

7 الإحصاء الكمي Quantum Statistics

1.7 معامل جيبس The Gibbs Factor

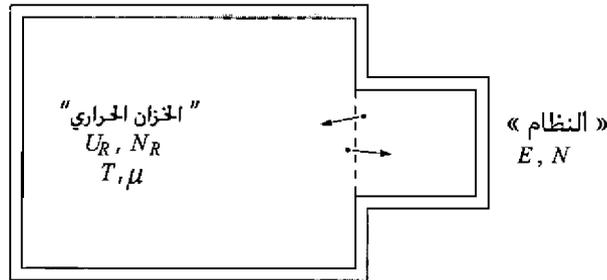
عند اشتقاق معاملات بولتزمان، في الجزء الأول من الوحدة السادسة، سُمح للنظام الصغير والمستودع بتبادل الطاقة، لكن لم يسمح لهما بتبادل الجسيمات. لكن في كثير من الأحيان، فإنه من المفيد أن تتعامل مع نظام، يمكنه تبادل الجسيمات مع محيطه. (انظر الشكل 1.7)، وفي هذا الجزء سنطور الاشتقاق السابق ليشتمل إمكانية تبادل الجسيمات.

على نحو ما فعلنا تمامًا في الجزء (1.6)، سنكتب النسبة بين احتمالي حدوث حالتين مجهريتين على النحو الآتي:

$$(1.7) \quad \frac{\mathcal{P}(s_2)}{\mathcal{P}(s_1)} = \frac{\Omega_R(s_2)}{\Omega_R(s_1)} = \frac{e^{s_R(s_2)/k}}{e^{s_R(s_1)/k}} = e^{[s_R(s_2) - s_R(s_1)]/k}$$

ويحتوي الأس التغير في الإنتروبي للمستودع، عندما ينتقل النظام من الحالة 1 إلى الحالة 2. إن هذا التغير صغير جدًا من وجهة نظر المستودع؛ لذا يمكن استخدام المتطابقة الديناميكية الحرارية الآتية:

$$(2.7) \quad dS_R = \frac{1}{T} (dU_R + PdV_R - \mu dN_R).$$



الشكل 1.7: نظام في حالة اتصال حراري وانتشاري مع مستودع أكبر كثيرًا منه عند درجة حرارة وجهد كيميائي ثابتين.

ونظراً إلى أن أي طاقة، أو حجم، أو جسيمات يكتسبها المستودع، لا بد من أن يفقدها النظام، فإن كل تغيير في الجهة اليمنى من المعادلة يكتب سالباً في التغيير نفسه للنظام. وسنهمل الحد $P dV$ ، على نحو ما فعلنا في الجزء (6.1)؛ لكونه في الغالب يساوي صفراً، أو على الأقل صغيراً جداً مقارنة بالحدود الأخرى، ونظراً إلى توافر إمكانية تبادل الجسيمات، نحتفظ بالحد μdN ، وعليه، فإن التغيير في الإنتروبي يصبح على النحو الآتي:

$$3.7) \quad S_R(s_2) - S_R(s_1) = -\frac{1}{T} [E(s_2) - E(s_1) - \mu N(s_2) + \mu N(s_1)]$$

والحد الأيمن من المعادلة وفيه E ، N ، يعود إلى النظام، وقد أضيفت الإشارة السالبة. وبتعويض هذه المعادلة في المعادلة (1.7) نحصل على النسبة بين الاحتمالين على الصورة الآتية:

$$4.7) \quad \frac{\mathcal{P}(s_2)}{\mathcal{P}(s_1)} = \frac{e^{-E(s_2) - \mu N(s_2) / kT}}{e^{-E(s_1) - \mu N(s_1) / kT}}$$

إن النسبة بين الاحتمالين، كما وجد سابقاً، عبارة عن نسبة بين معاملين أسيين، يعتمد كل منهما على درجة حرارة المستودع والطاقة للحالة المعينة. ويعتمد المعامل أيضاً على عدد الجسيمات الموجودة في النظام للحالة s ، ويطلق على هذا المعامل الأسّي الجديد معامل جيبس.

$$5.7) \quad \text{Gibbs factor} = e^{-[E(s) - \mu N(s)] / kT}$$

وعندما نتطلب الاحتمال المطلق بدلاً من النسبة بين الاحتمالات، نضيف ثابت تناسب أمام العامل الأسّي:

$$6.7) \quad \mathcal{P}(s) = \frac{1}{Z} e^{-[E(s) - \mu N(s)] / kT}$$

وتسمى الدالة Z دالة التجزيء العظمى "noititrap dnarG"⁽⁶⁶⁾ أو مجموع جيبس. ولكون مجموع الاحتمالات على الحالات جميعها يساوي 1، فإن دالة التجزيء العظمى يعبر عنها بالعلاقة:

$$7.7) \quad Z = \sum_s e^{-[E(s) - \mu N(s)] / kT}$$

ويؤخذ المجموع على جميع الحالات الممكنة (يتضمن جميع قيم N المحتملة). وعند احتواء النظام على أكثر من نوع من الجسيمات، فإن المجموع على الحد μdN ، في المعادلة (2.7) يجري على جميع أنواع الجسيمات $\mu_i dN_i$ ، وتعديل كل معادلة لاحقة بالطريقة نفسها. ويصبح معامل جيبس لنظام يحتوي على نوعين مختلفين من الجسيمات، على سبيل المثال، على النحو الآتي:

$$8.7) \quad \text{Gibbs factor} = e^{-[E(s) - \mu_A N_A(s) - \mu_B N_B(s)] / kT}$$

(66) مماثلاً للمصطلح الكانوني المجهرى والكانوني اللذين استخدمنا لوصف الطرق في 2-3 و 6، المقاربة المستخدمة هنا تسمى الكانوني العظمى. وتسمى الأنظمة الافتراضية التي تتبع احتمالاتها المعادلة 6.7 التجمعات الكانونية العظمى.

مثال: التسمم الناتج عن أول أكسيد الكربون.

لتوضيح استخدامات عوامل جيس، نتناول المثال الثاني، وهو دراسة مواقع الامتصاص على سطح جزيء الهيموجلوبين المسؤول عن نقل الأكسجين في الدم. ويحتوي كل جزيء هيموجلوبين على أربعة مواقع امتصاص. يتكون كل موقع من هذه المواقع من أيون الحديد Fe^{2+} محاطًا بذرات أخرى مختلفة، ويمكنه نقل جزيء واحد من الأكسجين.

وتسهيلًا للأمر، نفترض أن النظام مكون من موقع واحد غير معتمد على المواقع الثلاثة الأخرى⁽⁶⁷⁾. وبافتراض أن الموقع يشغل فقط من قبل الأكسجين، نستطيع معاملة النظام معاملة نظام ذي حالتين: تعبر الحالة الأولى عن موقع شاغر، والثانية عن موقع مشغول بجزيء الأكسجين. (انظر الشكل 2.7). ونأخذ قيمة الطاقة 0 و ϵ للحالتين على الترتيب، حيث $\epsilon = -0.7\text{eV}$ ⁽⁶⁸⁾ تحتوي دالة التجزيء العظمى لهذه الحالة على حدين اثنين فقط، ويمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$(9.7) \quad Z = 1 + e^{-(\epsilon - \mu)/kT}.$$

ونظرًا إلى وجود الأكسجين بوفرة في الرئتين، فإن الجهد الكيميائي فيهما مرتفع نسبيًا، في حين يكون الجهد الكيميائي μ أقل كثيرًا في الخلايا، حيث يستخدم الأكسجين. وندرس الوضع في منطقة قريبة من الرئتين، حيث يكون الدم في حالة اتزان انتشاري مع الجو، تقريبًا، الذي يمثل غازًا مثاليًا وضغط الأكسجين الجزئي فيه بحدود 2.0 من الضغط الجوي. وباستخدام المعادلة (39.6) نحسب الجهد الكيميائي عند درجة حرارة الجسم $T=310\text{K}$ على النحو الآتي:

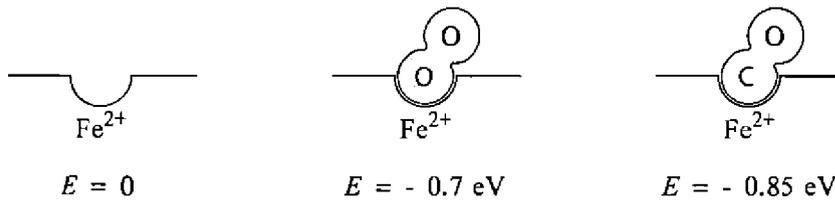
$$(10.7) \quad \mu = -kT \ln \left(\frac{VZ_{\text{int}}}{N_{\text{O}_2}} \right) \approx -0.6 \text{ eV}$$

ويتعويض هذه الأرقام نحصل على معامل جيس الثاني:

$$(11.7) \quad e^{-(\epsilon - \mu)/kT} \approx e^{(0.1\text{eV})/kT} \approx 40.$$

وعليه، فإن احتمال أن يكون الموقع مشغولًا يساوي:

$$(12.7) \quad P(\text{O}_2 \text{ مشغولا}) = \frac{40}{1 + 40} = 98\%$$



الشكل 2-7: قد يكون الموقع المنفرد في الهيموجلوبين شاغراً، ومشغولاً بالأكسجين أو بأول

(67) الافتراض أن المواقع مستقلة للهيموجلوبين دقيق إلى حد ما، وهو نوع من البروتين الذي يربط للأكسجين بالعضلات والذي يمتلك

موقع امتصاص واحد لكل جزيء يقدم نموذجاً أكثر دقة للسؤال 2.7.

(68) لا يستخدم الكيميائيون حيويون وحدة الإلكترون فولت إطلاقاً، وهم نادراً ما يتحدثون عن طاقات الروابط المفردة (نظراً إلى أن

تلك الطاقات تتغير كثيراً بتغير الظروف). لقد استخدمت قيم للطاقة لتعطي نتائج قريبة للنتائج العملية.

أكسيد الكربون. (قيم الطاقات تقريبية).

ونفترض أيضاً وجود كمية من أول أكسيد الكربون التي يمكن امتصاصها على موقع الهيموجلوبين؛ لذا، فإن الحالات المتاحة: حالة شاغرة، حالة مشغولة بالأكسجين، وحالة مشغولة بأول أكسيد الكربون. عند ذلك تصبح دالة التجزئ العظمى على النحو الآتي:

$$Z = 1 + e^{-(\epsilon - \mu)/kT} + e^{-(\epsilon' - \mu')/kT}, \quad (13.7)$$

حيث ϵ' هي طاقة (سالبة) لجزيء أول أكسيد الكربون المرتبط بالموقع و μ' جهده في المحيط وعلى الرغم من أن وفرة CO أقل من وفرة O_2 ، بمقدار مئة مرة مثلاً، وهذا يجعل الجهد الكيميائي لجزيء CO أقل تقريباً بمقدار $kT \ln 100 = 0.12 \text{ eV}$ من الجهد الكيميائي للأكسجين، لكن جزيء CO أقوى ارتباطاً في الموقع من جزيء الأكسجين وبطاقة $\epsilon' \approx -0.85 \text{ eV}$ و جهد كيميائي $\mu' \approx -0.72 \text{ eV}$. ونحصل على معامل جيبس الثالث، بتعويض هذه الأرقام على النحو الآتي:

$$e^{-(\epsilon' - \mu')/kT} \approx e^{(0.13 \text{ eV})/kT} \approx 120. \quad (14.7)$$

لذا، فإن احتمال أن يكون الموقع مشغولاً بالأكسجين يقل عن حالة عدم وجود CO ويصبح:

$$\mathcal{P}(\text{ مشغولاً بـ } O_2) = \frac{40}{1 + 40 + 120} = 25\%. \quad (15.7)$$

السؤال 1.7: بالقرب من الخلايا، حيث يستخدم الأكسجين، فإن الجهد الكيميائي له أقل كثيراً من قيمته بالقرب من الرئتين. وعلى الرغم من عدم وجوده على صورة غازية بالقرب من تلك الخلايا، لكنه طبيعي أن تحدد وفرته بدلالة ضغطه الجزئي الغازي، عندما يكون في حالة اتزان مع الدم. وفي حالة وجود الأكسجين فقط، استخدم نموذج المواقع المستقلة التي شرحت في حساب الجزء المشغول بالأكسجين بوصفه دالة من ضغط الأكسجين الجزئي، ثم ارسم ذلك الجزء بوصفه دالة من ضغط الأكسجين الجزئي. ويسمى هذا المنحنى منحنى امتصاص لانغ مير عند درجات حرارة ثابتة. وتبين النتائج العملية أن الامتصاص عن طريق الهيموجلوبين يتبع هذا المنحنى بدقة عالية إلى حد ما.

السؤال 2.7: عند التفاعل مع جزيء هيموجلوبين حقيقي، تكون رغبة جزيء الأكسجين للارتباط بموقع الامتصاص أكبر عندما تكون المواقع الثلاثة الأخرى مشغولة. ولوضع نموذج بسيط لهذا التأثير، نتخيل أن جزيء الهيموجلوبين لديه فقط موقعا امتصاص، شاغران أو مشغولان معاً. وتوجد أربع حالات متاحة لهذا النظام (بوجود الأكسجين فقط) ولنأخذ الطاقة للحالة الشاغرة 0، وللحالة التي يكون في كل موقع ذرة واحدة (-0.55 eV) ، وللحالة التي يكون كل موقع مشغولاً بذرتين (-1.3 eV) . (وعليه، فالتغير في الطاقة عند ارتباط ذرة الأكسجين الثانية (-0.75 eV)).

على نحو ما فعل في السؤال السابق، احسب وارسم الجزء من المواقع المشغولة بالأكسجين بوصفه دالة من الضغط الجزئي الفعال للأكسجين، وقارن النتيجة بالمنحنى في السؤال السابق (مواقع مستقلة). وهل يمكنك التفكير، لماذا يكون هذا التصرف مفضلاً لوظيفة الهيموجلوبين؟

السؤال 3.7: افترض أن نظاماً مكوناً من ذرة هيدروجين واحدة (ذرة أو أيون)، يمكنها الوجود في حالتين مختلفتين فقط، حالة شاغرة (لا يوجد إلكترون) وحالة مشغولة (وجود إلكترون في الحالة الأرضية). احسب النسبة بين احتمالي هاتين الحالتين، واحصل على معادلة (ساها) التي اشتقت في الجزء (6.5).

تعامل مع الإلكترونات، كأنها غاز مثالي أحادي الذرة، لغاية حساب الجهد الكيميائي μ . أهمل حقيقة أن الإلكترون قد يوجد في حالتي زخم مغزلي مستقلتين.

السؤال 4.7: أعد حل السؤال السابق أخذًا في الحسبان حالتي الزخم المغزلي للإلكترون؛ لذا فإن للنظام حالتين مشغولتين، كل واحدة منهما بحالة زخم مغزلي مختلف للإلكترون، أيضًا، وكذلك الجهد الكيميائي لغاز الإلكترونات مختلف قليلاً. بيّن أن النسبة بين الاحتمالات لا تتغير؛ لأن التشعب في الزخم المغزلي يختصر في معادلة ساها.

السؤال 5.7: تعامل مع نظام مكون من شائبة واحدة (ذرة أم أيون) في شبه موصل، وافترض أن ذرة الشوائب تمتلك إلكترونًا إضافيًا مقارنة بالذرات المجاورة. كما هي الحالة لذرة فوسفور. تحتل هذه الذرة موقعًا في سبيكة بلورة السليكون، ويمكن نزع الإلكترون الإضافي بسهولة، مخلّفًا أيونًا سالبًا يسمى الإلكترون المتأين إلكترون توصيل؛ لأنه حر الحركة خلال المادة، في حين تسمى الذرة الشائبة المانحة؛ لأنها تعطي إلكترونًا توصيليًا. ويشبه هذا النظام، نظام ذرة الهيدروجين التي درست في السؤالين السابقين باستثناء أن طاقة التأين أقل كثيرًا، وذلك لحجب الشحنة الأيونية عن طريق الصفات العازلية للوسط.

(أ) اكتب صيغة لاحتمال أن تكون الذرة المانحة في حالة تأين، لا تهمل إمكانية أن يكون الإلكترون، إن وجد، في حالتين مستقلتين للزخم المغزلي. وعبر عن الصيغة بدلالة درجة الحرارة، وطاقة التأين، I ، والجهد الكيميائي لغاز الإلكترونات المتأينة.

(ب) مفترضًا أن الإلكترونات التوصيلية، غاز مثالي عادي، (مع حالتي زخم مغزلي لكل جسيم)، اكتب جهدها الكيميائي بدلالة عدد إلكترونات التوصيل لوحدة الحجم (N_c/V) .

(ج) افترض، أن كل إلكترون توصيلي ينتج عن ذرة شوائب مانحة متأينة، عندها يكون عدد الإلكترونات التوصيلية مساويًا لعدد الذرات المانحة المؤينة. استخدم هذا الشرط لاشتقاق معادلة تربيعية في N_c بدلالة عدد الذرات المانحة (N_d) ، متخلصًا من μ ، حل المعادلة، واحصل على N_c (من المفيد استخدام كميات عديمة الوحدات. جرب مثلًا: $t = kT / I$ ، $x = N_c / N_d$ ، وهكذا...).

(د) إن طاقة التأين لذرة الفوسفور شائبة في بلورة السليكون تساوي 0.044 eV. مفترضًا أن عدد ذرات الفوسفور يساوي 10^{17} ذرة لكل cm^3 ، ومستخدمًا هذه الأعداد، احسب، وارسم جزء المانحات المتأينة بوصفها دالة من درجة الحرارة، وناقش النتائج.

السؤال 6.7: بيّن عندما يكون النظام في حالة اتزان حراري وانتشاري مع مستودع، أن متوسط عدد الجسيمات في النظام يعبر عنه بالعلاقة الآتية:

$$\bar{N} = \frac{kT}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \mu},$$

حيث يتم التفاضل الجزئي عند درجة حرارة ثابتة وحجم ثابت. بيّن أيضًا، أن متوسط مربع العدد يعبر عنه بالعلاقة:

$$\overline{N^2} = \frac{(kT)^2}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \mu^2}.$$

استخدم تلك النتائج، وبيّن أن الانحراف المعياري للعدد N هو:

$$\sigma_N = \sqrt{kT(\partial \bar{N} / \partial \mu)}$$

متفقاً مع السؤال (18.6) وأخيراً، طبق هذه الصيغة على غاز مثالي، واحصل على تعبير بسيط للانحراف المعياري σ_v بدلالة N ، وناقش نتائجك باختصار.

السؤال 7.7: لقد اشتقت المعادلة $F = -kT \ln Z$ التي تربط بين طاقة هلمهولتز الحرة، ودالة التجزيء العادية. استخدم تبريرات مماثلة لاشتقاق المعادلة

$$\Phi = -kT \ln Z$$

حيث Z دالة التجزيء العظمى، و Φ الطاقة الحرة العظمى، التي سبق أن تعرضنا لها في السؤال (23.5).

2.7 البوزونات والفيروميونات Bosons and Fermions

إن أهم التطبيقات لمعاملات جيبس، هي الإحصاء الكمي الذي يتعامل مع الأنظمة المكثفة التي غالباً ما يكون فيها جسيمان أو أكثر يشغلان حالة الجسيم المنفرد نفسها، وبفرض معقولة. في هذه الأوضاع يصبح الاشتقاق الذي عرض في الجزء (6.6)، لدالة تجزيء نظام مكون من عدد N من الجسيمات المتماثلة غير المتفاعلة.

$$(16.7) \quad Z = \frac{1}{N!} Z_1^N,$$

غير صحيح؛ لأن المعامل $N!$ ، الذي يعطي عدد الطرق التي تتبادل فيها الجسيمات مختلف مستويات الطاقة يصلح فقط، إذا كانت الجسيمات المختلفة دائماً في حالات مختلفة. (في هذا الجزء، ستستخدم كلمة "حالة" لتمثيل حالة جسيم منفرد، ومصطلح "حالة النظام" لتصف حالة النظام كله).

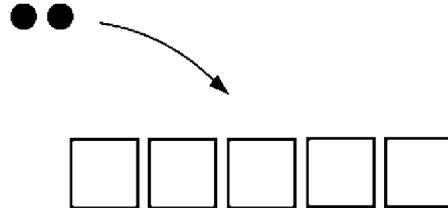
ولزيادة فهم الأمر، نبدأ بمثال بسيط جداً، وهو نظام مكون من جسيمين غير متفاعلين، يمكن لأي منهما شغل أي من الحالات الخمس المتاحة (انظر الشكل 3.7). تخيل أن الحالات الخمس هذه جميعها لها الطاقة نفسها، صفر، وعليه، فإن كلا من معاملات بولتزمان يساوي واحدًا (وعليه، فإن $Z = \Omega$).

عندما يكون الجسيمان غير متماثلين، فكل منهما يمكنه شغل أي من الحالات الخمس، وعليه، فإن عدد حالات النظام $Z = 5 \times 5 = 25$. لكن إذا كان الجسيمان متماثلين، فإن المعادلة (16.7) تنتجاً بقيمة Z على الصورة $Z = \frac{5^2}{2} = 12.5$ ، لكن هذا لا يمكن أن يكون صحيحاً، حيث إن Z لهذا النظام يجب أن تكون عدداً صحيحاً.

لذا، لنعد عدد حالات النظام بحذر أكبر، وبسبب تماثل الجسيمين، فإن المهم هو عدد الجسيمات في أي حالة من تلك الحالات الخمس، ويمكن تمثيل أي حالة من حالات النظام بسلسلة مكونة من خمسة أعداد صحيحة، كل من هذه الأعداد يمثل عدد الجسيمات في الحالة المعينة. فمثلاً السلسلة 01100 تمثل حالة النظام التي يُشغل فيها المستويان الثاني والثالث بجسيم واحد لكل منهما، وتكون بقية المستويات شاغرة.

الشكل 7-3: نموذج يمثل خمس حالات

مختلفة لجسيم منفرد، وبوجود جسيمين لشغل هذه الحالات.



ونكتب الآن الحالات المختلفة جميعها للنظام:

11000	01010	20000
10100	01001	02000
10010	00110	00200
10001	00101	00020
01100	00011	00002

إذا افترضت، أن الحالات هي هزازات توافقية بسيطة، وأن الجسيمات وحدات طاقة، فيمكن تعداد حالات النظام بالطريقة نفسها، كما لو أن النظام أحد جوامد أينشتاين).

إن العدد الكلي لحالات النظام المختلفة هو 15. وفي 10 حالات منها، يكون الجسيمان في حالتين مختلفتين، وفي الخمس الأخرى، يكون الجسيمان في الحالة نفسها. وإذا كان الجسيمان غير متماثلين، فإن الحالات العشر الأولى تصبح عشرين حالة؛ لأنه بالإمكان وضع الجسيمين بترتيب مختلف في الحالتين المعينتين (بتبادل الجسيمين موقعيهما). وعليه، فإن العدد الكلي لحالات النظام المختلفة يصبح $(25 = 20 + 5)$ ، وهو العدد نفسه أندي حصل عليه في الفقرة السابقة. إن المعامل $N!$ في المعادلة (16.7)، يحول بطريقة صحيحة العدد 20 إلى العدد 10، لكنه بطريقة غير صحيحة يحول عدد الحالات الخمس الأخرى إلى 2.5.

ولعلك قد لاحظت أننا افترضنا أن الجسيمين المتماثلين قد يشغلان الحالة نفسها. وفي واقع الأمر، هناك بعض الجسيمات التي يمكنها شغل الحالة نفسها، وهناك أيضاً جسيمات لا يمكنها شغل الحالة نفسها معاً. تسمى الجسيمات التي يمكنها شغل الحالة نفسها مع جسيم آخر من النوع نفسه البوزونات⁽⁶⁹⁾ التي تتضمن الفوتونات والبيونات، وذرات الهيليوم الرباعي، ومجموعة مختلفة أخرى. ولا توجد حدود على عدد البوزونات المتماثلة التي تشغل الحالة نفسها. لكن التجارب العملية بينت أن هناك أنواعاً كثيرة من الجسيمات، التي لا يمكنها التشارك في الحالة نفسها مع جسيم من النوع نفسه، وليس ذلك بسبب تنافر الجسيمات بعضها مع بعض، ولكن بسبب بعض الأمور الكمية، التي لا يوجد مجال لمناقشتها في الكتاب. (يمكن الرجوع إلى الملحق أ للمزيد من النقاش في هذا الموضوع).

نسمي هذه الجسيمات الفيروميونات⁽⁷⁰⁾، وتتضمن الإلكترونات، والبروتونات، والنيوترونات، والنيوتريونات، وذرات الهيليوم، وجسيمات أخرى.

في المثال السابق، لو أن الجسيمات كانت فيرميونات متماثلة، فإن حالات النظام الخمس في العمود الأخير تكون غير مسموح بها، وعليه، فإن دالة التجزيء Z تصبح فقط 10 وليس 15. (في المعادلة 16.7)، كل حالة نظام بجسيمين متماثلين في الحالة نفسها، تُعدّ نصف حالة؛ لذا فإن الصيغة تصل بين الصيغة الصحيحة لفيرميونات، والصيغة الصحيحة للبوزونات). ويسمى القانون الذي ينص على أنه من غير الممكن لاثنتين من الفيروميونات المتماثلة شغل الحالة نفسها، مبدأ باولي للاستثناء.

(69) نسبة إلى ساتندرا ناث بوز، الذي قدم عام 1924 الطريقة التي استخدمت للتعامل مع الفوتونات في الجزء 4.7، وقد عمّمها أينشتاين على بقية الفوتونات.

(70) نسبة لأثريكو فيرمي الذي أظهر تداعيات مبدأ الاستثناء على الميكانيك الإحصائي عام 1926، وكان بول ديراك قد عمل الشيء نفسه في العام نفسه.

ويمكن معرفة أي من الجسيمات يكون بوزوناً، وأياًها فيرميوناً بمعرفة الزخم المغزلي للجسيم. فالجسيمات التي يكون زخمها المغزلي عدداً صحيحاً من وحدات $h/2\pi$ (0, 1, 2, 3, ...)، هي بوزونات، في حين أن الجسيمات التي يكون زخمها المغزلي عدداً فردية من أنصاف تلك الوحدة (1/2, 3/2, etc)، فهي فيرميونات. إن هذا القانون ليس تعريفاً للبوزونات أو الفيرميونات، لكنه حقيقة من حقائق الطبيعة، ومن التبعات العميقة لنظريات الفيزياء النسبية، والكمية (التي أول من اشتقها ولفجانج باولي)، وفي كثير من الحالات، فليس مهماً أكانت الجسيمات بوزونات أو فيرميونات خاصة، إذا كان عدد حالات الجسيم المنفرد أكبر كثيراً من عدد الجسيمات الموجودة.

$$(17.7) \quad z_1 \gg N,$$

حيث تكون فرصة أن يرغب الجسيمان في شغل الحالة المفقودة نفسها، وبدقة أكبر، فإن جزءاً صغيراً فقط من حالات النظام تكون مشغولة بجسيمين معاً. ولنظام غاز مثالي تعطى دالة التجزئ للجسيم المنفرد $Z_1 = \frac{V z_m}{v_0}$ ، حيث Z_m عدد صغير إلى حد ما، و v_0 الحجم الكمي الذي يعطى من العلاقة.

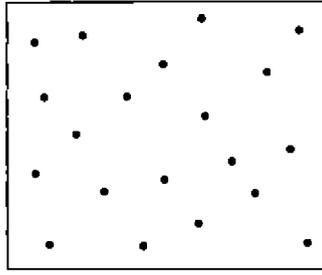
$$(18.7) \quad v_0 = \ell_0^3 = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}} \right)^3,$$

وهذا يساوي تقريباً مكعباً متوسطه طول موجة ديبرولي. وحتى تكون الصيغة ($Z = Z_1^N / N!$) قابلة للاستخدام، فإن الشرط (17.7) يتحول إلى الصورة الآتية:

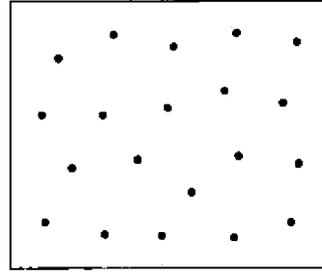
$$(19.7) \quad \frac{V}{N} \gg v_0$$

التي تنص على كون متوسط البعد بين جسيمين اثنين، أكبر كثيراً من متوسط طول موجة ديبرولي. ولو اتخذنا الهواء الذي نستنشقه مثلاً، فإن البعد بين الجسيمين بحدود 3 nm، في حين أن متوسط طول موجة ديبرولي أقل من 0.02 nm، وعليه، فإنه من المؤكد أن الشرط (19.7) يتحقق لهذه الحالة. ولا بد من ملاحظة أن هذا الشرط لا يعتمد فقط على كثافة النظام، لكن أيضاً على درجة الحرارة، وكتلة الجسيمات التي تدخل في الحجم الكمي v_0 .

ومن الصعب، تخيل ما قد يحصل في غاز، إذا انهار الشرط (17.7)، عندما يبدأ عدد من الجسيمات محاولة شغل الحالات نفسها معاً. إن أفضل ما يمكن فعله بهذا الخصوص، على الرغم من عدم دقته، ما هو مبيّن في الشكل (4-7). تصور، أن كل جسيم قد نشر على دالة موجة كمية، تملأ حجماً مساوياً للحجم الكمي v_0 ، (هذا يكافئ وضع الجسيم في دالة موجة محددة قدر الإمكان في الفضاء، ولحصّهم في دوال أمواج أقل عرضاً، يؤدي إلى وجود يقينية كبيرة في الزخم مقارنة بالزخم المتوسط h/ℓ_0 ؛ لذا ترتفع طاقة النظام ودرجة حرارته). (عادة يكون الحجم الكمي أصغر من الحجم الفيزيائي للجزيء. لكن إذا كان الغاز ذا كثافة عالية، أو إذا كان الحجم الكمي v_0 كبيراً، فإن دوال الأمواج تبدأ بالتماس أو التقاطع، عند هذه النقطة، تبدأ أهمية كون الجسيمات بوزونات أو فيرميونات بالظهور، وفي جميع الحالات، فإن تصرف النظام سيختلف كثيراً عن تصرفه في حالة الغاز العادي.



غاز عادي، $V/N \gg v_Q$



غاز كمي، $V/N \approx v_Q$

الشكل 7-4: تكون المسافات بين الجسيمات، في الغاز العادي، أكبر كثيرًا من الحجم الاعتيادي لدوال الأمواج للجسيمات. عندما تبدأ دوال الأمواج بالتماس، والتقاطع يسمى النظام الغاز الكمي.

السؤال 8.7: افترض وجود صندوق، تتوافر فيه عشر حالات جسيم منفرد، وافترض أن أي جسيم في الصندوق، يمكنه شغل أي من تلك الحالات العشر. وللتسهيل، افترض أن طاقة الحالات العشر كلها تساوي صفرًا، فما دالة التجزيء للنظام في حالة وجود:

- جسيم واحد في الصندوق؟
- جسيمين غير متماثلين في الصندوق؟
- بوزونين متماثلين في الصندوق؟
- فيرمونيين متماثلين في الصندوق؟
- ماذا يمكن أن تكون دالة التجزيء للنظام اعتمادًا على المعادلة (16.7)؟
- ما احتمال وجود الجسيمين معًا في الحالة الواحدة نفسها، إذا كان الجسيمان غير متماثلين، بوزونين متماثلين أو فيرمونيين متماثلين؟

السؤال 9.7: احسب الحجم الكمي لجزيء من النيتروجين N_2 ، عند درجة حرارة الغرفة، وبين أن غازًا من هذه الجزيئات تحت ضغط جوي، يمكن التعامل معه باستخدام معاملات بولتزمان. فعند أي درجة حرارة يصبح الإحصاء الكمي ضروريًا للتعامل مع هذا النظام؟ (محافظة على الكثافة ومفترضًا أن الغاز يبقى في الحالة الغازية).

السؤال 10.7: افترض أن نظامًا مكونًا من خمسة جسيمات في داخل وعاء، حيث المستويات غير متشعبة، ولها التباعد نفسه، فمثلًا يمكن أن تكون الجسيمات محصورة في جهد هزاز توافقي أحادي الأبعاد. في هذا السؤال، سنتعامل مع حالات النظام المسموح بها، اعتمادًا على كون الجسيمات: فيرميونات متماثلة، بوزونات متماثلة، أو جسيمات غير متماثلة.

- صف الحالة الأرضية للنظام لكل نوع من أنواع الجسيمات الثلاثة.
- مفترضًا أن للنظام وحدة طاقة واحدة فوق الحالة الأرضية، فصف الحالات الممكنة للنظام لكل نوع من أنواع الجسيمات الثلاثة. وما عدد حالات النظام الممكنة لكل حالة من الحالات الثلاث السابقة؟
- أعد الحسابات في الجزء (ب) لحالة وحدتي طاقة، وحالة ثلاث وحدات طاقة فوق الحالة الأرضية.
- افترض أن درجة حرارة النظام منخفضة، على أن تكون الطاقة الكلية منخفضة، (ليس بالضرورة صفرًا). وكيف سيختلف تصرف النظام المكون من البروزونات عنه، لنظام مكون من جسيمات غير متماثلة؟ اشرح إجابتك.

دالة التوزيع The Distribution Function

عندما يخالف النظام الشرط $Z_1 \gg N$ ، عندئذٍ لا يمكن أن نعامله باستخدام طرق الوحدة السادسة، ونستخدم عوامل جيبس بدلاً من ذلك. الفكرة تكمن في أن يعامل النظام معاملة نظام مكون من حالة واحدة من حالات الجسيم المنفرد، عوضاً عن افتراضه جسيماً. لذا، يتكون النظام من دالة موجية إزاحية معينة، (وللجسيمات ذات زخم مغزلي، اصطفااف معين للزخم المغزلي) وتبدو هذه الفكرة غريبة للوهلة الأولى، حيث إننا في العادة نتعامل مع دوال أمواج بطاقات محددة، وكل دوال الأمواج هذه كلها تتشارك في حيزها مع دوال الأمواج الأخرى. وعليه، فإن النظام والمستودع يشغلان الحيز الفيزيائي نفسه، على نحو ما هو الحال في الشكل (5.7). ولحسن الحظ، فإن الرياضيات التي استخدمت لاشتقاق معامل جيبس، لا تتأثر فيما إذا كان النظام منفصلاً فراغياً عن المستودع أم لا، وعليه، فإن جميع الصيغ السابقة ما زالت صالحة لنظام بحالة جسيم منفرد لذا، نركز على حالة واحدة لجسيم منفرد واحدة في نظام (ليكن جسيماً في صندوق) ذي طاقة ϵ ، عندما يكون مشغولاً بجسيم واحد، وطاقة تساوي صفراً، عندما لا يكون مشغولاً. أما عندما تكون الحالة مشغولة بعدد n من الجسيمات، فإن طاقة النظام تساوي $n\epsilon$ ، ويكون احتمال أن تكون الحالة مشغولة بعدد n من الجسيمات معطى بالعلاقة الآتية:

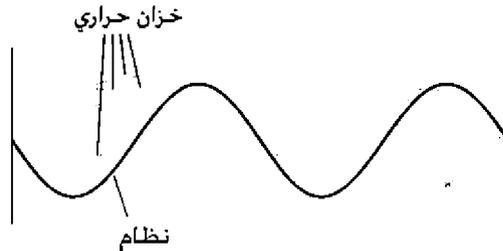
$$(20.7) \quad \mathcal{P}(n) = \frac{1}{Z} e^{-(n\epsilon - \mu n)/kT} = \frac{1}{Z} e^{-n(\epsilon - \mu)/kT}$$

حيث Z دالة التجزيء العظمى، أي مجموع معاملات جيبس لجميع قيم n المحتملة. وفي حالة الفرميونات، فإن العدد n يكون صفراً أو واحداً. وعليه، فإن دالة التجزيء العظمى يعبر عنها بالعلاقة الآتية:

$$(21.7) \quad Z = 1 + e^{-(\epsilon - \mu)/kT} \quad (\text{fermions})$$

ويمكن حساب احتمال أن تكون الحالة مشغولة أو غير مشغولة مباشرة من دالة التجزيء العظمى (المعادلة (21.7))، ويمكن أيضاً حساب متوسط عدد الجسيمات في الحالة، التي يطلق عليها «مشغولية» الحالة من العلاقة الآتية:

$$(22.7) \quad \bar{n} = \sum_n np(n) = 0 \cdot \mathcal{P}(0) + 1 \cdot \mathcal{P}(1) = \frac{e^{-(\epsilon - \mu)/kT}}{1 + e^{-(\epsilon - \mu)/kT}} \\ = \frac{\mathcal{P}}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} + 1} \quad (\text{fermions}).$$



الشكل 5.7: للتعامل مع غاز كمي باستخدام معاملات جيبس، نفترض نظاماً مكوناً من حالة واحدة من حالات الجسيم المنفرد، ويحتوي المستودع من باقي حالات الجسيم المنفرد الأخرى جميعها.

وتسمى هذه المعادلة الأخيرة توزيع فيرمي وديراك، ونرمز إليها بالرمز \bar{n}_{FD} .

$$(23.7) \quad \bar{n}_{FD} = \frac{1}{e^{-(\epsilon-\mu)/kT} + 1}.$$

ويؤول توزيع فيرمي وديراك إلى الصفر، عندما تكون $\mu \gg \epsilon$. وتؤول إلى واحد عندما تكون $\mu \ll \epsilon$. لذا، فإن الحالات ذات الطاقات الأقل كثيراً من الجهد الكيميائي، تميل إلى أن تكون مشغولة، في حين أن الحالات ذات الطاقات الأعلى كثيراً من الجهد الكيميائي، تميل إلى أن تكون غير مشغولة. أما الحالة التي تكون طاقتها تساوي تماماً الجهد الكيميائي، فإن احتمال مشغوليتها يساوي 50%. ويكون عرض تناقصها من واحد إلى صفر عددًا قليلاً من kT ، ويبين الشكل (6.7) رسمًا بيانيًا لتوزيع فيرمي وديراك، بوصفه دالة من الطاقة ϵ عند ثلاث درجات حرارة مختلفة. أما إذا كانت الجسيمات بوزونات، فإن العدد n يأخذ أي عدد صحيح موجب، وعليه فإن دالة التجزيء العظمى تصبح على النحو الآتي:

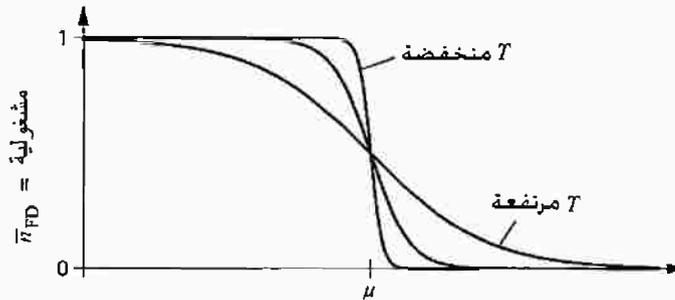
$$(24.7) \quad \begin{aligned} Z &= 1 + e^{-(\epsilon-\mu)/kT} + e^{-2(\epsilon-\mu)/kT} + \dots \\ &= 1 + e^{-\frac{(\epsilon-\mu)}{kT}} + \left(e^{-(\epsilon-\mu)/kT} \right)^2 + \dots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-\frac{\epsilon-\mu}{kT}}} \quad (\text{bosons}) \end{aligned}$$

نظرًا إلى أن معاملات جيبس لا تكبر دون حدود؛ لذا، يجب أن تكون μ أقل من ϵ . وعليه، يجب أن تتوقف السلسلة). وتكون القيمة المتوسطة لعدد الجسيمات في الحالة تساوي:

$$(25.7) \quad \bar{n} = \sum_n n \mathcal{P}(n) = 0 \cdot \mathcal{P}(0) + 1 \cdot \mathcal{P}(1) + 2 \cdot \mathcal{P}(2) + \dots.$$

وحساب المجموع نعوض $x \equiv (\epsilon - \mu) / kT$. وعليه، فإن متوسط عدد الجسيمات في الحالة يصبح على النحو الآتي:

$$(26.7) \quad \bar{n} = \sum_n n \frac{e^{-nx}}{Z} = -\frac{1}{Z} \sum_n \frac{\partial}{\partial x} e^{-nx} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial x}$$



الشكل 6.7: يبين الشكل، أن توزيع فيرمي وديراك يؤول إلى واحد للحالات كلها، ذات الطاقات المنخفضة، وإلى الصفر للحالات ذات الطاقات العالية جدًا. ويساوي (1/2) للحالة ذات الطاقة $\mu = \epsilon$. وتتناقص فجأة لدرجات الحرارة المنخفضة، وتدرجيًا لدرجات الحرارة العالية (على الرغم من تثبيت μ في هذا الرسم البياني، لكننا سنوضح في الجزء الآتي، أن μ عادة تتغير مع درجات الحرارة).

ويمكن التحقق من أن هذه الصيغة تصلح للفيرميونات، أما في حالة البوزونات، فيكون متوسط عدد الجسيمات في الحالة على النحو الآتي:

$$\bar{n} = -(1 - e^{-x}) \frac{\partial}{\partial x} (1 - e^{-x})^{-1} = (1 - e^{-x})(1 - e^{-x})^{-2} (e^{-x})$$

$$(27.7) \quad = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} - 1} \quad (\text{bosons})$$

وتسمى هذه الصيغة المهمة أيضاً توزيع بوز وأينشتاين، ونرمز إليها بالرمز \bar{n}_{BE} :

$$(28.7) \quad \bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} - 1}$$

ومثل توزيع فيرمي وديراك، فإن توزيع بوز وأينشتاين يؤول إلى الصفر، عندما تكون $\mu \gg \epsilon$ ، ولكنه عكس توزيع فيرمي وديراك، فإنه يؤول إلى ما لا نهاية، عندما تقترب ϵ من μ من الأعلى (انظر الشكل 7.7)، ويكون سالباً، فيما لو كانت $\mu \ll \epsilon$ ، لكن على نحو ما رأينا، فإن ذلك غير ممكن الحدوث. ولفهم أفضل لكل من توزيع فيرمي وديراك، وتوزيع بوز وأينشتاين، فمن المفيد أن نتساءل عن متوسط عدد الجسيمات n في الأنظمة التي تتبع إحصاء بولتزمان. في هذه الحالة، فإن احتمال وجود جسيم منفرد في حالة معينة، بطاقة ϵ ، يُعبر عنه بالعلاقة الآتية:

$$(29.7) \quad p(s) = \frac{1}{Z_1} e^{-\epsilon/kT} \quad (\text{Boltzmann})$$

لذا، فالقيمة المتوسطة لعدد الجسيمات في هذه الحالة، عند وجود N من الجسيمات المستقلة، يُعبر عنها بالعلاقة الآتية:

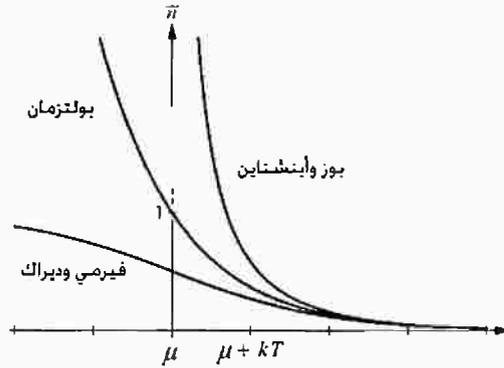
$$(30.7) \quad \bar{n}_{Boltzmann} = NP(s) = \frac{N}{Z_1} e^{-\epsilon/kT}$$

لكن نظراً إلى أن الجهد الكيميائي μ ، لمثل هذا النظام، يُعبر عنه بالعلاقة $\mu = -kT \ln(Z_1/N)$ (السؤال 44.6)، فإن متوسط عدد الجسيمات، يصبح على النحو الآتي:

$$(31.7) \quad \bar{n}_{Boltzmann} = e^{\mu/kT} e^{-\epsilon/kT} = e^{-(\epsilon-\mu)/kT}$$

وتكون الدالة الأسية صغيرة جداً، عندما تكون ϵ أكبر كثيراً من μ ؛ لذا يمكن إهمال العدد 1 في مقام توزيع فيرمي وديراك (23.7)، ومقام توزيع بوز وأينشتاين (28.7)، فيتحول كلاهما إلى توزيع بولتزمان (31.7). تتفق التوزيعات الثلاثة عند تحقق الشرط $(\epsilon-\mu)/kT \gg 1$ ، وإذا أخذنا طاقة أقل الحالات طاقة $\epsilon \approx 0$ ، عندها سيتحقق هذا الشرط للحالات جميعها، كلما كانت $[-kT \ll \mu]$ ، وهذا يعني أن $Z_1 \gg N$ ، وهو الشرط نفسه الذي توصلنا إليه بطرق أخرى في بداية هذا الفصل.

نحن الآن نعرف، كيف نحسب متوسط عدد الجسيمات التي تشغل حالة جسيم منفرد بدلالة طاقة الحالة، درجة الحرارة والجهد الكيميائي سواءً أكانت الجسيمات فيرميونات أم بوزونات. ولتطبيق هذه الأفكار على نظام معين، لا بد من معرفة طاقات جميع الحالات المتاحة للنظام، ويُعد ذلك إحدى مسائل ميكانيكا الكم، وفي كثير من الأحيان يكون الحصول على تلك الطاقات صعباً للغاية للكثير من الأنظمة. سنتعامل في هذا الكتاب، على الأغلب مع جسيمات في صندوق، حيث دوال الأمواج الكمية موجات توافقية، ويمكن حساب الطاقة لهذه الحالات بطريقة سهلة مباشرة.



الشكل 7.7: مقارنة بين التوزيعات الثلاثة: توزيع فيرمي وديراك، وتوزيع بوز وأينشتاين وتوزيع بولتزمان. الجهد الكيميائي للتوزيعات الثلاثة متساوٍ. عندما تكون $(\epsilon - \mu) / kT \gg 1$ تتطابق التوزيعات الثلاثة.

ويمكن، أن تكون الجسيمات إلكترونات في معدن، أو نيوترونات في نجم نيوتروني، أو ذرات في الموائع عند درجات حرارة منخفضة جدًا، أو فوتونات في فرن ساخن أو حتى "فونونات"، الوحدات المكممة للطاقة الاهتزازية لجسم صلب.

لا بد من معرفة الجهد الكيميائي في جميع التطبيقات السابقة، قبل البدء بتطبيق توزيع فيرمي وديراك، أي توزيع بوز وأينشتاين على النظام المعني. إن تحديد الجهد الكيميائي سهل لبعض الحالات، ولكنه في حالات أخرى يكون صعبًا، ويتطلب جهدًا كبيرًا. إن الجهد الكيميائي μ ، على نحو ما سنرى لاحقًا، يعتمد عادة، بطريقة غير مباشرة، على العدد الكلي للجسيمات الموجودة في النظام.

السؤال 11.7: لنظام مكون من الفيروميونات، عند درجة حرارة الغرفة، احسب احتمال شغل حالة الجسيم المنفرد، إذا كانت طاقتها:

- (أ) أقل من μ بمقدار 1 eV.
- (ب) أقل من μ بمقدار 0.01 eV.
- (ج) تساوي μ .
- (د) أكبر من μ بمقدار 0.01 eV.
- (هـ) أكبر من μ بمقدار 1 eV.

السؤال 12.7: افترض، وجود حالتين جسيم منفرد A و B ، لنظام من الفوتونات، بطاقتين مختلفتين $\epsilon_A = \mu - x$ و $\epsilon_B = \mu + x$ ، على أن يقع المستوى $\epsilon = \mu$ وسط المستويين A و B تمامًا، وأثبت أن احتمال أن يكون المستوى A مشغولًا، يساوي احتمال أن يكون المستوى B غير مشغول. بطريقة أخرى توزيع فيرمي وديراك متماثل عند النقطة $\epsilon = \mu$.

السؤال 13.7: احسب المشغولية لحالة جسيم منفرد لنظام من البوزونات عند درجة حرارة الغرفة، واحسب احتمال أن يكون عدد البوزونات في هذه الحالة $n = 0, 1, 2, 3$ ، عندما تكون طاقة الحالة أعلى من μ بمقدار:

- (أ) 0.001 eV
- (ب) 0.01 eV
- (ج) 0.1 eV
- (د) 1 eV

السؤال 14.7: لنظام مكون من جسيمات، عند درجة حرارة الغرفة، ماذا يجب أن يكون الفرق $(\epsilon - \mu)$ ، حتى تتفق التوزيعات الثلاثة: فيرمي وديراك، وبوز وأينشتاين، وبولتزمان بحدود (1%)، وهل يمكن مخالفة هذا الشرط للغازات في غلاف الأرض الجوي؟ وضح إجابتك.

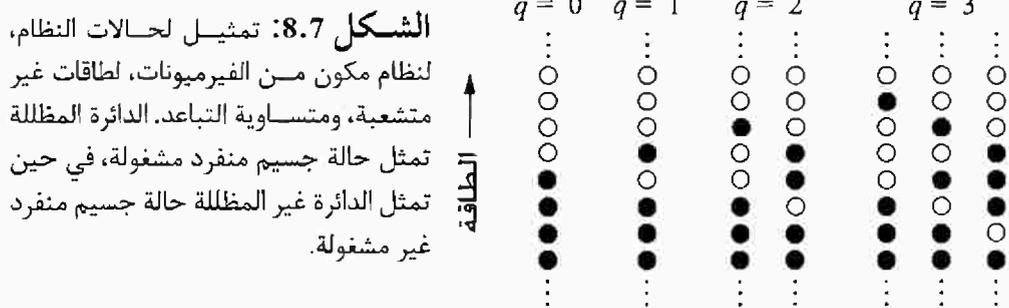
السؤال 15.7: لقد أعطي في الوحدة السادسة قيمة μ لنظام يتبع إحصاء بولتزمان. ولكن افترض معرفة دالة التوزيع (لمعادلة (31.7))، مع عدم معرفة μ . ومع ذلك، فإنه بالإمكان حساب μ ، بأخذ مجموع الجسيمات التي تشغل جميع الحالات للجسيم المنفرد مساوياً للعدد N . أجر تلك الحسابات، لإعادة اشتقاق الصيغة $\mu = -kT \ln(Z_1 / N)$ ، هذه الطريقة تستخدم عادة لحساب μ في الإحصاء الكمي، علماً بأن الرياضيات تكون أصعب كثيراً.

السؤال 16.7: افترض نظاماً معزولاً مكوناً من N من الفيرميونات المتماثلة داخل وعاء، حيث إن الطاقات المسموح بها غير متشعبة ومتساوية الأبعاد⁽⁷¹⁾. ومثال على ذلك، الفيرميونات المحصورة في جهد هزاز توافقي أحادي الأبعاد. وللتبسيط، نهمل أن الفيرميونات لها عدد من ترتيبات الزخم المغزلي، (أو نفترض أنها أجبرت قسرياً لتكون في الترتيب نفسه). بناءً على ذلك، فإن أيّاً من مستويات الطاقة، إما أن يكون مشغولاً أو غير مشغول، وأن أي حالة للنظام تمثل على صورة عمود من الدوائر الصغيرة، تمثل فيها الدائرة المظلمة مستوى مشغولاً، والدائرة غير المظلمة مستوى غير مشغول. وتكون المستويات جميعها، في الحالة الأقل طاقة للنظام، تحت نقطة معينة مشغولة، أما المستويات جميعها فوق تلك النقطة فغير مشغولة. لنفترض أن التباعد بين مستويات الطاقة η ، وأن q تمثل عدد وحدات الطاقة الزائدة، (كل منها قيمته η) عن طاقة الحالة الأرضية، ونفترض أيضاً أن $q < N$. وبين الشكل (7.8) حالات النظام كلها لقيم $q = 3$.

(أ) ارسم شكلاً مشابهاً للشكل (8.7)، يبين الحالات جميعها المسموح بها للنظام لقيم $q = 4, 5, 6$.

(ب) اعتماداً على الافتراض الأساسي أن احتمال الحالات جميعها، ذات القيمة المحددة نفسها q متساو، احسب احتمال أن يكون أي مستوى من مستويات الطاقة مشغولاً، عندما تكون $q = 6$ بوصفها دالة من طاقة المستوى، ثم ارسم منحنى لهذا الاحتمال.

(ج) يعطى احتمال أن يكون أحد المستويات مشغولاً، بدلالة توزيع فيرمي وديراك، عندما تكون q كبيرة. وعلى الرغم من أن القيمة 6 للمتغير q ، ليست قيمة كبيرة، قدر قيم كل من μ و T التي يجب استخدامها في توزيع فيرمي وديراك ليتطابق مع المنحنى، في الفرع ب، بأفضل طريقة ممكنة.



(71) هذا السؤال والسؤال 27.7 مبنيان على مقالة لمجموعة أرنود منشورة

(د) احسب الإنتروبي للنظام لكل قيم q في المدى $6 \rightarrow 0$ ، وارسم منحنى للإنتروبي بوصفها دالة للطاقة. احصل على قيمة تقريبية لميل المنحنى بالقرب من النقطة $q = 6$ ، لتحصل على تقدير آخر لدرجة حرارة النظام عند تلك النقطة. وتحقق من أنها متفقة تقريبًا مع الجواب للفرع ج.

السؤال 17.7: مشابه للسؤال السابق، افترض وجود نظام بوزونات متماثلة، وبزخم مغزلي يساوي صفرًا، محصور في منطقة، مستويات الطاقة فيها متساوية التباعد. افترض أيضًا أن عدد البوزونات N كبير جدًا، وخذ q لتمثل عدد وحدات الطاقة الزائدة على طاقة الحالة الأرضية للنظام.

(أ) ارسم أشكالًا، مماثلة للشكل (8.7) لتمثيل حالات النظام جميعها المسموح بها لقيم q الواقعة في المدى $0 < q \leq 6$. بدلاً من استخدام الدوائر الصغيرة مثل السؤال السابق، استخدم أرقامًا لإظهار عدد البوزونات التي تشغل أيًا من المستويات.

(ب) احسب المشغولية لكل مستوى من مستويات الطاقة عند $q = 6$ ، وارسم منحنى للمشغولية بوصفها دالة من طاقة المستوى.

(ج) قدر قيم كل من T و μ في توزيع بوز وأينشتاين؛ كي يتفق مع المنحنى في الجزء (ب)، بأفضل صورة ممكنة.

(د) على نحو ما فعلت في الجزء (د) من السؤال السابق، ارسم منحنى الإنتروبي بوصفها دالة من الطاقة، وقدر درجة حرارة النظام، عند $q = 6$ ، من المنحنى.

3.7 غازات فيرمي المتشعبة Degenerate Fermi Gasses

وتطبيقًا على الإحصاء الكمي، وتوزيع فيرمي، سندرس غازًا من الفيرميونات، عند درجات حرارة منخفضة جدًا. وقد تكون هذه الفيرميونات: ذرات الهيليوم الثلاثي، أو بروتونات، أو نيوترونات في نواة الذرة، أو إلكترونات في النجم القزم الأبيض، أو نيوترونات في نجم نيوتروني. لكن أكثر الأمثلة شيوعًا هي الإلكترونات الحرة داخل جزء من مادة معدنية. وفي هذا الجزء سنستخدم كلمة إلكترون بالتحديد، على الرغم من أن النتائج تصلح للأنواع الأخرى من الفيرميونات.

عند التحدث عن درجة حرارة منخفضة، فليس المقصود هنا، أنها منخفضة مقارنة بدرجة حرارة الغرفة مثلًا، لكنها تعني أن الشرط اللازم لتطبيق إحصاء بولتزمان على غاز مثالي، $v_Q \gg v/N$ ، قد خولف كثيرًا، حيث يصبح الوضع $v_Q \ll v/N$. عندها نتحدث عن درجات حرارة منخفضة. إن الحجم الكمي للإلكترون عند درجة حرارة الغرفة يُعبر عنه بالعلاقة الآتية:

$$(32.7) \quad v_Q = \left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k T}} \right)^3 = (4.3 \text{ nm})^3.$$

وفي المعادن التقليدية، فإن عدد الإلكترونات التوصيلية هو إلكترون واحد لكل ذرة؛ لذا، فإن الحجم لكل إلكترون توصيلي، هو حجم الذرة $(0.2 \text{ nm})^3$ ، وعليه فإن درجة الحرارة تُعد منخفضة جدًا لتطبيق إحصاء بولتزمان، لكننا من حيث درجة الحرارة، نقع في الجهة الأخرى، ويمكننا لأغراض كثيرة افتراض أن درجة الحرارة صفر. وبناءً على ذلك، ندرس صفات الغاز عند درجة حرارة الصفر، وبعد ذلك نسأل عن المتغيرات التي تنتج، عندما تكون درجات الحرارة الصغيرة غير صفرية.

درجة حرارة الصفر Zero Temperature

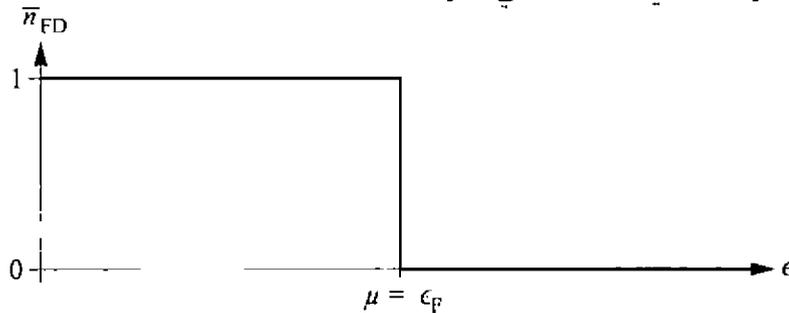
يصبح توزيع فيرمي وديراك، عند $T = 0$ ، على صورة دالة العتبة (انظر الشكل 9.7). إن جميع حالات الجسيم المنفرد، عند $T = 0$ ، ذوات الطاقات الأقل من μ تكون مشغولة، في حين أن الحالات جميعها بطاقات أعلى من μ تكون غير مشغولة. وفي هذا السياق، فإن μ يطلق عليها أيضًا طاقة فيرمي ϵ_F ويعبر عنها بالعلاقة:

$$(33.7) \quad \epsilon_F \equiv \mu(T = 0).$$

وعندما يكون غاز الفيرميونات باردًا جدًا، حيث تكون معظم الحالات الواقعة تحت ϵ_F مشغولة، ومعظم الحالات فوق ϵ_F غير مشغولة، يطلق عليه اسم الغاز المتشعب (كلمة تشعب هنا، لا ترتبط بالتشعب في (الحالات الكمية).) وتحدد قيمة ϵ_F عن طريق العدد الكلي للإلكترونات الموجودة. تخيل صندوقًا فارغًا يضاف إليه إلكترون واحد تلو الآخر، دون أي إضافة للطاقة. في هذه الحالة، فإن كل إلكترون يضاف إلى الصندوق، يحتل أقل مستوى طاقة متاح، إلى أن يحتل الإلكترون الأخير مستوى ذا طاقة مباشرة تحت طاقة فيرمي. ولوضع إلكترون إضافي للصندوق، فلا بد من تزويده بكمية من الطاقة تساوي بالضرورة طاقة فيرمي ($\epsilon_F = \mu$). في هذا السياق، فإن الصيغة $\mu = (\partial U / \partial N)_{S,V}$ ، تقدم منطقيًا فيزيائيًا دقيقًا؛ نظرًا لأن $dU = \mu$ عندما تكون $dN=1$ (و S مثبتة على الصفر، عندما تكون الإلكترونات جميعها مرتبة في حالة النظام الأقل طاقة).

ولحساب طاقة فيرمي ϵ_F ، إضافة إلى كميات فيزيائية أخرى ذات أهمية كالتحليلية والضغط في غاز من الإلكترونات، سنقرب الإلكترونات بوصفها جسيمات حرة، لا تتأثر بأي قوى على الإطلاق، لكنها محصورة بداخل صندوق، حجمه $V = L^3$. إن هذا التقريب، ليس دقيقًا، خصوصًا للإلكترونات التوصيلية في المعدن، على الرغم من أن إهمال القوى الكهروستاتيكية طويلة المدى في أي مادة متعادلة كهربائيًا أمر معقول. فإن كل إلكترون توصيلي، لا يزال يتأثر بقوى تجاذبية، مع الأيونات القريبة في شبكة البلورة. لكننا سنقوم أيضًا بإهمال تلك القوى⁽⁷²⁾.

إن دوال الأمواج، ذوات الطاقات المحددة، للإلكترونات الحرة بداخل الصندوق، هي أمواج توافقية تمامًا، كالتالي كانت لغاز الجزيئات الذي تعاملنا معه في الجزء (7.6).



الشكل 9.7: عند درجة حرارة الصفر $T = 0$ ، فإن توزيع فيرمي وديراك يساوي واحدًا للحالات جميعها، التي تحقق ($\epsilon < \mu$)، وصفرًا للحالات التي تحقق ($\epsilon > \mu$).

(72) الأسئلة 33.7 و 34.7 تتعامل مع بعض تأثيرات شبكة البلورة على إلكترونات التوصيل. للزيادة في التفاصيل، انظر بعض الكتب المتخصصة في

فيزياء الجوامد، مثل (1996) Kittle أو (1976) Ashcroft and Mermin.

إن كثافة وأطوال الأمواج المسموح بها في صندوق ذي بعد واحد، هي أيضًا (كالسابق):

$$(34.7) \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}, \quad p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{hn}{2L}$$

حيث n أي عدد صحيح موجب، أما في حالة صندوق ذي ثلاثة أبعاد، فإن هذه المعادلات تطبق على الإحداثيات الثلاثة x, y, z على نحو منفصل لتعطي:

$$(35.7) \quad p_x = \frac{hn_x}{2L}, \quad p_y = \frac{hn_y}{2L}, \quad p_z = \frac{hn_z}{2L}$$

حيث (n_x, n_y, n_z) هي مجموعة ثلاثية من الأعداد الصحيحة الموجبة، وعليه فإن الطاقات المسموح بها هي:

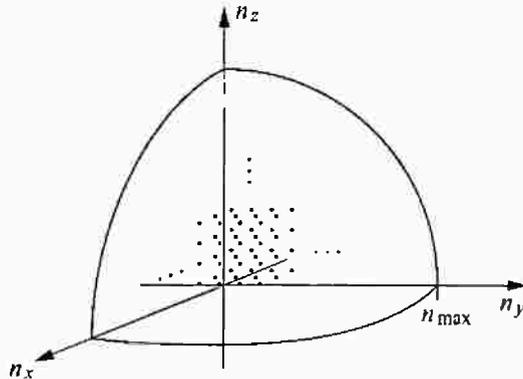
$$(36.7) \quad \epsilon = \frac{|\vec{P}|^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

ولإظهار مجموعة الحالات المسموح بها، نرسم صورة للفضاء ذي الأبعاد n ، الفضاء ثلاثي الأبعاد، الذي محاوره (n_x, n_y, n_z) . (انظر الشكل 10.7). إن كل متجه \vec{n} مسموح به يرتبط بنقطة في هذا الفضاء، ذات إحداثيات صحيحة موجبة، وإن مجموعة الحالات الكلية المسموح بها، تكون شبكة هائلة، تملأ الثمن الأول من الفراغ ذي الأبعاد n ، وفي حقيقة الأمر، فإن كل نقطة في الشبكة، تمثل حالتين، حيث إنه لكل حالة فضائية (دالة موجبة فضائية)، هناك حالتا اصطفااف مستقلتان للزخم المغزلي.

إن طاقة أي حالة من الحالات في الفضاء ذي الأبعاد n ، تتناسب مع مربع البعد عن نقطة الأصل $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$. لذا فبعد إضافة الإلكترونات إلى الصندوق، فإنها تستقر في الحالات، التي تبدأ من نقطة الأصل، وتوسع تدريجيًا لخارج. عندما تنتهي من إضافة الإلكترونات، يكون عدد الحالات المشغولة كبيرًا جدًا، حيث تصبح المنطقة المشغولة في الفضاء، ذي الأبعاد n ، ثمن كرة. (إن خشونة الأطراف، ليس لها أهمية مقارنة بالحجم الهائل للكرة كلها). ويطلق على نصف قطر هذه الكرة n_{max} .

وتصبح الآن عملية الربط بين عدد الإلكترونات الكلي، N ، مع الجهد الكيميائي أو طاقة فيرمي $(\mu = \epsilon_F)$ عملية سهلة. فمن جهة، فإن طاقة فيرمي ϵ_F ، هي طاقة المستوى الموجود مباشرة على سطح الكرة في الفضاء ذي الأبعاد n ويعبر عنها على النحو الآتي:

$$(37.7) \quad \epsilon_F = \frac{h^2 n_{max}^2}{8mL^2}.$$



الشكل 10.7: تمثل كل مجموعة ثلاثية من الأعداد الصحيحة (n_x, n_y, n_z) زوجًا من حالات الإلكترون ذوات الطاقات المحددة (واحدة لكل اصطفااف للزخم المغزلي). إن مجموعة الحالات المستقلة جميعها تملأ الثمن الموجب من الفراغ ذي الأبعاد n .

ومن الجهة الأخرى، فإن الحجم الكلي لثمن كرة في الفراغ ذي الأبعاد n ، يساوي عدد نقاط الشبكة الموجودة داخله؛ نظرًا إلى أن التباعد بين نقاط الشبكة يساوي واحدًا في الاتجاهات الثلاثة كلها. وعليه، فإن العدد الكلي للحالات المشغولة، هو ضعف هذا الحجم (بسبب توافر نوعين من الاصطفافات للزخم المغزلي).

$$(38.7) \quad N = 2 \times (\text{كرة بحجم ثمانية}) = 2 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi n^3_{max} = \frac{\pi n^3_{max}}{3}.$$

وبأخذ هاتين المعادلتين معًا، نحصل على طاقة فيرمي بدلالة N والحجم $V = L^3$ للصندوق على النحو الآتي:

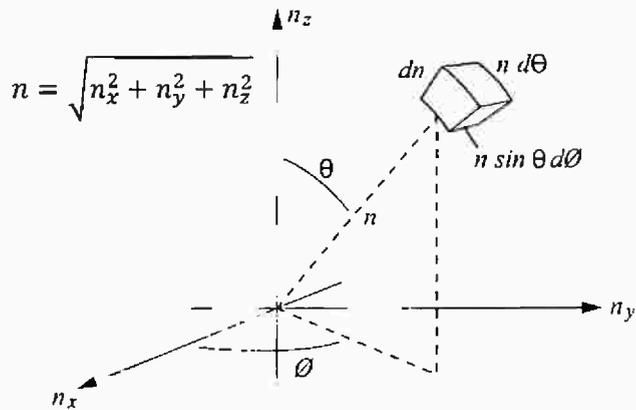
$$(39.7) \quad \epsilon_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}$$

وبلاحظ أن هذه الكمية صفة ذاتية، حيث تعتمد على الكثافة العددية للإلكترونات N/V ، فقط. وعند حساب طاقة فيرمي لأوعية أكبر، وزيادة متناسبة في عدد الإلكترونات، نجد أنها تبقى، كما هي للصندوق (الأول). وعلى الرغم من طاقة فيرمي، حيث اشتقت لإلكترونات داخل صندوق مكعب الشكل، لكنها تصلح في الواقع لأوعية جاهزية (أو قطع معدنية)، بغض النظر عن أشكالها. إن طاقة فيرمي هي أعلى طاقة ممكنة لكل الإلكترونات، وفي المتوسط تكون طاقة الإلكترونات أقل من ϵ_F ربما أعلى قليلاً من $(\frac{\epsilon_F}{2})$. ولدقة أكثر نجري تكاملاً لحساب الطاقة الكلية للإلكترونات، وعند قسمة هذه الطاقة الكلية على عدد الإلكترونات، نحصل على متوسط الطاقة.

لحساب الطاقة الكلية للإلكترونات جميعها، نجمع طاقاتها في الحالات المشغولة جميعها، وهذا يتضمن مجموعًا ثلاثيًا على الأعداد (n_x, n_y, n_z) .

$$(40.7) \quad U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \epsilon(\vec{n}) = 2 \int \int \int \epsilon(\vec{n}) dn_x dn_y dn_z.$$

وقد أضيف المعامل 2 الذي يظهر في المعادلة، لأخذ نوعي اصطفاف الزخم المغزلي في الحسبان. ويمكن تحويل المجموع الثلاثي إلى تكامل ثلاثي، على نحو ما فعلنا في المعادلة (40.7) نظرًا إلى العدد الهائل من الحدود، وعليه يمكن معاملة الدالة $\epsilon(\vec{n})$ دالة متصلة.



الشكل 11.7: إن قيمة عنصر الحجم اللانهائي الصغر، في الإحداثيات الكروية، (n, θ, ϕ) ، يساوي $(dn)(n d\theta)(n \sin \theta d\phi)$.

لحساب التكامل الثلاثي، نستخدم الإحداثيات الكروية، على نحو ما هو موضح في الشكل (1.7). إن عنصر لحجم $dV = dn_x dn_y dn_z$ يصبح في الإحداثيات الكروية $dV = n^2 \sin\theta dn d\theta d\phi$ ، وعليه، تصبح الطاقة الكلية للإلكترونات جميعها على النحو الآتي:

$$(41.7) \quad U = 2 \int_0^{n_{max}} dn \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi n^2 \sin\theta \epsilon(n).$$

لإن التكامل على الزوايا يعطي المقدار $\pi/2$ ، ثمن مساحة سطح كرة نصف قطرها الوحدة؛ لذا فإن الطاقة الكلية تصبح على النحو الآتي:

$$(24.7) \quad U = \pi \int_0^{n_{max}} \epsilon(n) n^2 dn = \frac{\pi h^2}{8mL^2} \int_0^{n_{max}} n^4 dn = \frac{\pi h^2 n_{max}^5}{40mL^2} = \frac{3}{5} N \epsilon_F.$$

وبقسمة هذه الطاقة الكلية على عدد الإلكترونات N نحصل على القيمة المتوسطة لطاقة الإلكترون، وتساوي $\frac{3}{5} \epsilon_F$. ويتعويض بعض الأرقام، نجد أن طاقة فيرمي للإلكترونات التوصيلية في معدن تقليدي بحدود eV . إن هذه الطاقة كبيرة جداً، مقارنة بالطاقة الحرارية المتوسطة، لجسيم عند درجة حرارة الغرفة $kT \approx \frac{1}{40} eV$. وفي الحقيقة، فإن مقارنة طاقة فيرمي مع متوسط الطاقة الحرارية، هي مقارنة الحجم الكلي نفسه مع متوسط الحجم، لكل جسيم (الذي تم في بداية هذا الجزء).

$$(43.7) \quad \frac{V}{N} \ll v_Q \quad \text{تماماً مثل} \quad kT \ll \epsilon_F.$$

وعندما يتحقق هذا الشرط، يكون التقريب $T \approx 0$ دقيقاً إلى حد ما، عندئذٍ، يقال: إن الغاز متشعب. وتسمى درجة الحرارة التي يجب أن يصل إليها غاز فيرمي، حتى تصبح $kT = \epsilon_F$ ، درجة حرارة فيرمي $T_F \equiv \epsilon_F/k$ ، وتعطى بدلالة $T_F \equiv \epsilon_F/k$ ، إن درجة حرارة فيرمي افتراضية كلها؛ لأن المعادن تنصهر، وتتبخر قبل الوصول إلى هذه الدرجة بكثير.

ويمكن حساب الضغط لغاز إلكتروني متشعب باستخدام العلاقة $P = -(\partial U / \partial V)_{S,N}$ ، التي يمكن اشتقاقها من المتطابقة الديناميكية الحرارية، أو من الميكانيكا الكلاسيكية مباشرة، ونحصل على العلاقة الآتية:

$$(44.7) \quad P = -\frac{\partial}{\partial V} \left[\frac{3}{5} N \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi} \right)^{2/3} V^{-2/3} \right] = \frac{2N\epsilon_F}{5V} = \frac{2}{3} \frac{U}{V}.$$

وتسمى هذه الكمية ضغط التشعب. وهي كمية موجبة؛ وذلك لأنه عند ضغط غاز إلكترونات متشعب، فإن أطوال الأمواج لدوال الأمواج جميعها تتناقص، وعليه، فإن الطاقات لدوال الأمواج جميعها تتزايد. إن ضغط التشعب هذا يحافظ على المادة، ويحول دون انهيارها، تحت تأثير قوى كهروستاتيكية هائلة، تحاول شد الإلكترونات والبروتونات بعضها إلى بعض. ويجب الملاحظة هنا، أن ضغط التشعب ليس له علاقة على الإطلاق بالتنافر الكهربائي بين الإلكترونات (الذي أهمله)، لكنه ناتج عن مبدأ باولي للاستثناء.

وعددياً يصل ضغط التشعب إلى مليارات عدة من وحدة (N/m^2) لمعدن تقليدي، لكن هذا الرقم لا يمكن قياسه مباشرة، ويختصر مع القوى الكهروستاتيكية التي تربط الإلكترونات داخل المعدن أصلاً. لكن هناك كمية فيزيائية، يمكن قياسها مباشرة، وهي معامل المرونة الحجمي. وتعرف بأنها التغير في الضغط، (عندما تضغط المادة)، مقسوماً على التغير الجزئي في الحجم. يعبر عن معامل المرونة الحجمي بالعلاقة الآتية:

$$(45.7) \quad B = -V \left(\frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \frac{10}{9} \frac{U}{V}$$

وهذه الكمية أيضاً كبيرة نوعاً ما في الوحدات الدولية، ولا تختصر تماماً مع القوى الكهروستاتيكية، وتتفق هذه الصيغة مع النتائج العملية بحدود المعامل 3 تقريباً لمعظم المعادن.

السؤال 19.7: تسهم كل ذرة في قطعة من النحاس بالإلكترون توصيلي واحد. استخرج الكثافة والكتلة الذرية للنحاس، ومن ثم احسب طاقة فيرمي، ودرجة حرارته، وضغط التشعب، ومساهمة ضغط التشعب في معامل المرونة الحجمي. هل درجة حرارة الغرفة منخفضة على نحو كافٍ لمعاملة النظام معاملة غاز إلكترونات متشعب؟

السؤال 20.7: إن درجة الحرارة في مركز الشمس تساوي 10^7K تقريبًا، وتركيز الإلكترونات في مركزها أيضًا يساوي تقريبًا 10^{32}m^{-3} . فهل يمكن معاملة النظام معاملة غاز مثالي كلاسيكي باستخدام إحصاء بولتزمان صحيحًا؟ أو معاملة غاز فيرمي متشعبًا؟ أم أن كليهما غير صحيح؟

السؤال 21.7: بالكاد، يمكن معاملة النواة الذرية غازًا من النيوكليونات، تقريبًا، وبكثافة عددية مقدارها (0.18fm^{-3}) ، حيث إن $(1\text{fm} = 10^{-15}\text{m})$. ونظرًا إلى أن النيوكليونات تتكون من نوعين مختلفين (بروتونات ونيوترونات)، والزخم المغزلي لكل منهما يساوي $(1/2)$ ، حيث تستطيع كل دالة فضائية حمل أربعة نيوكليونات. احسب طاقة فيرمي لهذا النظام بوحدات MeV، واحسب أيضًا درجة حرارة فيرمي، وعلق على النتائج.

السؤال 22.7: افترض أن غازًا إلكترونيًا متشعبًا، فيه الإلكترونات جميعها تتحرك بسرعة عالية جدًا ($mc \gg \epsilon$)؛ لذا فإن طاقات الإلكترونات تعبر عنه بالعلاقة $\epsilon = pc$ (حيث P مقدار الزخم الخطي للإلكترونات).

(أ) عدّل الاشتقاق الذي استخدم أعلاه، وبيّن أن الجهد الكيميائي (طاقة فيرمي) لغاز سرعته عالية جدًا (يقترّب من سرعة الضوء) عند درجة حرارة $T = 0$ ، يعبر عنه بالعلاقة:

$$\mu = hc(3N/8\pi V)^{1/3}$$

(ب) حدّد صيغة الطاقة الكلية لهذا النظام بدلالة N و μ .

السؤال 23.7: يُعدّ النجم القزم الأبيض غاز إلكترونات متشعبًا، مع مجموعة من النوى ممتزجة به، كي توازن الشحنات الكهربائية، وتزود النجم بالتجاذب الذي يربطه كله. سنشتق في هذا السؤال العلاقة بين كتلة نجم القزم الأبيض ونصف قطره، وذلك بمعاملة النجم معاملة كرة ذات كثافة منتظمة. (انظر الشكل (12.7)). وعلى الرغم من أن نجوم القزم الأبيض تميل إلى كونها ساخنة جدًا بمقاييسنا، فإن افتراض أن درجة الحرارة $T = 0$ تقريبًا مناسب لهذا السؤال.

(أ) استخدم تحليل الأبعاد، لتبين أن طاقة وضع الجاذبية لكرة منتظمة الكثافة (كتلة M ، نصف قطر R) تكون على النحو الآتي:

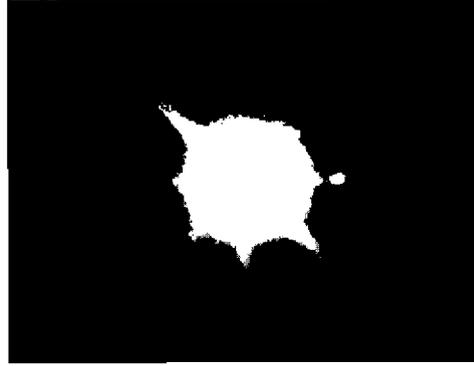
$$U_{\text{grav}} = -(\text{constant}) \frac{GM^2}{R}$$

حيث إن الثابت ثابت عددي، وتحقق من تفسير الإشارة السالبة في الصيغة. إن قيمة الثابت، التي يمكن حسابها، بحساب الشغل (السالب) المطلوب بتجميع الكرة، قشرة بعد قشرة من الداخل للخارج، تساوي (3/5).

(ب) افترض أن النجم يحتوي على بروتون واحد ونيوترون واحد لكل إلكترون، وأن الإلكترونات غير نسبية، فبيّن أن الطاقة الحركية الكلية للإلكترونات المتشعبة تساوي:

$$U_{\text{kinetic}} = (0.0086) \frac{h^2 M^{5/3}}{m_e m_p^{5/3} R^2}$$

الشكل 12.7: يبين الشكل نظام النجم المزدوج سيروس A وسيروس B : سيروس A أكثر النجوم سطوعاً في سماننا خلال الليل والنجم المرافق سيروس B أكثر سخونة، ولكنه أقل سطوعاً، وهذا يشير إلى كونه صغيراً جداً، قرماً أبيض، ومن الحركة الدورانية للنجمين معاً، نقدر كتلة سيروس B بكتلة الشمس.



علمًا، بأن العامل العددي يمكن التعبير عنه بدقة، وذلك بدلالة π وجذور تكعيبية، وهكذا، لكن الأمر لا يستحق العناء.

(ج) يعرف نصف قطر نجم القزم الأبيض، الذي تكون طاقته الكلية ($U_{\text{grav}} + U_{\text{kinetic}}$) أقل ما يمكن، بنصف قطر الاتزان. ارسم الطاقة الكلية بوصفها دالة من نصف القطر، R ، وأوجد صيغة تعطي نصف قطر الاتزان، بدلالة الكتلة M . هل يزداد نصف قطر الاتزان مع زيادة الكتلة؟ وهل هذا الجواب منطقي؟

(د) احسب نصف قطر الاتزان، لنجم كتلته تساوي كتلة الشمس $M = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$ ، ومن ثم احسب كثافة النجم. وكيف تقارن بين كثافة النجم وكثافة الماء؟

(هـ) احسب طاقة فيرمي، للنجم في الجزء (د) ودرجة حرارته، وناقش فيما إذا كان التقريب $T = 0$ مقبولاً أم لا؟

(و) عوضاً عن الافتراض السابق، افترض أن الإلكترونات في نجم القزم الأبيض هي جسيمات عالية النسبية، وباستخدام نتائج السؤال السابق، بين أن الطاقة الحركية الكلية للإلكترونات تتناسب في هذه الحالة مع $(1/R)$ بدلاً من $(1/R^2)$. وعلل: عدم وجود نصف قطر اتزان مستقر لهذا النجم.

(ز) إن الانتقال من نظام غير نسبي إلى نظام عالي النسبية، يحدث عندما تصبح الطاقة الحركية المتوسطة للإلكترونات تساوي mc^2 . فهل التقريب غير النسبي يصلح لنجم قزم أبيض كتلته تساوي كتلة الشمس؟ وفوق أي كتلة تتوقع أن يصبح النجم غير مستقر نسبياً؟

السؤال 24.7: إن النجم الثقيل جداً، الذي يفقد الاستقرار كنجم قزم أبيض، يمكن أن ينهار أكثر ليكون نجماً نيوترونياً: (نجماً مكوناً بصورة كاملة من النيوترونات)، ومدعوماً ضد الانهيار الناتج عن قوى الجاذبية عن طريق الضغط الناتج عن النيوترونات المتكونة.

كرر خطوات السؤال السابق لحالة نجم نيوتروني، وحدد الكميات الآتية: العلاقة بين الكتلة ونصف القطر، نصف القطر، الكثافة، طاقة فيرمي ودرجة حرارة فيرمي لنجم نيوتروني كتلته تساوي كتلة الشمس، ثم احسب الكتلة الحرجة التي إذا زادت الكتلة عنها أصبح النجم نسبياً، غير مستقر، مما سيؤدي إلى انهياره أكثر فأكثر.

درجات الحرارة الصغيرة غير الصفرية Small Nonezero Temperatures

لا يمكن قياس السعة الحرارية، (إحدى صفات غاز فيرمي)، باستخدام التقريب $T = 0$ ، نظرًا إلى أنها تُعدّ مقياسًا لكيفية اعتماد طاقة النظام على درجة الحرارة. لذا، لا بد من دراسة الأنظمة عندما تكون درجة الحرارة صغيرة، لكنها ليست صفرًا. وقبل إجراء أي عملية حساب حذرة ودقيقة، نفسر ما يحدث بطريقة وصفية، ونحاول تقديم بعض النقاشات الممكنة. إن الجسيمات جميعها عند درجة الحرارة T تكتسب طاقة حرارية تساوي kT تقريبًا، لكن معظم الإلكترونات، (في غاز إلكترونات متشعب)، لا يمكنها اكتساب مثل هذه الطاقة الصغيرة؛ لأن معظم الحالات التي يمكن أن توجد فيها، تكون قد شغلت سابقًا. (استرجع صورة توزيع فيرمي وديراك الموضحة في الشكل 6.7) إن الإلكترونات الوحيدة التي يمكنها اكتساب طاقة حرارية، هي تلك التي تكون في حدود kT من طاقة فيرمي، ويمكنها القفز إلى مستويات غير مشغولة فوق طاقة فيرمي (الفراغات) التي تترك خلف تلك الإلكترونات يسمح لبعض الإلكترونات، وليس لكثير منها ذات الطاقة الأقل بشغل تلك الفراغات واكتساب الطاقة. ويلاحظ أن عدد الإلكترونات التي تتأثر بزيادة درجة الحرارة T ، تتناسب مع T ، ويجب أيضًا أن يتناسب هذا العدد مع (N) ، العدد الكلي للإلكترونات، حيث إن هذه الكمية غير ذاتية. بناءً على ذلك، فإن الطاقة الإضافية التي يكتسبها غاز إلكتروني متشعب، عندما ترتفع درجة الحرارة من $T = 0$ إلى T تتناسب مع مربع T .

$$\propto (NkT) \times (kT) \quad (46.7)$$

$$\propto N(kT)^2$$

ويمكن معرفة ثابت التناسب، باستخدام تحليل الوحدات والأبعاد. الكمية $(kT)^2$ ، لها وحدات طاقة مربعة، وللحصول على كمية لها وحدات طاقة، لا بد من القسمة على ثابت، له وحدات طاقة. إن طاقة فيرمي ϵ_F هي الثابت الوحيد المتوافر لدينا حاليًا، ويحقق هذا الشرط. وعليه، فإن الطاقة الإضافية تعطى بالعلاقة $N(kT)^2/\epsilon_F$ مضروبة في ثابت عديم الوحدات، ومن مقدار الواحد. وبعد صفحات عدة، سنجد أن هذا الثابت يساوي فعلاً $\pi^2/4$ ، وعليه، فإن الطاقة الكلية لغاز فيرمي المتشعب عند درجات حرارة $T \ll \epsilon_F/k$ ، تعبر عنها بالعلاقة الآتية:

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F + \frac{\pi^2}{4} N \frac{(kT)^2}{\epsilon_F} \quad (47.7)$$

ومن السهل حساب السعة الحرارية باستخدام العلاقة (47.7)، وهي على النحو الآتي:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \frac{\pi^2 N k^2 T}{2 \epsilon_F} \quad (48.7)$$

ومن الملاحظ أن السعة الحرارية تصل إلى الصفر عند درجة حرارة الصفر $T = 0$ ، ويتطلب أيضًا القانون الثالث للديناميكا الحرارية. وإن السعة الحرارية أيضًا تقترب من الصفر بطريقة طردية مع درجة الحرارة. إن هذا الاستنتاج يتفق جيدًا مع النتيجة التجريبية للمعادن عند درجات حرارة منخفضة. (ولكنها أكثر قليلًا من درجات كلفن، وإن اهتزازات الشبكية تسهم أيضًا بصورة مهمة في السعة الحرارية للمعادن). إن المعامل الرقمي $\pi^2/2$ يتفق عادة مع التجربة بحدود 50%، مع وجود بعض الاستثناءات.

السؤال 25.7: استخدم نتائج هذا الجزء، لتقدير مساهمة الإلكترونات التوصيلية في السعة الحرارية، لمول واحد من النحاس، عند درجة حرارة الغرفة. كيف تبدو هذه المساهمة مقارنة بمساهمة اهتزازات الشبكية، بافتراض أنها غير مثبتة؟ (لقد قست المساهمة الإلكترونية عند درجة حرارة منخفضة، ووجد أنها أكبر بنحو 40% من تنبؤات نموذج الإلكترونات الحرة الذي استخدم هنا).

السؤال 26.7: يمكن معاملة الهيليوم الثلاثي معاملة غاز فيرمي غير متفاعل. وعلى الرغم من أن ^3He

تحول إلى سائل عند درجات الحرارة المنخفضة، إلا أن السائل يتصف بكثافة منخفضة للغاية، وعلى غير العادة، ويتصرف بطرق مختلفة، كأنه غاز؛ لأن القوى بين الذرات ضعيفة جداً. إن ذرات الهيليوم الثلاثي فيرميونات ذات زخم مغزلي، يساوي $(1/2)$ ، وذلك لوجود نيوترون غير متزاوج في النواة.

(أ) احسب طاقة فيرمي، ودرجة حرارة فيرمي للهيليوم الثلاثي ^3He ، بوصفه غازاً فيرمياً غير متفاعل، علماً، بأن حجم المول الواحد تحت ضغط جوي يساوي 37 cm^3 .

(ب) احسب السعة الحرارية عند درجات حرارة $T \ll T_F$ ، وقرن بالنتائج العملية $C_V = (2.8\text{K}^{-1})NkT$ (عند درجات الحرارة المنخفضة). (لا يتوقع اتفاق كامل).

(ج) إن الإنتروبي للهيليوم الثلاثي الصلب، تحت درجة الحرارة 1K ، ناتجة كلها تقريباً عن التعددية لاصطفافات الزخم المغزلي النووي. ارسم منحنى يمثل الإنتروبي بوصفها دالة من درجة الحرارة، عند درجات الحرارة المنخفضة، لكل من الهيليوم الثلاثي السائل، والهيليوم الثلاثي الصلب. قدر درجة الحرارة التي تكون عندها الإنتروبي للسائل والصلب متساويتين. وناقش شكل الحدود الفاصلة بين الحالتين السائلة والصلبة المبينتين في الشكل (13.5).

السؤال 27.7: نظراً إلى أن التفسير الذي استخدم أعلاه لتوضيح تناسب السعة الحرارية مع درجة الحرارة $C_V \propto T$ ، لا يعتمد على تفاصيل مستويات الطاقة المتاحة للفيرميونات. لذا، يجب أن ينطبق على النموذج المستخدم في السؤال (16.7): غاز من الفيرميونات محصور بطريقة ما، على أن تكون مستويات الطاقة متساوية التباعد وغير متشعبة.

(أ) بين أن عدد حالات النظام المحتملة لقيمة معينة من q ، تساوي عدد الطرق المختلفة لكتابة q ، بوصفها مجموعاً لأعداد صحيحة موجبة (فمثلاً توجد ثلاث حالات عندما $q=3$ متناظرة مع المجاميع $2+1, 1+1+1$ و 3 ، لاحظ أن $(2+1)$ و $(1+2)$ لا تعدان حالتين مختلفتين). وتسمى هذه الدالة التوافقية مع عدد التجزيئات غير المحظورة للعدد، ويرمز إليها بالرمز $p(q)$ ، ومثال على ذلك فإن $p(3) = 3$.

(ب) مستخدماً ترقيم التجزيئات، احسب بوضوح $p(7)$ و $p(8)$.

(ج) كون جدولاً، يبين $p(q)$ لقيم q لغاية 100، وذلك باستخراج القيم من أحد كتب الفهارس الرياضية، أو باستخدام برامج حاسوبية جاهزة لحساب القيم، أو بكتابة برنامج حاسوب خاص بذلك. من هذه الجداول، احسب الإنتروبي، ودرجة الحرارة، والسعة الحرارية للنظام، مستخدماً الطرق نفسها التي استخدمت في الجزء (3.3)، وارسم السعة الحرارية للنظام، بوصفها دالة من درجة الحرارة، ولاحظ أنها طردية تقريباً.

(د) لقد بين الرياضيان المشهوران رامانوجان وهاردي، أن عدد التجزيئات غير المحظورة للعدد q ، عندما يكون كبيراً، يعبر عنه بالعلاقة التقريبية الآتية:

$$P(q) \approx \frac{e^{\pi\sqrt{2q/3}}}{4\sqrt{3}q}$$

تحقق من دقة هذه الصيغة لقيمة $q = 10$ وقيمة $q = 100$ ، وباستخدام هذا التقريب، احسب الإنتروبي، ودرجة الحرارة، والسعة الحرارية للنظام. ومثل السعة الحرارية بوصفها سلسلة متناقصة القوة بالكمية (kT / η) مفترضاً أن هذه النسبة كبيرة، ومحتفظاً بأكبر حدين، ثم قرن ذلك بالنتائج العددية التي حصلت عليها في الجزء (ج) من السؤال.

لماذا لا تعتمد السعة الحرارية للنظام على العدد N وهي بذلك مخالفة للصندوق ثلاثي الأبعاد للفيرميونات التي نوقشت في الكتاب؟

كثافة الحالات The Density of States

لإعطاء أفضل قيم لتصرف غاز فيرمي عند درجات حرارة منخفضة غير صفرية، نعرض فكرة جديدة. بالعودة إلى تكامل الطاقة (42.7) واستبدال المتغيرات إلى طاقة الإلكترون ϵ .

$$(49.7) \quad \epsilon = \frac{h^2}{8ml^2} n^2, n = \sqrt{\frac{8ml^2}{h^2}} \sqrt{\epsilon}, \quad dn = \sqrt{\frac{8ml^2}{h^2}} \frac{1}{2\sqrt{\epsilon}} d\epsilon$$

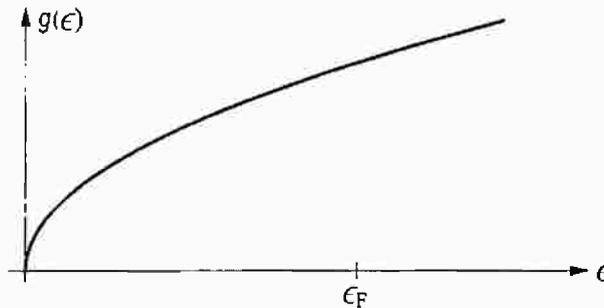
وبهذا الاستبدال يصبح تكامل الطاقة على النحو الآتي:

$$(50.7) \quad U = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon \left[\frac{\pi}{2} \left(\frac{8ml^2}{h^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon} \right] d\epsilon \quad (T = 0).$$

إن الكمية في داخل القوس المربع، لها تفسير جيد: هي عدد حالات الجسيم المنفرد لوحدة الطاقة، ولحساب الطاقة الكلية للنظام، نجمع الطاقات المعنية مضروبة في عدد الحالات التي تأخذ تلك الطاقة. ويعرف عدد الحالات لجسيم منفرد لوحدة الطاقة بكثافة الحالات، ويرمز إليه بالرمز $g(\epsilon)$ ، ويمكن كتابتها بطرق مختلفة:

$$(51.7) \quad g(\epsilon) = \frac{\pi(8m)^{3/2}}{2h^3} V \sqrt{\epsilon} = \frac{3N}{2\epsilon_F^{3/2}} \sqrt{\epsilon}$$

إن الصيغة الثانية في المعادلة السابقة مركزة وسهلة، لكنها، ربما تكون مشوشة، حيث تبدو كأنها تعني أن $g(\epsilon)$ تعتمد على N ، لكن واقع الأمر، أن الاعتمادية الظاهرة على N تختصر عن طريق ϵ_F . الصيغة الأولى هي المفضلة، حيث تظهر بوضوح، أن $g(\epsilon)$ تعتمد على V ، ولا تعتمد على N على أي حال، فإن أهم نقطة هنا، أن $g(\epsilon)$ لجسيمات حرة في صندوق ثلاثي الأبعاد، تتناسب مع $\sqrt{\epsilon}$. إن منحنى الدالة قطع ناقص مفتوح للجهة اليمنى، على نحو ما يظهر في الشكل (13.7). ولمعرفة عدد الحالات الواقعة بين الطاقتين ϵ_1 و ϵ_2 ، نتمم هذه الدالة على المدى المطلوب. إن كثافة الحالة هي دالة لا يظهر معناها بوضوح إلا بعد تكاملها. ويمكن تطبيق فكرة كثافة الحالات، على مجموعة كبيرة أخرى من الأنظمة، إضافة إلى هذا المثال. فالمعادلة (51.7) والشكل (13.7) هما للحالة الخاصة المكونة من غاز من الإلكترونات الحرة المحصورة داخل حجم ثابت، لكنها، لا تتأثر بأي قوة أخرى. وفي النماذج الأكثر واقعية للمعادن، نأخذ في الحسبان انجذاب الإلكترونات في اتجاه الأيونات الموجبة لشبيكة البلورة. عند ذلك، فإن دوال الأمواج وطاقاتها، تختلف عن حالة الإلكترونات الحرة. وعليه، فإن كثافة الحالات $g(\epsilon)$ تكون أكثر تعقيداً، لكن الأمر الجيد هنا، أن تحديد $g(\epsilon)$ هي مسألة خاصة بميكانيك الكم، وليس لها أي علاقة بالآثار الحرارية، أو درجة الحرارة. وعند حصولنا على $g(\epsilon)$ لنظام ما، يمكننا نسيان ميكانيك الكم والتركيز فقط على الفيزياء الحرارية.



الشكل 13.7: يبين كثافة الحالات لنظام مكون من جسيمات غير متفاعلة وغير نسبية موجودة داخل صندوق ثلاثي الأبعاد. إن عدد الحالات داخل مدى معين للطاقة هو المساحة تحت المنحنى. ولغاز فيرمي عند درجة حرارة الصفر، فإن كل الحالات بطاقات $\epsilon < \epsilon_F$ مشغولة، في حين أن الحالات بطاقات $\epsilon > \epsilon_F$ غير مشغولة.

ونستطيع الحصول على العدد الكلي للإلكترونات، في غاز من الإلكترونات، عند درجة حرارة الصفر، بتكامل كثافة الحالات من الصفر، وحتى طاقة فيرمي.

$$(52.7) \quad N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon \quad (T = 0).$$

وهذه المعادلة لغاز من الإلكترونات الحرة، هي المعادلة (50.7) نفسها، من دون المعامل الإضافي ϵ . لكن، ماذا لو كانت درجة الحرارة لا تساوي صفرًا؟ عند ذلك لا بد من ضرب $g(\epsilon)$ في احتمال أن تكون الحالة، (التي لها لطاقة نفسها)، مشغولة، ويعني هذا أن نضرب في دالة توزيع فيرمي وديراك، وسنكمل أيضًا من الصفر إلى ما لا نهاية، حيث إن أي حالة، من حيث المبدأ، قد تكون مشغولة. لذا فإن عدد الإلكترونات الكلي يعبر عنه بالعلاقة:

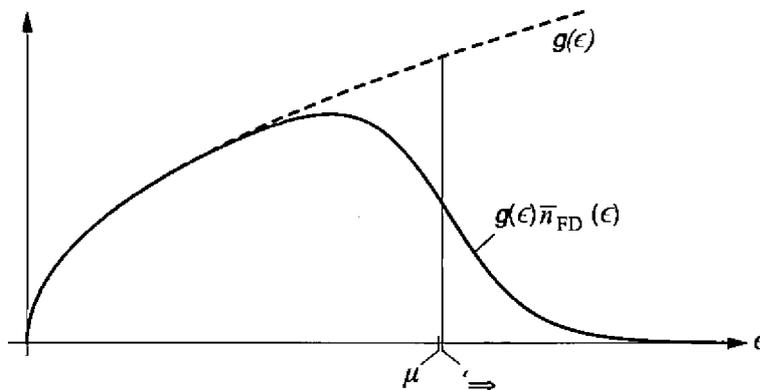
$$(53.7) \quad N = \int_0^{\infty} g(\epsilon) \bar{n}_{FD}(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\infty} g(\epsilon) \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} d\epsilon \quad (\text{any } T).$$

وللحصول على الطاقة الكلية للنظام نستخدم العلاقة الآتية:

$$(54.7) \quad U = \int_0^{\infty} \epsilon g(\epsilon) \bar{n}_{FD}(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\infty} \epsilon g(\epsilon) \frac{1}{e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1} d\epsilon \quad (\text{any } T).$$

ويبين الشكل (14.7) منحنى لدالة التكامل، في تكامل عدد الإلكترونات في المعادلة (53.7) لغاز إلكترونات حرة، عند درجة حرارة غير صفرية. وبدلاً من تناقصها فوراً إلى الصفر عند $\epsilon = \epsilon_F$ ، فإن عدد الإلكترونات لوحدة الطاقة يتناقص تدريجياً على عرض مساوٍ لعدد قليل من kT . الجهد الكيميائي μ ، هو النقطة التي يصبح عندها، احتمال أعمال المستوى يساوي $1/2$ ، ومن المهم، ملاحظة أن هذه النقطة ليست النقطة نفسها عند درجة الصفر.

$$(55.7) \quad \mu(T) \neq \epsilon_F \quad \text{except when } T = 0.$$



الشكل 14.7: عدد الفيرميونات لوحدة الطاقة، عند درجة حرارة لا صفرية، يعطى من خلال ضرب كثافة الحالات في توزيع فيرمي وديراك. ونظرًا إلى أن تغيير درجة الحرارة لا يغير العدد الكلي للفيرميونات، فإن المساحتين قليتي التظليل متساويتان. ونظرًا إلى أن $g(\epsilon)$ تكون أكبر فوق ϵ_F منها تحت ϵ_F ، فذلك، يعني أن الجهد الكيميائي يتناقص مع ارتفاع درجة الحرارة. لقد رُسم المنحنى عند درجة حرارة $T/T_F = 0.1$ ، عند تلك الحرارة، فإن μ أقل بنحو 1% من ϵ_F .

ولم لا؟ فمن خلال العودة إلى السؤال (12.7)، حيث إن دالة توزيع فيرمي وديراك متماثلة حول $\mu = \epsilon_F$ ، واحتمال إشغال حالة فوق μ يساوي احتمال عدم إشغال حالة تحت μ بالمقدار نفسه، ولنفترض الآن أن تبقى ثابتة مع ارتفاع درجة الحرارة عن الصفر، (ونظرًا إلى أن كثافة الحالات أكبر على يمين μ منها على يسارها) فإن عدد الإلكترونات التي نضيفها إلى المستويات بطاقات $\mu > \epsilon_F$ ، يكون أكبر من عدد الإلكترونات التي نخسرها من المستويات ذوات الطاقات $\mu < \epsilon_F$. وبمعنى آخر، فإننا نستطيع زيادة عدد الإلكترونات، وذلك برفع درجة الحرارة فقط، وللحيلولة دون هذا المنطق غير الصحيح، فإن الجهد الكيميائي يتناقص قليلاً؛ لذا، فإن الاحتمالات جميعها تنخفض المقدار نفسه.

إن الصيغة الصحيحة والدقيقة للجهد الكيميائي بوصفه دالة من درجة الحرارة $\mu(T)$ ، تحدد بطريقة غير واضحة عن طريق التكامل للعدد الكلي، N ، (المعادلة (53.7)). لو كان بالإمكان إجراء هذا التكامل، لكان استعمال الصيغة الناتجة ممكنًا، ومن ثم حلها، لإيجاد $\mu(T)$ (نظرًا لأن N ثابت لا يتغير). وبعد ذلك، يمكن تعويض قيمة $\mu(T)$ لتكامل الطاقة (54.7)، ومحاولة إجراء التكامل، لإيجاد $U(T)$ (وبعدها حساب السعة الحرارية). لكن لسوء الحظ، فإن هذه التكاملات لا يمكن إجراؤها تمامًا حتى للحالة البسيطة لغاز الإلكترونات الحرة. ومع ذلك، فإنه يمكن إجراء التكاملات بصورة تقريبية خاصة لدرجات الحرارة $kT \ll \epsilon_F$ ، عند درجات الحرارة تلك، فإن قيمة التكامل يعبر عنها بالمعادلة (47.7).

السؤال 28.7: افترض وجود غاز فيرمي حر في بعدين، محصورًا في مربع، مساحته $A = L^2$.

- (أ) أوجد طاقة فيرمي (بدلالة N و A)، وبيّن أن متوسط الطاقة للجسيمات يساوي $(\epsilon_F/2)$.
- (ب) اشتق صيغة لكثافة الحالات، ستجد أن كثافة الحالات تساوي مقدارًا ثابتًا، لا يعتمد على ϵ_F .
- (ج) اشرح كيفية تصرف الجهد الكيميائي للنظام، كدالة من درجة الحرارة لكلتا الحالتين $kT \ll \epsilon_F$ ، وعندما تكون T أكبر كثيرًا.

(د) نظرًا إلى أن كثافة الحالات $g(\epsilon)$ الحالية تساوي، مقدارًا ثابتًا، فإنه من الممكن إجراء التكامل. (53.7)، لعدد الجسيمات تحليليًا. قم بذلك، ومن ثم حل المعادلة لإيجاد μ بوصفها دالة من N . وبيّن أن الصيغة المشتقة تتصرف وصفيًا كما هو متوقع.

(هـ) أثبت أن الجهد الكيميائي لهذا النظام، عند درجات الحرارة المرتفعة، $\epsilon_F \gg kT$ يتصرف كما يتصرف غاز مثالي عادي.

نشر سمرفيلد

قد تحدثنا كثيراً عن التكاملين (53.7) و(54.7)، والآن سنوضح كيفية حسابهما، وإيجاد الجهد الكيميائي، والطاقة الكلية لغاز إلكترونات حرة. إن طريقة إجراء التكاملين عند درجات حرارة منخفضة $\epsilon_F \ll kT$ ، قد طوّرها آرنولد سمرفيلد؛ لذا فإنها تعرف باسم "نشر سمرفيلد"، على الرغم من أن الخطوات جميعها ليست صعبة، لكن الحسابات مجتمعة مليئة بالحيل الرياضية. لنبدأ بالتكامل المستخدم لإيجاد عدد الإلكترونات N

$$(56.7) \quad N = \int_0^\infty g(\epsilon) \bar{n}_{FD}(\epsilon) d\epsilon = g_0 \int_0^\infty \epsilon^{1/2} \bar{n}_{FD}(\epsilon) d\epsilon$$

يمثل g_0 الثوابت جميعها التي ضرب فيها الحد $\sqrt{\epsilon}$ في المعادلة (51.7). وعلى الرغم من أن التكامل يمتد على القيم الموجبة جميعها للطاقة ϵ ، لكن أكثر المناطق أهمية، هي الواقعة بالقرب من النقطة $\epsilon = \mu$ ، حيث $\bar{n}_{FD}(\epsilon)$ تتناقص بسرعة عندما تكون $\epsilon_F \ll kT$. وعليه، فإن أول الحيل المستخدمة يظهر في فصل هذه لمنطقة عن طريقة التكامل بالأجزاء لنحصل على:

$$(57.7) \quad N = \frac{2}{3} g_0 \epsilon^{3/2} \bar{n}_{FD}(\epsilon) \Big|_0^\infty + \frac{2}{3} g_0 \int_0^\infty \epsilon^{3/2} \left(-\frac{d\bar{n}_{FD}}{d\epsilon} \right) d\epsilon$$

ونظراً إلى تلاشي الحد الأول عند كلتا النهايتين، يبقى الحد الثاني، وهو تكامل أسهل كثيراً من التكامل لأصلي، حيث إن كمية $d\bar{n}_{FD}/d\epsilon$ مهمة في المناطق جميعها، باستثناء المنطقة المحيطة بالنقطة $\epsilon = \mu$ (انظر الشكل 15.7). ويمكن حساب $d\bar{n}_{FD}/d\epsilon$ بوضوح على النحو الآتي:

$$(58.7) \quad -\frac{d\bar{n}_{FD}}{d\epsilon} = -\frac{d}{d\epsilon} (e^{(\epsilon-\mu)/kT} + 1)^{-1} = \frac{1}{kT} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

حيث $x = (\epsilon - \mu)/kT$ ، وعليه، فإن التكامل الذي نحتاج إلى إجرائه يصبح:

$$(59.7) \quad N = \frac{2}{3} g_0 \int_0^\infty \frac{1}{kT} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{2}{3} g_0 \int_{-\mu/kT}^\infty \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \epsilon^{3/2} dx,$$

حيث حوّل متغير التكامل إلى x ، بدلاً من ϵ .

ونظراً، إلى أن الدالة داخل التكامل تتناقص أسياً عند $|x| \gg kT$ ، يمكننا إحداث تقريبين: أولهما، مد لنهاية الصغرى للتكامل لتصبح $(-\infty)$ بدلاً من $(-\mu/kT)$ ، وهذا يجعل الأمور تبدو أكثر تماثلية، وهي أيضاً غير ضارة، حيث إن دالة التكامل مهمة للغاية عند قيم الطاقة السالبة، أما التقريب الثاني فهو نشر الدالة $\epsilon^{3/2}$ على صورة سلسلة تايلور حول النقطة μ ، محتفظين فقط بعدد من الحدود الأولى لنحصل على ما يأتي:

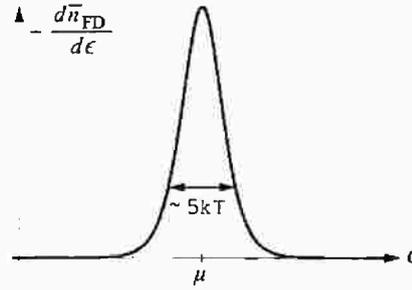
$$(60.7) \quad \begin{aligned} \epsilon^{3/2} &= \mu^{3/2} + (\epsilon - \mu) \frac{d}{d\epsilon} \epsilon^{3/2} \Big|_{\epsilon=\mu} + \frac{1}{2} (\epsilon - \mu)^2 \frac{d^2}{d\epsilon^2} \epsilon^{3/2} \Big|_{\epsilon=\mu} + \dots \\ &= \mu^{3/2} + \frac{3}{2} (\epsilon - \mu) \mu^{1/2} + \frac{3}{8} (\epsilon - \mu)^2 \mu^{-1/2} + \dots \end{aligned}$$

وباستخدام هذين التقريبين، يصبح التكامل على النحو الآتي:

$$(61.7) \quad N = \frac{2}{3} g_0 \int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \left[\mu^{3/2} + \frac{3}{2} x kT \mu^{1/2} + \frac{3}{8} (x kT)^2 \mu^{-1/2} + \dots \right] dx.$$

ونظراً إلى أن قوى x التي تظهر في التكامل أعداد صحيحة، فإن التكامل يمكن إجراؤه، ولو على نطاق حد بعد آخر.

الشكل 15.7: يبين أن المشتقة لتوزيع فيرمي وديراك مهملة في جميع المناطق، باستثناء المنطقة الواقعة حول μ ، وبحدود عدد قليل من kT .



ومن السهل إجراء الحد الأول، وهو:

$$(62.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{d\bar{n}_{FD}}{\partial \epsilon} d\epsilon = \bar{n}_{FD}(-\infty) - \bar{n}_{FD}(\infty) = 1 - 0 = 1$$

والحد الثاني أيضاً سهل؛ لكون دالة التكامل فردية في x لذا فهو يعطي صفرًا.

$$(63.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(e^x + 1)(1 + e^{-x})} dx = 0$$

إن التكامل الثالث هو التكامل الصعب، ولكن، يمكن إجراؤه تحليليًا على نحو ما هو مبين في الملحق ب، لنحصل على ما يأتي:

$$(64.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{3}$$

ويمكن أيضاً أخذ النتيجة من الجداول أو حسابها عدديًا.

وبتجميع أجزاء المعادلة (61.7)، نحصل على عدد الإلكترونات على النحو الآتي:

$$(65.7) \quad N = \frac{2}{3} g_0 \mu^{3/2} + \frac{1}{4} g_0 (kT)^2 \mu^{-1/2} \cdot \frac{\pi^2}{3} + \dots$$

$$= N \left(\frac{\mu}{\epsilon_F} \right)^{3/2} + N \frac{\pi^2}{8} \frac{(kT)^2}{\epsilon_F^{3/2} \mu^{1/2}} + \dots$$

(في الحد الثاني، عوّض $g_0 = 3N / 2\epsilon_F^{3/2}$ ، من المعادلة (51.7). وباختصار $N's$ ، نرى أن μ / ϵ_F تساوي الواحد تقريباً مع تصحيح، يتناسب مع $(kT/\epsilon_F)^2$ (الذي افترضناه مهملاً). ونظراً إلى أن حد التصحيح صغير نستطيع تقريب $\mu \approx \epsilon_F$ في ذلك الحد، ومن ثم نحل لإيجاد μ / ϵ_F على النحو الآتي:

$$(66.7) \quad \frac{\mu}{\epsilon_F} = \left[1 - \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]^{3/2}$$

$$= 1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots$$

وكما هو متوقع، فإن الجهد الكيميائي يتناقص تدريجياً عند ارتفاع درجة الحرارة. ويبين الشكل (16.7) تصرف الجهد الكيميائي في مدى كبير من درجات الحرارة، ويمكننا إجراء تكامل الطاقة الكلية (54.7) مستخدمين تماماً

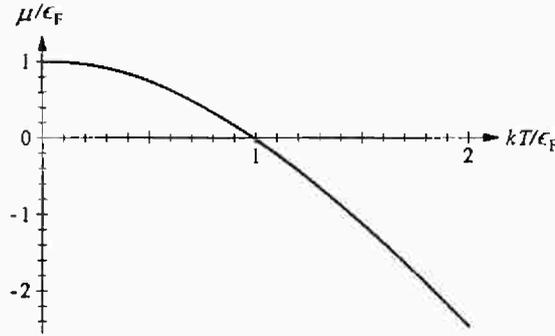
تتابع الحيل الرياضية نفسها، لنحصل على النتيجة الآتية:

$$(67.7) \quad U = \frac{3}{5} N \frac{\mu^{5/2}}{\epsilon_F^{3/2}} + \frac{3\pi^2}{8} N \frac{(kT)^2}{\epsilon_F} + \dots$$

وفي النهاية، بتعويض الصيغة (66.7) للجهد الكيميائي وبقليل من الجبر، نحصل على:

$$(68.7) \quad U = \frac{3}{5} N \epsilon_F + \frac{\pi^2}{4} N \frac{(kT)^2}{\epsilon_F} + \dots,$$

على نحو ما توقعنا تماماً للمعادلة (47.7).



الشكل 16.7: الجهد الكيميائي لغاز فيرمي غير نسبي، وغير متفاعل في صندوق ثلاثي الأبعاد محسوباً عددياً، كما هو في السؤال 31.7 عند درجات الحرارة المنخفضة، تقرب μ بالمعادلة (66.7)، في حين أن درجات الحرارة العالية، تصبح μ سالبة، وتقترب من شكلها لغاز عادي، يتبع إحصاء بولتزمان.

لا بد من الاعتراف، أننا قمنا بجهد كبير نوعاً ما، للحصول على المعامل $\pi^2/4$ فقط. (حيث كنا قد توقعنا بقية الحل باستخدام تحليل الأبعاد والوحدات). لكننا عرضنا هذه الحسابات بالتفصيل، ليس لأهمية النتيجة فحسب، ولكن لأن ذلك شيء اعتيادي يقوم به الفيزيائيون وعدد آخر كبير من العلماء والمهندسين. إن عدد المشكلات في الحياة الحقيقية، التي يمكن حلها تماماً، قليل للغاية. لذا، فإنه من المهم للعلماء أن يتعلموا متى وكيف يقومون بالتقريب، حيث إنه في كثير من الحالات يطور الشخص الحدس اللازم بعد إجراء الحسابات الصعبة لوضع توقعاته للإجابات.

السؤال 29.7: أجر عملية نشر سمرفيد لتكامل الطاقة (54.7)، واحصل على الصيغة (67.7)، ثم عوض الصيغة الخاصة بالجهد الكيميائي μ ، واحصل على الجواب النهائي، وهو المعادلة (68.7).

السؤال 30.7: إن نشر سمرفيد عبارة عن نشر بقوى kT/ϵ_F ، التي افترضت أنها صغيرة. في هذا الجزء، اختفظ بالحدود لغاية الحد $(kT/\epsilon_F)^2$. وأهملت حدود القوى الأعلى. بين في الخطوات المهمة جميعها، أن الحد الذي يتناسب مع T^3 يساوي صفراً، وعليه، فإن الحدود التي لا تساوي صفراً في النشر للطاقة والجهد الكيميائي، تتناسب مع T^4 . (إذا كنت تجد متعة بمثل هذه الأمور، فربما تحاول حساب الحدود التي تتناسب مع T^4 ، وربما باستخدام برامج حاسوبية في الجبر).

السؤال 31.7: لقد تم إيجاد كثافة الحالات والجهد الكيميائي لغاز فيرمي ذي البعدين في السؤال (28.7). احسب السعة الحرارية لهذا الغاز عند درجات الحرارة المنخفضة $kT \ll \epsilon_F$. كذلك، وبين أن السعة الحرارية عند $kT \gg \epsilon_F$ تتصرف على نحو ما هو متوقع. ارسم السعة الحرارية كدالة من درجة الحرارة.

السؤال 32.7: على الرغم من أنه لا يمكن إجراء التكاملات ((53.7)، (54.7))، المستخدمة لحساب μ و U بالطريقة التحليلية عند جميع درجات الحرارة، فإنه ليس صعباً حسابهما عددياً باستخدام الحاسوب. إن هذه الحسابات ذات أهمية قليلة للإلكترونات في المعادن (حيث $kT \ll \epsilon_F$)، لكنها مطلوبة للهيليوم الثلاثي ^3He ، ولأنظمة الفيزياء الفلكية كالإلكترونات الموجودة في مركز الشمس.

(أ) تدريب ابتدائي: أجرِ التكامل المستخدم لحساب N ، (53.7) للحالة $kT = \epsilon_F$ و $\mu = 0$ ، وتحقق من أن النتائج تتفق مع المنحنى المبين أعلاه. (يفضل عند حل مسألة باستخدام الحاسوب أن يعبر عن كل شيء دائماً، بدلالة متغيرات عديمة الوحدات، وعليه، افترض أن $t = kT/\epsilon_F$ و $x = \epsilon/\epsilon_F$ و $\mu = \epsilon_F \mu$. واكتب الكميات كلها بدلالة هذه المتغيرات، وبعد ذلك استخدمها في جهاز الحاسوب.

(ب) الخطوة المقبلة، هي تغيير μ مع المحافظة على ثبات T في حساب التكامل حتى نحصل على القيمة المطلوبة N . قم بذلك لقيم من kT/ϵ_F تتراوح من 0.1 إلى 2، وارسم النتائج لإعادة إنتاج الشكل (16.7).

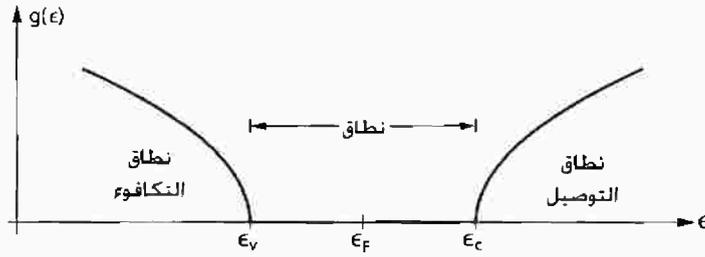
(من المحتمل أن يكون استخدام الطرق العددية لقيم صغيرة $kT < 0.1$ ، غير مناسب؛ لأنك ستحصل على أخطاء بسبب كبر الأرقام الناتجة عن استخدام دوال أسية بأسس كبيرة، لكن هذه المنطقة لا تكوّن المشكلة، حيث هي التي يكون الحساب عندها تحليلياً).

(ج) عوض القيم المحسوبة للجهد الكيميائي في تكامل حساب الطاقة (54.7)، واحسب هذا التكامل عددياً للحصول على الطاقة بوصفها دالة من درجة الحرارة لقيم kT لغاية $2\epsilon_F$. ثم ارسم النتائج، واحسب الميل للحصول على السعة الحرارية، وتحقق أن السعة الحرارية تتصرف بالصورة المتوقعة عند درجات الحرارة المنخفضة والعالية.

السؤال 33.7: عند أخذ القوى التجاذبية الأيونية في البلورة في الحسبان، فإن الطاقات المسموح بها لا يعبر عنها بالصيغة البسيطة (36.7). لكن بدلاً من ذلك، فإن الطاقات المسموح بها تجمع في حزم مفصولة بفجوات، لا يوجد فيها طاقات مسموح بها. في الجسم الموصل، تقع طاقة فيرمي في إحدى تلك الحزم. في هذا الجزء من الكتاب، تعاملنا مع الإلكترونات في تلك الحزم، بوصفها جسيمات حرة محصورة في حجم معين. وفي جسم عازل، فإن طاقة فيرمي تقع في إحدى الفجوات، وبذلك فإن الحزمة تحت الفجوة تكون مشغولة، في حين أن الحزمة فوق الفجوة تكون غير مشغولة، وذلك عند درجة الحرارة $T = 0$. ونظراً إلى عدم وجود حالات شاغرة بطاقات قريبة من طاقات الحالات المشغولة، فإن الإلكترونات "تعلق في مكانها"، ولا تستطيع المادة نقل الكهرباء.

أشباه الموصلات هي مواد عازلة، ولكن الفجوات فيها ضيقة بصورة كافية، ما يمكن بعض الإلكترونات من "القفز" فوقها عند درجة حرارة الغرفة. ويبين الشكل (17.7) كثافة الحالات بالقرب من طاقة فيرمي لشبه موصل مثالي، ويبين بعض التسميات والمصطلحات التي ستستخدم في هذا السؤال.

(أ) كتقريب أول، نمثل كثافة الحالات بالقرب من قاع حزمة التوصيل، باستخدام الدالة نفسها لغاز فيرمي حر، وبنقطة صفرية ملائمة $g(\epsilon) = g_0 \sqrt{\epsilon - \epsilon_c}$ ، حيث g_0 الثابت نفسه الموجود في المعادلة (17.7). وتمثل أيضاً كثافة الحالات بالقرب من أعلى مستوى في حزمة التكافؤ بوصفها صورة مرآة لهذه الدالة. علل، لماذا يجب أن يكون الجهد الكيميائي دائماً واقعاً في منتصف الفجوة بغض النظر عن درجة الحرارة.



الشكل 17.7: ينتج من الجهد الدوري لشبيكة بلورية دالة لكثافة الحالات، مكونة من حزم (بحالات كثيرة) وفجوات (دون حالات) لجسم عازل أو شبه موصل، تقع طاقة فيرمي في وسط الفجوة، حيث تكون حزمة التكافؤ، عند $T = 0$ ، مملوءة تمامًا، في حين تكون حزمة التوصيل فارغة تمامًا.

(ب) عرض الفجوة يكون في العادة أكبر كثيرًا من kT . اشتق لهذه الحالة صيغة لعدد إلكترونات التوصيل لوحدة الحجم بدلالة درجة الحرارة، وعرض الفجوة.

(ج) في حالة السليكون، عرض الفجوة بين حزمي التكافؤ والتوصيل، عند درجة حرارة الغرفة، يساوي 1.11 eV . فما عدد إلكترونات التوصيل في كل cm^3 من السليكون عند درجة حرارة الغرفة تقريبًا؟

كيف يمكن مقارنة هذا العدد بعدد إلكترونات التوصيل في الحجم نفسه من النحاس؟

(د) فسر سبب توصيل أشباه الموصلات للكهرباء بطريقة أفضل كثيرًا عند درجات الحرارة المرتفعة، مدعّمًا التفسير ببعض الأرقام (الموصلات الاعتيادية كالنحاس توصل بطريقة أفضل عند درجات الحرارة المنخفضة).

(هـ) كم يجب أن تكون الفجوة بين حزمي التكافؤ والتوصيل تقريبًا، حتى تعد المادة عازلة، وليس شبه موصل؟

السؤال 34.7: إن كثافة الحالات عند قاع حزمة التوصيل في شبه موصل حقيقي، تختلف عن تلك المستخدمة في النموذج الذي استخدم في السؤال السابق بمعامل عددي، قد يكون صغيرًا أو كبيرًا اعتمادًا على نوع المادة. ونكتب كثافة الحالات في حزمة التوصيل على النحو الآتي: $g(\epsilon) = g_{0c}\sqrt{\epsilon - \epsilon_c}$ ، حيث g_{0c} ثابت تسوية جديد يختلف عن g_0 بمعامل فضايف. ونكتب كذلك $g(\epsilon)$ عند أعلى مستوى لحزمة التكافؤ بدلالة ثابت تسوية جديد g_{0v} .

(أ) علّل تغيّر الجهد الكيميائي مع تغير درجة الحرارة، عندما تكون $g_{0c} \neq g_{0v}$ ، وبين متى يتزايد الجهد الكيميائي، ومتى يتناقص مع درجة الحرارة؟

(ب) اكتب صيغة لعدد إلكترونات التوصيل بدلالة $T, \mu, \epsilon_c, g_{0c}$ ، وبسط هذه الصيغة بقدر الإمكان مفترضًا أن $\epsilon_c - \mu \gg kT$.

(ج) تسمى الحالة الفارغة في حزمة التكافؤ الثقب، وبالتوافق مع الجزء (ب) اكتب صيغة لعدد الثقوب، واكتب هذه الصيغة في حالة $\mu - \epsilon_v \gg kT$ بصورة مبسطة.

(د) ادمج نتائج الفرعين (ب) و(ج)، وأوجد صيغة للجهد الكيميائي بوصفه دالة من درجة الحرارة.

(هـ) إن النسبة (g_{0c}/g_0) تساوي 1.09 في حين أن النسبة (g_{0v}/g_0) تساوي 0.44 لمادة

السليكون⁽⁷³⁾ مستخدماً تلك النسب: احسب الإزاحة في الجهد الكيميائي للسليكون عند درجة حرارة الغرفة.

السؤال 35.7: تعاملنا في السؤالين السابقين مع أشباه موصلات نقية، التي تسمى أحياناً أشباه موصلات ذاتية. لكن أجهزة أشباه الموصلات تصنع من أشباه موصلات تحتوي على عناصر أخرى. دُرِس أحد أشباه الموصلات في السؤال (5.7)، وستعامل مع هذا النظام مرة أخرى في هذا السؤال. (تذكر أننا ناقشنا الطاقات كلها المتوافرة في قاع حزمة التوصيل ϵ_c ، وأهملنا أيضاً التمييز بين g_0 و g_{0c} ، وقد أثبت هذا التبسيط صحته لإلكترونات التوصيل في السليكون).

(أ) احسب، الجهد الكيميائي، وارسمه بوصفه دالة من درجة الحرارة للسليكون المطعم بعدد 10^{17} ذرة فوسفور لكل cm^3 (كما هو الحال في السؤال 5.7). استمر في معاملة إلكترونات التوصيل معاملة غاز عادي مثالي.

(ب) ناقش صلاحية استخدام نظام الغاز العادي المثالي لإلكترونات التوصيل، بدلاً من استخدام نظام غاز فيرمي، وأعطِ بعض الأمثلة العددية.

(ج) قَدِّر درجة الحرارة، التي يكون عندها عدد إلكترونات التكافؤ المتهيجة لحزمة التوصيل مقارباً لعدد إلكترونات التوصيل الناتجة عن المانحات الشائبة، ثم بين أي مصدر لإلكترونات التوصيل يكون أكثر أهمية عند درجة حرارة الغرفة؟

السؤال 36.7: إن معظم الفيرميونات ذات الزخم المغزلي $1/2$ ، وفيها إلكترونات الهيليوم الثلاثي وذراته، تمتلك عزوماً مغناطيسية لا صفيرية، وعليه، فإن غازاً من هذا النوع هو بارامغناطيسي. وعلى سبيل المثال، لنأخذ غازاً من الإلكترونات الحرة المحصورة في صندوق ثلاثي الأبعاد. ونأخذ مركبة العزم المغناطيسي لكل إلكترون، في اتجاه z القيمتين $\pm \mu_B$. عند وجود مجال مغناطيسي B في اتجاه z ، فإن كل حالة "علياً" تكتسب طاقة إضافية $-\mu_B B$ ، في حين تكتسب كل حالة "سفلياً" طاقة إضافية (μ_B) .

(أ) فسر، لماذا تتوقع أن تكون مغنطة غاز إلكتروني متشعب أقل كثيراً من مغنطة الإلكترونات البارامغناطيسية (التي درست في الوجدتين الثالثة والسادسة) عدد الجسيمات نفسه وعند المجال المغناطيسي نفسه.

(ب) اكتب صيغة تعبر عن كثافة الحالات في هذا النظام بوجود مجال مغناطيسي B ، وفسر صيغتك عن طريق الرسم.

(ج) يعبر عن المغنطة لهذا النظام بالعلاقة $(N_+ - N_-) \mu_B$ ، حيث N_+ و N_- عدد الإلكترونات التي عزمها المغناطيسي إلى أعلى وإلى أسفل على الترتيب. أوجد صيغة لمغنطة النظام عند $T = 0$ بدلالة N, μ_B, B وطاقة فيرمي.

(د) حدّد التصحيح الأول الذي يعتمد على درجة الحرارة للجواب في الفرع (ج)، عندما تكون $T \ll T_F$. يمكن افتراض $\mu_B B \ll kT$ ، وهذا يعني أن وجود المجال المغناطيسي لا يؤثر كثيراً في الجهد الكيميائي μ . (ولتجنب الخلط بين μ_B و μ ، نقترح استخدام الرمز δ بدلاً من μ_B).

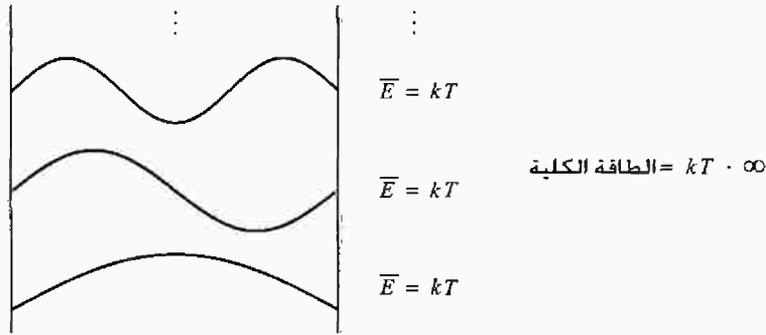
(73) يمكن حساب تلك القيم من الكتل المكافئة للإلكترونات والثقوب. انظر على سبيل المثال:

4.7 إشعاع الجسم الأسود Black Body Radiation

وتطبيقاً آخر على الإحصاء الكمي، سنتناول الإشعاعات الكهرومغناطيسية داخل صندوق ما (كفرن عالي الحرارة) عند درجة حرارة معينة. وفي البداية نناقش توقعات الفيزياء الكلاسيكية (غير الكمية) لهذا النظام.

كارثة الأمواج فوق البنفسجية The Ultraviolet Catastrophe

في الفيزياء الكلاسيكية، نتعامل مع الإشعاعات الكهرومغناطيسية، على صورة "مجال" متصل ينتشر في الفضاء كله. ونجعل هذا المجال، داخل صندوق، بوصفه مجموعة من نماذج الأمواج الموقوفة المختلفة، على نحو ما هو موضح في الشكل (18.7). تتصرف كل موجة موقوفة على صورة هزاز توافقى بتردد $f = c/\lambda$. إن كل موجة كهرومغناطيسية موقوفة، مثل الهزاز الميكانيكي، لها درجتا حرية، وطاقة حرارية متوسطة $2 \cdot \frac{1}{2} kT$. ونظراً إلى أن اعدد الكلي للهزازات في المجال الكهرومغناطيسي لا نهائي، فإن الطاقة الكلية للنظام لا نهائية.



الشكل 18.7: يمكن تحليل المجال الكهرومغناطيسي في صندوق على صورة مجاميع من حالات الأمواج الموقوفة، بأطوال أمواج مختلفة. إن كل حالة هي هزاز توافقى، بتردد محدد جيداً. وفقاً للفيزياء الكلاسيكية، فإن كل هزاز يمتلك طاقة متوسطة تساوي kT ، ونظراً إلى أن عدد الحالات لا نهائي، فإن الطاقة الكلية في الصندوق لا نهائية أيضاً.

إن هذا الاستنتاج للفيزياء الكلاسيكية، لا يتفق مع النتائج العملية، فمثلاً عند فتح فرن ما، لا يتعرض الإنسان إلى كمية لا نهائية من الإشعاعات الكهرومغناطيسية. إن هذا الفرق بين الفيزياء الكلاسيكية والنتائج العملية، يُسمى الكارثة فوق البنفسجية (حيث تأتي الطاقة اللانهائية من الأمواج القصيرة جداً).

توزيع بلانك The Planck Distribution

يعرض ميكانيك الكم حلاً للكارثة فوق البنفسجية، (تاريخياً، فإن الكارثة فوق البنفسجية هي التي أدت إلى ظهور ميكانيك الكم). لا يمتلك الهزاز التوافقي في ميكانيك الكم أي طاقة مهما كانت، بل هناك مستويات طاقة محددة مسموح بها، وتعبّر عنها على النحو الآتي:

$$E_n = 0, hf, 2hf, \dots \quad (69.7)$$

فإن الطاقات جميعها مقيسة بالنسبة إلى طاقة الحالة الأرضية، ارجع إلى الملحق (أ) لمناقشة إضافية لهذه

النقطة. وتعتبر عن دالة التجزيء لهزاز منفرد، على النحو الآتي:

$$(70.7) \quad Z = 1 + e^{-\beta hf} + e^{-2\beta hf} + \dots \\ = \frac{1}{1 - e^{-\beta hf}}$$

وعليه، فإن الطاقة المتوسطة للهزاز، يعبر عنها أيضًا بالعلاقة الآتية:

$$(71.7) \quad \bar{E} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1}$$

وإذا عددنا أن وحدات الطاقة hf ، فعندئذ يكون متوسط عدد وحدات الطاقة للهزاز الواحد على النحو الآتي:

$$(72.7) \quad \bar{n}_{p1} = \frac{1}{e^{hf/kT} - 1}$$

وتعرف هذه العلاقة بتوزيع بلانك، (نسبة إلى ماكس بلانك).

اعتماداً على توزيع بلانك، فإن حالات الأمواج القصيرة للحالات الكهرومغناطيسية لقيم $hf \gg kT$ تكون مقللة أسياً، وتكون مجمدة، وربما غير موجودة أصلاً. وعليه، فإن العدد الكلي للاهتزازات الكهرومغناطيسية المساهمة فعلياً في الطاقة داخل الصندوق تكون محدودة؛ لذا فإن الكارثة فوق البنفسجية لا تحدث. ويلاحظ هنا، أن الحل لمشكلة الكارثة فوق البنفسجية يتطلب تكميماً لطاقات الهزاز، إن حجم وحدة الطاقة، مقارنة بالحد kT ، هو السبب في معامل التقليل الآسي.

الفوتونات Photons

يمكن التعامل مع وحدات الطاقة المكتمة في المجال الكهرومغناطيسي على صورة جسيمات، تسمى الفوتونات، وهي بوزونات يتفق عددها في أي حالة موجية بالضرورة مع توزيع بوز وأينشتاين.

$$(73.7) \quad \bar{n}_{BE} = \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} - 1}$$

حيث ϵ طاقة كل جسيم في الحالة، وتساوي hf ، ومقارنة بالمعادلة (72.7)، نجد أن الجهد الكيميائي للفوتون.

$$(74.7) \quad \mu = 0 \quad \text{لكل الفوتونات}$$

لكن لماذا يكون هذا صحيحاً؟ سنعطي هنا سببين لذلك، ويعتمد كلاهما على حقيقة أن الفوتونات يمكن إنتاجها أو تحطيمها بأي كمية، حيث إن عددها الكلي غير محفوظ. والسبب الأول يعتمد على طاقة هلمهولتز الحرة التي تأخذ أقل قيمة لها عند الاتزان، مع ثبات درجة الحرارة T والحجم V . إن عدد الجسيمات N في نظام من الفوتونات غير محدود، لكنه يأخذ أي قيمة تجعل طاقة هلمهولتز الحرة أقل ما يمكن. وإذا تغير عدد الفوتونات قليلاً عن تلك القيمة، فإن طاقة هلمهولتز الحرة تبقى ثابتة.

$$(75.7) \quad \left(\frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = 0 \quad (\text{a المتعددة})$$

لكن التفاضل الجزئي السابق بالتحديد يساوي الجهد الكيميائي، وعليه، فإن الجهد الكيميائي للفوتونات يساوي صفراً. أما السبب الثاني، فيعتمد على شرط الاتزان الكيميائي، الذي اشتقه في الجزء (6.5). ليتم التعامل مع

تفاعل اعتيادي، يتم فيه إنتاج أو امتصاص فوتون عن طريق الإلكترون.

$$(76.7) \quad e \leftrightarrow e + \gamma.$$

وعلى نحو ما رأينا في الجزء (6.5)، فإن شرط اتزان هذا التفاعل، هو معادلة التفاعل نفسها عندما يستبدل باسم كل نوع من الأنواع جهده الكيميائي، وعليه، فإن:

$$(77.7) \quad \mu_e = \mu_e + \mu_\gamma \quad (\text{عند الاتزان})$$

وبطريقة أخرى، فإن الجهد الكيميائي للفوتونات يساوي صفراً، وباستخدام أي من هذين السببين، نجد أن الجهد الكيميائي لغاز من الفوتونات في داخل صندوق عند درجة حرارة ثابتة يساوي صفراً، وعليه فإن توزيع بيزوأينشتاين يتحول إلى توزيع بلانك.

الجمع على الحالات (أنماط) Summing Over Modes

يعطي توزيع بلانك عدد الفوتونات في أي حالة منفردة (أو حالة جسيم منفرد) للمجال الكهرومغناطيسي. لكننا نرغب في معرفة عدد الفوتونات الكلي في الصندوق، ونرغب أيضاً في معرفة الطاقة الكلية للفوتونات جميعها. وحساب أي من هاتين الكميتين، لا بد أن نجمع على جميع الحالات (الأنماط) المحتملة، تماماً كما فعلنا في حالة الإلكترونات. وسنحسب هنا الطاقة الكلية ونترك حساب العدد الكلي للفوتونات للسؤال (44.7). لتبدأ الحسابات في بعد واحد، صندوق طوله L إن أطوال الأمواج وقيم الزخم المسموح بها للفوتونات هي نفسها للجسيمات الأخرى.

$$(78.7) \quad \lambda = \frac{2L}{n}; \quad p = \frac{hn}{2L}.$$

(حيث n عدد صحيح موجب يرمز إلى الحالة التي نتعامل معها، يجب عدم الخلط بينه وبين \bar{n} ، متوسط عدد الفوتونات في حالة معينة). لكن الفوتونات جسيمات عالية النسبية جداً، وعليه، فإن طاقتها يعبر عنها بالعلاقة:

$$(79.7) \quad \epsilon = \mathcal{P}c = \frac{hcn}{2L}$$

بدلاً من العلاقة ($\epsilon = P^2/2m$)، (يمكن اشتقاق هذه المعادلة من علاقة أينشتاين $\epsilon = hf$ ، التي تربط طاقة الفوتون بترددده، علماً بأن هذا التردد هو $f = c/\lambda$ ، وعليه، فإن الطاقة $\epsilon = hc/\lambda = hcn/2L$). وفي الحالة ثلاثية الأبعاد، يُعدّ الزخم متجهاً، له ثلاثة مركبات، قيمة كل منها ($h/2L$) مضروباً في عدد صحيح، وتكون الطاقة مساوية لحاصل ضرب c في قيمة متجه الزخم.

$$(80.7) \quad \epsilon = c \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} = \frac{hc}{2L} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = \frac{hcn}{2L},$$

حيث استخدمت n في الخطوة الأخيرة لمقدار المتجه \vec{n} تماماً كما هو في الجزء (3.7). إن متوسط الطاقة في أي حالة يساوي حاصل ضرب ϵ في المشغولية لتلك الحالة، التي تعطى من توزيع بلانك.

وللحصول على الطاقة الكلية لجميع الحالات، نجمع n_x, n_y, n_z ، ونضيف في الضرب العامل 2، حيث إن كل موجة تحتوي فوتونات باستقطابين مستقلين، وعليه تصبح الطاقة الكلية على النحو الآتي:

$$(81.7) \quad U = 2 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \epsilon \bar{n}_{p1}(\epsilon) = \sum_{n_x, n_y, n_z} \frac{hcn}{L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1}$$

على نحو ما فعلنا تمامًا في الجزء (3-7)، ونحول المجاميع إلى تكاملات، ونحسبها في المحاور الكروية، (انظر الشكل 11.7)، لكن في هذه المرة، تكون النهاية العليا للتكامل على n هي الما لا نهائية.

$$(82.7) \quad U = \int_0^\infty dn \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi n^2 \sin\theta \frac{hcn}{L} \frac{1}{e^{hcn/2LkT} - 1}$$

ومرة أخرى، فإن التكامل على الزوايا، يعطى $\pi/2$ ، وهذا يساوي عددًا مساحيًا ثمن كرة، نصف قطرها الوحدة.

طيف بلانك:

يصبح التكامل عند n سهلاً نوعاً ما، إذا حولنا المتغيرات إلى طاقة الفوتون $\epsilon = hcn/2L$ ، وعند ذلك نحصل على معامل كلي $L^3 = V$ ، وعليه، فإن الطاقة الكلية لوحدة الحجم يعبر عنها بالعلاقة الآتية:

$$(83.7) \quad \frac{U}{V} = \int_0^\infty \frac{8\pi\epsilon^3/(hc)^3}{e^{\epsilon/kT} - 1} d\epsilon$$

وللدالة داخل التكامل تفسير سهل، فهي تمثل كثافة الطاقة لوحدة طاقة الفوتون، ويطلق عليها أيضاً طيف الفوتونات، ويعبر عنها بالعلاقة الآتية:

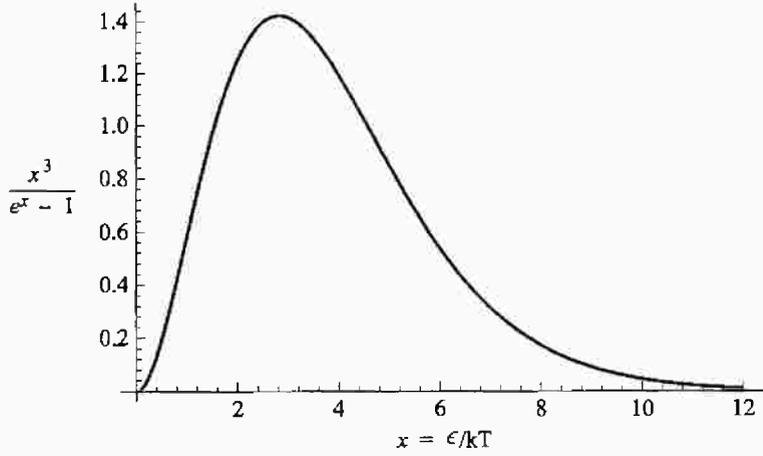
$$(84.7) \quad u(\epsilon) = \frac{8\pi}{(hc)^3} \frac{\epsilon^3}{e^{\epsilon/kT} - 1}$$

وتعطي هذه الدالة، التي اشتقها بلانك، شدة الإشعاع النسبي بوصفه دالة من طاقة الفوتون (أو بوصفها دالة من التردد، إذا ما استبدلت المتغيرات مرة أخرى $f = c/h$).

وعند تكامل $u(\epsilon)$ من ϵ_1 إلى ϵ_2 ، نحصل على الطاقة لوحدة الحجم في مدى طاقة الفوتونات. لحساب التكامل على الطاقة، نحول مرة أخرى المتغيرات إلى $x = \epsilon/kT$ ، فتصبح المعادلة (83.7) على النحو الآتي:

$$(85.7) \quad \frac{U}{V} = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

لا تزال الدالة داخل التكامل تتناسب مع طيف بلانك، وهي مرسومة في الشكل (19.7). حيث يصل الطيف قيمته القصوى عند $x = 2.82$ أو $\epsilon = 2.82kT$. ومن غير المستغرب، أن درجات الحرارة المرتفعة تعطي طاقة أعلى للفوتون (يطلق على هذا القانون قانون فين).



الشكل 19.7: طيف بلانك مرسومًا بدلالة المتغير عديم الوحدات $x = \epsilon/kT = hf/kT$ ، تعطي المساحة تحت أي جزء من المنحنى مضروبة في الكمية $(hc)^3 / (kT)^4$ كثافة الطاقة للإشعاعات الكهرومغناطيسية خلال مدى التردد (أو طاقة الفوتون) المناظر. انظر المعادلة 85.7.

ويمكن قياس درجة الحرارة داخل فرن، بتحديد لون الإشعاعات الكهرومغناطيسية الموجودة داخله، فعلى سبيل المثال، فإن درجة حرارة فرن يستخدم في شيّ الفخار هي 1500 K ، وتعطي طيفاً بقيمة قصوى عند $\epsilon = 0.36\text{ eV}$ في منطقة الأشعة تحت الحمراء القريبة. (في حين تملك الفوتونات المرئية طاقات أعلى من ذلك، وتقع في حدود $2\text{--}3\text{ eV}$).

السؤال 37.7: أثبت، أن القيمة القصوى لطيف بلانك تتحقق عند $x = 2.82$.

السؤال 38.7: لا يوضح الشكل (19.7) كيفية تغير طيف بلانك مع درجة الحرارة. ولفحص الاعتماد على درجة الحرارة، ارسم $u(\epsilon)$ تحليلياً عند درجتى حرارة $T = 3000\text{ K}$ و $T = 6000\text{ K}$ (على الرسم البياني نفسه)، استخدم eV لوحدات المحور الأفقي.

السؤال 39.7: حوّل المتغيرات في المعادلة (83.7) إلى $\lambda = hc/\epsilon$ ، ثم اشتق صيغة لطيف الفوتونات بوصفه دالة من طول الموجة. ارسم هذا الطيف، ثم أوجد صيغة عددية لطول الموجة، التي يصل الطيف عندها إلى قيمته القصوى، بدلالة hc/kT . وفسّر، لماذا لا تتحقق القيمة القصوى عند $(\lambda = hc/2.82kT)$.

السؤال 40.7: اشتق صيغة لكثافة الحالة لغاز من الفوتونات (أو أي غاز آخر من جسيمات عالية النسبية، وبحالتي استقطاب) مبتدئاً بالمعادلة (83.7).

السؤال 41.7: افترض أي حالتين داخليتين s_1 و s_2 للذرة، وافترض أن الحالة s_2 هي الأعلى حيث $E(s_2) - E(s_1) = \epsilon$ ثابت موجب، وعندما تكون الذرة في الحالة s_2 ، فإن هناك احتمالاً معيناً لوحدة الزمن بهبوط الذرة لحظياً للحالة s_1 ، وذلك بإطلاق فوتون بطاقة ϵ ، إن هذا الاحتمال لوحدة الزمن يسمى معامل A لأينشتاين.

$A =$ احتمال الهبوط اللحظي لوحدة الزمن

ومن جهة أخرى، إذا كانت الذرة في الحالة s_1 ، وأسقطنا ضوءاً عليها بتردد $f = \epsilon/h$ ، عندئذٍ ستكون هناك فرصة، بأن تقوم الذرة بامتصاص فوتون والقفز إلى الحالة s_2 . إن احتمال حدوث ذلك، لا يعتمد فقط على الزمن المار، لكنه يتناسب أيضاً مع شدة الضوء، أو بدقة أكثر، كثافة طاقة الضوء لوحدة التردد، $u(f)$ (هذه الدالة عند تكاملها على أي مدى من التردد، تعطي الطاقة لوحدة الحجم في هذا المدى من التردد. أكثر ما يلزم لهذا الانتقال في الذرة هو قيمة $u(f)$ عند التردد $f = \epsilon/h$. ويسمى احتمال امتصاص فوتون لوحدة الزمن في وحدة الشدة معامل B لأينشتاين.

$$\frac{\text{احتمال امتصاص فوتون لوحدة الزمن}}{u(f)} = B$$

وأخيراً، فإنه يمكن للذرة للقيام بانتقال مستحدث من s_2 إلى s_1 ، وباحتمال يتناسب مع شدة الضوء عند التردد f (الانبعاث المستحدث هو الآلية الأساسية لعمل الليزر). وعليه نعرف معامل ثالث B' مماثلاً للمعامل B .

$$\frac{\text{احتمال الانبعاث المستحدث لوحدة الزمن}}{u(f)} = B'$$

وقد بين أينشتاين عام 1917، أن معرفة أي واحد من هذه المعاملات الثلاثة، تتم بمعرفة المعاملات الثلاثة مجتمعة.

(أ) تخيل وجود مجموعة كبيرة من هذه الذرات، حيث إن N_1 ، منها في الحالة s_1 و N_2 في الحالة s_2 . اكتب صيغة لمعدل التغيير في N_1 ، dN_1/dt ، بدلالة N_1 ، N_2 ، A ، B ، B' .

(ب) إن الحيلة التي استخدمها أينشتاين، تتمثل في تخيله أن الذرات تسبح في انبعاث حراري، وعليه فإن $u(f)$ هي دالة طيف بلانك، وفي حالة الاتزان، فإن N_1 و N_2 ثابتتان مع الزمن، والنسبة بينهما تحدد بمعامل بسيط من معاملات بولتزمان. بناءً على ذلك، أثبت أن هذه المعاملات يرتبط بعضها ببعض بالعلاقات الآتية:

$$\frac{A}{B} = \frac{8\pi h f^3}{c^3} \quad \text{و} \quad B' = B$$

الطاقة الكلية Total Energy

لقد تعاملنا كثيراً مع الطيف، ونعود الآن لسؤال عن الطاقة الكهرومغناطيسية الكلية داخل الصندوق. تُعدّ المعادلة (85.7) جواباً نهائياً لهذا السؤال باستثناء التكامل على x ، الذي ينتج عنه عدد عديم الوحدات فقط. ويمكن استخدام الشكل (19.7) في تقدير هذا العدد، ويكون في حدود 5.6. حساب طريف، لكنه في حاجة إلى عدد من الحيل الرياضية لإجرائه، (انظر الملحق ب)، قيمة دقيقة تساوي $(\pi^4/15)$. وعليه، فإن كثافة الطاقة الكلية، المجموعة على جميع الترددات، تأخذ الشكل الآتي:

$$(86.7) \quad \frac{U}{V} = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15 (hc)^3}$$

إن أهم صفة لهذه النتيجة، هي اعتماد كثافة الطاقة الكلية على القوة الرابعة لدرجة الحرارة، وذلك يعني أن مضاعفة درجة الحرارة تؤدي إلى زيادة الطاقة الكلية في داخل الصندوق بمعامل يساوي 16. عديديًا، الطاقة الكهرومغناطيسية الكلية داخل فرن عادي تكون صغيرة إلى حد ما، فمثلًا الطاقة لوحدة الحجم في فرن عند درجة حرارة $T = 460 \text{ K}$ (الحرارة التي تستخدم لخبز البسكويت) تكون في حدود $3.5 \times 10^{-5} \text{ J/m}^3$ ، وهذه كمية صغيرة مقارنة بالطاقة الحرارية للهواء داخل الفرن. قد تبدو المعادلة (86.7) معقدة، وقد كان بالإمكان توقع الجواب باستثناء معامل عددي، عن طريق تحليل الأبعاد. ويجب أن يكون متوسط طاقة الفوتون مساويًا kT ، وعليه، فإن متوسط الطاقة الكلية يتناسب مع $N kT$ ، حيث N العدد الكلي للفوتونات، ويتناسب مع الحجم V للوعاء، وعليه، فإن الطاقة الكلية، يجب أن تكون على النحو الآتي:

$$(87.7) \quad U = \left(\text{ثابت} \right) \cdot \frac{V kT}{\rho^3},$$

حيث l كمية لوحدة الطول (إذا رغبت، يمكنك التظاهر بأن كل فوتون يشغل حجمًا، قيمته l^3). لكن أكثر الأبعاد أهمية هو طول موجة ديبرولي للفوتونات: $\lambda = h/p = hc/E \propto hc/kT$ ، وبتعويض طول موجة ديبرولي بدلًا من l ، نحصل على المعادلة (86.7)، باستثناء المعامل $8\pi^5/15$.

السؤال 42.7: افترض إشعاعات كهرومغناطيسية داخل فرن، حجمه 1 m^3 ، عند درجة حرارة $T = 1500 \text{ K}$.

- (أ) ما الطاقة الكلية لهذه الإشعاعات؟
 (ب) ارسم طيف الإشعاع بوصفه دالة من طاقة الفوتون.
 (ج) ما الجزء الذي يقع في المنطقة المرئية، بأطوال أمواج بين $400 \text{ nm} - 700 \text{ nm}$ ، من هذه الطاقة جميعها؟

السؤال 43.7: إن درجة الحرارة على سطح الشمس، تساوي 5800 K تقريبًا.

- (أ) ما طاقة الإشعاعات الكهرومغناطيسية لكل متر مكعب من الفضاء، بالقرب من سطح الشمس؟
 (ب) ارسم طيف هذه الإشعاعات بوصفه دالة من طاقة الفوتون. وحدد الجزء من الطيف المكافئ للأمواج المرئية الواقعة في المدى 400 nm و 700 nm .
 (ج) ما جزء الطاقة الواقع في الجزء المرئي من الطيف؟ (احسب التكامل عدديًا).

الإنتروبي لغاز من الفوتونات Entropy of a Photon Gas

إلى جانب الطاقة الكلية للفوتونات في الغاز، ربما نرغب في معرفة بعض الكميات الأخرى، على سبيل المثال، العدد الكلي للفوتونات الموجودة أو الإنتروبي الكلية، هاتان الكميتان متساويتان، على نحو ما سنبيين، باستثناء عامل ثابت. إن أسهل الطرق لحساب الإنتروبي هو حسابها من السعة الحرارية. وتعتبر عن السعة الحرارية لصندوق، حجمه V ، ويحتوي فوتونات حرارية بالعلاقة الآتية:

$$(88.7) \quad C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = 4aT^3,$$

حيث a ثابت يساوي $(8\pi^5 k^4 V / 15 (hc)^3)$ ، وتصلح هذه الصيغة للسعة الحرارية عند درجات الحرارة جميعها. وفيها درجة الصفر. وبتكامل هذه الصيغة نحصل على الإنتروبي المطلقة. وبتقديم الرمز T' لمتغير التكامل، نحصل على $S(T)$ على النحو الآتي:

$$(89.7) \quad S(T) = \int_0^T \frac{C_V(T')}{T'} dT' = 4a \int_0^T (T')^2 dT' = \frac{4}{3} aT^3 = \frac{32\pi^5}{45} V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3 k.$$

ويُعبر عن العدد الكلي للفوتونات الصيغة نفسها، لكن بمعامل عددي مختلف، ودون k الأخيرة. (انظر السؤال 44.7).

خلفية الإشعاعات الكونية The Cosmic Background Radiation

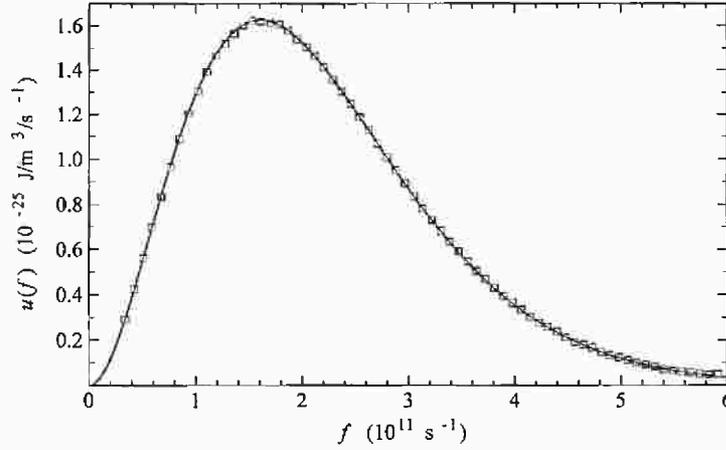
لعل أفضل مثال على غاز من الفوتونات، هو الإشعاعات التي تملأ الفضاء الملحوظ كله، وبطيف حراري دقيق عند درجة حرارة $T = 2.73 \text{ K}$. إن تفسير درجة الحرارة هذه ليس بالأمر المباشر، حيث لا توجد أي آلية للحفاظ على الفوتونات في حالة اتزان حراري بعضها مع بعض، أو مع أي شيء آخر. وبدلاً من ذلك، ونفكر في هذه الإشعاعات بوصفها بقايا من الإشعاعات، منذ الزمن الذي كان الكون عنده مملوئاً بغاز متأين، يتفاعل بقوة مع الإشعاعات الكهرومغناطيسية، عند ذلك الزمن كانت درجة الحرارة في حدود 3000 K ، ومنذ ذلك الوقت، فقد تمدد الكون ألف ضعف، وفي الاتجاهات جميعها، واتسعت أطوال أمواج الفوتونات بالمقدار نفسه محافظة بذلك على شكل الطيف، لكن مع إزاحة درجة الحرارة الفعالة إلى 2.73 K .

إن طاقة الفوتونات التي تكوّن خلفية الإشعاعات الكونية تكون منخفضة، حيث إن قيمة الطيف القصوى تصل عند $\epsilon = 2.82kT$ وتساوي $6.6 \times 10^{-4} \text{ eV}$ ، وهذه الطاقة تتكافأ مع طول أمواج في حدود 1 mm ، وهي الواقعة في المنطقة فوق الحمراء البعيدة. تلك الأمواج لا تخترق غلافنا الجوي، ولكن أطوال الأمواج الطويلة الواقعة في ذيل الطيف في المنطقة الميكروية، يمكن التقاطها دون صعوبة تُذكر.

لقد اكتشفت هذه الأمواج بمحض المصادفة، عن طريق الفلكيين عام 1965. ويظهر الشكل (20.7) مجموعة حديثة من القياسات على مدى واسع من أطوال الأمواج، أخذت فوق الغلاف الجوي للأرض، عن طريق قمر اصطناعي لاكتشاف الخلفية الكونية للإشعاعات.

واعتماداً على الصيغة (86.7)، فإن الطاقة الكلية المتوفرة في خلفية الإشعاعات الكونية، هي فقط 0.26 MeV/m^3 ، في حين أن متوسط الطاقة في مادة عادية تقع في حدود بروتون واحد لكل متر مكعب أو (1000 MeV/m^3) . والغريب، أن كثافة خلفية الإشعاعات الكونية معروفة في ثلاثة أعداد معنوية، في حين أن متوسط كثافة المادة العادية لا يكون في حدود معامل 10.

على الرغم من ذلك، فإن الإنتروبي لخلفية الإشعاعات أكبر كثيراً منها للمادة العادية. واعتماداً على الصيغة (89.7)، فإن كل متر مكعب من الفضاء يحتوي على إنتروبي فوتونية $(2.89 \times 10^9) k$ ، أي تقريباً ثلاثة مليارات "وحدة" إنتروبي، وليس سهلاً حساب الإنتروبي للمادة العادية بدقة، لكن إذا ادعينا أن هذه المادة غاز مثالي عادي، فإن الإنتروبي يصبح $N k$ مضروباً في عدد صغير، وبعبارة أخرى، فهي عدد قليل من k لكل متر مكعب.



الشكل 20.7: طيف خلفية الإشعاعات الكونية، كما قيس بالقمرة الاصطناعي المستخدم في دراسة خلفية الإشعاعات الكونية. كثافة الطاقة لوحدة التردد بالوحدات الدولية مرسومة على المحور الشاقولي. لاحظ أن التردد $f = 3 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ ، يكافئ طول موجة $\lambda = c/f = 1.0 \text{ mm}$. إن كل مربع يمثل نقطة قياس عملية. وإن عدم القدرة على التحديد لكل نقطة صغير جداً، حيث لا يمكن إظهاره على المنحنى. لكن حجم المربع يمثل مقياساً لعدم القدرة على التحديد الناتجة عن التأثيرات الثابتة. المنحنى المرسوم بوصفه خطأ متصلًا يمثل طيف بلانك النظري محسوباً عند درجة حرارة $T=2.735$ ، ليعطي أفضل توافق مع النتائج العملية.

السؤال 44.7: يتعلق هذا السؤال بعدد الفوتونات في غاز من الفوتونات.

(أ) أثبت أن عدد الفوتونات التي في حالة اتزان، في صندوق حجمه V ، عند درجة حرارة T يساوي:

$$N = 8\pi V \left(\frac{kT}{hc} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

علمًا بأن التكامل لا يمكن إجراؤه تحليليًا. احصل على النتيجة من الجداول، أو احسبه عددًا.

(ب) كيف يمكن مقارنة هذه النتيجة بالصيغة الخاصة بالإنتروبي لغاز من الفوتونات، التي اشتقت في الكتاب؟ (ما قيمة الإنتروبي لكل فوتون بدلالة k ؟)

(ج) احسب عدد الفوتونات لكل متر مكعب عند درجات الحرارة الآتية:

$$T = 2.73 \text{ K}, \quad T = 1500 \text{ K}, \quad T = 300 \text{ K}$$

السؤال 45.7: استخدم العلاقة $P = -(\partial U)/(\partial V)_{S,N}$ ، وبين أن ضغط غاز الفوتونات يساوي ثلث كثافة الطاقة $\left(\frac{U}{V}\right)$. واحسب الضغط الناتج عن الإشعاعات في فرن عند درجة حرارة $T = 1500 \text{ K}$. وقران ذلك بضغط الغاز العادي الناتج عن الهواء، ثم احسب ضغط الإشعاع عند مركز الشمس، حيث درجة الحرارة تساوي $T = 15 \times 10^6 \text{ K}$. وقران ذلك بضغط غاز الهيدروجين المؤين ذي الكثافة التقريبية 10^5 kg/m^3 .

السؤال 46.7: من المفيد أحياناً معرفة الطاقة الحرة لغاز من الفوتونات.

(أ) احسب طاقة هلمهولتز الحرة لغاز من الفوتونات، مباشرة من التعريف $F = U - TS$.

(ب) تحقق من صحة الصيغة $S = -(\partial F / \partial T)_{V, \mu}$ لهذا النظام.

(ج) اشتق F بالنسبة إلى الحجم V ، واحصل على ضغط غاز الفوتونات، وتحقق من أن النتيجة تتفق ونتيجة السؤال السابق.

(د) الطريقة الأخرى الأكثر اهتماماً لحساب F ، هي تطبيق الصيغة $F = -kT \ln Z$ لكل حالة على انفراد (كل هزاز فعال)، ومن ثم الجمع على جميع الحالات. ثم أجر تلك الحسابات لتحصل على:

$$F = 8\pi V \frac{(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx$$

أجر التكامل بطريق الأجزاء، وتحقق من أن جوابك يتفق مع الجزء (أ).

السؤال 47.7: لقد أكدنا في الكتاب، أن الكون كان مملوءاً بغاز متأين، حتى بردت درجة حرارته إلى حدود $T=3000 \text{ K}$. ولرؤية ذلك، نفترض أن الكون يحتوي فقط على فوتونات وذرات الهيدروجين، وبنسبة ثابتة تساوي 10^9 فوتون لكل ذرة هيدروجين. احسب، ثم ارسم الجزء المطلوب من الذرات المتأينة بوصفه دالة من درجة الحرارة لدرجات حرارة تتراوح من الصفر إلى 6000 K . وكيف تتغير النتيجة إذا كانت النسبة هي 10^8 أو 10^{10} ؟ (ملحوظة: اكتب كل شيء بدلالة متغير عديم الوحدات مثل $t = kT / I$ ، حيث I طاقة التأين للهيدروجين).

السؤال 48.7: إضافة إلى خلفية الإشعاعات الكونية من الفوتونات، يعتقد أن الكون يتعرض أيضاً لخلفية إشعاعات من النيوترونات (ν)، ومضاداتها ($\bar{\nu}$) عند درجة حرارة فعالة، قيمتها ($T = 1.95 \text{ K}$). ويوجد ثلاثة أنواع من النيوترونات، وجسيم مضاد لكل منها، لكن بحالة استقطاب واحدة مسموح بها. افترض أن الأنواع الثلاثة كلها للأجزاء من (أ) إلى (ج) عديمة الكتلة تماماً.

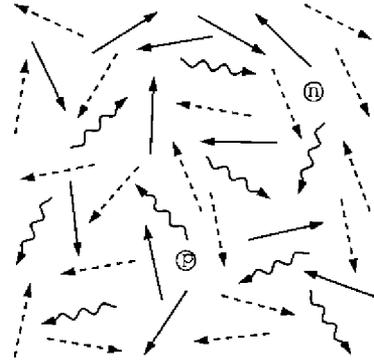
(أ) من المنطقي افتراض أن تركيز النيوترونات، لكل نوع من هذه الأنواع، يساوي تركيز الجسيمات المضادة لها؛ لذا فإن الجهود الكيميائية متساوية، $\mu_\nu = \mu_{\bar{\nu}}$ ، إضافة إلى ذلك، فإن النيوترونات وأجسامها المضادة تنتج وتختفي بأزواج بحسب المعادلة الآتية $2\gamma \leftrightarrow \nu + \bar{\nu}$. (حيث γ ترمز إلى الفوتون). مفترضاً أن التفاعل في وضع الاتزان (كما كان يجب أن يكون عند بداية الكون)، أثبت أن الجهد الكيميائي $\mu = 0$ لكل من النيوترونات وجسمها المضاد.

(ب) إذا كان النيوترونات عديم الكتلة، فلا بد أن يكون عالي النسبية، ولكونه فيرميوناً، فهو يخضع لمبدأ الاستثناء. استخدم هذه الحقائق، واشتق صيغة لكثافة الطاقة الكلية (طاقة لوحدة الحجم) لخلفية إشعاعات النيوترونات، وأجسامها المضادة (ملحوظة: هناك بعض الفوارق بين غاز النيوترونات وغاز الفوتونات. الأجسام المضادة تمتلك طاقات موجبة أيضاً، وعليه، لتأخذ وجود الجسيمات المضادة في الحسبان ونضرب في المعامل 2، ولكي نأخذ الأنواع الثلاثة في الحسبان نضرب في المعامل 3)، ولإجراء التكامل، نتحول إلى متغير عديم الوحدات، ثم نستخدم الحاسوب لإجراء التكامل عددياً، أو نستخرج قيمة التكامل من الجداول، أو الرجوع إلى الملحق ب.

(ج) اشتق صيغة لعدد النيوترونات لوحدة الحجم في خلفية إشعاعات النيوترونات، واحسب النتيجة عددياً عند درجة حرارة النيوترونات الحالية $T = 1.95 \text{ K}$.

(د) من المحتمل، أن تمتلك النيوترونات كتلة صغيرة جدًا غير صفرية، لكن ذلك ما كان ليؤثر في إنتاجها في بدايات الكون، عندما كانت mc^2 مهملة، مقارنة بالطاقات الحرارية الاعتيادية، أما الآن، فإن الكتلة الكلية للنيوترونات جميعها مهمة. افترض أن أحد أنواع النيوترونات (وجسمه المضاد) له كتلة غير صفرية. ماذا يجب أن يكون الحد mc^2 (بوحدة eV)، حتى تكون الكتلة الكلية للنيوترونات في حدود الكتلة الكلية للمادة العادية؟

السؤال 49.7: لقد كانت درجة الحرارة، لفترة قصيرة عند بداية الكون، مرتفعة بصورة كافية لإنتاج عدد كبير من أزواج الإلكترونات والبوزترونات، وعليه، فإن هذه الأزواج تكون نوعًا ثالثًا لخلقية الإشعاعات إضافة إلى الفوتونات والنيوترونات (انظر الشكل 21.7). وإن الإلكترونات والبوزترونات فيرميونات كالنيوترونات، لكنها ليست عديمة الكتلة. (الكتلة نفسها للنوعين). ولكل من الإلكترون والبوزترون حالتا استقطاب مستقلتان. خلال الفترة الزمنية ذات الأهمية، كانت كثافتا الإلكترونات والبوزترونات متساويتين تقريبًا.



الشكل 21.7: عندما كانت درجة الحرارة أكبر من كتلة الإلكترون مضروبة في المعامل hc/k ، كان الكون مملوءًا بثلاثة أنواع من الإشعاعات: إلكترونات وبوزترونات (أسهم متصلة)، نيوترونات (سهم متقطع) وفوتونات (سهم متعرج). كان هناك أيضًا عدد قليل من البروتونات والنيوترونات المغمورة بهذه الإشعاعات، وبنسبة بروتون أو نيوترون واحد لكل مليار من جسيمات الإشعاعات.

نأى على ذلك، فإن افتراض أن جهديهما الكيميائيين صفرًا يُعدّ تقريبًا جيدًا، على نحو ما الحال في السؤال السابق، ونسترجع من النظرية النسبية الخاصة، أن الطاقة لجسيم، كتلته m هي: $\epsilon = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2}$.

(أ) بين أن كثافة الطاقة للإلكترونات والبروزترونات عند درجة حرارة T يعبر عنها بالعلاقة:

$$\frac{U}{V} = \frac{16\pi(kT)^4}{(hc)^3} u(T)$$

حيث

$$u(T) = \int_0^\infty \frac{x^2 \sqrt{x^2 + (mc^2/kT)^2}}{e^{\sqrt{x^2 + (mc^2/kT)^2} + 1} dx$$

(ب) بين أن $u(T)$ تؤول إلى الصفر عندما $mc^2 \ll kT$ ، وفسّر سبب افتراض أن هذه النتيجة معقولة.

(ج) احسب $u(T)$ عندما تكون $mc^2 \gg kT$ ، وقارن النتائج مع نتائج السؤال السابق لإشعاعات النيوتريـنو.

(د) استخدم جهاز حاسوب، واحسب، ثم ارسم $u(T)$ عند درجات حرارة متوسطة.

(هـ) مستخدمًا خطوات السؤال (46.7)، خاصة الجزء (د) أثبت أن كثافة الطاقة الحرة لإشعاع زوج

الإلكترون والبوزترون يعبر عنه بالعلاقة الآتية:

$$\frac{F}{V} = -\frac{16\pi(kT)^4}{(hc)^3} f(T)$$

حيث $f(T)$ يعبر عنها بالعلاقة:

$$f(T) = \int_0^{\infty} x^2 \ln \left(1 + e^{-\sqrt{x^2 + (mc^2/kT)^2}} \right) dx$$

احسب $f(T)$ عند النهايتين، واستخدم جهاز حاسوب لحساب، ثم ارسم $f(T)$ عند درجات حرارة متوسطة. (و) اكتب الإنتروبي لإشعاع زوج الإلكترون والبوزوترون، بدلالة $u(T)$ و $f(T)$ ، واحسب الإنتروبي عند درجات حرارة مرتفعة.

السؤال 50.7: يمكن استخدام نتائج السؤال السابق، لتفسير كون درجة الحرارة الحالية لخلفية النيوتريو الكونية (السؤال 48.7)، تساوي 1.95 K بدلاً من 2.73 K. لقد كانت درجة حرارة الفوتونات والنيوترونات متساوية أصلاً. لكن مع تمدد الكون وتبرده، أصبحت التفاعلات بين النيوترونات والجسيمات الأخرى ضعيفة، حيث يمكن إهمالها. وبعد ذلك مباشرة، انخفضت درجة الحرارة إلى النقطة التي أصبحت عندها (kT/c^2) لا تزيد كثيراً على كتلة الإلكترون. ومع اختفاء الإلكترونات والبوزوترونات في الدقائق الآتية، سُخنت إشعاعات الفوتونات، وليس النيوترونات.

(أ) تخيل أن للكون حجمًا كليًا محدودًا، V ، لكن هذا الحجم يتزايد مع الزمن. اكتب صيغة للإنتروبي الكلية للإلكترونات والبوزوترونات والفوتونات بوصفها دالة من الحجم V ، ودرجة الحرارة T باستخدام الدوال $u(T)$ و $f(T)$ المستخدمتين في السؤال السابق. ناقش أن الإنتروبي الكلية، كان من الممكن أن تكون محفوظة في بداية الكون مفترضاً عدم وجود جسيمات أخرى متفاعلة معها. (ب) كان من الممكن، أن تكون إنتروبي إشعاع النيوترونات محفوظة وحدها، خلال تلك الفترة الزمنية، حيث إنها لم تكن قادرة على التفاعل مع أي شيء آخر. استخدم هذه الحقيقة لتبين أن درجة حرارة النيوترونات T_ν ودرجة حرارة الفوتونات T ، ترتبطان بالعلاقة الآتية:

$$\left(\frac{T}{T_\nu} \right)^3 \left[\frac{2\pi^4}{45} + u(T) + f(T) \right] = \text{ثابت}$$

خلال تمدد الكون وتبريده. احسب قيمة الثابت، بافتراض أن $T_\nu = T$ عند درجات الحرارة العالية جدًا. (ج) احسب T/T_ν عند درجات حرارة منخفضة، لتأكيد أن درجة حرارة النيوتريو الحالية تساوي 1.95 K. (د) استخدم جهاز حاسوب لرسم النسبة T/T_ν ، بوصفها دالة من درجة الحرارة في المدى kT/mc^2 بين صفر وثلاثة⁽⁷⁴⁾.

إفلات الفوتونات من فتحة Photons Escaping through a Hole

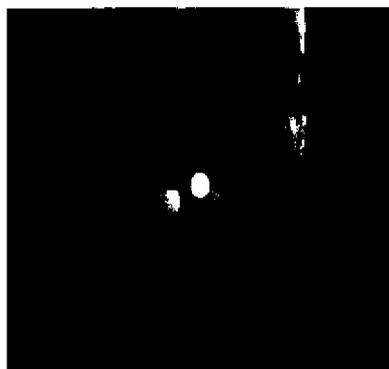
لقد تركزت دراستنا إلى الآن على تحليل غاز الفوتونات داخل فرن، أو أي صندوق آخر في حالة اتزان حراري. لكن في النهاية، لا بد من أن نفهم عملية انبعاث الفوتونات من جسم حار؛ لذا نسأل: ماذا يحدث عند إحداث فتحة في صندوق مليء بالفوتونات لنسمح لبعضها بالخروج من الصندوق؟ (انظر الشكل 22.7).

تنتقل الفوتونات في الفراغ، بالسرعة نفسها، بغض النظر عن طول موجتها، وعليه فإن احتمال إفلات فوتونات بطاقات منخفضة، يساوي احتمال إفلات الفوتونات بطاقات مرتفعة. بناءً على ذلك، فإن الطيف للفوتونات

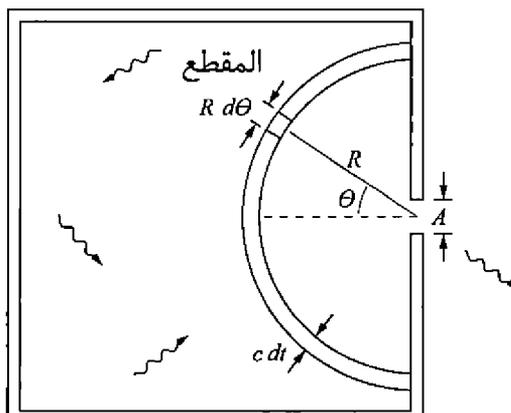
(74) الآن، وبعد أن أنهيت السؤال، ستجد من السهل التعامل مع ديناميكا بداية الكون، وتحديد متى بدأ كل ذلك، والفكرة الأساسية هي أن نفترض أن الكون يتمدد بسرعة الإفلات، وكل ما يمكن أن تحتاج إليه موجود في بحث واينبيرج (1977).

الحارجة من الصندوق من خلال الفتحة، هو طيف الفوتونات نفسه داخل الصندوق. الجزء الصعب هو حساب كمية الإشعاعات التي تفلت من الصندوق، وهي لا تعتمد على كثير من الفيزياء، ولكنها تعتمد على عوامل هندسية قد تكون صعبة أحياناً.

إن الفوتونات التي تفلت من الصندوق خلال فترة زمنية dt ، هي التي تكون موجهة في اتجاه الفتحة من منطقة ما على قشرة نصف كروية، على نحو ما هو مبين في الشكل (22.7). ويعتمد نصف قطر القشرة على المدة الزمنية التي ننظر فيها، في حين أن سمك القشرة يساوي $c dt$. ونستخدم الإحداثيات الكروية لتحديد النقاط المختلفة على القشرة، على نحو ما هو مبين في الشكل. وتتراوح الزاوية θ من صفر على يسار القشرة، إلى $\pi/2$ عند أقصى طرف عند اليمين، كذلك هناك زاوية أخرى ϕ ، وهي غير ظاهرة في الشكل، وتتراوح بين 0 و 2π ، عندما تنتقل من الطرف الأعلى للقشرة داخلية في الصفحة ومتجهة نحو الطرف الأسفل، ثم خارجة من الصفحة لتعود أخرى ثانية إلى أعلى طرف من القشرة.



الشكل 22.7: عند إحداث فتحة في وعاء مملوء بالإشعاعات (فرن مثلاً)، فإن طيف الضوء الخارج من تلك الفتحة، هو طيف الضوء نفسه داخل الوعاء. إن كمية الطاقة الكلية التي تفلت من الوعاء، تتناسب مع حجم الفتحة والزمن.



الشكل 23.7: إن الفوتونات التي نقلت حاليًا، كانت في مكان ما من قشرة نصف كروية داخل الصندوق. ومن نقطة ما على القشرة، فإن احتمال الإفلات يعتمد على المسافة من الفتحة وعلى الزاوية θ .

لنركز الآن على الجزء المظلل من القشرة المبينة في الشكل (23.7)، إن حجم هذا الجزء dV ، يعبر عنه بالعلاقة:

$$(90.7) \quad \text{حجم المقطع} = (Rd\theta) \times (R \sin \theta d\phi) \times (cdt).$$

(عمق الجزء، عمودياً على الصفحة، يساوي $R \sin \theta d\phi$ ؛ لأن $R \sin \theta$ يساوي نصف قطر الحلقة لقيمة ثابتة للزاوية θ ، عندما تتغير ϕ من صفر على 2π).

وتعبر عن كثافة الطاقة للفوتونات في هذا الجزء بالعلاقة (81.7)

$$(91.7) \quad \frac{U}{V} = \frac{8\pi^5 (kT)^4}{15 (hc)^3}.$$

وفيما يأتي سنستخدم الطاقة لوحدة الحجم (U/V)، وعليه، فإن الطاقة الكلية في ذلك الجزء المظلل dU ، تساوي:

$$(92.7) \quad \text{طاقة الجزء المظلل (المقطع)} = \frac{U}{V} cdt R^2 \sin \theta d\theta d\phi.$$

لكن، ليس الطاقة كلها الموجودة في هذا الجزء، ستفلت من الفتحة؛ لأن معظم الفوتونات متجهة في الاتجاه غير الصحيح. إن احتمال أن يكون الفوتون متجهاً في الاتجاه الصحيح يساوي المساحة الظاهرية للفتحة، كما ترى من جهة الجزء المظلل، مقسومة على المساحة الكلية لسطح كرة تخيلية، نصف قطرها R ، ومركزها عند الجزء المظلل؛ لذا فإن الاحتمال يعبر عنه بالعلاقة الآتية:

$$(93.7) \quad \text{احتمالية الإفلات} = \frac{A \cos \theta}{4\pi R^2}.$$

حيث A مساحة الفتحة، و $A \cos \theta$ المساحة المصغرة، كما ترى عند ذلك الجزء، وتكون كمية الطاقة التي تفلت من هذا الجزء على النحو الآتي:

$$(94.7) \quad \text{الطاقة الخارجة من المقطع} = \frac{A \cos \theta U}{4\pi V} c dt \sin \theta d\theta d\phi.$$

ولحساب الطاقة الكلية التي تفلت من خلال الفتحة، خلال فترة زمنية dt ، نجري عملية تكامل على المتغيرات θ و ϕ .

$$(95.7) \quad \begin{aligned} \text{طاقة الإفلات الكلية} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{A \cos \theta U}{4\pi V} c dt \sin \theta \\ &= 2\pi \frac{A U}{4\pi V} c dt \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{A U}{4 V} c dt. \end{aligned}$$

ومن الطبيعي أن تتناسب كمية الطاقة المتسربة من الفتحة مع مساحة الفتحة A ، والفترة الزمنية dt . وإذا قسمنا على $A dt$ ، نحصل على القدرة المنبعثة لوحدة المساحة، على النحو الآتي:

$$(96.7) \quad \text{القدرة لوحدة المساحة} = \frac{c U}{4 V}.$$

وباستثناء المعامل (1/4)، فإنه بالإمكان استنتاج هذه الصيغة باستخدام تحليل الوحدات. لتحويل الطاقة لوحدة الحجم إلى قدرة لوحدة المساحة، نضرب في كمية، لها وحدات (بعد/ زمن)، لكن أهم كمية فيزيائية تتضمن هذه الوحدات هي سرعة الضوء، وبتعويض الصيغة (91.7) لكثافة الطاقة داخل الصندوق، نحصل على صيغة أكثر وضوحًا هي:

$$(97.7) \quad \text{القدرة لوحدة المساحة} = \frac{2\pi^5 (kT)^4}{15 h^3 c^2} = \sigma T^4$$

ويعرف الثابت σ باسم ثابت ستيفان وبولتزمان.

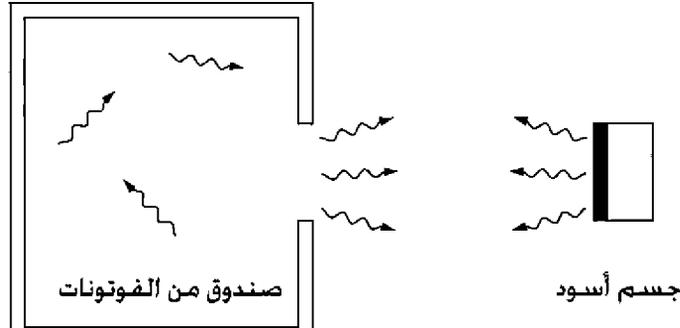
$$(98.7) \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5.67 \times 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$$

(إن هذا الرقم ليس صعبًا على التذكر، فيكفي تذكر 5 – 6 – 7 – 8 ولا تُنسى الإشارة السالبة). إن اعتماد القدرة المنبعثة على القوة الرابعة لدرجة الحرارة، يعرف بقانون ستيفان، وقد اكتشف عمليًا عام 1879.

الإشعاع من الأجسام الأخرى Radiation from Other objects

على الرغم من أن قانون ستيفان قد اشتق لفوتونات منبعثة من فتحة في صندوق، لكنه ينطبق على الفوتونات المنبعثة من أي سطح غير عاكس "أسود"، عند درجة حرارة T . إن مثل هذه الإشعاعات تعرف بإشعاع الجسم الأسود. إن إثبات أن الجسم الأسود يطلق فوتونات تمامًا كما تفعل فتحة في صندوق سهل للغاية.

لنفترض وجود فتحة في صندوق، ووجود جسم أسود، كلاهما عند درجة الحرارة نفسها، ويقابلان بعضهما، على نحو ما هو مبين في الشكل (24.7). كل جسم يطلق فوتونًا يمتص جزءًا منه جسم آخر. افترض الآن، أن الجسم الأسود لا يصدر القدرة نفسها التي تطلقها الفتحة، ربما أقل أو أكثر، في حالة إطلاق



الشكل 24.7: تجربة افتراضية، لإظهار أن سطحًا أسود تمامًا، يصدر إشعاعات متماثلة لتلك التي تصدرها فتحة في صندوق مملوء بفوتونات حرارية.

الجسم الأسود قدرة أقل من الفتحة، فإن طاقة أكثر ستنقل من الفتحة إلى الجسم الأسود، مقارنة بالطاقة المنتقلة من الجسم الأسود إلى الفتحة. إن صح ذلك، فإن درجة حرارة الجسم الأسود سترتفع، ومثل هذه العملية تخالف القانون الثاني للديناميكا الحرارية. وفي حالة بعث الجسم الأسود قدرة أكثر من الفتحة، فستقل

درجة حرارته، وترتفع درجة حرارة الفتحة، وهذا أيضًا غير مقبول اعتمادًا على القانون الثاني للديناميكا الحرارية. لذلك، فإن القدرة المنبعثة من جسم أسود، لوحدة المساحة عند أي درجة حرارة، يجب أن تساوي القدرة المنبعثة من الفتحة لوحدة المساحة، وعند درجة الحرارة نفسها. ويمكن القول أكثر في هذا الموضوع، تخيل مثلًا وضع مرشح يسمح فقط بمرور مدى معين من أطوال الأمواج، بين الفتحة والجسم الأسود. مرة أخرى، إذا أطلق أحد الجسمين إشعاعات أكثر في هذا المدى من الجسم الآخر، فإن درجة حرارته ستتخفض، وترتفع درجة حرارة الآخر، مخالفًا بذلك القانون الثاني. لذا، فإن الطيف الكلي المنبعث من الجسم الأسود، هو الطيف نفسه المنبعث من الفتحة.

وعندما لا يكون الجسم أسود، حيث يقوم بعكس بعض الفوتونات بدلًا من امتصاصها، تصبح الأمور أكثر تعقيدًا. لنفترض، أنه من كل ثلاثة فوتونات تسقط على هذا الجسم يمتص الجسم اثنين، ويعكس الثالث (عند طول موجة معين). وحتى يبقى الجسم في حالة اتزان مع الفتحة سيطلق فقط فوتونين، يجتمعان مع الفوتون المنعكس في طريقه إلى الفتحة. وبشكل أكثر عمومية، إذا كان الجزء الممتص "عند طول موجة معينة" من الفوتونات e ، عندئذ يكون الجزء المنبعث من الجسم مقارنة بالانبعاث من جسم أسود مثالي e أيضًا. إن هذا العدد e يساوي صفرًا لسطح عاكس مثالي، وعليه، فإن السطح العاكس الجيد هو سطح باعث سيئ، والعكس صحيح. وبوجه عام، فإن الانبعاثية تعتمد على طول الموجة للضوء؛ لذا، فإن الطيف المنبعث من جسم غير أسود يختلف عن ذلك المنبعث من جسم أسود مثالي. وإذا استخدمنا متوسط e الموزون على أطوال الأمواج المعنية، نحصل على القدرة الكلية المنبعثة من جسم على النحو الآتي:

$$(9.7) \quad \text{القدرة} = \sigma e A T^4,$$

حيث A مساحة سطح الجسم.

السؤال 51.7: إن درجة حرارة شعيرة التنجستون في مصباح كهربائي حراري، تساوي تقريبًا 3000 K، وإن انبعاثية التنجستون التي لا تعتمد على طول الموجة، تساوي 1/3 تقريبًا.

(أ) إذا كانت القدرة الكلية المنبعثة من المصباح، تساوي 100 W، فما مساحة سطح الشعيرة بوحدات المليمتر المربعة؟

(ب) ما قيمة طاقة الفوتون، التي يكون عندها الطيف أعلى ما يمكن؟ وما طول الموجة المكافئ لهذه الطاقة؟

(ج) ارسم مخططًا (أو ارسم باستخدام الحاسوب) طيف الضوء المنبعث من الشعيرة، مبيّنًا على المنحنى منطقة أطوال الأمواج المرئية الواقعة ما بين 400 nm و 700 nm.

(د) احسب الجزء من طاقة المصباح، التي تظهر على صورة ضوء مرئي (احسب التكامل عدديًا عن طريق آلة حاسبة أو جهاز حاسوب). وتحقق من نتائجك وصفيًا من المنحنى في الجزء (ج).

(هـ) إذا أردت زيادة كفاءة المصباح، فهل ترفع درجة الحرارة أو تخفضها؟ (بعض المصابيح تحقق كفاءة أعلى، باستخدام درجات حرارة مختلفة).

(و) قدّر أعلى كفاءة ممكنة (الجزء من الطاقة في المنطقة المرئية) لمصباح حراري، ودرجة حرارة الشعيرة الملازمة. وأهمل حقيقة أن التنجستون ينصهر عند 3695 K.

السؤال 52.7:

(أ) قدّر تقريبًا القدرة الكلية المنبعثة من جسمك، بإهمال أي طاقة ترتد إلى جسمك عن طريق الملابس أو المحيط (بغض النظر عن لون بشرة الجسم، فإن الانبعاثية عند أطوال أمواج الأشعة الحمراء قريبة جدًا من واحد، وإن أي جسم غير معدني يُعدّ قريبًا من الجسم الأسود المثالي عند أطوال الأمواج تلك).

(ب) قارن بين الطاقة الكلية المنبعثة من جسمك في يوم واحد (بالكيلو كالوري)، والطاقة الموجودة في الأكل الذي تأكله أيضًا في يوم واحد. لماذا يوجد هذا الفارق الكبير؟

(ج) إن كتلة الشمس تساوي، 2×10^{30} kg، وتشتع الشمس طاقة بمعدل 3.9×10^{26} W. فأيهما يعطي طاقة أكثر لوحدة الكتلة: جسمك أم الشمس؟

السؤال 53.7: يُعدّ الثقب الأسود (إن كان موجودًا) جسمًا، تنبعث منه إشعاعات الجسم الأسود التي يطلق عليها إشعاعات "هوكينج"، افترض ثقبًا أسود، كتلته M وطاقته Mc^2 ومساحة سطحه $16\pi G^2 M^2 / c^4$ ودرجة حرارته $hc^3 / 16\pi^2 kGM$ (على نحو ما هو مبين في السؤال 7.3).

(أ) قدّر طول الموجة الاعتيادية لإشعاعات هوكينج المنبعثة من ثقب أسود، كتلته تساوي كتلة الشمس 2×10^{30} kg، وقارن جوابك بحجم الثقب الأسود.

(ب) احسب القدرة الكلية المنبعثة من ثقب أسود، كتلته تساوي كتلة الشمس.

(ج) تخيل ثقبًا أسود في الفراغ، حيث يطلق إشعاعات دون امتصاص أي شيء. في حين يفقد الثقب الأسود الطاقة، تتناقص كتلته، حيث يمكن القول: إنه يتبخّر. اشتق المعادلة التفاضلية للكتلة بوصفها دالة من الزمن، ومن ثم حل تلك المعادلة لتحصل على زمن الحياة للثقب الأسود بدلالة كتلته الابتدائية.

(د) احسب زمن الحياة لثقب أسود، كتلته كتلة الشمس، وقارن ذلك بالعمر المقدر للكون المعروف (10^{10} سنة).

(هـ) افترض أن أحد الثقوب السوداء، قد ظهر مع بداية الكون، وينتهي تبخره اليوم. فماذا كانت كتلته الابتدائية؟ وفي أي جزء من الطيف الكهرومغناطيسي كانت قد انبعثت معظم إشعاعاته؟

الشمس والأرض The Sun and the Earth

من معرفتنا بكمية الإشعاعات الشمسية التي تستقبلها الأرض (1370 W/m^2)، والتي تعرف باسم الثابت الشمسي، والبعد بين الأرض والشمس (150 مليون كم) فمن السهل جدًا حساب الطاقة الكلية، لوحدة الزمن، المنبعثة من الشمس أو "اللمعانية"، ونحصل على القيمة الآتية لها 3.9×10^{26} . إن نصف قطر الشمس أكثر قليلًا من 100 مرة من نصف قطر الأرض، ويساوي 7.0×10^8 m، وعليه، فإن مساحة سطح الشمس تساوي $6.1 \times 10^{18} \text{ m}^2$. من هذه المعلومات، وبافتراض أن انبعاثية الشمس تساوي واحدًا (هذا ليس دقيقًا للغاية، لكنه جيد بما فيه الكفاية لما نهدف إليه)، نستطيع حساب درجة حرارة سطح الشمس من العلاقة الآتية:

$$T = \left(\frac{\text{اللمعانية}}{\sigma A} \right)^{1/4} = 5800\text{K.} \quad (100.7)$$

وبمعرفتنا درجة الحرارة، يمكننا التنبؤ بأن طيف ضوء الشمس، تصل قيمته القصوى عند طاقة فوتون ϵ ، وتساوي:

$$(101.7) \quad \epsilon = 2.82kT = 1.41 \text{ eV}$$

وهذا يتطلب مع طول موجة $\lambda = 880 \text{ nm}$ في منطقة الأشعة تحت الحمراء القريبة، وعند فحص هذه النتيجة، وجد أنها تتفق مع النتائج العملية. إن طيف الشمس يتبع صيغة بلانك وبقيمة قصوى عند تلك الطاقة. ونظرًا إلى أن القيمة القصوى تقع عند النهاية الحمراء للطيف المرئي، فإن معظم الطاقة الشمسية تنبعث على صورة ضوء مرئي (إذا كنت قد علمت في مكان آخر من هذا الكتاب أن الطيف الشمسي تصل قيمته القصوى في منتصف الطيف المرئي تقريبًا، عند $\lambda = 500 \text{ nm}$)، وللتخلص من القلق نتيجة الاختلاف، عد إلى السؤال (39.7).

إن جزءًا صغيرًا من الإشعاعات الشمسية تمتصه من قبل الأرض؛ لذا يسخن سطح الأرض إلى درجة حرارة ملائمة للحياة، لكن سخونة الأرض لا تستمر في الارتفاع، حيث إن الأرض تبعث إشعاعات في الفضاء، وبالمعدل نفسه، في المتوسط. إن هذا الاتزان بين الامتصاص والانبعاث يزودنا بطريقة لتقدير درجة اتزان حرارة سطح الأرض.

وبوصفه تقديرًا تقريبياً أوليًا، نقول: إن الأرض جسم أسود مثالي لأطوال الأمواج جميعها، وعليه، فإن القدرة الممتصة تساوي حاصل ضرب الثابت الشمسي ومساحة مقطع الأرض، كما ترى من الشمس πR^2 . في حين أن القدرة المنبعثة في الوقت نفسه يعبر عنها بقانون ستيفان، حيث A الآن المساحة الكلية للأرض $4\pi R^2$ ، و T درجة الحرارة الفعالة المتوسطة لسطح الأرض، وبمساواة القدرة الممتصة بالقدرة المنبعثة، نحصل على درجة حرارة سطح الأرض.

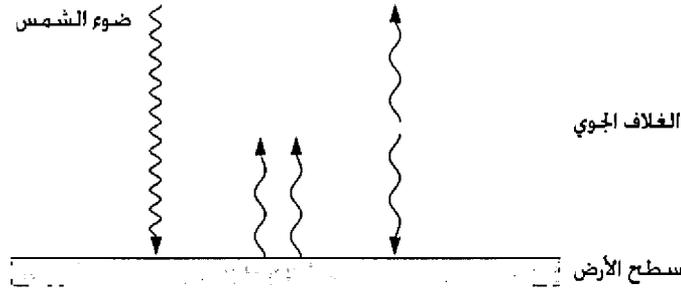
$$\pi R^2 = 4\pi R^2 \sigma T^4 \quad (\text{الثابت الشمسي})$$

(102.7)

$$\Rightarrow T = \left(\frac{1370 \text{ W/m}^2}{4 \cdot 5.67 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2 \cdot \text{K}^4} \right)^{1/4} = 279 \text{ K.}$$

إن درجة الحرارة هذه، قريبة جدًا من متوسط درجة الحرارة المقيسة. لكن الأرض ليست بجسم أسود مثالي؛ لأن 30% من ضوء الشمس الساقط على الأرض، ينعكس مباشرة إلى الفضاء، متجاوزًا السحب، إن أخذ الانعكاس في الحسبان، يؤدي إلى خفض درجة الحرارة إلى درجة باردة قيمتها 255 K . ونظرًا إلى أن الممتص الرديء باعث رديء، فقد يعتقد الشخص، أنه يمكن إعادة درجة الحرارة المتنبأ بها إلى درجة حرارة أعلى، عندما نأخذ في الحسبان الانبعاثية غير المثالية على الطرف الأيمن من المعادلة (102.7). لكن لا يوجد أي سبب لجعل انبعاثية الأرض للضوء فوق الأحمر المنبعث مساوية للضوء المرئي الممتص، وفي الواقع، فإن سطح الأرض (مثل معظم المواد غير المعدنية) باعث بكفاءة عالية عند أطوال الأمواج الحمراء. لكن هناك آلية أخرى تحافظ علينا، وذلك أن بخار الماء وثنائي أكسيد الكربون في الغلاف الجوي للأرض، يجعلان الغلاف الجوي معتمًا عند أطوال أمواج أعلى من ميكروونات عدة؛ لذا إذا نظرت إلى الأرض من الفضاء بعين حساسة للأمواج تحت الحمراء، فإن ما تراه هو الغلاف. وليس سطح الأرض. إن درجة الاتزان $T = 255 \text{ K}$ ، تنطبق تقريبًا على الغلاف الجوي، في حين يسخن سطح الأرض عن طريق ضوء الشمس القادم، وعن طريق "غطاء" ننتج عن الغلاف الجوي. وإذا وضعنا نموذجًا للغلاف الجوي على صورة طبقة منفردة شفافة للضوء المرئي، ومعتمة للأشعة تحت الحمراء، فإننا نحصل على الحالة الميَّنة في الشكل (25.7). ويتطلب الاتزان المساواة بين الطاقة لضوء الشمس الساقط (مطرورًا منه الطاقة المنعكسة)، والطاقة المنبعثة من الغلاف الجوي إلى أعلى،

التي تساوي الطاقة المشعة من الغلاف الجوي إلى أسفل. وبناءً على ذلك، فإن سطح الأرض يستقبل ضعف الطاقة (استناداً إلى هذا النموذج البسيط) التي كان يمكن أن يستقبلها من أشعة الشمس فقط. واعتماداً على المعادلة (102.7)، فإن هذه الآلية ترفع درجة حرارة سطح الأرض بالمعامل $2^{1/4}$ لتصل إلى 303 K. وإن درجة الحرارة هذه مرتفعة قليلاً، لكن الغلاف الجوي، ليس طبقة واحدة معتمة تماماً. وتعرف هذه الآلية باسم "أثر البيت الزجاجي"، على الرغم من أن معظم البيوت الزجاجية تعتمد أساساً على آليات أخرى مختلفة (منع التبريد بالحمل).



الشكل 25.7: غالباً ما يكون الغلاف الجوي للأرض شفافاً لضوء الشمس القادم، ومعتماً للضوء فوق الأحمر المنبعث إلى أعلى بالنسبة إلى سطح الأرض. وإذا وضعنا نموذجاً للغلاف الجوي على صورة طبقة واحدة، فإن الاتزان يتطلب أن يستقبل سطح الأرض كمية طاقة من الغلاف الجوي، مساوية للطاقة التي يستقبلها من الشمس.

السؤال 54.7: إن الشمس هي النجم الوحيد الذي نستطيع قياس حجمه، مباشرة وبسهولة، بينما يقدر الفلكيون حجوم النجوم الأخرى باستخدام قانون ستيفان.

(أ) إن طيف النجم سيريروس A يُعدّ دالة من الطاقة، تصل قيمته القصوى عند طاقة فوتونات $\epsilon = 2.4 \text{ eV}$. وإن لمعانية النجم سيريروس A تشكل 24 ضعفاً من لمعانية الشمس. كيف يمكن أن نقارن نصف قطر هذا النجم بنصف قطر الشمس؟

(ب) سيريروس B، مرافق لسيريروس A (انظر الشكل 12.7) ذو لمعانية تكافئ 3% من لمعانية الشمس، ويصل طيفه إلى قيمته القصوى عند نحو $\epsilon = 7 \text{ eV}$ ، فكيف يقارن نصف قطره بنصف قطر الشمس؟

(ج) إن طيف النجم بتلجوس، تصل قيمته القصوى عند $\epsilon = 0.8 \text{ eV}$ ، ولمعانه يساوي 10.000 ضعف لمعان الشمس. فكيف يمكن مقارنة نصف قطر هذا النجم بنصف قطر الشمس؟ ولماذا يسمى النجم بتلجوس العملاق الأحمر الهائل؟

السؤال 55.7: افترض، أن تركيز الغازات التي تمتص الأشعة تحت الحمراء في الغلاف الجوي قد ضعفت، حيث تكون عملياً غطاءً آخر، ما يؤدي إلى تسخين سطح الأرض.

قدّر درجة اتزان حرارة سطح الأرض، التي تنتج من هذه الكارثة. (بين أولاً أن الغطاء السفلي أسخن من الغطاء العلوي بمعامل $2^{1/4}$ ، ومن ثم بين أن سطح الأرض أسخن من الغطاء السفلي بمعامل $2^{1/4}$).

السؤال 56.7: يختلف الكوكب فينوس عن الأرض بطرق مختلفة، فهو أولاً، الأقل بعداً عن الشمس، حيث يبعد فقط 70% من بعد الأرض عن الشمس. وثانياً، فإن سحبه الكثيفة تعكس 77% من ضوء الشمس الكلي الساقط على الكوكب، وثالثاً، فإن غلافه الجوي أكثر إعتاماً للأشعة تحت الحمراء من الغلاف الجوي للأرض.

(أ) احسب الثابت الشمسي عند موقع الكوكب، وقدّر درجة حرارة السطح المتوسطة للكوكب فينوس، في

حالة عدم وجود غلاف جوي له، وعدم انعكاس ضوء الشمس.

(ب) قَدِّر درجة حرارة السطح مرة أخرى، آخذاً في الحسبان الانعكاسية الناتجة عن السحب.

(ج) إن الغلاف الجوي لفينوس يؤدي إلى تعميم الأمواج فوق الحمراء بمقدار 70 ضعفاً، وهذا يسببه الغلاف الجوي الأرضي لتلك الأمواج. وعليه، يمكن وضع نموذج للغلاف الجوي لفينوس يتكون من 70 "غطاء" من نوع الغطاء، الذي تعاملنا معه في الكتاب.

استخدم هذا النموذج لتقدير درجة حرارة سطح فينوس. (إن درجة حرارة الغطاء العلوي هو ما وجدناه في الفرع (ب)، ويكون الغلاف الثاني للأسفل أسخن بمعامل $2^{1/4}$. أما الطبقة اللاحقة فتكون أسخن بمعامل أقل قليلاً من $2^{1/4}$. استمر في التعامل مع الطبقات اللاحقة، حتى تحصل على نموذج يعطي درجة حرارة السطح).

5.7 نظرية ديبي للجوامد Debye Theory of solids

لقد عرضنا نموذج أينشتاين للبلورات الصلبة في الجزء (2.2)، الذي يعامل كل ذرة معاملة هزاز توافق ثنائي الأبعاد. وقد استخدم هذا النموذج في السؤال (25.3)، لاشتقاق تنبؤ للسعة الحرارية على النحو الآتي:

$$(103.7) \quad C_V = 3Nk \frac{(\epsilon/kT)^2 e^{\epsilon/kT}}{(e^{\epsilon/kT} - 1)^2} \quad (\text{نموذج أينشتاين})$$

حيث N عدد الذرات، و $\epsilon = hf$ الحجم العام، لوحدة الطاقة للهزازات المتماثلة. وتصل السعة الحرارية عند $\epsilon \gg kT$ ، قيمة ثابتة هي $3Nk$ ، وهي متفقة بذلك مع نظرية التجزيء المتساوي. وتحت النقطة $kT \approx \epsilon$ ، فإن السعة الحرارية تتناقص بسرعة مقتربة من الصفر، عندما تؤول درجة الحرارة إلى الصفر. إن هذا التنبؤ يتفق مع النتائج العملية للتقريب من الدرجة الأولى، لكنه يختلف في التفاصيل. وبصورة خاصة، فإن المعادلة (103.7) تتنبأ بأن السعة الحرارية تؤول إلى الصفر أسياً عندما تؤول درجة الحرارة إلى الصفر، في حين تظهر النتائج العملية أن التصرف للسعة الحرارية عند درجات حرارة منخفضة تكعيبي مع درجة الحرارة $C_V \propto T^3$.

المشكلة في نموذج أينشتاين تكمن في أن الذرات في البلورة، لا تهتز مستقلة بعضها عن بعض، فإذا حركت ذرة ذهاباً وإياباً، فإن الذرات المجاورة ستبدأ أيضاً بالحركة ذهاباً وإياباً، لكن بطريقة معقدة تعتمد على تردد الاهتزازات. ويتحرك عدد كبير من الذرات معاً، في اتجاه واحد، لحالة الاهتزازات ذات الترددات المنخفضة، في حين تكون حركة الذرات في اتجاه معاكس لحركة جاراتها لحالات الاهتزازات ذات الترددات العالية. لذا، فإن وحدات الطاقة تأتي بحجوم مختلفة متناسبة مع ترددات حالات الاهتزاز، حتى عند درجات الحرارة المنخفضة، حيث تكون حالات الاهتزازات بترددات عالية مجمدة، وإن عدداً من حالات الاهتزاز بترددات منخفضة تكون فعالة. وهذا هو السبب في أن السعة الحرارية تقترب من الصفر بطريقة أبطأ من تنبؤ نموذج أينشتاين. إن حالات اهتزاز بلورة صلبة، تشبه إلى حد ما حالات اهتزاز المجالات الكهرومغناطيسية في الفراغ. إن هذا التشبه يقودنا إلى تبني الطرق التي استخدمت في الإشعاعات الكهرومغناطيسية، واستخدامها في دراسة الاهتزازات الميكانيكية للبلورة، وتسمى هذه الاهتزازات الميكانيكية الأمواج الصوتية، وتتصرف كثيراً مثل الأمواج الضوئية. لكن هناك بعض الفروق، ونذكر هنا عدداً آخر من هذه الفروق.

• تنتقل الأمواج الصوتية بسرعة أبطأ كثيراً من الأمواج الضوئية، وتعتمد سرعتها على مرونة الوسط التي تنتشر فيه وكثافته، وسنطلق على هذه السرعة الرمز C_s ، وتعامل معها على أنها ثابت، ونهمل

حقيقة أنها قد تعتمد على طول الموجة واتجاه الانتشار.

• في حين تكون الأمواج الضوئية مستقطبة استقطاباً عرضياً، فإن الأمواج الصوتية قد تكون مستقطبة طولياً أيضاً. (في علم الزلازل، تسمى الأمواج الصوتية المستقطبة استقطاباً عرضياً أمواج القص، أو أمواج K ، في حين تسمى الأمواج المستقطبة طولياً أمواج الضغط، أو أمواج P). وعليه، فبدلاً من استقطابين اثنين، لدينا الآن ثلاثة استقطابات. وللتبسيط، نعدّ حالات الاستقطاب الثلاثة لها السرعة نفسها.

• في حين يمكن للأمواج الضوئية، أن يكون لها أطوال أمواج قصيرة، ولا حد عليها، فإن أقصر طول للأمواج الصوتية لا يقل عن ضعف المسافة بين الذرات. وعلى الرغم من سهولة أخذ الفارقين الأولين في الحسبان، لكن الفارق الثالث يتطلب تفكيراً وحيطة أكثر.

باستثناء هذه الفروق الثلاثة، فإن الأمواج الصوتية تتصرف تماماً كالأموال الضوئية. إن لكل حالة اهتزاز مجموعة من مستويات الطاقة، متساوية التباعد ووحدة الطاقة تساوي:

$$(104.7) \quad \epsilon = hf = \frac{hc_s}{\lambda} = \frac{hc_s n}{2L}$$

في المعادلة الأخيرة L ، طول البلورة و $n = |\vec{n}|$ هو مقدار المتجه في الفراغ ذي الأبعاد n ، الذي يحدد شكل الموجة. وعندما تكون الحالة في وضع اتزان عند درجة حرارة T ، فإن عدد وحدات الطاقة الموجودة في الحالة يعر عنها في المتوسط بتوزيع بلانك.

$$(105.7) \quad \bar{n}_{p1} = \frac{1}{e^{\epsilon/kT} - 1}$$

(يحب عدم الخلط بين n و \bar{n} في المعادلة (104.7) وكما فعلنا للأمواج الكهرومغناطيسية، فيمكن التفكير في هذه الوحدات من الطاقة على أنها جسيمات (تتبع إحصاء بوزوأينشتاين) ذات جهد كيميائي $\mu = 0$ ، وتسمى هذه الجسيمات الفونونات. ولحساب الطاقة الحرارية الكلية للبلورة، نجمع الطاقات للحالات المسموح بها جميعها على النحو الآتي:

$$(106.7) \quad U = 3 \sum_{n_x} \sum_{n_y} \sum_{n_z} \epsilon \bar{n}_{p1}(\epsilon)$$

وقد استخدم المعامل 3 في المعادلة، لوجود ثلاث حالات استقطاب لكل \vec{n} . أما الخطوة اللاحقة فهي تحويل المجموع إلى تكامل، لكن في البداية يجب أن نحدد قيم \vec{n} التي يتم الجمع عليها.

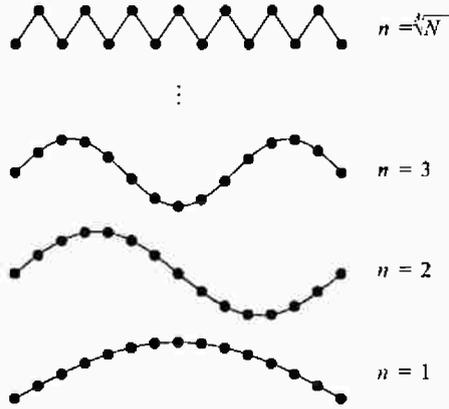
لو كانت هذه الاهتزازات اهتزازات كهرومغناطيسية، لكان هناك عدد لا نهائي من الحالات المسموح بها، وكانت حدود كل مجموع لا نهائية أيضاً. لكن المسافة بين الذرات تضع حداً أدنى ملزماً لأطوال الأمواج الصوتية، فلو افترضنا أن شبكة من الذرات ببعد واحد (انظر الشكل 26.7)، فإن كل حالة اهتزاز لها شكلها المميز، وبعدهم قمع يساوي n . ونظرًا إلى أن كل قمة يجب أن تحتوي ذرة واحدة على الأقل؛ لذا فإن n لا يمكنها تجاوز عدد الذرات في الصف الواحد.

وإذا كانت البلورة ذات الأبعاد الثلاثة مكعباً مثاليًا، فإن عدد الذرات الواقعة على صف واحد في أي اتجاه يساوي $\sqrt[3]{N}$ ، وعليه، فإن المجموع في المعادلة (106.7) يبدأ من 1، وينتهي عند $\sqrt[3]{N}$ ، وبكلمات أخرى، نجمع على مكعب في فراغ ذي أبعاد n . وفي حالة أن البلورة ليست مكعباً مثاليًا، فإن الحجم الملازم في الفراغ ذي الأبعاد n ، لن يكون مكعباً مثاليًا أيضاً، ومع ذلك فإن الجمع سيتم على حجم كلي يساوي N .

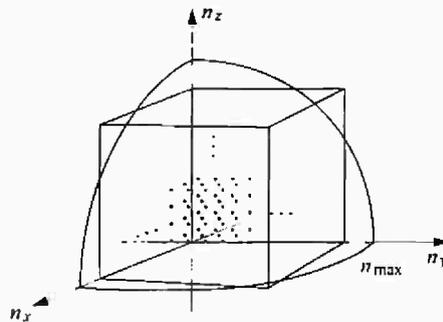
الآن، يأتي دور التقريبات. الجمع (أو التكامل) على مكعب، أو على بعض المناطق الأخرى المعقدة في الفراغ ذي الأبعاد n ، ليس أمرًا سهلاً، حيث إن الدوال التي يتكامل عندها تعتمد على n_x, n_y, n_z بطريقة معقدة (دالة أسية للجذر التربيعي). لكن الدالة تعتمد على مقدار \bar{n} بطريقة أسهل، ولا تعتمد على الزاوية في الفراغ ذي الأبعاد n ، على الإطلاق.

لقد توصل بيتر ديبياي إلى فكرته، بافتراض أن المنطقة المعنية في الفراغ ذي الأبعاد n هي كرة أو بالأحرى ثمن كرة. فلقد اختار ديبياي كرة حجمها N ؛ لكي يحافظ على العدد الكلي لدرجات الحرية. ويمكن حساب نصف قطر الكرة، ويعبر عنه بالعلاقة الآتية:

$$(107.7) \quad n_{\max} = \left(\frac{6N}{\pi}\right)^{1/3}$$



الشكل 26.7: حالات الاهتزاز لصف واحد من الذرات في بلورة. إذا كانت البلورة مكعبًا، فإن عدد الذرات على أي صف يساوي $\sqrt[3]{N}$. إن هذا هو أيضًا العدد الكلي للحالات في هذا الاتجاه؛ لأن كل قمة في الموجة تحتوي على ذرة واحدة على الأقل.



الشكل 27.7: إن المجموع في المعادلة (106.7)، وتقنيًا، يجب أن يجري على مكعب في فراغ ذي أبعاد n ، عرضه $\sqrt[3]{N}$ ، وبوصفه تقريبًا، فبدلاً من الجمع على المكعب نقوم بالجمع على ثمن كرة، لها حجم المكعب نفسه.

ويبين الشكل (27.7) المكعب في الفراغ ذي الأبعاد n ، والكرة هي التي تقرب هذا المكعب.

ومن اللافت، أن تقريب ديبياي دقيق عند درجات الحرارة العالية، ودرجات الحرارة المنخفضة. وكل ما يعنينا، عند درجات الحرارة المرتفعة، هو العدد الكلي للحالات، أي العدد الكلي لدرجات الحرية، ويحافظ على هذا العدد باختيار كرة بالحجم الصحيح. أما عند درجات الحرارة المنخفضة، فإن الحالات ذات \bar{n} الكبيرة أصلاً، غير فعالة؛ لذا يمكن عدّها كما نشاء. لكن عند درجات حرارة متوسطة، فإننا نحصل على نتائج غير دقيقة، ولكنها جيدة على نحو مفاجئ.

وعندما نستخدم تقريب ديبياي، ونحول المجاميع إلى تكاملات في الإحداثيات الكروية، فإن المعادلة (106.7) تصبح على النحو الآتي:

$$(108.7) \quad U = 3 \int_0^{n_{\max}} dn \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\phi n^2 \sin \theta \frac{\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1}.$$

وتعطى التكاملات على الزوايا $\frac{\pi}{2}$ ، ويبقى التكامل الآتي على n :

$$(109.7) \quad U = \frac{3\pi}{2} \int_0^{n_{\max}} \frac{hc_s}{2L} \frac{n^3}{e^{hc_s n/2LkT} - 1} dn.$$

ونسب بالإمكان إجراء هذا التكامل تحليلاً، لكن يصبح شكله أسهل عند استبدال المتغيرات إلى متغيرات عديمة الوحدات.

$$(110.7) \quad x = \frac{hc_s n}{2LkT}.$$

ومع هذا الاستبدال، تصبح النهاية العليا للتكامل على النحو الآتي:

$$(111.7) \quad x_{\max} = \frac{hc_s n_{\max}}{2LkT} = \frac{hc_s}{2kT} \left(\frac{6N}{\pi V} \right)^{1/3} \equiv \frac{T_D}{T}$$

حيث يطلق على هذه الكمية الأخيرة درجة حرارة ديبياي، T_D ، وهي في الواقع اختصار لجميع الثوابت، وإن إجراء استبدال المتغيرات وتجميع الثوابت عمل مباشر، ويؤدي إلى الصيغة الآتية:

$$(112.7) \quad U = \frac{9NkT^4}{T_D^3} \int_0^{T_D/T} \frac{x^3}{e^x - 1} dx$$

ويمكن إجراء هذا التكامل عددياً باستخدام جهاز حاسوب لأي درجة حرارة مطلوبة، ويمكن التحقق من النتائج عند درجات الحرارة المنخفضة، ودرجات الحرارة المرتفعة.

ولوصول إلى درجات حرارة أعلى كثيراً من درجة حرارة ديبياي، $T \gg T_D$ ، وتصبح النهاية العليا للتكامل أقل كثيراً من 1، وعليه، فإن x تكون دوماً صغيرة جداً؛ لذا نقرب في المقام، $e^x \approx 1 + x$ ، وبإجراء التكامل باستخدام هذا التقريب، نحصل على النتيجة الآتية:

$$(113.7) \quad U = 3NkT \quad \text{عندما} \quad T \gg T_D$$

إن هذه النتيجة متفقة مع نظرية التجزيء المتساوي (ونموذج أينشتاين)، وتكون السعة الحرارية لهذه الحالة $C_V = 3Nk$.

لكن، عندما تكون درجة الحرارة أقل كثيراً من درجة حرارة ديبياي $T \ll T_D$ ، فإن النهاية العليا للتكامل تكون كبيرة للغاية، بحيث إنه قبل وصولها تكون قيمة الدالة داخل التكامل قد آلت إلى الصفر. (لأن الدالة e^x في

المقام). وعليه، يمكن استبدال قيمة النهاية العليا للتكامل باللانهاية، حيث إن الحالات الإضافية لا تسهم في التكامل على أي حال. لذا، يصبح التكامل باستخدام هذا التقريب التكامل نفسه الذي استخدم لغاز من الفوتونات (المعادلة (85.7)) ويُعطى القيمة $\pi^4 / 15$ عند إجرائه. لذا تصبح الطاقة الكلية على النحو الآتي:

$$(114.7) \quad T \ll T_D \quad \text{عندما} \quad U = \frac{3\pi^4 NkT^4}{5 T_D^3}$$

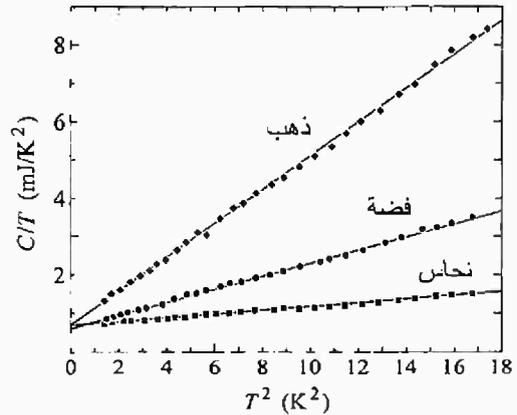
وبالاشتقاق بالنسبة إلى درجة الحرارة T ، نحصل على السعة الحرارية على النحو الآتي:

$$(115.7) \quad T \gg T_D \quad \text{عندما} \quad C_V = \frac{12\pi^4}{5} \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 Nk$$

إن التنبؤ بأن السعة الحرارية C_V تتناسب طردياً مع T^3 يتفق جيداً مع نتائج تجارب درجات الحرارة المنخفضة على المواد جميعها تقريباً. أما للمعادن، فهناك مساهمة في السعة الحرارية من إلكترونات التوصيل، وهي خطية مع درجات الحرارة، على نحو ما وصف في الجزء (3.7). وعليه، فإن السعة الحرارية للمعادن عند درجات حرارة منخفضة يعبر عنها بالعلاقة الآتية:

$$(116.7) \quad C = \gamma T + \frac{12\pi^4 Nk}{5T_D^3} T^3 \quad (T \gg T_D \text{ الفلز})$$

الشكل 28.7 يبين قياسات درجات الحرارة المنخفضة للسعة الحرارية لكل من النحاس، الفضة، الذهب. وهي متوائمة مع الموافقة المفتوحة من William S. Corak et al., Physical Review 98, 1699 2 (1955).



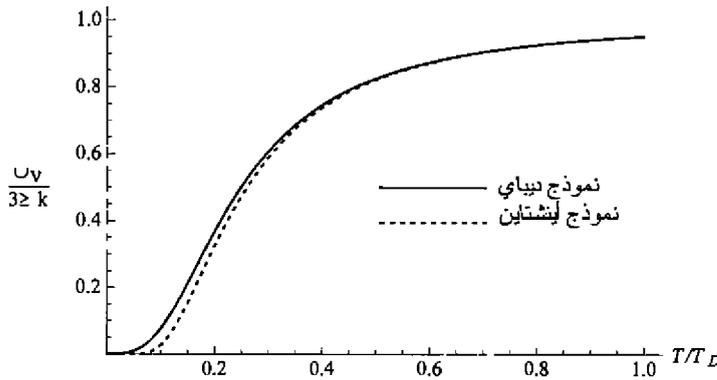
حيث $\gamma = \pi^2 Nk^2 / 2\epsilon_F$ لنظام الإلكترون الحر. ويبين الشكل (28.7) رسوماً للسعة الحرارية مقسومة على درجة الحرارة، (C / T) ، بوصفها دالة من مربع درجة الحرارة T^2 ، لثلاثة معادن مألوفة. إن خطية هذه النتائج تؤكد نظرية ديبي لاهتزازات الشبكة، في حين يعطي تقاطع الخطوط مع المحور الشاقولي القيم التجريبية للكمية γ .

عند درجات الحرارة المتوسطة، لا بد من إجراء التكامل عددياً، للحصول على الطاقة الكلية للبلورة، وللحصول على السعة الحرارية، فمن الأفضل اشتقاق المعادلة (109.7) تحليلياً وتغيير المتغيرات إلى x ، ونحصل بذلك على النتيجة الآتية:

$$(117.7) \quad C_V = 9Nk \left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{T_D/T} \frac{x^4 e^x}{(e^x - 1)^2} dx.$$

ويبين الشكل (29.7) رسماً لهذه الدالة، حصل عليه باستخدام جهاز حاسوب، ولأغراض المقارنة، فقد تم أيضاً رسم

استنتاجات نموذج أينشتاين المعبر عنه بالعلاقة (103.7)، وقد اختبر الثابت ϵ ليتفق المنحنيان في منطقة درجة الحرارة المرتفعة، وبين الشكل (14-1) أيضًا مقارنات إضافية لتنبؤات نموذج ديبياي النتائج العملية. ويمكن التنبؤ بدرجة حرارة ديبياي لأي مادة، من معرفتنا لسرعة الأمواج الصوتية في تلك المادة، وذلك باستخدام المعادلة (111.7)، لكن، عادة، يتم الحصول على توافق أفضل بين السعة الحرارية المقاسة عمليًا، والتنبؤات النظرية بالاختيار المناسب لدرجة حرارة ديبياي، $c = \mu / hf$. وتتراوح قيم T_D من 88 K للرصاص (كثيف وطري) إلى 1860 K للألماس (خفيف وقاس). ونظرًا إلى أن السعة الحرارية تصل 95% من قيمتها القصوى عند $T = T_D$ ، فإن درجة ديبياي تعطي فكرة جيدة عن زمن إمكانية استخدام نظرية التجزيء المتساوي. وعندما لا يمكن استخدام نظرية التجزيء المتساوي، فإن صيغة ديبياي تستخدم للحصول على تقدير جيد للسعة الحرارية على مدى واسع من درجات الحرارة. وللحصول على نتائج أفضل من ذلك، لا بد من الأخذ في الحسبان حقيقة، أن سرعة الفونونات تعتمد على طول الموجة، والاستقطاب، واتجاه انتشارها نسبة إلى محور اللورة، إن هذا النوع من التحليل يعود أساسًا إلى كتب في فيزياء الجوامد أكثر من هذا الكتاب.



الشكل 29.7: تنبؤات نموذج ديبياي للسعة الحرارية للأجسام الصلبة، وتنبؤات نموذج أينشتاين، وقد رسما لأغراض المقارنة. واختير الثابت ϵ في نموذج أينشتاين، للحصول على أفضل توافق مع نموذج ديبياي عند درجات حرارة مرتفعة. لاحظ أن منحنى أينشتاين أكثر استواءً من منحنى ديبياي عند درجات الحرارة المنخفضة. **السؤال 57.7:** أضف الخطوات الناقصة في اشتقاق المعادلتين (112.7) و (117.7).

السؤال 58.7: إذا علمت أن سرعة الصوت في النحاس هي 3560 m/s، فاحسب درجة حرارة ديبياي النظرية للنحاس، ثم حدد القيمة العملية لدرجة الحرارة تلك، من الشكل (28.7)، وقارن بين كل من القيم النظرية والعملية.

السؤال 59.7: اشرح مع بعض التفصيل سبب تقاطع المنحنيات الثلاثة في الشكل (28.7) مع المحور الشاقولي في المكان نفسه عمليًا، في حين يختلف ميل كل منهما عن ميل الآخر اختلافًا كبيرًا.

السؤال 60.7: ارسم السعة الحرارية للنحاس بوصفها دالة من درجة الحرارة، ابتداءً من $T = 0$ ، ولغاية $T = 5K$ ، مبينًا مساهمة اهتزازات الشبكة ومساهمة إلكترونات التوصيل منفصلتين. عند أي درجة حرارة تكون المساهمتان متساويتين؟

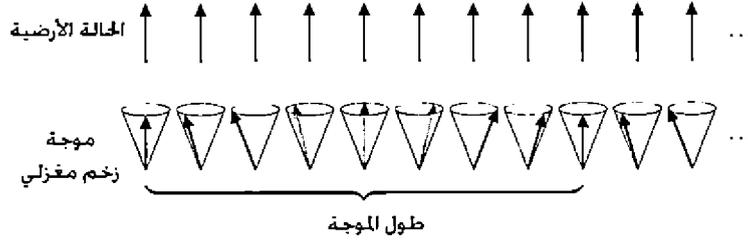
السؤال 61.7: إن السعة الحرارية لسائل الهيليوم الرباعي ^4He ، تتناسب مع T^3 عند درجات حرارة أقل من 0.6 K، وتعطي القياسات العملية العلاقة الآتية: $C_V / Nk = (T / 4.67 \text{ K})^3$ ، وهذا يشير إلى أن معظم التهيجات عند درجات حرارة منخفضة، هي فونونات بأطوال أمواج طويلة. إن الفارق المهم الوحيد بين الفونونات في السوائل وتلك التي في الجوامد، هو أن السوائل لا تستطيع أن تنقل أمواجًا باستقطابات عرضية، وعليه، فإن الأمواج الصوتية في السوائل أمواج طولية. إذا علمت أن سرعة الصوت في سائل الهيليوم الرباعي تساوي 238 m/s وكثافة سائل الهيليوم الرباعي تساوي 0.145 g/cm^3 فاحسب مساهمة الفونونات للسعة الحرارية للهيليوم الرباعي عند درجات الحرارة المنخفضة، وبعد ذلك قارن نتائجك بالقيم المقاسة عمليًا.

السؤال 62.7: انشر الدالة داخل التكامل في المعادلة (112.7) على أنها سلسلة قوى في x محتفظًا بالحدود جميعها لغاية x^4 ، ومن ثم احسب التكاملات للحصول على صيغة أكثر دقة للطاقة عند درجات الحرارة المرتفعة. اشتق هذه الصيغة لتحصل على السعة الحرارية، ثم استخدم هذه النتيجة لتقدير الانحراف المثوي للسعة الحرارية عن القيمة $3Nk$ ، عند درجتَي الحرارة $T = T_D$ و $T = 2T_D$.

السؤال 63.7: لنأخذ جسمًا صلبًا بعيدين، كغشاء طبل مشدود، أو طبقة من المايكا أو الجرافيت. وأوجد صيغة (على صورة تكامل) للطاقة الحرارية لجزء مربع من هذا الجسم، مساحته $A = L^2$ ، واحسب القيمة تقريبًا عند درجات الحرارة المنخفضة جدًا، وعند درجات الحرارة المرتفعة جدًا. واحصل أيضًا على صيغة للسعة الحرارية، باستخدام آلة حاسبة أو جهاز حاسوب، وارسم السعة الحرارية كدالة من درجة الحرارة. افترض، أن المادة تهتز فقط في اتجاه متعامد مع مستواها، وهذا يعني وجود حالة استقطاب واحدة.

السؤال 64.7: الفيرومغناطيس، عبارة عن مادة (كالحديد) تتمغنط ذاتيًا، حتى في حالة عدم وجود مجال مغناطيسي خارجي. وينتج هذا بسبب الميول القوي لكل عزم مغناطيسي أساسي، بالأصطفاف بصورة موازية للعزوم المغناطيسية المجاورة. وتصل المادة الفيرومغناطيسية إلى أقصى تمغنط ذاتي، عند درجة الحرارة $T = 0$ ، حيث تكون العزوم المغناطيسية جميعها مصطفة تمامًا في الاتجاه نفسه. وعليه، إذا كان عدد الذرات N ، فإن المغنطة الكلية تكون عادة في حدود $2\mu_B N$ ، حيث μ_B ماغنتون بور. وعند درجات حرارة أعلى نوعًا ما، فإن التهيجات تحصل على صورة أمواج زخم مغزلي، يمكن تصورها كلاسيكيًا، على نحو ما هو موضح في الشكل (30.7).

وتشبه أمواج الزخم المغزلي الأمواج الصوتية، وتكون مكتمة أيضًا، حيث إن كل حالة تمتلك أعدادًا صحيحة من وحدة الطاقة الأساسية، وبالتماثل مع الفونونات، يمكن افتراض أن وحدات الطاقة جسيمات، تسمى ماغنونات. إن كل ماغنون يقلل الزخم المغزلي للنظام بوحدة واحدة $\hbar / 2\pi$ ، وهذا يقلل المغنطة بمقدار $2\mu_B$ وعلى الرغم من أن التردد للأمواج الصوتية يتناسب عكسيًا مع طول الموجة، فإن التردد للأمواج المغزلية يتناسب ومربع الكمية $1/\lambda$ (في حالة الأمواج الطويلة). ونظرًا إلى أن $c = f\hbar$ و $p = \hbar/\lambda$ لأي جسيم،



الشكل 30.7: جميع العزوم المغناطيسية الأساسية في مادة فيرومغناطيسية، في حالتها الأرضية، تكون في الاتجاه نفسه. التهيجات الأقل طاقة فوق الحالة الأرضية أمواج مغزلية تقوم فيها العزوم المغناطيسية بالدوران في حركة مخروطية. والأمواج المغزلية ذات الأمواج الطويلة تنقل القليل من الطاقة؛ لأن الفرق في الاتجاه بين العزوم المغناطيسية المتجاورة قليل جدًا.

فن طاقة الماغنون تتناسب ومربع زخمه الخطي. وبالتماثل مع العلاقة بين الطاقة والزخم الخطي لجسيم عادي غير نسبي، يمكننا كتابة الطاقة $\epsilon = p^2/2m^*$ ، حيث m^* ثابت يرتبط بطاقة التفاعلات المغزلية المتبادلة، والمسافة بين الذرات. إن الثابت m^* في الحديد يساوي 1.24×10^{-29} kg، وهذا يكافئ كتلة 14 إلكترونًا تقريبًا، هناك فارق آخر بين الماغنونات والفونونات، وهو أن الماغنون له حالة استقطاب واحدة.

(أ) بين أن عدد الماغنونات لوحدة الحجم في مادة فيرومغناطيسية ذات أبعاد ثلاثة يعبر عنها عند درجات حرارة منخفضة، بالعلاقة الآتية:

$$\frac{N_m}{V} = 2\pi \left(\frac{2m^* kT}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx$$

واحسب التكامل عددياً.

(ب) مستخدمًا النتائج في الفرع (أ)، أوجد صيغة تعبر عن التناقص الجزئي في المغنطة $(M(0) - M(T))/M(0)$ ، واكتب الجواب على الصورة $(T/T_0)^3$ ، وقدر قيمة T_0 للحديد.

(ج) افترض وجود شبكية ثنائية الأبعاد لعزوم مغناطيسية عند درجات حرارة منخفضة، وافترض أن كل عزم مغناطيسي أساسي ما زال بإمكانه، أن يتجه في أي اتجاه (ذي ثلاثة أبعاد)، وعليه، فإن الأمواج المغزلية ما زالت ممكنة. بين أن العدد الكلي للماغنونات يؤول إلى الما لا نهاية في هذه الحالة. (ويعني هذا أن المغنطة غير ممكنة الحدوث لمثل هذا النظام ثنائي الأبعاد. لكن، في الجزء 2.8، سنتعامل مع نموذج آخر ثنائي الأبعاد يسمح بحدوث المغنطة الذاتية).

6.7 كثائف بوز وأينشتاين Bose Einstein Condensation

لقد تم التعامل في الجزأين الأخيرين مع البوزونات (فوتونات وفونونات)، التي يمكن إنتاجها بأي عدد، علمًا بأن عددها الكلي يحدد من خلال شرط الاتزان الحراري. لكنه من المهم أيضًا، التعامل مع البوزونات الأكثر اعتيادية، كالذرات التي تملك عددًا صحيحًا من الزخم المغزلي، ذات الأعداد الثابتة من البداية. لقد تم تأخير هذا الموضوع؛ لأن التعامل معه أكثر صعوبة، حيث يجب تحديد الجهد الكيميائي الممثل (عوضًا عن كونه ثابتًا عند الصفر) بدالة غير سهلة من الكثافة، ودرجة الحرارة إذا ما احتجنا إلى استخدام توزيع بوز وأينشتاين.

نحتاج إلى تحليل حذر لتحديد الجهد الكيميائي μ ، لكن ذلك يستحق العناء. وسنجد أن μ تصرف بطريقة غريبة، تشير إلى أن غازًا من البوزونات يهبط فجأة إلى الحالة الأرضية، عندما تنخفض درجة الحرارة عن درجة حرارة معينة.

إن الأسهل من ذلك، هو التعامل مع النظام، عندما تؤول درجة الحرارة إلى الصفر. عند درجة حرارة $T \rightarrow 0$ ، تكون الذرات جميعها في المستويات الأقل طاقة والمتاحة لها. ونظرًا إلى أن أي عدد من البوزونات يمكنه الوجود في الحالة نفسها، فإن الذرات جميعها ستكون في حالتها الأرضية. وفي حالة ذرات محصورة في صندوق حجمه L^3 ، يعبر عن الطاقة للحالة الأرضية بالعلاقة الآتية:

$$\epsilon_0 = \frac{h^2}{8mL^2} (1^2 + 1^2 + 1^2) = \frac{3h^2}{8mL^2} \quad (118.7)$$

وتعطي هذه العلاقة طاقة صغيرة، شريطة أن تكون L ماكروسكوبية. وعند أي درجة حرارة، فإن متوسط عدد الذرات في الحالة الأرضية، N_0 ، يعبر عنه من توزيع بوز وأينشتاين على النحو الآتي:

$$N_0 = \frac{1}{e^{(\epsilon_0 - \mu)/kT} - 1} \quad (119.7)$$

وتكون N_0 كبيرة جدًا، عندما تكون درجة الحرارة منخفضة على نحو كافٍ، عندئذٍ، فإن المقام في المعادلة السابقة يكون صغيرًا جدًا، وهذا يعني أن الدالة الأسية تقترب كثيرًا من الواحد. ويشير ذلك إلى أن $(\epsilon_0 - \mu)/kT$ صغير جدًا. وعليه يمكن نشر الدالة الأسية على صورة سلسلة تايلور، والاحتفاظ بأول حدين لنحصل على العلاقة الآتية:

$$N_0 \gg 1 \quad \text{عندما} \quad N_0 = \frac{1}{1 + (\epsilon_0 - \mu)/kT - 1} = \frac{kT}{\epsilon_0 - \mu} \quad (120.7)$$

وعليه، فإن الجهد الكيميائي μ عند درجة الحرارة $T = 0$ ، يساوي ϵ_0 ، وأقل بمقدار قليل لدرجات الحرارة غير الصفرية. ومع ذلك، فإن μ تبقى صغيرة بما فيه الكفاية، لتكون جميع الذرات تقريبًا في الحالة الأرضية. أما السؤال المتبقي، فهو: كم يجب أن تكون درجة الحرارة كي تكون N_0 كبيرة جدًا؟ إن الشرط العام الذي يحدد μ ، هو أن مجموع بوز وأينشتاين على الحالات جميعها، يجب أن يعطي العدد الكلي للذرات N .

$$N = \sum_{\text{all } s} \frac{1}{e^{(\epsilon_s - \mu)/kT} - 1} \quad (121.7)$$

ومن ناحية مبدئية، فيمكننا الاستمرار باختيار قيم للجهد الكيميائي μ ، حتى يصل المجموع للقيمة الصحيحة (وإعادة تلك العملية عند كل درجة حرارة T). لكن عمليًا، فإنه بالعادة أسهل لنا تحويل المجموع إلى تكامل، على النحو الآتي:

$$N = \int_0^\infty g(\epsilon) \frac{1}{e^{(\epsilon - \mu)/kT} - 1} d\epsilon \quad (122.7)$$

ويكون هذا التقريب مقبولاً عند $c \gg kT$ ، حيث يكون عدد الحدود المساهمة مساهمة مهمة للمجموع، كبيرًا. الدالة $g(\epsilon)$ هي الدالة نفسها التي استخدمت للإلكترونات في الجزء (3.7)، في المعادلة (5.7)، مقسومة على 2 نظرًا إلى وجود حالة ترتيب مغزلي واحد.

$$g(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} V \sqrt{\epsilon} \quad (123.7)$$

ويبين الشكل (31.7) منحنيات كثافة الحالات، وتوزيع بوز وأينشتاين (لحالة μ أقل قليلاً من الصفر) ويعطي حاصل ضربهما معاً توزيع الجسيمات بوصفها دالة من الطاقة.

لكن لسوء الحظ، فإنه لا يمكن إجراء التكامل (122.7) تحليلياً؛ لذا يجب أن نختار قيمة للجهد الكيميائي μ ، حتى نجد قيمة ملائمة، تمكننا من إجراء التكامل تحليلياً، إن أسهل الاختيارات، وأكثرها اهتماماً هو $\mu = 0$ ، الذي يصلح (بتقريب جيد) عند درجات حرارة منخفضة بما فيه الكفاية؛ كي تكون N_0 كبيرة. وتعويض قيمة $\mu = 0$ ، واستبدال المتغيرات $x = \frac{\epsilon}{kT}$ نحصل على العلاقة الآتية:

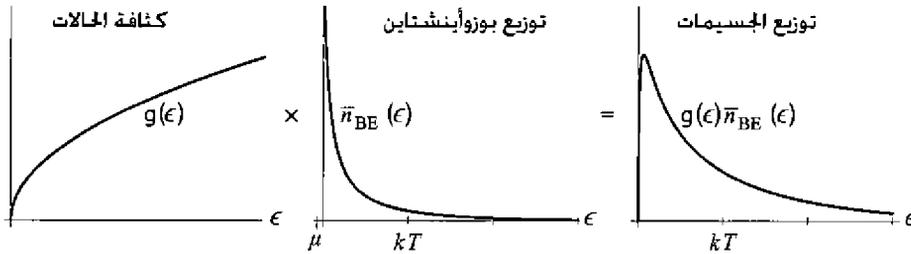
$$N = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} V \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\epsilon} d\epsilon}{e^{\epsilon/kT} - 1} \quad (124.7)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} V \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1}$$

ونظراً إلى أن التكامل على x يعطي القيمة 2.315، فإن النتيجة النهائية تصبح على الصورة الآتية:

$$N = 2.612 \left(\frac{2\pi m kT}{h^2} \right)^{3/2} V \quad (125.7)$$

ومن الواضح أن هذه النتيجة غير صحيحة؛ لأن الكميات كلها على الطرف الأيمن من المعادلة لا تعتمد على درجة الحرارة باستثناء T ، وهذا يعني أن عدد الذرات يعتمد على درجة الحرارة، وهذا استنتاج غريب. وفي الحقيقة توجد درجة حرارة واحدة T_c ، تكون المعادلة (125.7) صحيحة عندها. لكن، ما الخطأ في المعادلة (125.7) عندما $T \neq T_c$ ؟



الشكل 31.7: إن توزيع البوزونات بوصفها دالة من الطاقة، يساوي حاصل ضرب كثافة الحالات في توزيع بوز وأينشتاين.

عندما تكون درجات حرارة أعلى من T_c ، يجب أن يكون الجهد الكيميائي μ ، أصغر من الصفر بطريقة واضحة، ومن المعادلة (122.7) نلاحظ أن القيمة السالبة للجهد الكيميائي، تؤدي إلى قيمة للعدد N أصغر من الطرف الأيمن من المعادلة (125.7) على نحو ما هو مطلوب، في حين عند درجات حرارة أقل من T_c ؛ لأن عملية استبدال الجمع المنفصل (121.7) بالتكامل (122.7) غير صحيح.

$$N = 2.612 \left(\frac{2\pi m kT_c}{h^2} \right)^{3/2} V, \quad \text{أو} \quad kT_c = 0.527 \left(\frac{h^2}{2\pi m} \right) \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3} \quad (126.7)$$

فمثلاً، بإمعان في الحريص على دالة التكامل في المعادلة (124.7)، نرى أنه عندما تؤول ϵ إلى الصفر، فلن كثافة الحالات تؤول إلى الصفر أيضاً، (تناسب مع $\sqrt{\epsilon}$)، في حين يؤول توزيع بوز وأينشتاين للما لا نهاية (يتناسب مع $\frac{1}{\epsilon}$). وعلى الرغم من أن حاصل ضرب كثافة الحالات في توزيع بوز وأينشتاين دالة يمكن تكاملها، لكنه ليس واضحاً أن القيمة اللا نهائية عند $\epsilon = 0$ تمثل المجموع على الحالات غير المتصلة بطريقة صحيحة. لقد سبق أن بينا أن عدد الذرات في الحالة الأرضية، عند $\mu \approx 0$ ، يكون كبيراً للغاية، لكن هذا العدد الكبير غير متضمن في التكامل. وعلى الرغم من ذلك، فلا بد للتكامل من أن يعطي عدد الجسيمات، بطريقة صحيحة، في معظم الحالات، بعيداً عن الحالة $\epsilon_0 = \epsilon$ ، التي تكون طاقاتها $\epsilon_0 \gg \epsilon$. وإذا ما تخيلنا إيقاف التكامل عند نهاية أدنى، نهاية أكبر من ϵ_0 ، لكنها أقل كثيراً من kT ، فإننا لا نزال نحصل على الجواب نفسه تقريباً.

$$(127.7) \quad T < T_c \text{ عندما } N_{\text{excited}} = 2.612 \left(\frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} V$$

وهذا هو عدد الذرات في الحالات المتهيجة، ولا يتضمن الحالة الأرضية (ومن غير الواضح، هل تأخذ هذه الصيغة في الحسبان، وبطريقة صحيحة العدد القليل من الحالات المتهيجة الواقعة مباشرة فوق الحالة الأرضية. وإذا افترضنا أن الفرق بين N وما نحصل عليه من الصيغة السابقة N_{excited} ، كبير فإن الجهد الكيميائي μ ، يجب أن يكون أقرب كثيراً لطاقة الحالة الأرضية منها لطاقة الحالة المتهيجة الأولى، وعليه، فلا تحتوي أي حالة متهيجة (في جميع الأحوال) عدداً من الذرات، يقترب من عددها في الحالة الأرضية. ومع ذلك يوجد مدى ضيق من درجات الحرارة مباشرة تحت T_c التي لا يتحقق عندها هذا الشرط. وعندما يكون العدد الكلي للذرات غير كبير على نحو خاص، فإن هذا المدى من درجات الحرارة قد لا يكون ضيقاً. وتناقش جميع هذه النقاط في السؤال (66.7). وعليه، فإن الجهد الكيميائي μ ، يكون سالباً، وتكون معظم الذرات في حالات متهيجة عندما تكون درجة الحرارة أعلى من T_c . في حين أنه عند درجة حرارة أقل من T_c ، فإن الجهد الكيميائي يكون قريباً جداً من الصفر، ويكون عدد الذرات في الحالات المتهيجة معبراً عنه بالعلاقة (127.7). ويمكن كتابة هذه المعادلة بطريقة أسهل كثيراً على النحو الآتي:

$$(128.7) \quad N_{\text{excited}} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} N \quad (T < T_c)$$

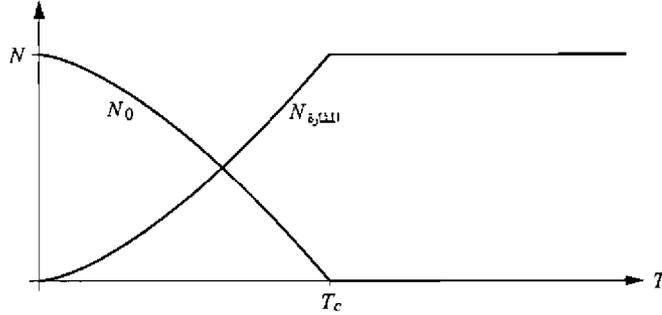
أما بقية الذرات فستكون في الحالة الأرضية، ويكون عددها على النحو الآتي:

$$(129.7) \quad N_0 = N - N_{\text{excited}} = \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right] N \quad (T < T_c).$$

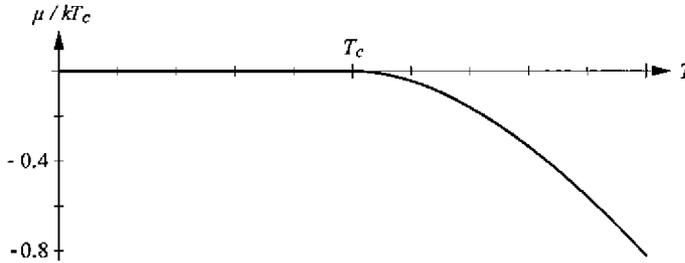
وبين الشكل (32.7) منحنى لكل من N_0 و N_{excited} بوصفها دالة من درجة الحرارة، في حين يبين الشكل (33.7) اعتمادية الجهد الكيميائي على درجة الحرارة.

إن التجمع المفاجئ للذرات في الحالة الأرضية، عند درجات حرارة أقل من T_c ، يعرف باسم (تكثف بوز وأينشتاين) وتسمى درجة الحرارة الانتقالية T_c ، (درجة حرارة التكثف)، في حين تسمى الذرات في الحالة

الأرضية (المتكاثفات). ومن الملاحظ من المعادلة (126.7)، أن درجة حرارة التكثف (دون المعامل 2.612) هي تمامًا الدرجة التي يكون عندها الحجم الكمي $(v_0 = (h^2 / 2\pi mkT)^{3/2})$ مساويًا لمتوسط الحجم للجسم الواحد (V / N) . وبطريقة أخرى، فإذا تخيلنا وجود الذرات في دوال أمواج محددة قدر الإمكان في الفضاء، (على نحو ما في الشكل 4.7)، عندها فإن التكثف يبدأ مباشرة عندما يصبح التقاطع بين دوال الأمواج ذا قيمة. (دوال الأمواج للذرات المتكاثفة تملأ الوعاء تمامًا).

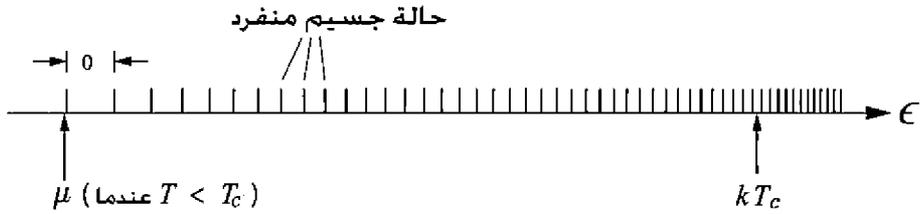


الشكل 32.7: عدد الذرات في الحالة الأرضية (N_0) ، وعددها في الحالات المثيجة $(N_{excited})$ لغاز بوزونات مثالي في صندوق ثلاثي الأبعاد. للحصول على درجات حرارة أقل من T_c ، فإن عدد الذرات في الحالات المثيجة يتناسب مع $T^{3/2}$.



الشكل 33.7: الجهد الكيميائي لغاز بوزونات مثالي في صندوق ثلاثي الأبعاد. للحصول على درجات حرارة أقل من درجة حرارة التكاثف، فإن μ تبتعد عن الصفر بمقادير قليلة جدًا، ولا يمكن إظهارها على هذا القياس. فوق درجة حرارة التكاثف يصبح الجهد الكيميائي سالبًا. القيم المرسومة حسب عددًا، على نحو ما هو موضح في السؤال 69.7.

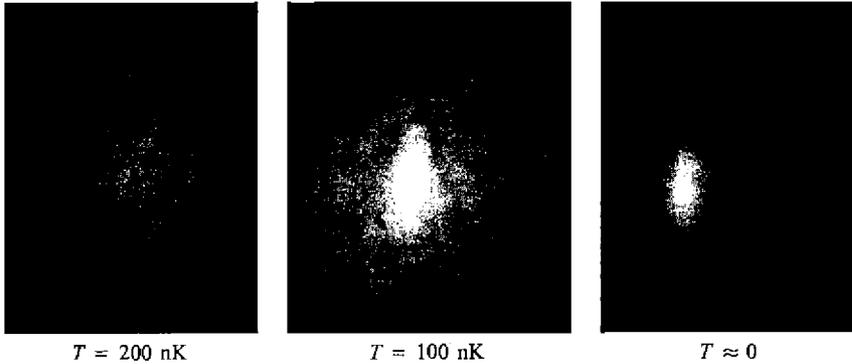
وفي جميع التجارب تحت الظروف الواقعية، فإننا نحصل على قيم صغيرة جدًا لدرجة حرارة التكاثف، لكنها ليست الصغر نفسه الذي كان يمكن أن نتوقعه. وعند وضع جسيم منفرد في صندوق حجمه V ، فإنه من المنطقي أن يوجد ذلك الجسيم في الحالة الأرضية فقط عندما تكون kT متقاربة مع ϵ_0 أو أقل (حيث تكون الحالات المثيجة بطاقات $2\epsilon_0$ أو أكثر أقل احتمالًا بكثير). لكن إذا وضعنا عددًا كبيرًا من البوزونات المتماثلة في الصندوق نفسه، سنجد أن معظمها يوجد في الحالة الأرضية، عند درجات حرارة، أقل نوعًا ما من T_c ، لكنها أعلى كثيرًا من $\frac{\epsilon_0}{k}$. ويمكن ملاحظة أن kT_c أكبر من ϵ_0 بمعامل بحدود $N^{2/3}$ وذلك باستخدام المعادلتين (118.7) و (126.7). الشكل (34.7) يظهر ترتيب مقياس الطاقة $kT_c < \epsilon_0 < (\epsilon_0 - \mu)$.



الشكل 34.7: تمثيل تخطيطي لمقياس الطاقة المتعلقة بتكاثف بوز وأينشتاين. الخطوط العمودية القصيرة تمثل الطاقات المختلفة لجسيم منفرد إلى جانب اقترابها بعضها من بعض (في المتوسط) مع زيادة الطاقة، فإن مواقع تلك الخطوط ليس دقيقاً، وإن حاصل ضرب درجة الحرارة التكتف مع k أكبر بعدد من المرات من التباعد بين المستويات الأقل طاقة، في حين أن الجهد الكيميائي، عند $T < T_c$ ، أقل بكمية صغيرة جداً من طاقة الحالة الأرضية.

أمثلة حقيقية Real-World Examples

لقد حصل على تكاثف بوز وأينشتاين أول مرة لغاز من الذرات ضعيفة التفاعل عام 1995، وذلك باستخدام الربيديوم - 87⁽⁷⁵⁾. فلقد تم في هذه التجربة حصر 10^4 ذرات تقريباً (باستخدام تقنية التبريد، والحصر بالليزر التي وصفت في الجزء (4.4) في حجم بحدود 10^{-15} m^3 . لقد لوحظ أن جزءاً كبيراً من الذرات قد تكاثف إلى الحالة الأرضية عند درجات الحرارة التي هي أكبر بمئة مرة من درجة الحرارة التي تتحقق عندها فرصة جيدة لذرة منفردة ومعزولة كي توجد في الحالة الأرضية. ويبين الشكل (35.7) توزيع سرعات الذرات، في هذه التجربة، عند درجات حرارة أعلى، مباشرة أقل كثيراً من درجة حرارة التكتاف. ومنذ عام 1999، تم التوصل إلى تكاثف بوز وأينشتاين لغازات قليلة الكثافة من ذرات الصوديوم وذرات الليثيوم وذرات الهيدروجين.



الشكل 53.7: دليل على تكاثف بوز وأينشتاين لذرات الربيديوم 78. لقد أخذت هذه الصور

(75) لوصف جميل للتجربة؛ انظر

يقطع المجال المغناطيسي الذي يحصر الذرات، ويجعل الغاز يتمدد لحظة، ثم تسليط ضوء على السحابة المتمددة لرسم خريطة لتوزيعها. وعليه، فإن مواقع الذرات في تلك الصور يعطي مقياساً لسرعتها مباشرة قبل قطع المجال المغناطيسي. للحصول على درجات حرارة أعلى من درجة التكاثف (يساراً)، فإن توزيع سرعات الذرات متسع، ومتماثل، ومتفق مع توزيع ماكسويل وبولتزمان. وللحصول على درجات حرارة أقل من درجة التكاثف (المركز)، فإن جزءاً مهماً من الذرات يقع في منطقة صغيرة ممتدة من فراغ السرعات، وهذه الذرات هي التي تكوّن المتكاثفات، ويحصل الامتداد لأن المصيدة أضيق في الاتجاه العمودي، وذلك يؤدي إلى ضيق دالة الموجة للحالة الأرضية في الفضاء الإزاحي، وزيادة عرضها في فضاء السرعات. وعند أقل درجة حرارة تم التوصل إليها (يميناً)، فإن جميع الذرات تكون في دالة الموجة للحالة الأرضية.

ويحدث تكاثف بوز وأينشتاين في الأنظمة التي يكون فيها التفاعل بين الجسيمات غير مهم، وعليه فإن التعامل التحليلي الذي استخدم هنا ليس دقيقاً تماماً. إن أشهر الأمثلة هي الهيليوم الرباعي الذي يكون طور المائع الفائق، وبلزوجة معدومة عملياً عند درجات حرارة أقل من 2.17 K . (انظر الشكل 13.5). وبدقة أكثر، فإن السائل، تحت درجة الحرارة تلك، مزيج من مركبتين، إحداهما عادية والثانية مفرطة المائعة. وتصبح المركبة فائقة المائعة مهيمنة أكثر مع انخفاض درجة الحرارة. ويشير هذا التصرف إلى حقيقة أن المركبة الفائقة المائعة عبارة عن تكاثفات بوز وأينشتاين. وفي الحقيقة، فإن حسابات بسيطة بإهمال القوى بين الذرات، تقود إلى درجة حرارة تكتيف أعلى قليلاً من القيمة الملاحظة. (انظر السؤال 68.7). ولكن لسوء الحظ، فإن صفة إفراط المائعة نفسها، لا يمكن فهمها دون أخذ التفاعلات بين ذرات الهيليوم في الحسبان.

وإذا كانت المركبة المفرطة المائعة في الهيليوم الرباعي عبارة عن تكاثفات بوز وأينشتاين، فقد يُعتقد أن الهيليوم الثلاثي، فيرميوناً، لن يكون في هذا الطور. وفي الحقيقة، فلا يتوافر أي انتقال لحالة فائق المائعة في الهيليوم الثلاثي حتى درجة حرارة $T = 2\text{ K}$. لكن عند درجات حرارة منخفضة جداً ($3 \times 10^{-4}\text{ K}$) فإن الهيليوم الثلاثي لا يمتلك طورًا واحدًا مفرط المائعة بل طورين مختلفين. فكيف يمكن أن يكون ذلك لنظام من الفيرميونات؟ ما يحصل هو أن "الجسيمات" التي تتكاثف هي أزواج من ذرات الهيليوم الثلاثي المرتبطة ببعضها نتيجة تفاعل عزمها المغناطيسية النووية مع الذرات المحيطة⁽⁷⁶⁾.

لن زوجاً من الفيرميونات يمتلك عزم زخم مغزلي مساوياً لعدد صحيح، وعليه، فهو بوزون. وتحدث ظاهرة أخرى مماثلة لكن في مفرطات التوصيلية، حيث ترتبط أزواج من الإلكترونات ببعضها عن طريق التفاعل مع شبكة الأيونات المهتزة. وعند درجات حرارة منخفضة تتكاثف هذه الأزواج إلى حالة مفرطة التوصيلية، وهذا مثال آخر عن تكاثف بوز وأينشتاين⁽⁷⁷⁾.

لماذا يحدث هذا؟ Why Does it Happen؟

والآن، بعد أن رأينا أن تكاثف بوز وأينشتاين يمكن أن يحدث، فلنعد قليلاً، ونسأل: لماذا يحدث هذا التكاثف؟ لقد اعتمد الاشتقاق السابق كلياً على دالة توزيع بوز وأينشتاين، وهي وسيلة جيدة، ولكنها غير محسوسة جيداً.

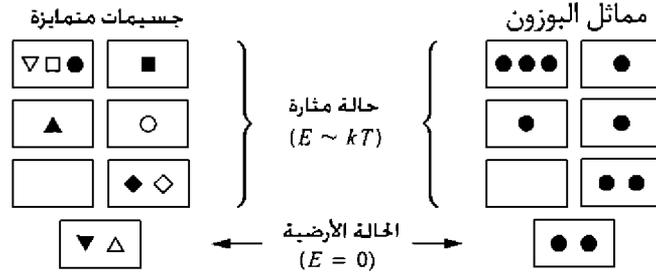
(76) لمراجعة فيزياء النظائر ووسائل الهيليوم، انظر will ks and Betts 1987.

(77) لمقالات مراجعة على تكاثف بوز وأينشتاين للأنظمة مختلفة، انظر A.Griffin, D.W. Snoke, and S. Stringer.

(eds, Bose-Einstein Condensation (Cambridge University Press, Cambridge. 1995).

وليس صعبًا الوصول إلى فهم معين ما لهذه الظاهرة باستخدام طرق أكثر أساسية. لنفترض أنه بدلاً من مجموعة من البوزونات المتماثلة، كان لدينا مجموعة N من الجسيمات غير المتماثلة محصورة داخل صندوق. (ربما قد لونت هذه الجسيمات بألوان مختلفة). وإذا لم تتفاعل هذه الجسيمات مع بعضها، فيمكننا عندها اعتبار كل واحدة منها نظامًا منفصلاً يطبق عليه إحصاء بولتزمان. عند درجة حرارة T ، يكون لكل جسيم، فرصة جيدة لشغل أي حالة جسيم منفرد، ذات طاقة بحدود kT . إن عدد هذه الحالات، تحت أي ظروف معقولة، كبير جدًا. (في الحقيقة، فإن هذا العدد يساوي دالة التجزيء لجسيم منفرد Z_1). إن احتمال وجود الجسيم في الحالة الأرضية صغير جدًا، ويساوي $1/Z_1$. ونظرًا إلى أن هذه النتيجة تنطبق على كل جسيم من الجسيمات غير المتماثلة N على انفراد، فإن جزءًا صغيرًا من هذه الجسيمات سيوجد في الحالة الأرضية. إذا لا يوجد تكاثف بوز وأينشتاين. ومن المفيد أن نحلل هذا النظام من وجهة نظر أخرى، وهي معاملة النظام الكلي مرة واحدة عوضًا عن التعامل مع جسيم بعد الآخر. ومن وجهة النظر هذه، فإن كل حالة نظام لها احتمالها الخاص بها، ومعامل بولتزمان الخاص بها. إن حالة النظام التي تكون جميع الجسيمات فيها في الحالة الأرضية يكون معامل بولتزمان لها مساويًا للواحد. (أخذين طاقة الحالة الأرضية صفرًا للتسهيل)، في حين أن حالة النظام ذات طاقة كلية U فلها معامل بولتزمان $e^{-U/kT}$. وبناءً على خلاصة الفقرة السابقة، فإن حالات النظام الأكثر حدوثًا هي تلك التي تكون فيها جميع الجسيمات موجودة في حالات متهيجة بطاقات بحدود kT . وعليه، فإن الطاقة الكلية للنظام تساوي $U \sim NkT$ ، إن معامل بولتزمان لحالة نظام تقليدية يكون في حدود $e^{-NkT/kT} = e^{-N}$ ، إن هذا عدد صغير للغاية! إذا كيف يمكن للنظام أن يفضل هذه الحالات بدلاً من التكاثف للحالة الأرضية، ذات معامل بولتزمان الأكبر كثيرًا؟

أما الجواب عن هذا السؤال، فهو على النحو الآتي: في حين أن احتمال حالات النظام بطاقات متقاربة من NkT ، صغير جدًا، لكن عدد هذه الحالات كبير للغاية؛ لذا فإن أخذ هذه الحالات معًا يصبح احتمالاً جيدًا. (انظر الشكل 36.7).



الشكل 36.7: عندما تكون معظم الجسيمات في حالات متهيجة، فإن معامل بولتزمان للنظام كله يكون صغيرًا جدًا (e^{-N}). ويكون عدد الترتيبات لجسيمات غير متماثلة بين هذه الحالات كبيرًا جدًا، على أن تكون حالات النظام محتملة جدًا، ولكن عدد الترتيبات لبوزونات متماثلة أقل كثيرًا.

إن عدد طرق ترتيب عدد N ، من الجسيمات غير المتماثلة بين Z_1 من حالات الجسيم المنفرد يساوي Z_1^N . وهو عدد كبير، ويطغى على معامل بولتزمان e^{-N} ، على أن تكون $Z_1 \gg 1$.

ولنعد الآن إلى حالة البوزونات المتماثلة، وهنا أيضًا، إذا كانت الجسيمات جميعها موجودة في حالات الجسيم المنفرد ذات الطاقات المتقاربة من kT ، فإن معامل بولتزمان لحالة النظام يكون في حدود e^N . لكن، الآن، عند حالات النظام أقل كثيرًا. إن عدد الحالات للنظام الآن هي عدد الطرق المختلفة لترتيب عدد N من الجسيمات بين العدد Z_1 من حالات الجسيم المنفرد، ورياضيًا يساوي عدد طرق ترتيب العدد N من وحدات الطاقة بين العدد Z_1 من الهزازات في جوامد أينشتاين، ويعبر عنها على النحو الآتي:

$$(130.7) \quad \left(\begin{array}{c} \text{عدد} \\ \text{حالات النظام} \end{array} \right) \sim \binom{N + Z_1 - 1}{N} \sim \begin{cases} (eZ_1/N)^N & \text{when } Z_1 \gg N; \\ (eN/Z_1)^{Z_1} & \text{when } Z_1 \ll N. \end{cases}$$

وعندما يكون عدد حالات الجسيم المنفرد أكبر كثيرًا من عدد البوزونات، يكون المعامل التوافقي مرة أخرى كبيرًا بما فيه الكفاية ليتغلب على معامل بولتزمان e^{-1} ؛ لذا فإن حالات النظام، التي تكون فيها البوزونات جميعها في حالة متهيجة، ستكون الأكثر حدودًا. ومن جهة أخرى عندما يكون عدد حالات الجسيم المنفرد أقل كثيرًا من عدد البوزونات لا يكون المعامل التوافقي كبيرًا ليعوض عن صغر معامل بولتزمان، وعليه، فإن حالات النظام هذه، حتى لو أخذت مجتمعة، فإن احتمال حدوثها صغير جدًا. (إن هذه الخلاصة الأخيرة غير واضحة من الصيغ، لكن هناك مثال عددي: عندما تكون $N = 100$ ، $Z_1 = 25$ يكون معامل بولتزمان لحالة النظام التي تكون فيها جميع البوزونات في حالات متهيجة يساوي $e^{-100} = 4 \times 10^{-44}$ ، في حين يكون عدد الحالات

$$\binom{124}{100} = 3 \times 10^{25}$$

بوجه عام، فإن المعامل التوافقي سيكون كبيرًا بما فيه الكفاية لوضع بوزون واحد، في المتوسط، في كل حالة متهيجة متاحة. أما البوزونات المتبقية فتتكاثف في الحالة الأرضية، بسبب تفضيل معامل بولتزمان لحالات النظام ذات الطاقات المنخفضة.

لذا، فإن تفسير تكاثف بوزوآينشتاين يعتمد على الصفة التوافقية لعد ترتيبات الجسيمات المتماثلة: نظرًا إلى أن عدد الطرق المختلفة لترتيب الجسيمات المتماثلة بين الحالات المتهيجة صغير نسبيًا، تصبح الحالة الأرضية مغلقة أكثر من كونها جسيمات غير متماثلة. ولعلك ما زلت تتساءل: كيف يمكن لنا معرفة أن البوزونات من نوع معين متماثلة حقيقة، وعليه يجب عدها بهذه الطريقة؟ وبدل لهذا التساؤل، نسأل: كيف يمكن لنا معرفة أن الافتراض الأساسي الذي يعطي الحالات المختلفة كلها (للنظام والمحيط) أن الوزن الإحصائي نفسه ينطبق على أنظمة البوزونات المتماثلة؟ وتوجد إجابات نظرية جيدة لهذه التساؤلات، لكن تلك الإجابات تتطلب فهمًا جيدًا لميكانيك الكم الذي يقع خارج نطاق هذا الكتاب. ومع ذلك، فإن تلك الإجابات غير قطعية، حيث توجد فرصة لاكتشاف نوع من التفاعلات غير المعروفة حاليًا التي يمكن من خلالها التمييز بين البوزونات المتماثلة افتراضًا، ما يؤدي إلى تبخر فكرة تكاثف بوزوآينشتاين كليًا⁽⁷⁸⁾. وحتى الآن، فإن النتائج العملية تشير إلى عدم وجود مثل هذا التفاعل.

السؤال 65.7: احسب التكامل في المعادلة (124.7) عددًا، لتأكيد القيمة المذكورة في الكتاب.

السؤال 66.7: افترض أن مجموعة مكونة من 10,000 ذرة روبيديوم-87 محصورة في صندوق حجمه $(10^{-5} \text{ m})^3$.

(أ) احسب طاقة الحالة الأرضية ϵ_0 ، معبرًا عن النتيجة بدلالة J و eV .

(ب) احسب درجة حرارة التكاثر، وقارن kT_c و ϵ_0 .

(ج) افترض أن $T = 0.9 T_c$ ، فما عدد الذرات الموجودة في الحالة الأرضية؟

ما قرب الجهد الكيميائي من طاقة الحالة الأرضية؟ وما عدد الذرات في كل واحدة من الحالات (بتلات درجات تشعب)؟

(د) أعد الفرعين (ب) و(ج) في حالة 10^6 من الذرات المحصورة في الحجم نفسه. وناقش الظروف التي يكون عندها عدد الذرات في الحالة الأرضية أكبر كثيرًا من عددها في الحالة المثيجة الأولى.

السؤال 67.7: في أول وصول لتكاثر بوز وأينشتاين لذرات الهيدروجين، حصر غاز مكون من 2×10^{10} ذرة، وبرد حتى وصلت كثافته قيمة قصوى، مقدارها 1.8×10^{14} ذرة لكل cm^3 . احسب درجة حرارة التكاثر لهذا النظام، وقارنها بالقيمة المقيسة، وهي $50 \mu\text{K}$.

السؤال 68.7: احسب درجة حرارة تكاثر الهيليوم الرباعي مفترضًا أنه غاز ذرات غير متفاعلة. وقارنها بدرجة حرارة الانتقال إلى حالة مفرطة المائعية، وهي $T = 2.17 \text{ K}$.

(كثافة سائل الهيليوم الرباعي 0.145 g/cm^3).

السؤال 69.7: إذا كان لديك جهاز حاسوب لإجراء التكاملات عدديًا، فليس من الصعب حساب الجهد الكيميائي μ لدرجات حرارة $T > T_c$.

(أ) يفضل عادة عند حل مسألة عن طريق الحاسوب، أن نبدأ بوضع كل شيء بدلالة كميات عديمة الوحدات. لذا عرف $t = T / T_c$.

$c = \mu / kT_c$ و $x = \epsilon / kT_c$ ، ثم عبّر عن التكامل الذي يعرف μ ، المعادلة (122.7)، بدلالة هذه المتغيرات. يفترض أن نحصل على المعادلة:

$$2.315 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{e^{(x-c)/t} - 1}$$

(ب) اعتمادًا على الشكل (33.7)، فإن القيمة الصحيحة للمتغير c عند $T = 2T_c$ تساوي -0.8 تقريبًا. استخدم هذه القيم، وتحقق من أن المعادلة أعلاه تتحقق تقريبًا.

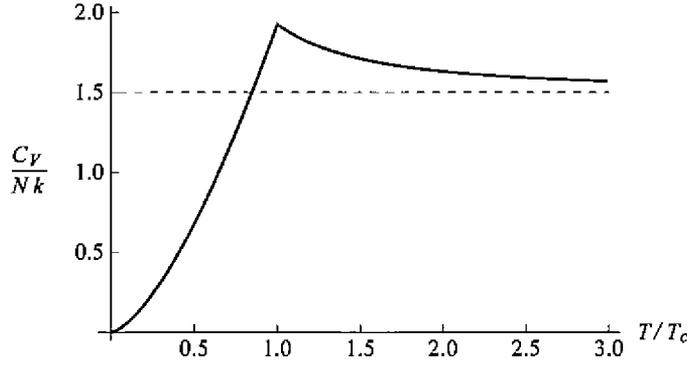
(ج) الآن ابدأ بتغيير μ محافظًا على T بقيمة ثابتة لإيجاد μ الدقيقة عند $T = 2T_c$. وأعد العملية لقيم (T / T_c) ما بين 1.2 إلى 3.0، وبزيادات 0.2. وارسم منحنى للدالة μ بوصفها دالة من درجة الحرارة.

السؤال 70.7: يبين الشكل (37.7) السعة الحرارية لغاز من البوزونات، بوصفها دالة من درجة الحرارة، وفي هذا السؤال، ستجري حسابات للحصول على هذا الشكل غير العادي للمنحنى.

(أ) اكتب صيغة للطاقة الكلية لغاز مكون من N من البوزونات محصورة في حجم V ، بدلالة تكامل. (مماثل للمعادلة (122.7)).

(ب) يمكنك وضع $\mu = 0$ لدرجات حرارة $T < T_c$. أجرِ التكامل عدديًا لهذه الحالة، ثم اشتق

النتيجة بالنسبة إلى درجة الحرارة T ، واحصل على السعة الحرارية. قارنها بالشكل (37.7).
 (ج) علّل وجوب أن تصل السعة الحرارية القيمة $\frac{3}{2} N k$ لدرجات الحرارة العالية.
 (د) باستخدام قيمة μ التي حسبت في السؤال (69.7)، أجز التكامل ($T > T_c$)، لتحصل على الطاقة بوصفها دالة من درجة الحرارة، ومن ثم اشتق النتيجة عددياً، واحصل على السعة الحرارية. ثم ارسم السعة الحرارية، وتحقق من أن رسمك يتفق مع الشكل (37.7).



الشكل 37.7: السعة الحرارية لغاز بوزونات مثالي في صندوق ثلاثي الأبعاد

السؤال 71.7: مبتدئاً بالصيغة الخاصة بالسعة الحرارية C_V ، التي اشتقت في السؤال (70.7 ب)، احسب الإنتروبي، وطاقة هلمهولتز الحرة، وضغط غاز بوز عند درجات حرارة $T > T_c$. لاحظ أن الضغط لا يعتمد على الحجم، ثم بيّن كيف يمكن أن يكون هذا الوضع هو الحال.

السؤال 72.7: إن كثافة الحالات، لغاز من الجسيمات المحصورة في صندوق ثنائي الأبعاد تكون مقداراً ثابتاً غير معتمد على الطاقة ϵ . انظر إلى السؤال (28.7) ثم ادرس تصرف غاز مكون من بوزونات غير متفاعلة في صندوق ثنائي الأبعاد. ستجد أن الجهد الكيميائي يبقى أقل من الصفر كثيراً ما دامت درجة الحرارة T أكبر كثيراً من الصفر، وعليه فلا يوجد تكاثف مفاجئ للجسيمات في اتجاه الحالة الأرضية. وفسر كيف يمكن أن يكون ذلك هو الحال. وما الصفة التي يجب أن تحققها $g(\epsilon)$ حتى يكون هناك تكاثف مفاجئ لبوزو أينشتاين مفاجئ؟

السؤال 73.7: افترض أن غازاً يتكون من العدد، N ، من البوزونات المتماثلة ذات الزخم المغزلي الصفري، محصورة عن طريق جهد هزاز توافقي متماثل وثلاثي الأبعاد (في تجربة ذرات الربيديوم التي نوقشت سابقاً، كان جهد الحصر توافقياً، لكنه غير متماثل). إن مستويات الطاقة في هذا الجهد هي $\epsilon = nhf$ ، حيث n عدد صحيح موجب، و f تردد الاهتزازات الكلاسيكية، وإن درجة تشعب المستوى n تساوي $(n+1)(n+2)/2$.
 (أ) أوجد صيغة لكثافة الحالات $g(\epsilon)$ لذرة محصورة في هذا الجهد (يمكنك افتراض أن $n > 1$).

(ب) أوجد صيغة لدرجة حرارة التكاثف لهذا النظام بدلالة تردد الاهتزازات f .

(ج) إن هذا الجهد يحصر الجسيمات داخل حجم يساوي تقريباً مكعب سعة الاهتزازة. وسعة الاهتزازة بدورها يمكن تقديرها بجعل الطاقة الكلية للجسيم (في حدود hT) مساوية لطاقة وضع "الزنبرك". آخذاً هذه الارتباطات في الحسبان، ومهملاً جميع العوامل 2 و π وهكذا، بيّن أن جوابك للجزء (ب) يكافئ تقريباً الصيغة، (التي اشتقت في الكتاب)، الخاصة بدرجة حرارة التكاثف لبوزونات محصورة داخل صندوق ذي جدران صلبة.

السؤال 74.7: افترض أن غاز بوزونات محصور في جهد توافقي متمائل، على نحو ما هو في السؤال السابق. ونظراً إلى أن بناء الطاقة لهذا النظام أسهل كثيراً منه لحالة الصندوق ثلاثي الأبعاد، فإنه يمكن إجراء المجموع عددياً في المعادلة (121.7) دون الحاجة إلى تقريبه إلى تكامل⁽⁷⁹⁾.

(أ) اكتب المعادلة (121.7)، لهذا النظام، بوصفه مجموعاً على مستويات الطاقة، أخذاً التشعب في الحسبان. واستبدل بكلٍّ من T و μ متغيرات عديمة الوحدات $t = kT/hf$ و $c = \mu/hf$.

(ب) اكتب برنامج حاسوب لحساب المجموع لأي قيم معطاة من t و c ، وبيّن أن المعادلة (121.7)، في حالة $N = 2000$ ، تتحقق عند $t = 15$ ، على أن تكون $c = -10.534$. (ستحتاج إلى أن تتضمن الحسابات أول 200 مستوى طاقة في المجموع تقريباً).

(ج) ارسم عدد الجسيمات الموجودة في كل مستوى طاقة بوصفها دالة من الطاقة، مستخدماً المتغيرات نفسها في الفرع (ب).

(د) استخدم الآن $t = 14$ ، وعدّل قيمة c حتى يصبح المجموع مساوياً 2000. ثم ارسم عدد الجسيمات بوصفها دالة من الطاقة.

(هـ) أعد الجزء (د) لقيم $t = 10, 11, 12, 13$ ، تجد أن القيمة المطلوبة من c تتزايد في اتجاه الصفر (مع تناقص t)، لكنها لا تصله على الإطلاق. ناقش النتائج مع بعض التفصيل.

السؤال 75.7: افترض أن غازاً يتكون من بوزونات غير متفاعلة ذات زخم مغزلي يساوي صفراً، عند درجات حرارة عالية $T \gg Tc$ (درجة حرارة عالية هنا يمكن أن تعني أنها أقل من 1 K).

(أ) بيّن عند درجات الحرارة هذه، أن توزيع بوز وأينشتاين يمكن كتابته على النحو الآتي:

$$\bar{n}_{BE} = e^{-(\epsilon-\mu)/kT} [1 + e^{-(\epsilon-\mu)/kT} + \dots]$$

(ب) محتفظاً فقط بالحدود المهيمنة أعلاه، عوّض هذه النتيجة في المعادلة (122.7)، واشتق أول تصحيح كمي للجهد الكيميائي لغاز من البوزونات.

(ج) مستخدماً صفات الطاقة الحرة العظمى (أسئلة 5-23، و7.7)، بيّن أن الضغط لأي نظام يعبر عنه بالعلاقة الآتية:

$$P = (kT/V) \ln Z$$

حيث Z دالة التجزئة الأعظم. وبيّن أنه، لغاز مكون من جسيمات غير متفاعلة، يمكن حساب $\ln Z$ بوصفه مجموعاً على حالات الجسيم المنفرد جميعها، ثم على $\ln Z$ ، حيث Z_j دالة التجزئة الأعظم للجسيم المنفرد رقم j .

(د) مستمراً في نتيجة الجزء (ج)، اكتب المجموع على الحالات بوصفه تكاملاً على الطاقة، مستخدماً كثافة الحالات. وأجر هذا التكامل بطريق واضحة لغاز من البوزونات غير المتفاعلة عند درجات حرارة عالية، مستخدماً نتائج الفرع (ب) للجهد الكيميائي وناشر اللوغاريتم بالطريقة الصحيحة. في النهاية يجب أن تحصل على النتيجة الآتية:

(79) هذا السؤال مبني على مقالة 1998 (1998) 66, 185-190 American Journal of Physics Martin Ligare.

$$P = \frac{NkT}{V} \left(1 - \frac{Nv_0}{4\sqrt{2V}}\right)$$

مرة أخرى، بإهمال الحدود ذات الترتيب العالي، تؤدي التأثيرات الكمية إلى خفض الضغط، على نحو ما هو متوقع لغاز من البوزونات.

(هـ) اكتب نتيجة الفرع (د) بدلالة النشر الحدي الذي عرض في السؤال (17.1)، واقرأ المعامل الحدي الثاني، $B(T)$ ، ثم ارسم المعامل $B(T)$ المتنبأ به، لغاز افتراضي من ذرات الهيليوم الرباعي غير المتفاعلة.

(و) أعد السؤال كله لحالة غاز مكون من فيرميونات ذات زخم مغزلي يساوي $1/2$. (تحتاج إلى بعض التعديلات). ثم ناقش النتائج، وارسم المعامل $B(T)$ لغاز افتراضي من ذرات الهيليوم الثلاثي غير المتفاعلة.

إن عشرة في المئة من مخزوننا من النجوم، يتكون من الأقزام البيضاء، جالسة هناك، باعثة الطاقات الحرارية (انحركية) لنوى، ذراتها من الكربون والأكسجين من تحت الطبقة الرقيقة المكونة من الهيدروجين والهيليوم. ستستمر هذه الأقزام البيضاء بهذا العمل حتى يعود الكون للانكماش، أو حتى تتحطم باريوناتها، أو حتى تتحول الأقزام البيضاء إلى ثقوب سوداء عن طريق اختراق الحواجز.

(مقاييس الأزمان المحتملة لهذه النهايات هي: 10^{14} ، 10^{33} ، 10^{10^6} سنوات على الترتيب، وفي الحالات الثلاث جميعها فهي أزمان طويلة جدًا).