كبير جدًّا. إن هذا يشكل مشكلة في الميكانيكا الإحصائية، حيث يُعدّ فيها عدد الحالات المتاحة للجسيم. ولا توجد طريقة معقولة لعد جميع دوال الأمواج. إن ما تحتاج إليه هو عد دوال الأمواج المستقلة بطريقة سنوضحها الآن بدقة.

إذا كان ممكنًا كتابة دالة الموجة Ψ بدلالة دالتي موجتين أُخريين Ψ_1 و Ψ_2 على النحو الآتي:

$$\Psi(x) = a\Psi_1(x) + b\Psi_2(x) \tag{8.أ}$$

لبعض الثوابت المركبة a و b، عندها، يمكن القول: إن ψ تجميع خطي من Ψ_1 وΨ_2 ومن جهة أخرى، إذا لم تتوافر الثوابت a و b بحيث تتحقق المعادلة (8.أ) عندها، نقول: إن ψ مستقلة خطيًّا عن Ψ_1 وΨ_2. وبشكل أكثر عمومية، إذا كان لدينا مجموعة من الدوال $\psi_n(x)$ ، لا يمكن كتابة $\psi(x)$ بوصفها تجميعًا خطيًّا من الدوال ψ_n, s عندها، نقول: إن $\psi(x)$ مستقلة خطيًّا عن الدوال ψ_n. وفي حالة عدم وجود أي دالة من المجموعة يمكن كتابتها بوصفها تجميعًا خطيًّا من الدوال الأخرى، عندها نقول: إن جميع هذه الدوال مستقلة خطيًّا.

إن ما نود فعله في الميكانيكا الإحصائية هو عد جميع دوال الأمواج المستقلة خطيًّا، والمتاحة للجسيم. إذا كان الجسيم محصورًا في منطقة محدودة، وكانت طاقته محدودة أيضًا، فإن عدد هذه الدوال المستقلة خطيًّا يكون محدودًا. ومع ذلك يوجد عدد كبير من المجموعات لدوال الأمواج المستقلة خطيًّا التي يمكن استخدامها. لقد تم، في الجزء 5 . 2، استخدام حزم موجية متمركزة تقريبًا في كلا الفراغين: فراغ الموقع، وفراغ الزخم. لكن في العادة، فإن استخدام دوال أمواج بطاقات محددة يكون أكثر ملاءمة. وسنناقش ذلك في الجزء الثاني.

السؤال أ.11: اعتبر الدالتين $\Psi_1(x) = \sin(x)$ و $\Psi_2(x) = \sin(2x)$، حيث تتراوح x من الصفر إلى π. اكتب صيغًا لثلاثة تجميعات خطية من Ψ_1 و Ψ_2 وارسم كلًّا من الدوال الثلاث. وللتسهيل، حافظ على دوال الأمواج بقيم حقيقية فقط.

أ .3 دوال الأمواج بطاقات محددة Definite-Energy Wavefunctions

بين جميع دوال الأمواج التي يمكن للجسيم أن يمتلكها، وأهمها دوال الأمواج ذوات الطاقات الكلية المحددة. تتكون الطاقة الكلية من الطاقة الحركية وطاقة الوضع، وتعطى لجسيم غير نسبي في بعد واحد، بالعلاقة الآتية:

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + V(x) \tag{9.أ}$$

حيث يمكن أن تكون دالة الوضع $V(x)$ أي شيء. وفي الحالة الخاصة عندما تكون $V(x) = 0$، فإن الطاقة الكلية هي الطاقة الحركية نفسها التي تعتمد فقط على الزخم، وعليه، فإن أي دالة بزخم محدد تكون دالة بطاقة محددة أيضًا. وعندما لا تكون $V(x)$ مساوية للصفر، فإن طاقة الوضع غير محددة جيدًا لدالة موجة ذات زخم محدد، لذلك فإن دالة الموجة لطاقة محددة تختلف الآن عن دالة الموجة لزخم محدد.

ولإيجاد دوال الأمواج للطاقات المحددة، لطاقة وضع معينة $V(x)$، فلا بد من حل معادلة تفاضلية تسمى معادلة شرودينجر غير المعتمدة على الزمن[92].

(92) هناك أيضًا معادلة شرودينجر المعتمدة على الزمن ذات هدف مختلف تمامًا. وتخبرنا كيف تتغير دالة الموجة مع الزمن. تتذبذب دوال الأمواج ذوات الطاقات المحددة من كونها حقيقية إلى تخيلية وبالعكس بتردد = $f = (E/h)$ بينما دوال الأمواج الأخرى تتطور بطريقة أكثر تعقيدًا.

إن هذه المعادلة وحلولها تناقش بالتفصيل في كتب ميكانيك الكم، أما في هذا الكتاب فسنصف الحلول لبعض الحالات الخاصة المهمة.

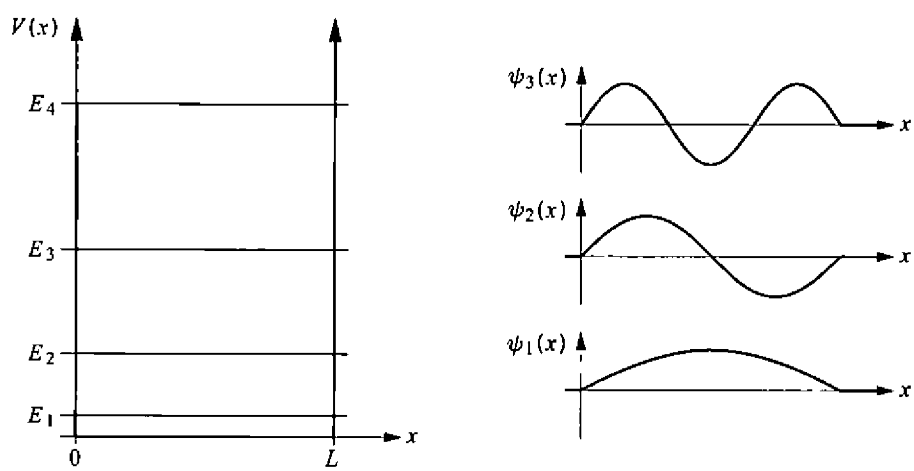
الجسيم في صندوق The Particle in a Box

إن أسهل دالة مهمة لطاقة الوضع هي البئر المربع اللا نهائي، الذي يعطي على النحو الآتي:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{لكل } 0 < x < L \\ \infty & \text{حيثما وجدت} \end{cases} \qquad (10.أ)$$

يقوم هذا الجهد المثالي بحصر الجسيم في منطقة تقع بين $x = 0$ و $x = L$، صندوق في بعد واحد. (نظر الشكل أ.9). وتكون طاقة الوضع داخل الصندوق صفرًا، بينما لا يمكن للجسيم الوجود خارج الصندوق؛ لأن ذلك يتطلب أن يمتلك الجسم طاقة لا نهائية.

إن دالة طاقة الوضع هذه بسيطة للغاية، بحيث نستطيع إيجاد دوال الأمواج لطاقات محددة دون أن نزعج أنفسنا بحل معادلة شرودينجر غير المعتمدة على الزمن. ويجب أن تكون جميع دوال الأمواج المسموحة مساوية للصفر خارج الصندوق، بينما داخل الصندوق، حيث طاقة الوضع تساوي صفرًا، فإن دالة الموجة لطاقة كمية محددة تكون دالة موجة لطاقة حركية محددة، وعليه فإنها دالة موجة لزخم محدد. لا بد لدوال الأمواج للطاقات المحددة أن تتناقص بطريقة متصلة إلى الصفر عند $x = 0$ و $x = L$، حيث إن أي عدم اتصال سيؤدي إلى عدم قدرة لا نهائية في تحديد الزخم. لكن دوال الأمواج لزخم محدد لا تؤول للصفر في أي مكان. ولإنتاج دالة موجة تحتوي على صفات (نقاط ثابتة) تجمع معًا دالتي موجتين بزخمين متساويين ومتعاكسين في الاتجاه لإنتاج موجة موقوفة – ودالة موجة كهذه تستمر في كونها دالة موجة لطاقة حركية محددة؛ لأن الطاقة الحركية تعتمد فقط على مربع الزخم.



الشكل أ.9: عدد من مستويات الطاقة المنخفضة ودوال الأمواج الملازمة للطاقات، لجسيم في صندوق أحادي البعد.

ويبين الشـــكل(أ.9) عددًا من دوال الأمواج لطاقات محددة. وحتى تكون دوال الأمواج مساوية للصفر عند طرفي الصندوق. يسمح فقط بأطوال أمواج محددة $\lambda = 2L, \frac{2L}{2}, \frac{2L}{3}$ وهكذا. وباستخدام علاقة ديبرولي لكل من هذه الأطوال الموجية يتم حســـاب مقدار الزخم الخطي، ومن ثم حســـاب الطاقة من العلاقة $E = \frac{p^2}{2m}$. وعليه فإن الطاقات المسموحة هي:

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{\lambda_n}\right)^2 = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{n}{2L}\right)^2 = \frac{h^2n^2}{8mL^2} \quad (11.أ)$$

حيث n أي عدد صحيح موجب. ويلاحظ أن الطاقة مكممة، حيث إن الطاقات المحتملة هي طاقات معينة منفصلة ومتباعدة، وهذا نتيجة لحقيقة: إن عدد أنصاف أطوال الأمواج التي تملأ الصندوق يجب أن يكون عددًا صحيحًا. وبطريقة أكثر عمومية، فكل مرة يحصر فيها جسيم في منطقة محددة، يجب على دالة موجته أن تصبح صفرًا خارج هذه المنطقة، وأن تحتوي على عدد صحيح من القمم والقيعان داخل المنطقة، لذلك تكون طاقة الجسيم مكممة.

ولا تكمن أهمية دوال الأمواج للطاقات المحددة فقط في كون طاقاتها محددة، ولكن لإمكانية التعبير عن أي دالة أخرى بوصفها تجميعًا خطيًّا من تلك الدوال (وفي حالة دوال الأمواج لجسيم في صندوق، فهذا مشابه لنظرية تحليلات فوريير، التي تنص على أن أي دالة في منطقة محدودة تكتب على شكل تجميع خطي من الدوال الجيبية) إضافة إلى ذلك، فإن دوال الأمواج للطاقات المحددة جميعها مستقلة خطيًّا عن بعضها (على الأقل لجسيم محصور في منطقة محددة في اتجاه واحد). لذلك، فإن عددًا لدوال الأمواج للطاقات المحددة يعطينا طريقة ملائمة لعد جميع الحالات المحتملة للجسيم.

ولجسيم محصور في صندوق ثلاثي الأبعاد، يمكن بناء دالة الموجة لطاقة محددة، بضرب ثلاث دوال أمواج لطاقات محددة مع بعضها لنحصل على:

$$\psi(x,y,z) = \psi_x(x)\,\psi_y(y)\,\psi_z(z) \quad (12.أ)$$

حيث ψ_x و ψ_y و ψ_z هي إحدى دوال الأمواج الجيبية لصندوق في بعد واحد. إنّ نتائج عمليات الضرب هذه لا تمثل جميع دوال الأمواج للطاقات المحددة، لكن يمكن كتابة الدوال الأخرى بوصفها تجميعًا خطيًّا من هذه الدوال، لذلك فإن عدد دوال الأمواج التي تحلل بهذه الطريقة يفي بالغرض. وتتحلل الطاقة الكلية أيضًا إلى مجموع ثلاثة حدود.

$$E = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{hn_x}{2L_x}\right)^2 \left(\frac{hn_y}{2L_y}\right)^2 \left(\frac{hn_z}{2L_z}\right)^2\right] \quad (13.أ)$$

حيـــث L_x و L_y و L_z أبعـــاد الصنـــدوق في الاتجاهات الثـــلاث، بينما n_x ، n_y ، n_z هـــي أي ثلاثة أعداد صحيحة موجبة. وإذا كان الصندوق مكعبًا، فإن علاقة الطاقة تصبح على النحو الآتي:

$$E = \frac{h^2}{8mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \quad (14.أ)$$

وكل ثلاثية من قيم $n's$ تعطي دالة موجية لطاقة محددة، مميزة، ولكن ليس كل ثلاثية تعطي طاقة مميزة. فمعظم مستويات الطاقة متشعبة وملازمة لعدد من الحالات المستقلة خطيًّا، التي تُعدّ منفصلة في الميكانيكا الإحصائية. (ويطلق على عدد الحالات المستقلة خطيًّا التي لها الطاقة نفسها تشعبية المستوى).

السؤال أ.12: قدّر أقل طاقة لبروتون محصور داخل صندوق، عرضه 10^{-15} m صورة تقريبية. (حجم نواة الذرة).

السؤال أ.13: تعطى العلاقة بين الطاقة والزخم، لجسيمات عالية النسبية كالفوتونات أو الإلكترونات ذات الطاقة العالية، بالعلاقة $E = pc$ وليس بالعلاقة $E = p^2/2m$ (تصلح هذه العلاقة لجسيمات عديمة الكتلة، ولجسيمات لها كتلة عندما تكون $E >> mc^2$).

(أ) أوجد صيغة للطاقات المسموحة لجسيم عالي النسبية، محصور في صندوق أحادي الأبعاد عرضه L .

(ب) قدّر أقل طاقة لإلكترون محصور داخل صندوق، عرضه 10^{-15} m. وكان معتقدًا أن نويات الذرات قد تحتوي الإلكترونات. فسّر لماذا يكون ذلك قليل الاحتمال.

(جـ) يمكن اعتبار النيوكليون (بروتونًا كان أم نيوترونًا) حالة مرتبطة من ثلاثة كواركات، عديمة الكتلة تقريبًا، مرتبطات مع بعضها بقوة كبيرة جدًا تحصرها داخل صندوق، عرضه 10^{-15} m. قدّر أقل طاقة لثلاثة من هذه الجسيمات، (مفترضًا أن جميعها موجود في الحالة الأقل طاقة)، ومن ثم قسّم على c^2 لتحصل على تقدير لكتلة النيوكليون.

السؤال أ.14: ارسم مخططًا لمستويات الطاقة لجسيم غير نسبي محصور داخل صندوق، على شكل مكعب ثلاثي الأبعاد. بيّن في المخطط جميع الحالات التي طاقاتها أقل من $15.(h^2 / 8mL^2)$، وتأكد من إظهار كل حالة من الحالات المستقلة خطيًّا على حدة لإظهار تشعب كل مستوى من مستويات الطاقة. هل يتزايد متوسط عدد الحالات لوحدة الطاقة بزيادة الطاقة E أم يتناقص؟

الهزاز التوافقي The Harmonic Oscillator

إن جهد الهزاز التوافقي هو مثال آخر على دالة وضع مهمة معطاة بالعلاقة:

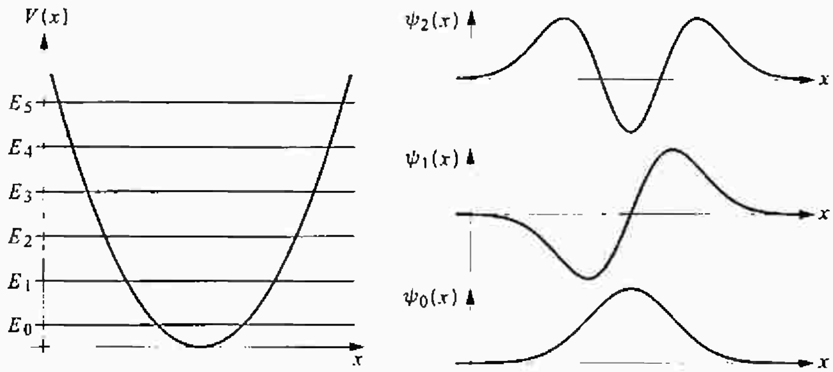
$$V(x) = \frac{1}{2} k_s x^2 \tag{15.أ}$$

حيث k_s ثابت زنبرك ما. إن دوال الأمواج للطاقات المحددة، لجسيم يتأثر بهذا الجهد ليس أمرًا سهلًا حدسها، لكن يمكن إيجادها بحل معادلة شرودينجر غير المعتمدة على الزمن. وبين الشكل (أ.10) بعض تلك الدوال. وهذه الدوال ليست دوال جيبية، ولكنها لا تزال تمتلك أطوال أمواج محلية تقريبية، وتكون في العادة صغيرة بالقرب من المنتصف، (حيث طاقة الوضع صغيرة، والطاقة الحركية كبيرة، وكبيرة عند الطرفين (طاقة وضع كبيرة وطاقة حركية صغيرة). وكما هو الحال لجسيم في صندوق، فإن دوال الأمواج للطاقات المحددة لهزاز توافقي كمي تصبح صفرًا عند كل طرف، ولها بعد صحيح من القمم والقيعان بين الصفرين. وعليه، تكون الطاقة مكممة، وفي هذه الحالة تكون الطاقات على النحو الآتي:

$$E = \frac{1}{2}\, hf, \frac{3}{2}\, hf, \frac{5}{2}\, hf, \dots, \tag{16.أ}$$

حيث $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_s}{m}}$ التردد الطبيعي للهزاز. الطاقات هنا متساوية التباعد، ولا تبتعد عن بعضها كلما ازدادت الطاقة، كما هو الحال لجسيم في صندوق. (وسبب هذا أن الجسيم الذي يهتز توافقيًّا يمكنة أن يصل إلى مسافات أبعد من المركز، وعلى كلا الطرفين، عندما تزداد طاقته. متيحًا المجال لفضاء أكثر لدوال الأمواج، وعليه أطوال أمواج أطول). وفي كثير من الأحيان من المناسب قياس الطاقات جميعها نسبة إلى طاقة الحالة الأرضية، ولذلك تصبح الطاقات المسموحة على النحو الآتي:

$$E = 0, hf, 2hf, \dots \tag{17.أ}$$



الشكل أ.10: عدد من المستويات الأقل طاقة ودوال الأمواج الملازمة لها لهزاز توافقي كمي ببعد واحد.

إن إزاحة الطاقة (نقطة الصفر) بهذه الطريقة لا تؤثر في التفاعلات الحرارية، لكن انظر السؤال (أ.24) لدراسة الحالات التي تؤثر فيها قيمة طاقة نقطة الصفر في التفاعلات.

هناك عدد كبير من الأنظمة الحقيقية التي تهتز توافقيًا، على الأقل كتقريب أولي، وتُعدّ الحركات الاهتزازية لجزيئات ثنائية الذرة كجزيء النيتروجين، N_2 ، وجزيء أول أكسيد الكربون CO، أمثلة جيدة على الهزاز التوافقي الكمي. ويمكن قياس الطاقات الاهتزازية بدراسة الضوء المنبعث، عندما يقوم الجزيء بالانتقال من حالة إلى أخرى، وبين الشكل (أ.11) مثالًا على ذلك.

السؤال أ.15: يمكن لجزيء أول أكسيد الكربون CO الاهتزاز بتردد طبيعي مساوٍ $6.4 \times 10^{13}\ s^{-1}$.

(أ) ما طاقات أقل خمس حالات اهتزازية مقيسة بوحدة eV لهذا الجزيء؟

(ب) إذا أردت أن تنقل هذا الجزيء من حالته الأرضية، وتهيجه إلى الحالة المتهيجة الاهتزازية الأولى، فما طول موجة الضوء الذي تسقطه على هذا الجزيء؟

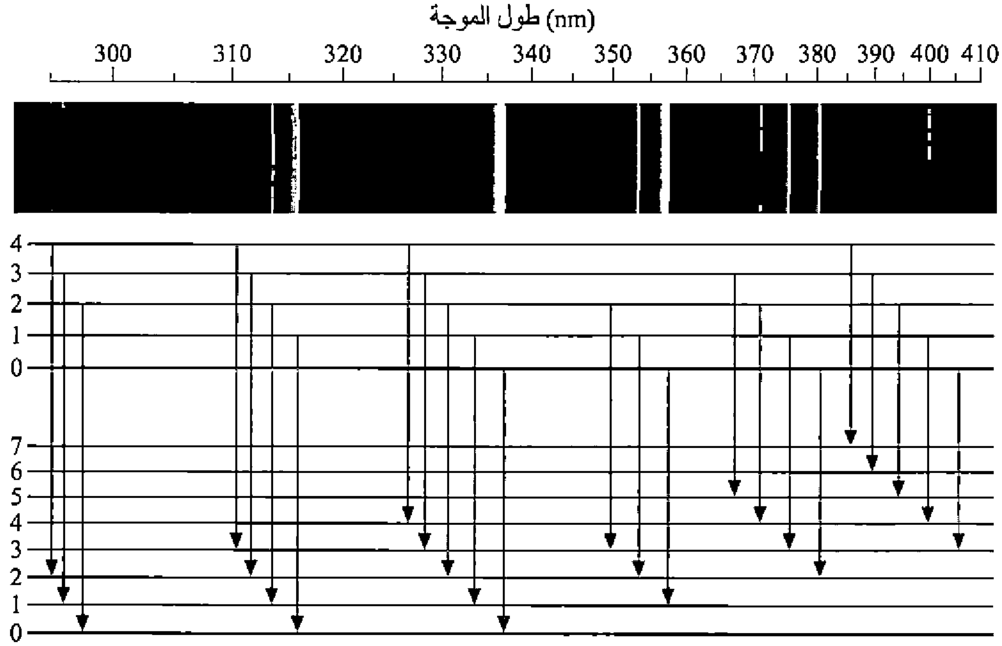
السؤال أ.16: ستقوم في هذا السؤال بتحليل طيف جزئ النيتروجين المبين في الشكل (أ.11). يمكنك الافتراض أن جميع الانتقالات محددة بطريقة صحيحة على مخطط مستويات الطاقة.

(أ) ما الفرق التقريبي في الطاقة بين أعلى وأخفض حالتين إلكترونيتين؟ بإهمال أي طاقة اهتزازية (لكن دون إهمال طاقة نقطة الصفر $\frac{1}{2}hf$)؟

(ب) حدّد التباعد في الطاقة بين المستويات الاهتزازية لكل من الحالة الأعلى والحالة الأخفض إلكترونيتين بصورة تقريبية.

(ج) باستخدام مجموعة أخرى من الخطوط الطيفية، أعد حسابات الجزء ب لإثبات أن المخطط غير متناقض.

(د) كيف يمكنك من خلال الطيف معرفة أن المستويات الاهتزازية (لأي من الحالتين الإلكترونيتين) غير متساوية التباعد تمامًا؟ (يشير هذا إلى أن طاقة الوضع ليست تربيعية تمامًا).



الشكل أ.11 : جزء من طيف الانبعاث لجزيء النيتروجين N_2، يبين مخطط مستويات الطاقة الانتقالية الملازمة لخطوط طيفية مختلفة. وكل هذه الانتقالات تحصل بين الزوج نفسه من الحالات الإلكترونية. وفي أي حالة من تلك الحالتين الإلكترونيتين، يمكن أن يحصل الجزيء على وحدة أو أكثر من الطاقة الاهتزازية، وتظهر هذه الأرقام على اليسار. وقد جمعت الخطوط الطيفية في مجموعات بالنسبة إلى عدد وحدات الطاقة الاهتزازية المكتسبة أو المفقودة. ويحصل الفصل في كل مجموعة من الخطوط؛ نظرًا لأن مستويات الطاقة الاهتزازية متباعدة أكثر في إحدى الحالتين عما هي عليه في الحالة الإلكترونية الثانية.

(هـ) ما ثابت الزنبرك الفعّال للرابطة، التي تربط ذرتي الهيدروجين معًا في الحالة الإلكترونية السفلى؟ (حدّد أولًا ثابت الزنبرك لكل نصف من الزنبرك بالتعامل مع كل ذرة، وكأنها تهتز نسبة إلى مركز الكتلة الثابت. بعد ذلك فكّر بحرص في كيفية ربط ثابت الزنبرك الكلي (قوة لوحدة الزيادة في الطول) بثابت الزنبرك لكل نصف من أنصاف الزنبرك).

السؤال أ.17: يمكن اعتبار الهزاز التوافقي ببعدين بوصفه نظامًا مكونًا من هزازين مستقلين، كل منهما ببعد واحد. اعتبر هزازًا توافقيًا متماثلًا ببعدين، تردده الطبيعي متساوٍ في الاتجاهين. اكتب صيغة لطاقات النظام المسموح بها، وارسم مخططًا لمستويات الطاقة، مبينًا فيه التشعب في كل مستوى.

السؤال أ.18: أعد حسابات السؤال السابق، لكن لهزاز توافقي متماثل بثلاثة أبعاد. أوجد صيغة لعدد الحالات المتشعبة لكل قيمة من قيم الطاقة.

ذرة الهيدروجين The Hydrogen Atom

الدالة الثالثة المهمة من دوال طاقة الوضع هي:

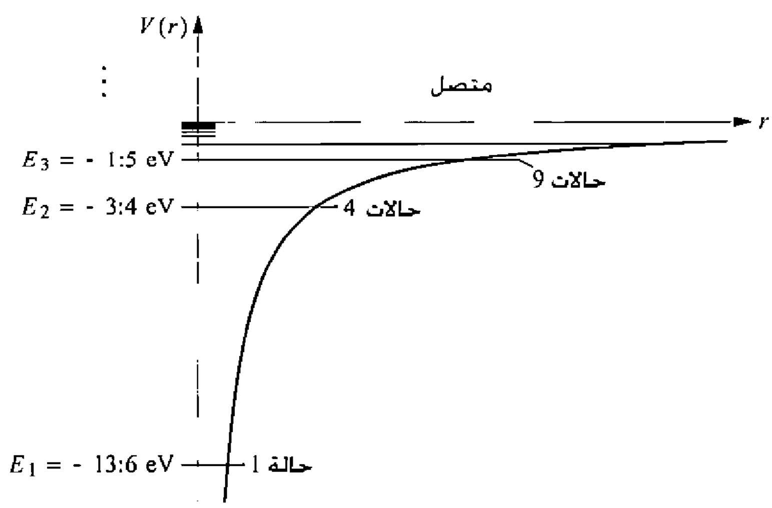
$$V(r) = -\frac{k_e e^2}{r} \quad (18.أ)$$

جهد كولومب الذي يؤثر في الإلكترون في ذرة الهيدروجين. (e شحنة الإلكترون، وke ثابت كولومب، ويساوي $8.99 \times 10^9\ N \cdot m^2 / C^2$). وذرة الهيدروجين هي مشكلة في ثلاثة أبعاد وحلها صعب نوعًا ما، لكن النتيجة النهائية لمستويات الطاقة سهلة إلى حد ما، وتعطى بالعلاقة الآتية:

$$E = -\frac{2\pi^2 m_e e^4 k_e^2}{h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{13.6\ eV}{n^2} \quad (19.أ)$$

لقيم n الصحيحة التي تأخذ القيم 1، 2، 3 ، 4.... إلخ. إن عدد دوال الأمواج المستقلة خطيًّا، الملازمة للمستوى n يساوي $1{:}n^2$ للحالة الأرضية، 4 للحالة المتهيجة الأولى، 9 للحالة المتهيجة الثانية، وهكذا. إضافة إلى هذه الحالات ذات الطاقات السالبة، توجد حالات أخرى بطاقات موجبة تكون فيها الذرة مؤينة، والإلكترون غير مرتبط بالبروتون. ويبين الشكل (أ.12) مخططًا لمستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين.

إن دوال الأمواج للطاقات المحددة مثيرة للاهتمام ومهمة، لكن من الصعب رسمها، حيث إنها تعتمد على ثلاثة متغيرات (وعددها كبير جدًّا). ويمكنك إيجاد صور لدوال الأمواج (أو أكثر شيوعًا مربع دوال الأمواج) في معظم كتب الفيزياء الحديثة، أو كتب المقدمة في الكيمياء.



الشكل أ.12: مخطط لمستويات الطاقة في ذرة الهيدروجين. الخط الغامق يمثل دالة طاقة الوضع، متناسبًا مع $(-1/r)$. إضافة إلى حالات الطاقة السالبة المتباعدة والمنفصلة، هناك حالات متصلة بطاقات موجبة (حالات التأين).

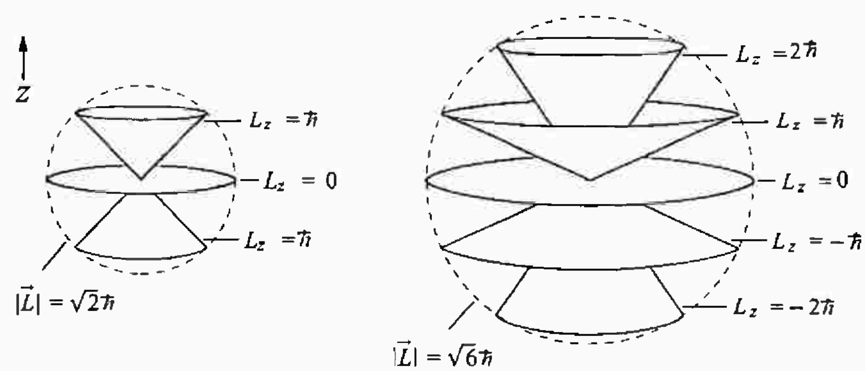
السـؤال أ.19: افتـرض أن ذرة الهيدروجيـن تقـوم بالانتقـال مـن حالـة n مرتفعـة إلـى حالـة n منخفضـة، باعثة فوتونًـا خلال العملية. احسـب طاقة موجة الفوتـون المنبعث وطولهـا للانتقالات الآتية: $1 \longrightarrow 2$، $2 \longrightarrow 3$، $2 \longrightarrow 4$، و $2 \longrightarrow 5$.

4.أ الزخم الزاوي Angular Momentum

في بعض الأحيان، قد نرغب في معرفة الزخم الزاوي لجسيم ما، إضافة إلى معرفتنا لموقعه، وزخمه الخطي وطاقته. وبتحديد أكثر قد نرغب في معرفة مقدار متجه زخمه الزاوي، $|\vec{L}|$، أو مكافئ لذلك معرفة مربع ذلك المقدار $|\vec{L}|^2$. وقد نرغب أيضًا في معرفة المركبات الثلاث لزخم الجسيم الزاوي L_x, L_y, L_z.

ومرة أخرى، فإن هناك دوال أمواج خاصة، يكون فيها أي متغير معين محددًا جيدًا. ومع ذلك، فلا توجد دوال أمواج، يكون فيها أكثر من مركبة واحدة من مركبات الزخم الزاوي L_y و L_x و L_z محددة جيدًا (إلا في الحالة غير المهمة، حيث جميع هذه المركبات تساوي صفرًا). وأفضل ما يمكن الحصول عليه مع أي دالة موجة، هو أن نحدد قيمة $|\vec{L}|^2$ وأيضًا قيمة أي مركبة واحدة للزخم الزاوي $\vec{L}$، عادة نسميها المركبة في اتجاه z، L_z.

ويُحدَّد الزخم الزاوي لجسيم ما اعتماد دالة موجته على المتغيرات الزاوية، ففي الإحداثيات الكروية تكون المتغيـرات الزاوية هي θ و ϕ. وقد وجد أن دوال الأمواج لزخـم زاوي محدد هي دوال جيبية مختلفة في هذه المتغيـرات. وحتـى تكون دوال الأمواج أحادية القيمة، يجب على الدوال الجيبية هذه أن تقوم بعدد كامل من الاهتزازات، عندما تقوم بدورة كاملة، وعليه، فإن أطوال أمواج معينة للاهتزازات مسـموحة، وهي ملازمة لقيم معينة مكممة للزخم الزاوي. وقد وجد أن القيم المسموحة لمربع الزخم الزاوي $|\vec{L}|^2$ هي $\ell(\ell+1)\hbar^2$، حيث ℓ عدد صحيح موجب و $\hbar$ هي اختصار للكمية $h/2\pi$ أما القيم المسموحة للمركبة (L_z أو L_x أو L_y) هي $m\hbar$ حيث m أي عدد صحيح لقيم من $(-\ell)$ إلى $(+\ell)$ وإحدى طرق رؤية تلك الحالات مبينة في الشكل (أ.13).



الشكل أ.13: عندما يكون كل من $|\vec{L}|$ و L_z محددين جيدًا لجسيم ما، فإن المركبتين L_x و L_y غير محددتين إطلاقًا، وعليه، يمكننا تخيل متجه الزخم الزاوي للجسيم كقمع موزع على جميع القيم الممكنة للمركبتين L_x و L_y وتظهر هنا الحالات المسموحة لقيم $\ell = 1$ و $\ell = 2$.

ويكون الزخم الزاوي أكثر أهمية في المشكلات ذات التماثل الدوراني. عندها، فإن الزخم الزاوي كلاسيكيًا، يكون محفوظًا. أما في ميكانيكا الكم، فإن التماثل الدوراني يعني أنه بالإمكان إيجاد دوال أمواج لطاقات محددة، يكون فيها الزخم الزاوي محددًا أيضًا. ومن الأمثلة المهمة في هذا الموضوع ذرة الهيدروجين، فالحالة الأرضية يكون فيها $\left|\vec{L}\right|^2 = 0$، بينما في الحالة المتهيجة الأولى ($n = 2$)، يمكن الحصول على قيمتين $\left|\vec{L}\right|^2 = 0$ و $\left|\vec{L}\right|^2 = 2\hbar^2$ (ما يعني أن قيم ℓ هي، $\ell = 0$ و $\ell = 1$) وهكذا. القاعدة العامة لذرة الهيدروجين هي أن l يجب أن تكون أقل من n، العدد الذي يحدد الطاقة. وبالمناسبة، فإن الأعداد n، و ℓ و m **تسمى أعدادًا كمية**.

السؤال أ.20: طريقة بدائية، لكنها صحيحة جزئيًا لفهم تكميم الزخم الزاوي، وهي على النحو الآتي: تخيل أن الجسيم مجبر على التحرك على محيط دائرة، نصف قطرها r. عندها، فإن الزخم الزاوي للجسيم حول مركز الدائرة، إما أن يكون $(+rp)$ أو $(-rp)$، حيث p مقدار الزخم الخطي للجزيء عند أي لحظة. اقترض أن s محور، يعرف موقع الجسيم حول الدائرة، حيث يتراوح بين 0 و $2\pi r$. إن دالة الموجة هي دالة من s. وافترض الآن أن دالة الموجة دالة جيبية، بحيث يكون الزخم الخطي محددًا جيدًا. استخدم حقيقة أن دالة الموجة ستقوم بعدد صحيح من الاهتزازات على الدائرة كاملة، أوجد قيم p المسموحة والقيم المسموحة للزخم الزاوي.

السؤال أ.21: رقم الأعداد الكمية n,l,m لجميع الحالات المستقلة لذرة الهيدروجين ذات قيم محددة للطاقة، E، ولمربع الزخم الزاوي $\left|\vec{L}\right|^2$ و L_z ولقيم $n = 0$ ولغاية $n = 3$. تحقق من أن عدد الحالات المستقلة في المستوى n يساوي n^2.

الجزيئات الدوارة Rotating Molecules

من التطبيقات المهمة للزخم الزاوي في الفيزياء الحرارية دوران الجزيئات في غاز. ويُجزأ التحليل بطريقة مناسبة إلى ثلاث حالات: جزيئات بذرة واحدة، وجزيئات بذرتين، وجزيئات متعددة الذرات.

ولا يتوافر للجزيئات أحادية الذرة أي حالات دورانية. صحيح أن الإلكترونات في الذرة تمتلك زخمًا زاويًا، وأنه يمكن لهذا الزخم أن يكون في أي حالة اصطفاف (جميعها بالطاقة نفسها إذا كانت الذرة معزولة). لكن لتغيير الزخم الخطي، للإلكترونات مقدار، يتطلب وضعها في حالات متهيجة، وتحتاج هذه العملية إلى طاقة بحدود عدد من eV أكثر مما هو متوافر عند درجات الحرارة العادية. على أي حال، فإن هذه الحالات تُعدّ حالات إلكترونية، وليست حالات دورانية جزيئية. كذلك، فإن النواة، إضافة إلى الإلكترونات، يمكنها امتلاك زخم زاوي ذاتي، «زخم مغزلي» له اصطفافات مختلفة، لكن تغير مقدار الزخم الخطي للنواة يتطلب كميات كبيرة من الطاقة، تكون عادة نحو 100,000 eV.

وبشكل أكثر عمومية، عندما نتحدث عن الحالات الدورانية للجزيء، فنحن لسنا مهتمين بدوران النويات المنفردة، ولا بالحالات الإلكترونية المتهيجة. ولذلك، فإنه من الملائم وضع نموذج للنواة على شكل كتلة نقطية، وأن نهمل الإلكترونات كليًا. وسنستخدم هذين التبسيطين خلال هذه المناقشة.

إن الرابطــة التــي تربط الذرتين معًا، في جــزيء ثنائي الذرات، عادة تكون قليلة المرونــة، وعليه يمكن تصور النواتيــن مرتبطتيــن معًا عن طريق قضيب صلب وعديــم الكتلة. دعنا نفترض، أن مركز كتلة النظام ســاكن (يعنــي أننا ســنهمل أي حركــة انتقالية). عند ذلك، فــإن وضع النظام في الفراغ يعتمد كلاســيكيًّا فقط على الزاويتين θ، ϕ، محددتي الاتجاه نحو إحدى النويات في المحاور الكروية. (إن موقع النواة الثانية يكون محددًا بالكامــل، فهي تقع على الجانب المعاكس لموقــع الأولى). وتتحدد طاقة الجزيء من خلال متجه الزخم الزاوي الــذي يطلــق عليه عــادة الرمز $\vec{J}$ (عوضا عن $\vec{L}$) في هــذه الحالة. وبدقة أكثر، فإن الطاقــة هي طاقة الحركة الدورانية:

$$E_{rot} = \frac{|\vec{J}|^2}{21} \qquad (20.أ)$$

حيث I عزم القصور الذاتي حول مركز الكتلة ($I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2$، وحيث m_i كتلة و r_i البعد عن محور الدوران للنواة i).

إن دوال الأمواج لهذا النظام، في الميكانيك الكمي، هي دوال فقط من الزوايا θ، ϕ، لذلك فإن تحديد حالة الزخم الزاوي ، (J_z, $|\vec{J}|^2$) كافٍ لتحديد دالة الموجة بالكامل، وإن عدد دوال الأمواج المستقلة المتاحة للنظام يساوي عدد حالات الزخم الزاوي تلك. إضافة إلى ذلك، فإن قيمة $|\vec{J}|^2$ تحدد طاقة الجزيء الدورانية، اعتمادًا على العلاقة (أ.20). إن تكميم $|\vec{J}|^2$ يعني تكميمًا للطاقة، وتعطى الطاقات المسموحة بالعلاقة الآتية:

$$E_{rot} = \frac{j(j+1)\hbar^2}{2I} \qquad (21.أ)$$

هناك العدد الكمي ℓ نفسه الذي استخدم أعلاه، وبقيم مسموحة ......0,1,2,3. إن التشعب في كل مستوى يساوي ببساطة عدد القيم المختلفة التي يأخذها J_z لتلك القيمة من j، وهو $2j + 1$. ويبين الشكل (6-6) مخطط مستويات الطاقة لجزيء ثنائي الذرات في حالة الدوران.

لكن ما سبق ينطبق فقط على الجزيئات ثنائية الذرات المكونة من ذرتين متمايزتين مثل CO أو CN، أو حتى H_2 عندما تكون ذرتا الهيدروجين من نظائر مختلفة، أما إذا كانت الذرتان غير متمايزتين، عندها يكون هناك فقط نصف عدد الحالات المختلفة؛ نظرًا لأن استبدال الذرتين ببعضهما يعطي الوضع نفسه تمامًا. وهذا يعني أساسًا أن نصف قيم j في المعادلة (أ.21) مسموحة، والنصف الآخر غير مسموح، ويشرح السؤال (30.6) كيفية تحديد أي النصفين مسموح، وأيهما غير مسموح.

إن التباعد في مستويات الطاقة لجزيء ثنائي الذرات، يتناسب مع $\frac{\hbar^2}{2I}$ ، وهذه الكمية تكون الأكبر عندما تكون I صغيرة، لكنها حتى في أصغر الجزيئات، أقل من 1/100 eV. وبشكل عام، فإن مستويات الطاقة الدورانية لجزيء أقل كثيرًا في تباعدها من مستويات الطاقة الاهتزازية انظر الشكل (أ.14)، ونظرا لأن $kT >> \frac{\hbar^2}{2I}$ لجميع الجزيئات تقريبًا عند درجة حرارة الغرفة، فإن درجات الحركة الدورانية تأخذ كمية من الطاقة الحرارية.

الشكل أ.14: جزء مكبّر من طيف N_2 المبين في الشكل أ.11، الذي يتضمن مدى الأطوال الموصية 370-390. وفي الواقع ينقسم كل خط من الخطوط العريضة الواضحة في الصورة إلى "حزمة" تتكون من كثير من الخطوط الضيقة (الرفيعة)، وذلك بسبب تعدد مستويات الدوران لكل مستوى من مستويات التذبذب. المصدر: Gordon M.Barrow مقدمة في التحليل الطيفي الجزيئي (ماكجوهيل نيويورك، 1962) وقدمت الصورة في الأصل منذ قبل Marquisee. J.A.

ويُعدّ الجزيء الخطي متعدد الذرات، مثل CO2، مشابهًا للجزيء ثنائي الذرات، من حيث إنه يتم تحديد وضعه الدوراني بدلالة الزاويتين θ، ϕ، فقط. وعليه، فإن الطاقات الدورانية لهذا الجزيء لا تزال تعطى بالعلاقة (أ.20).

لكن معظم الجزيئات متعددة الذرات أكثر تعقيدًا. فعلى سبيل المثال، إن اصطفاف جزيء الماء H_2O، لا يحدد بالكامل بتحديد موقع إحدى ذرات الهيدروجين بالنسبة إلى مركز الكتلة، حتى لو ثبتت ذرات الهيدروجين، فإن ذرة الأكسجين يمكنها أن تدور على محيط دائرة صغيرة، لذلك فإننا نحتاج إلى زاوية ثالثة لتحديد اصطفاف جزيء عديد الذرات. وهذا يعني أن دوال الأمواج الدورانية الآن دوال في ثلاثة متغيرات، بدلاً من متغيرين اثنين، وعليه، فإن العدد الكلي للحالات المتوافرة، لجزيء عديد الذرات، أكبر كثيرًا من عددها لجزيء ثنائي الذرات. إن بناء مستويات الطاقة معقد نوعًا ما؛ لأن عزوم القصور الذاتي حول المحاور الثلاثة المحتملة للدوران مختلفة في العادة. لكن عند درجات حرارة مرتفعة بشكل معقول، فإن عدد تلك الحالات المحتملة كافٍ لاعتبار النظام ممتلكًا ثلاث درجات حرية. إن التصرف المفصل لجزيئات متعددة الذرات بعد هذه الحقيقة المهمة، لا يقع في نطاق هذا الكتاب، ويمكن إيجاده في كثير من كتب الكيمياء الفيزيائية[93].

السؤال أ.22: لقد تم استخدام الرمز ϵ بوصفه اختصارًا للثابت $\frac{\hbar^2}{2I}$ في الجزء (2.6). ويقاس هذا الثابت عادة باستخدام مطيافية الأمواج الميكروية وذلك بقذف الجزيء بأمواج ميكروية وملاحظة الترددات التي يتم امتصاصها.

(أ) إن قيمة الثابت ϵ لجزيء CO، يساوي 0.00024 eV تقريبًا. ما تردد الأمواج الميكروية التي تحث على الانتقال من المستوى $j = 0$ إلى المستوى $j = 1$؟ وما التردد الذي يسبب الانتقال من المستوى $j = 1$ إلى المستوى $j = 2$؟

(ب) احسب عزم القصور الذاتي لجزيء CO باستخدام قيمة ϵ في الفرع أ.

(ج) من معرفتك لعزم القصور الذاتي وكتل الذرات، احسب طول الرابطة، المسافة بين النواتين في جزيء CO.

الزخم المغزلي The Spin

إضافة إلى الزخم الزاوي الناتج عن الحركة في الفضاء، يمكن للجسيم الكمي أن يمتلك زخمًا زاويًا داخليًا أو ذاتيًا، ويسمى هذا الزخم الزاوي الذاتي أحيانًا الزخم المغزلي، إذا نظرنا بدقة كافية، يظهر أن للجسيم تركيبًا داخليًا،

(93) لتفاصيل أكثر عن الجزيئات متعددة الذرات، انظر في كتب الكيمياء الفيزيائية، مثل كتاب Atkins (1998).

وأن زخمه المغزلي ناتج عن حركة مكوناته. لكن في حالة الجسيمات الأولية كالإلكترونات والفوتونات، فمن الأفضل أن نفكر في الزخم المغزلي على نحو زخم زاوي ذاتي، لا يمكن رؤيته بدلالة التركيب الداخلي.

ومثل الأنواع الأخرى من الزخم الزاوي، فإن مقدار الزخم المغزلي يأخذ فقط قيمًا محدد، وهي $\sqrt{s(s+1)}\hbar$، حيث s عدد كمي مماثل للعدد الكمي ℓ. ولكن ليس ضروريًّا أن تأخذ s قيمًا صحيحة، حيث يمكنها أن تأخذ أنصاف القيم الصحيحة $1/2$, $3/2$, $5/2$، وهكذا. إن كل نوع من الجسيمات الأولية لها قيمتها الخاصة للعدد الكمي s، وهي ثابتة لا تتغير. فمثلًا $s = 1/2$ لكل من الإلكترونات، البروتونات، النيوترونات، والنيوترينيات، بينما للفوتونات فإن $s = 1$.

توجد قواعد مختلفة لتجميع الزخم المغزلي والزخم الزاوي المداري، للحصول على الزخم المغزلي الكلي للجسيمات المركبة، فمثلًا ذرة الهيليوم الرباعي في حالتها الأرضية تمتلك $s = 0$، حيث إن الزخم المغزلي لمكوناتها يختصر بعضه بعضًا.

(عندما يكون الزخم الزاوي للنظام مكونًا من تجميع للزخم الزاوي المداري والزخم المغزلي، وعندما لا نرغب في تحديده من أي نوع، فإننا عادة نطلق عليه الرمز $\vec{J}$ ونستخدم عددًا كميًّا جديدًا j بدلًا من ℓ أو s).

ولمعرفه قيمة s لجسيم ما، فإن مركبة زخمه المغزلي في اتجاه محور z (أو أي محور آخر) تأخذ قيمًا عدة محتملة. تمامًا كما هو الحال مع الزخم الزاوي المداري، فإن هذه القيم، تقع في المدى $-s\hbar \rightarrow s\hbar$ والفارق بين القيم المتتالية عدد صحيح. فمثلًا، إذا كانت $s = 1/2$ فإن مركبة الزخم المغزلي في اتجاه لمحور z لها قيمتان $+\hbar/2$ أو $-\hbar/2$. لكن إذا كانت $s = 3/2$ فإن هناك أربع قيم للمركبة في اتجاه محور z و $-3\hbar/2$ $3\hbar/2, \hbar/2, -\hbar/2$.

وفي حالة الجسيمات عديمة الكتلة، فهناك تعديل للقواعد، وهو أن القيمتين الأكثر تطرفًا لمركبة الزخم في تجاه z هما المسموحتان فقط، فعلى سبيل المثال $\pm\hbar$ للفوتونات $(s = 1)$ و $\pm 2\hbar$ للجرافيتونات $(s = 2)$.

إن الشحنة الكهربائية التي تدور حول نفسها، تتصرف وكأنها قضيب مغناطيسي، تحدد قوته واصطفافه بمتجه عزم مغناطيسي $\vec{\mu}$. ولحلقة جاهرية لتيار كهربائي، فإن قيمة متجه عزمها المغناطيسي $|\vec{\mu}|$ تساوي حاصل ضرب التيار في المساحة المحيطة بالحلقة، بينما يحدد اتجاه العزم المغناطيسي بقاعدة اليد اليمنى. إن هذا التعريف غير مفيد في المغانط المجهرية، لذلك، فإن أفضل وسيلة هي تعريف $\vec{\mu}$ بدلالة الطاقة اللازمة لعكس تجاه الجسيم عندما يكون موجودًا في منطقة مجال مغناطيسي خارجي $\vec{B}$. وتأخذ الطاقة قيمتها الصغرى، عندما تكون $\vec{\mu}$ موازية للمجال $\vec{B}$ وتأخذ قيمتها الكبرى، عندما يكون $\vec{\mu}$ و $\vec{B}$ في اتجاهين متعاكسين، لكنها تكون صفرًا، إذا كانا متعامدين، وتعطى العلاقة العامة للطاقة على النحو الآتي:

$$E_{magnetic} = -\vec{\mu}.\vec{\beta} \qquad (22.أ)$$

وفي العادة، فإن تسمية اتجاه $\vec{B}$ في اتجاه z تكون أكثر ملاءمة، وعندها تصبح الطاقة على النحو الآتي:

$$E_{magnetic} = -\mu_z \,|\vec{\beta}| \qquad (23.أ)$$

ونظرًا لأن $\vec{\mu}$ تتناسب مع الزخم الزاوي للجسيم، فإن الجسيم الكمي يمتلك قيمًا مكممة من μ_z: قيمتين محتملتين لزخم مغزلي $1/2$ وثلاث قيم للجسيمات التي زخمها المغزلي 1 وهكذا. وفي حالة الزخم المغزلي $1/2$، وهي حالة مهمة للجسيمات التي عرفت في الجزء (1.2)، فقد ورد

$$\mu_z = \pm\mu \qquad (24.أ)$$

لذلك، فإن $|\mu_z| \equiv \mu$. لكن على الرغم من أن هذا الاصطلاح ملائم، لكن لا بد أن نتذكر أن μ هذه لا تساوي $|\vec{\mu}|$ لمتجه، كما هو الحال في أن $|J|$ ليست $|\vec{J}|$ لزخم زاوي كمي.

السؤال أ.23: ارسم مخططًا على شكل قمع، كما هو الحال في الشكل (أ.13) مبينًا حالات الزخم المغزلي لجسيم مع $s = 1/2$، أعد الخطوات لجسيم مع $s = 3/2$ وارسم المخططين على المقياس نفسه، وكن دقيقًا قدر الاستطاعة في المقادير والاتجاهات.

5.أ أنظمة الجسيمات الكثيرة Systems of Many Particles

يمتلك النظام المكون من جسمين كميين دالة موجة واحدة فقط. وفي بعد إزاحي واحد، فإن دالة الموجة لنظام مكون من جسيمين كميين هي دالة من المتغيرين x_1 و x_2 المتلازمين بموقعي هذين الجسيمين. وبدقة أكثر، فإن استكملنا مربع دالة الموجة على مدى من قيم للمتغير x_1 وعلى مدى من قيم المتغير x_2، نحصل على احتمال وجود الجسيم الأول في المدى الأول، ووجود الجسيم الثاني في المدى الثاني. ويمكن كتابة بعض دوال الأمواج لجسيمين كحاصل ضرب دوال أمواج لجسيم واحد على النحو الآتي:

$$\Psi\,(x_1, x_2) = \Psi_a\,(x_1)\Psi_b\,(x_2) \tag{25.أ}$$

إن هذا تسهيل كبير، ويصلح فقط لعدد صغير من دوال الأمواج لجسيمين. لكن لحسن الحظ، فإن جميع دوال الأمواج الأخرى لجسيمين، يمكن كتابتها بوصفها تجميعًا خطيًّا من تلك الأمواج التي تحَلل على شكل المعادلة (أ.25) وعليه، فإذا كنا مهتمين فقط بعدّ دوال الأمواج المستقلة خطيًّا، فيمكننا اعتبار تلك الدوال الموجية التي تُحلل على شكل المعادلة (أ.25) فقط. (وتصلح العبارة السابقة بغض النظر عمّا إذا كان الجسيمان متفاعلين أو غير متفاعلين. لكن إذا كانا غير متفاعلين نحصل على تبسيط أبعد، وهو أن الطاقة الكلية للنظام هي مجموع الطاقة للجسيمين، وأيضًا، فإن دالة الموجة للنظام بطاقات محددة يساوي حاصل ضرب دالتي موجتي الجسيمين الملائمين، وبطاقات محددة).

وإذا كان الجسيمان المعنيان متمايزين، فلا يوجد ما يمكن إضافته. لكن ميكانيك الكم يسمح أيضًا للجزيئات، بأن تكون متماثلة تمامًا، بحيث لا تتوافر أي طريقة قياس للتمييز بينها. وفي هذه الحالة، فإن احتمال وجود الجسيم 1 في الموقع a، والجسيم 2 في الموقع b، يجب أن يكون نفس احتمال وجود الجسيم 1 في الموقع b، والجسيم 2 في الموقع a. وبكلمات أخرى، فإن مربع دالة الموجة يجب ألا يتغير تحت عملية استبدال مواقع متغيريها الاثنين، وعليه، نحصل على العلاقه الآتية:

$$|\Psi\,(x_1, x_2)|^2 = |\Psi\,(x_2, x_1)|^2 \tag{26.أ}$$

وهذا يعني تقريبًا، أن دالة الموجة نفسها لا تتغير تحت هذه العملية، لكن هذا الحكم ليس تامًا، لوجود احتمال آخر، وهو أن دالة الموجة قد تغير إشاراتها، على النحو الآتي:

$$\Psi\,(x_1, x_2) = \pm\Psi\,(x_2, x_1) \tag{27.أ}$$

(إن استبدال المتغيرين مرة أخرى، لا بد أن يعيد دالة الموجة إلى شكلها الأصلي، فإن هذين الاحتمالين هما الاحتمالان الوحيدان، حيث إن الضرب بالعدد التخيلي أو أي عدد مركب آخر لا يحقق المطلوب).

ويبدو أن الطبيعة قد استفادت من هاتين الإشارتين المحتمليتين في المعادلة (أ.27) فدالة الموجة ψ لبعض أنواع الجسيمات المسماة البوزونات لا تغير إشارتها بتغير مواقع متغيريها، بينما للنوع الآخر، الفيرميونات، فإن دالة الموجة تغير إشارتها عند عملية استبدال المتغيرين لموقعيهما؛ لذا تكتب دوال الأمواج تلك على النحو الآتي:

$$\Psi\,(x_1, x_2) = \begin{cases} +\Psi\,(x_2, x_1) & \text{for bosons} \\ -\Psi\,(x_2, x_1) & \text{for fermions} \end{cases} \quad (28.أ)$$

(في الحالة الأولى نقول: إن دالة الموجة متماثلة، بينما في الحالة الثانية نقول: إن دالة الموجة غير متماثلة). الأسئلة على البوزونات تتضمن الفوتونات، والبيونات، وعددًا كثيرًا من أنواع الذرات والنويات الذرية. بينما الأسئلة على الفيرميونات تتضمن الإلكترونات، والبروتونات، والنيوترونات، والنيترينيات وعددًا كثيرًا من أنواع الذرات والنويات الذرية. وفي الحقيقة، فإن الجسيمات بزخم مغزلي بأعداد صحيحة، وبدقة أكبر بأعداد صحيحة للعدد الكمي s) هي بوزونات، بينما الجسيمات التي يكون عددها الكمي s أعدادًا فردية من النصف $(s = 1/2,\ 3/2, \text{etc.})$ هي فيرميونات.

إن أكثر التطبيقات مباشرة للقاعدة (أ.28)، هي الحالة التي يكون فيها كلا الجسيمين في نفس حالة الجسيم المنفرد.

$$\Psi\,(x_1, x_2) = \Psi_a\,(x_1)\Psi_b\,(x_2) \quad (29.أ)$$

وهذه المعادلة تضمن للبوزونات أن تكون دالة الموجة ψ متماثلة عند استبدال x_1 مع x_2. لكن هذه الحالة غير محتملة على الإطلاق للفيرميونات، حيث إن هذه الدالة لا يمكن أن تساوي سالبًا (إلا إذا كانت صفرًا، وهذا غير مسموح).

(عندمــا نأخــذ اصطفاف الزخم المغزلي في الحســبان، يصبــح الوضع أكثر تعقيدًا. إن حالة الجســيم لا تتضمن دالة الموجة الفراغية فقط، ولكن حالة زخمها المغزلي أيضًا؛ لذا يمكن للجزء الفراغي من دالة الموجة أن يكــون متماثــلًا، ما دام جزء الزخــم المغزلي غير متماثل. وللحالة المهمة التي يكــون فيها الزخم المغزلي للجسيمات يساوي $s = 1/2$، فإن المهم هو أن الجزء الفراغي لدالة الموجة يمكن شغله بجسيمين على الأكثر، من هذا النوع شريطة أن يكونا في وضع زخم مغزلي غير متماثل).

إن كل هذه الجمل والصيغ تعمّم بطريقة طبيعية إلى أنظمة بثلاثة أو أكثر من الجسيمات. إن دالة الموجة لنظام مكون من عدد من البوزونات المتماثلة يجب ألا تتغير عند استبدال أي زوج لمتغيريها الملازمين، بينما يجب على دالة الموجة لنظام مكون من عدد من الفيرميونات المتماثلة أن تغير إشاراتها عند استبدال أي زوج لمتغيريها الملازمين. إن أي حالة جسيم منفرد (الحالة تعني هنا دالة الموجة الفراغية ودالة موجة وضع الزخم المغزلي) يمكنها احتواء أي عدد من البوزونات المتماثلة، ولكنها تحتمل على الأكثر فيرميونًا واحدًا.

6.أ نظرية المجال الكمي Quantum Field Theory

لا تتعامل الميكانيكا الكلاسيكية فقط مع أنظمة مكونة من جسيمات لا أبعاد لها (كالنقطة)، لكن أيضًا مع الأنظمة المتصلة كالأسلاك والجوامد المهتزة، وحتى مع المجالات، كالمجالات الكهرومغناطيسية. والمقاربة العادية هي اعتبار الجسم المتصل حقيقة مكونًا من مجموعة من الجسيمات النقطية، مرتبطة ببعضها بزنبركات صغيرة، ومن ثم أخذ النهايات التي يكون فيها عدد الجسيمات لا نهائيًا، والبعد بينها يؤول للصفر. وتكون النتيجة بشكل عام على شكل معادلة تفاضلية جزيئية (فعلى سبيل المثال معادلة الموجة الخطية، أو معادلات ماكسويل) تحدد الحركة كدالة من الموقع والزمن.

وعندما تكون المعادلة التفاضلية الجزيئية تلك، خطية، فإن أسهل طريقة لحلها هو استخدام **تحليلات فورير**. فكّر في الشكل الابتدائي للنظام (سلك مثلًا) المكوّن من دوال جيبية بأطوال أمواج مختلفة. إن كلًّا من هذه الأنماط يهتز جيبيًّا مع الزمن، وبتردده المميز. ولمعرفة شكل السلك بعد فترة من الزمن. نجد أولًا كيف سيظهر كل نمط من الأنماط عند تلك الفترة الزمنية، ومن ثم نجمع هذه الأنماط، وبالنسب نفسها التي كانت في الحالة الابتدائية.

وبعد هذا الكم من الميكانيكا الكلاسيكة المتصلة، نسأل فيما إذا كنا نرغب في تطبيق ميكانيك الكم على نظام متصل؟ وهنا أيضًا، فإن أفضل المقاربات في العادة، العمل مع أنماط فورير للنظام. إن كل نمط يتصرف كهزاز توافقي كمي بطاقات مكممة ومستويات مكممة. وتحدد الطاقات بدلالة التردد الطبيعي للاهتزازات، على النحو الآتي:

$$E = \frac{1}{2}hf, \frac{3}{2}hf, \frac{5}{2}hf, \ldots\ldots \qquad (30.\text{أ})$$

لذلك، فإن لكل نمط طاقة لنقطة الصفر، تساوي $\frac{1}{2}hf$ (عادة ما نهملها) مضافًا إليها أي عدد صحيح من وحدات الطاقة المساوية hf. ونظرًا لأن الأنماط المختلفة، لها ترددات مختلفة، فإن النظام الكلي له وحدات طاقة بأحجام مختلفة.

وتسمى وحدات الطاقة هذه في حالة المجال الكهرومغناطيسي الفوتونات، ولكونها أشياء منفصلة، فهي تتصرف إلى حد كبير كالجسيمات الموجودة في دوال أمواج بطاقات محددة. ونظرًا لكون حالات الطاقات المحددة، ليست الحالات الوحيدة للمجال، نستطيع حتى مزج الأنماط المختلفة لإيجاد فوتون متمركز في الفضاء. وعليه، فإننا مرة أخرى نواجه ثنائية التصرف الموجي والتصرف الجسيمي، لكن بسياق أغنى هذه المرة لقد ابتدأنا بمجال كلاسيكي منتشر في الفضاء. ولتطبيق ميكانيك الكم على هذا النظام نرى أن المجال يتصرف بطرق مختلفة كمجموعة من الجسيمات المنفصلة. ولكن لدينا نظام، عدد الجسيمات فيه يعتمد على الحالة الآنية، بدلًا من كونه جزءًا من النظام، وثابت من البداية، وفي الحقيقة، فإن المجال يمكن أن يكون في حالات عدد الجسيمات فيها ليس حتى محددًا جيدًا.

وهذه هي فقط المواصفات المطلوبة لبناء نموذج صحيح للتذبذبات الكمية في المجال الكهرومغناطيسي ولوصف تفاعلات تنتج وتدمر فيها الفوتونات[94].

وبالمثل، فإن وحدات الطاقة الاهتزازية في بلورة صلبة، تسمى الفونونات. وهي مثل الفوتونات يمكن أن تكون متمركزة أو منتشرة، ويمكن إنتاجها وتدميرها في تفاعلات مختلفة. وفي الأساس ليست الفوتونات جسيمات حقيقية. إن أطوال أمواجها وطاقاتها محدودة بالتباعد غير الصفري بين الذرات في شبكة البلورة وتتصرف بسهولة فقط عندما تكون أطوال أمواجها أكبر كثيرًا من التباعد بين الذرات. ولهذا السبب تسمى الفونونات أشباه الجسيمات. وتبقى الفونونات تعطي بطريقة جميلة وصفًا دقيقًا للتهيجات قليلة الطاقة في البلورة. إضافة إلى ذلك، فإن التهيجات منخفضة الطاقة لمواد أخرى كثيرة من الحديد الممغنط وحتى سائل الهيليوم يمكن وصفها بدلالة أنواع أخرى كثيرة من أشباه الجسيمات.

---

(94) لمعالجة مختصرة جيدة للمجال الكهرومغناطيسي المكمم، انظر في Ramamurti Shankar, principles of Quantum Mechanics, second edition (Pleum, New York, 1994). Section 18.5

ولمقدمة كاملة لموضوع نظرية المجال المكمم، أنظر في F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory, second edition. Wiley, Chicester, 1993

وعلى مستوى أكثر أساسية، نستطيع استخدام المجالات الكمية لوصف جميع أنواع الجسيمات الأولية الأخرى الموجودة في الطبيعة. لذلك يوجد مجال كرومودي‍ناميكي للقوة التي تربط البروتون ببعضه، ويظهر نفسه بوصفه جسيمات تسمى غلوونات. هناك أيضًا مجال الإلكترون، مجال الميون، مجالات نيوتيرينوية مختلفة، مجال الكوراك، وهكذا.

إن المجالات الملازمة للجسيمات التي هي فيرميونات، يجب أن تشكل بطريقة مختلفة، بحيث يكون النمط الواحد يحتمل صفرًا من وحدات الطاقة أو وحدة واحدة من الطاقة، وليس عددًا غير محدود من وحدات الطاقة كالبوزونات. أما المجالات الملازمة للجسيمات المشحونة (كهربائيًا، أو غير ذلك) فقد وجد أنها تمتلك نوعين من التهيجات: واحدًا للجسيم والآخر للجسيم المعاكس له، جسيم له الكتلة نفسها وشحنة معاكسة.

وبشكل عام، فإن النظرية الكمية للمجالات، تبدو كأنها تمتلك كل الصفات اللازمة لبناء نموذج دقيق لفيزياء الجسيمات الأولية، كما نفهمها الآن. ولكن يبدو محتملًا جدًّا أن هذا النموذج سينهار عند أطوال أمواج قصيرة بما فيه الكفاية وطاقات عالية، وينهار نموذج الفونونات، عندما تصبح أطوال الأمواج قريبة من التباعد بين الذرات. ربما يومًا ما سنكتشف مستوى جديدًا من البناء على مقياس طول صغير جدًّا، ونقرر أن جميع الجسيمات في الطبيعة هي أشباه جسيمات.

السؤال أ.24: اعتمادًا على المعادلة (أ.30)، فإن كل نمط لمجال كمي يمتلك طاقة لنقطة الصفر مساوية $\frac{1}{2}hf$ حتى عند عدم وجود وحدات طاقة بعدها. وإذا كان المجال حقيقة سلكًا يهتز أو أي جسم مادي آخر، فإن ذلك لا يشكل مشكلة؛ لأن العدد الكلي من الأنماط محدود. حيث لا يمكن الحصول على نمط طول موجته أقل من نصف التباعد بين الذرات. (انظر الجزء7 – 5). لكن بالنسبة إلى المجال الكهرومغناطيسي والمجالات الأخرى الأساسية المتلازمة مع الجسيمات الأولية، فلا توجد نهاية واضحة لعدد الأنماط، وطاقة نقطة الصفر يمكن أن تكبر إلى قيمة محرجة.

(أ) اعتبر المجال الكهرومغناطيسي بداخل صندوق حجمه L^3 استخدم طرق الفصل السابع لكتابة صيغة للطاقة الكلية لنقطة الصفر لجميع أنماط المجال داخل هذا الصندوق، بدلالة تكامل ثلاثي على أرقام الأنماط في اتجاهات x,y,z

(ب) توجد أسباب جيدة للاعتقاد أن معظم قوانين الفيزياء الحالية، بما فيها نظرية المجالات الكمية، ستنهار عند مقياس الطول الصغير جدًّا، حيث تصبح الجاذبية الكمية ذات أهمية. وباستخدام تحليل الأبعاد والوحدات يمكنك توقع أن مقياس الطول هذا هو من رتبة $\sqrt{G\hbar/c^3}$، كمية تسمى طول بلانك. بين أن طول بلانك حقيقية، له وحدات الطول، واحسب هذا الطول عدديًّا.

(ج) بالعودة إلى الصيغة في الجزء (أ)، أوقف التكامل عند عدد النمط الملازم لطول الموجة المساوية لطول بلانك. وبعد ذلك، احسب من الصيغة تقديرًا للطاقة لوحدة الحجم في الفضاء المفرغ الناتج عن طاقة نقطة الصفر للمجال الكهرومغناطيسي. اكتب جوابك بوحدات J/m^3، ثم اقسم على c^2 للحصول على الكثافة الكتلية المكافئة للفضاء المفرغ (بوحدات kg/m^3). ثم قارن هذه الكثافة مع متوسط الكثافة الكتلية للمادة العادية في الكون، وهي تقريبًا مكافئة لبروتون واحد لكل متر مكعب. نظرًا لأن معظم التأثيرات الفيزيائية تعتمد فقط على الفروق في الطاقة، ولكون طاقة نقطة الصفر لا تتغير أبدًا، فإن

كثافــة طاقــة كبيرة في الفضاء المفرغ يمكن أن تكون غير مؤذية بالنســبة إلى معظم قوانين الفيزياء. الاستثناء الوحيد لذلك، شيء كبير هو الجاذبية. الطاقة تتجاذب، وعليه، فإن كثافة طاقة عالية في الفضاء المفرغ ســتؤثر في معدل تمدد الكون. إن كثافة الطاقة في الفضــاء المفرغ تعرف بالثابت الكزمولوجي (الثابت الكوني). ومن معدل تمدد الكون الملاحظ، فإن علماء الكون يقدرون أنه لا يمكن للثابت الكوني أن يتجاوز 10^{-7} J/ m³، إن الاختلاف بين الحد المبني على المراقبة والقيمة التي تم حســابها هو أحد أكبر التناقضات في الفيزياء النظرية. (الحل الواضح لهذا التناقض يمكن أن يكون مساهمة سالبة لكثافة الطاقة الناتجة عن مصدر آخر. وفي الحقيقة، فإن المجالات الفيرميونية تعطي مســاهمة ســالبة للثابت الكوني، لكن، لا أحد يعلم كيف يمكن لهذه المساهمة السالبة أن تختصر المساهمة الموجبة للمجالات البوزونية بالدقة المطلوبة[95].

(95) لمعالجة مختصرة جيدة للمجال الكهرومغناطيسي المكمم، انظر في Ramamurti Shankar, principles of Quantum Mechan-ics, second edition (Pleum, New York, 1994). Section 18.5

ولمقدمة كاملة لموضوع نظرية المجال المكمم، انظر في F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory, second edition. Wiley, Chicester, 1993