

الجزء الأول

البرمجة الخطية  
**Linear Programming**



## الباب الأول

### البرمجة الخطية

### Linear Programming

- مقدمة • بعض نماذج
- البرمجة الخطية • المجموعات
- المحدبة • فوق المستوى ونصف
- الفضاء • المخروطات المحدبة •
- مخروط المنطقة المضلعة •
- النقاط الحدية • الحل
- الهندسي • الصياغة القياسية
- للبرنامج الخطي • الأشكال
- غير القياسية للبرنامج الخطي.

#### 1.1 مقدمة Introduction

البرمجة الرياضية تعرف بأنها العلم الذي يبحث في تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة محده تسمى دالة الهدف objective function، والتي تعتمد على عدد نهائي من المتغيرات. هذه المتغيرات قد تكون مستقلة عن بعضها، أو قد تكون مرتبطة مع بعضها بما يسمى القيود constraints. ومن الطبيعي أن تهتم البرمجة الرياضية بدراسة طرائق الحل وكيفية بنائها.

## مثال 1.1

ليكن البرنامج الرياضي التالي:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & z = x_1^2 + x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 - x_2 = 3 \\ & x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

إن هذه المسألة هي مسألة برمجة رياضية أو أمثلة Optimization فيها دالة الهدف  $z$ ، والمتغيرات هما  $x_1$  و  $x_2$ ، وهما مقيدان بالشرطين المذكورين آنفاً. إنه من المرغوب فيه إيجاد قيم  $x_1$  و  $x_2$  التي تخفض من قيمة دالة الهدف، ضمن القيود المعطاة.

إن الصياغة العامة للبرمجة الرياضية تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \text{optimize} \quad & z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{subject to} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\leq \\ &= \\ &\geq \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} &b_1 \\ &b_2 \\ &\vdots \\ &b_m \end{aligned} \right.$$

حيث optimize تعني الحل الأفضل أو الأمثل، وهي إما أن تكون minimize تصغير كتقليل تكلفة إنتاج منتج معين أو maximize تكبير كتعظيم ربح شركة في منتج معين.

يعتبر علم البرمجة من العلوم الحديثة، فقبل عام 1940م لم يكن هناك طرق كثيرة لحل البرامج الرياضية في عدة متغيرات. ولكن وبعد ظهور الحاسب الآلي ظهرت طرائق عديدة لحل مشكلات البرمجة الرياضية. ففي الفترة ما بين 1940-1960م شهد العالم تقدماً كبيراً في فرع مهم من فروع

الأمثلة، وهو ما يعرف بالبرمجة الخطية. ثم بعد ذلك ظهرت طرائق لحل مسائل البرمجة الرياضية بمعظم أشكالها.

إن للبرمجة الرياضية تطبيقات عديدة وهامة في مختلف مجالات الحياة: في العلوم، الهندسة، الرياضيات، الاقتصاد، التجارة وغيرها. نذكر منها:

1. تصميم المفاعلات الكيميائية.

2. صناعة البلاستيك مثل الـ MTBE.

3. تصميم محركات الطائرات.

4. تصميم المباني والجسور.

5. مسائل النقل والإنتاج.

وهناك استخدامات للبرمجة الرياضية في فروع التحليل العددي نذكر منها:

1. ملائمة البيانات Data fitting.

2. المعادلات التفاضلية العادية غير الخطية.

هذه فقط أمثلة بسيطة على التطبيقات العديدة للبرمجة الرياضية.

ولكي نعطي فكرة عن البرمجة الرياضية، نأخذ في عين الاعتبار مسألة التصميم الأفضل لبرج التقطير. إن الغرض من برج التقطير هو فصل أكبر كمية ممكنة من مركبات الخليط الداخل إلى البرج. دالة الهدف في هذا المثال والتي نود إيجاد القيمة العظمى لها هي كمية المنتج أو مقدار الريح الناتج. المتغيرات هي: معدل التدفق للخليط الداخل، مقدار تركيبة السائل والغاز لكل مركب في كل طبقة من طبقات البرج، وكذلك قياس الحرارة والضغط. هذه المتغيرات مقيدة بعدة أشكال من القيود. على سبيل المثال المركبات وكمية المادة الخام يجب أن تكون غير سالبة. كما أن درجة الحرارة لا يمكن أن تتعدى حد معين. وهناك قيود أكثر تعقيداً توضح كيف تتكون المركبات مثل العلاقة التي تربط كمية السائل بالغاز لكل

مركب، وهي  $V_i = I/\phi(t_i)$  حيث  $\phi(t_i)$  دالة غير خطية. وقد يكون الوضع أكثر تعقيداً لو سمحنا لعدد من طبقات البرج أن تتغير، حيث يكون المتغير هنا عدداً طبيعياً.

إن أكثر أنواع البرامج الرياضية سهولة هي التي تكون فيها الدوال

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ و } g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ خطية أي أن } (i=1, 2, \dots, m)$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

و

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n$$

حيث أن  $c_i$  و  $a_{ij}$  ( $i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n$ ) ثوابت معلومة، تُعرف المعاملات  $c_i$  بمعاملات التكلفة cost coefficients. هذا النوع من البرامج يعرف بالبرنامج الخطي.

سوف ندرس في هذا الباب عدداً من الأساسيات المتعلقة بالبرمجة الخطية. ففي البداية سندرس بشكل مختصر بعض المسائل التطبيقية التي يمكن أن تظهر في كثير من التطبيقات العملية.

إن مسألة البرمجة الخطية عادة ما يُعبّر عنها على النحو التالي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && f(x) = c^T x \\ &\text{subject to} && Ax \geq b \\ &&& x \geq 0 \end{aligned}$$

حيث  $x$  متجه من  $\mathbb{R}^n$  وكذلك  $c$ . أما  $A$  فهي مصفوفة من نوع  $m \times n$  و  $b$  متجه من  $\mathbb{R}^m$ . إن  $f(x)$  تسمى دالة الهدف وهي دالة خطية و  $Ax \geq b$  هي مجموعة قيود على شكل علاقات رياضية خطية، بالإضافة إلى ذلك هناك

شرط عدم سالبية المتغيرات و المعبر عنه ب  $x \geq 0$  . حيث  $x \geq 0$  تعني جميع مركبات  $x$  أكبر من أو تساوي الصفر.

## 2.1 بعض نماذج البرمجة الخطية Some linear programming models

يتضمن هذا الفصل بعض النماذج التي تبين طبيعة البرمجة الخطية. وسوف تتم صياغتها بشكل رياضي مما يتيح إبراز الصياغة الرياضية القياسية للبرمجة الخطية. سنعطي الآن مثال تطبيقي على البرنامج الخطي ثم ننتقل إلى النماذج الخطية بعد ذلك.

### مثال 2.1

على قطعة معينة من الأرض نود أن نبني عدة مساكن، ونود أن تكون بعض هذه المباني ذات أدوار خمسة والبعض الآخر ذات دورين. فكم ينبغي أن يكون عدد النوع الأول من هذه المباني وكم ينبغي أن يكون عدد النوع الآخر كي تستوعب أكبر عدد من السكان، علماً أن المعطيات مبينة في الجدول الآتي:

عدد الأدوار	تكلفة المبنى الواحد	ساعات العمل اللازمة لكل مبنى	المساحة اللازمة لكل مبنى	عدد السكان في المبنى الواحد	عدد المباني
5	600,000	120	800	30	$x$
2	200,000	60	600	12	$y$

### جدول 1.1: جدول يبين المعطيات اللازمة لبناء مساكن

ثم إن المبلغ المتوفر هو: 18,000,000 وساعات العمل المتيسرة 4500 ساعة ومساحة الأرض الكلية تبلغ 42,000.



فعلى سبيل المثال إذا كانت المعطيات كما هي مبينة في الجدول 2.1. فإن البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة هو:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ \text{subject to} \quad & 10x_1 + 15x_2 + 10x_3 \geq 20 \\ & 100x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 50 \\ & 10x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

حيث  $x_1$  تمثل عدد اللترات من الحليب و  $x_2$  تمثل كمية اللحم بالكيلو و  $x_3$  تمثل عدد البيض.

كمية الفيتامين التي يجب توفرها	كمية المتوفرة وحـدة الفيتامين في الطعام			الفيتامين
	بيض	لحم	حليب	
20	10	15	10	A
50	10	10	100	B
10	10	100	10	C
	1	3	2	تكلفة الوحدة

جدول 2.1: مثال لمسألة التغذية

### النموذج الثاني (مسألة الإنتاج) The Production Problem

مصنع ينتج  $n$  صنفاً ويحتاج في سبيل ذلك إلى  $m$  من المواد الخام، وكل صنف يحتاج إلى كمية معينة من كل مادة خام. لنرمز بـ  $a_{ij}$  إلى كمية المادة الخام  $i$  التي تحتاجها الوحدة من الصنف  $j$ . ولتكن  $b_i$  هي

الكمية المتوفرة من المادة  $i$  ولنفترض أن  $c_j$  هو ربح الوحدة من الصنف  $j$  والمطلوب هو تعيين الكمية  $x_j$  من الصنف المنتج  $j$  بحيث يتحقق مايلي:

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ & \text{subject to} && \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i=1, \dots, m \\ & && x_j \geq 0, \quad j=1, \dots, n \end{aligned}$$

فعلى سبيل المثال لنأخذ المعطيات المبينة في الجدول الآتي:

كمية المادة الخام المتوفرة	كمية المادة اللازم لإنتاج وحدة من الصنف الخام			المادة الخام
	الدولاب	الطاولة	الكرسي	
57	2	4	3	الصنوبر
27	2	1	2	السنديان
73	4	5	4	ساعات العمل
	100	210	160	الربح في وحدة الصنف

جدول 3.1: مثال لمسألة الإنتاج

إن البرنامج الخطي الخاص بهذه المسألة هو :

$$\begin{aligned} & \text{maximize} && 160x_1 + 210x_2 + 100x_3 \\ & \text{subject to} && 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 57 \\ & && 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 27 \\ & && 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 73 \\ & && x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

حيث  $x_1$  تمثل عدد الكراسي و  $x_2$  تمثل عدد الطاولات و  $x_3$  تمثل عدد الدواليب.

### 3.1 المجموعات المحدبة Convex sets

لحل البرنامج الخطي سوف نستخدم الطريقة الجبرية، ولكن من المناسب الآن دراسة الخواص الهندسية للبرنامج الخطي. ولذا سوف نعطي في البداية بعض الأساسيات الهندسية والتي تمكننا من معرفة الحل الأفضل للبرنامج الخطي بطريقة هندسية. سندرس في هذا الفصل بعض أساسيات التحليل المحدب. ومن ثم سنعطي فكرة عن الحل الهندسي في الفصول التالية وننتقل إلى الصيغة القياسية وبعض المسائل المتعلقة بها.

#### تعريف 3.1

تدعى المجموعة الجزئية  $C \subset \mathbb{R}^n$  محدبة إذا تحقق مايلي:

لكل  $x_1, x_2 \in C$  و  $\lambda \in [0,1]$  فإن  $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in C$

لاحظ أن  $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$  تمثل نقاط القطعة المستقيمة بين النقطتين  $x_1, x_2$ . وبالتالي فإن تحدب  $C$  يعني هندسياً بأنه لأي نقطتين  $x_1, x_2$  في  $C$  فإن القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين تنتمي إلى  $C$ . إن المجموعة  $\{x: Ax=b, x \geq 0\}$  هي مجموعة محدبة. إذا كانت  $K_1, K_2, \dots, K_r$  مجموعات محدبة في  $\mathbb{R}^n$  عندئذ تكون المجموعة الآتية:

$$K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_r$$

أيضاً محدبة. المستوى  $H$  في  $\mathbb{R}^n$  هو مجموعة محدبة.

## 4.1 فوق المستوى ونصف الفضاء Hyperplane and halfspace

إن فوق المستوى في  $\mathbb{R}^n$  هو تعميم لفكرة الخط المستقيم في  $\mathbb{R}^2$  وكذلك لفكرة المستوى في  $\mathbb{R}^3$ .

### تعريف 4.1

فوق المستوى  $H$  في  $\mathbb{R}^n$  هو مجموعة لها الشكل التالي:

$$H = \{x : p^T x = k\} \quad (1.1)$$

بحيث أن  $p$  هو متجه غير صفري في  $\mathbb{R}^n$  و  $k$  عدد ثابت. إن المتجه  $p$  عمودي على  $H$ . لتكن  $x_0 \in H$  وبالتالي  $p^T x_0 = k$  وبما أن لكل  $x \in H$  يكون  $p^T x = k$  لذا بطرح المعادلتين نحصل على  $p^T (x - x_0) = 0$ . أي أنه يمكن تمثيل فوق المستوى  $H$  بمجموعة النقاط التي تحقق المعادلة  $p^T (x - x_0) = 0$  بحيث أن  $x_0$  هي أي نقطة ثابتة في  $H$ . إن فوق المستوى مجموعة محدبة.

إن فوق المستوى  $H$  يقسم  $\mathbb{R}^n$  إلى منطقتين تسمى كل واحدة منهما نصف فضاء، وبالتالي فإن نصف الفضاء هو عبارة عن مجموعة النقاط التي على الشكل التالي:

$$\{x : p^T x \geq k\}$$

أيضاً من الممكن تمثيل نصف الفضاء بالمجموعة التالية:

$$\{x : p^T x \leq k\}$$

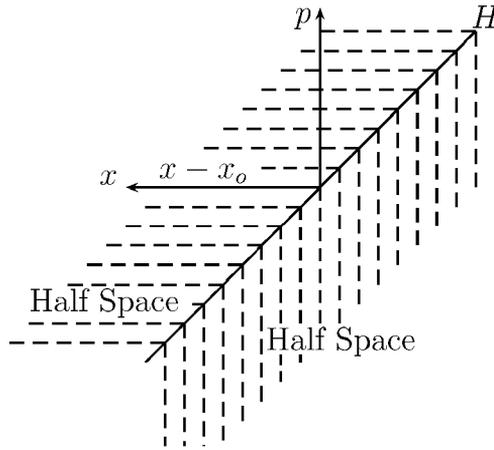
إن اتحاد المجموعتين السابقتين هو  $\mathbb{R}^n$  وبالرجوع إلى النقطة الثابتة  $x_0$  فإن نصف الفضاء يمكن أن يمثل بـ

$$\{x : p^T (x - x_0) \geq 0\}$$

أو

$$\{x: p^T(x - x_0) \leq 0\}$$

كما هو موضح في الشكل التالي:



شكل 1.1: فوق المستوى ونصف الفضاء

إن فوق المستوى وأنصاف الفضاءات هي مجموعات محدبة.

### 5.1 المخروطات المحدبة Convex cones

إن المخروطات المحدبة هي مجموعات خاصة ومهمة من المجموعات المحدبة.

#### تعريف 5.1

المخروط المحدب  $K$  هو مجموعة تحقق الخاصية التالية:

$$\lambda x \in K \quad \text{لكل } x \in K \text{ و } \lambda \geq 0$$

من الملاحظ أن المخروطات المحدبة دائماً تحوي نقطة المركز وذلك يجعل  $\lambda = 0$ ، وكذلك إذا أعطينا أي نقطة  $x \in K$  فإن نصف المستقيم  $\lambda x$  ينتمي

إلى  $K$ . وبالتالي فإن المخروط المحدب هو عبارة عن مجموعة محدبة تتكون بشكل كامل من أنصاف مستقيمتان منبعثة من المركز.

### 6.1 مخروط المنطقة المضلعة Polyhedral Cones

مجموعة المنطقة المضلعة هي عبارة عن تقاطع عدد منتهي من أنصاف الفضاءات، وبما أن أنصاف الفضاءات يمكن أن تمثل بواسطة متباينات من النوع  $a_i^T x \leq b_i$  فإن المنطقة المضلعة يمكن أن تمثل بواسطة نظام متباينات من النوع  $a_i^T x \leq b_i, \quad i=1, \dots, m$ . وبالتالي فإن مجموعة المنطقة المضلعة يمكن أن تمثل بالمجموعة  $\{x: Ax \leq b\}$  حيث  $A$  هي مصفوفة  $m \times n$ ، سنعطي الآن مثالاً يوضح المنطقة المضلعة.

ليكن لدينا أنصاف الفضاءات التالية:

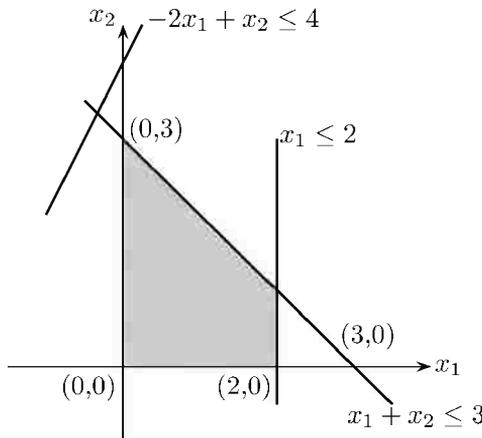
$$-2x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

إن تقاطع الخمسة أنصاف فضاءات هذه يعطي المنطقة المظللة في الشكل التالي وهي منطقة مضلعة، من الواضح أنها منطقة محدبة.



شكل 2.1: منطقة مضلعة

## 7.1 النقاط الحدية Extreme points

مفهوم النقطة الحدية يلعب دوراً رئيساً في نظرية البرمجة الخطية. في البداية نعطي التعريف التالي:

### تعريف 6.1

لتكن  $x_1, x_2, \dots, x_m$  نقاطاً من مجموعة  $C$ . يقال إن النقطة  $x$  هي تركيب محدب من النقاط  $x_1, x_2, \dots, x_m$  إذا أمكن كتابة  $x$  على النحو التالي:

$$x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m \quad (2.1)$$

حيث  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  أعداد غير سالبة وتحقق الشرط التالي:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1$$

### تعريف 7.1

يقال إن النقطة  $x$  في المجموعة المحدبة  $C$  نقطة حدية لـ  $C$  إذا لم نستطيع تمثيل  $x$  كتركيب محدب من نقطتين مختلفتين في  $C$ . أو بصياغة أخرى إذا كان  $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$  لكل  $\lambda \in [0, 1]$  وكان  $x_1, x_2 \in C$  فإن  $x = x_1 = x_2$ .

### نظرية 8.1

إذا كانت  $K$  منطقة مضلعة محدودة وكانت  $x_1, x_2, \dots, x_m$  هي نقاطها الحدية. عندئذ يمكن كتابة أي نقطة  $x \in K$  على شكل تركيب محدب من النقاط الحدية.

البرهان: انظر الحميدان وآخرون.

## 8.1 الحل الهندسي Geometric Solution

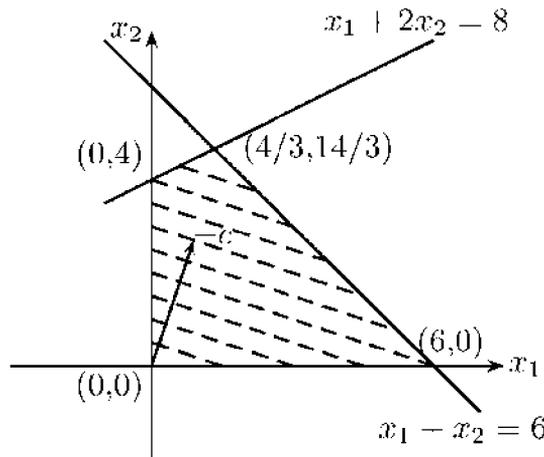
سنعالج في هذا الفصل حل البرامج الخطية البسيطة بطريقة هندسية وهذه الطريقة سوف تساعد على فهم البرنامج الخطي وطريقة حله. سنورد في البداية مثالاً يوضح طريقة الرسم وسنشرح الخطوات التي يتم إتباعها.

### مثال 9.1

لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && -x_1 - 3x_2 \\ &\text{subject to} && \\ & && x_1 + x_2 \leq 6 \\ & && -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & && x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

في البداية نحدد منطقة الحلول المسموح بها feasible solutions. وهي تلك التي تحقق المتباينات أو شروط البرنامج الخطي. لتحديد منطقة الحلول المسموح بها نرسم تلك المتباينات فنحصل على الشكل التالي:



شكل 3.1: منطقة الحل المسموح بها

إن المنطقة المنقطة هي منطقة الحلول المسموح بها. كما أن الشرطين الأول والثاني ممثلان بالمنطقة أسفل المستقيمين  $-x_1 + 2x_2 = 8$  و  $x_1 + x_2 = 6$  على الترتيب. لاحظ أن كل قيد من قيود البرنامج الخطي يمثل نصف فضاء. وأن منطقة الحلول المسموح بها هي عبارة عن تقاطع أنصاف الفضاءات الممثلة لتلك المتباينات وهي منطقة محدبة. فالحل الأفضل هو الحل الذي يحقق جميع شروط البرنامج الخطي، أي أنه حل مسموح به والذي تكون قيمة دالة الهدف عنده أقل ما يمكن. وللحصول على الحل الأفضل من الرسم نجعل دالة الهدف ممثلة بالمستقيمات المتقطعة في الرسم. هذه المستقيمات تتحرك في اتجاه المتجه  $-c$  حتى تصل إلى آخر حد ممكن. فنكون قد حصلنا على الحل الأمثل عند تقاطع المستقيمين (1) و(2) عند النقطة  $(4/3, 14/3)$  وهي إحدى النقاط الحدية الأربعة.

النظرية التالية من أهم النظريات في البرمجة الخطية:

### نظرية 10.1 (نظرية النقطة الحدية)

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{maximize (or minimize)} \quad z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n$$

subject to

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{array} \right\} \begin{array}{l} \leq \\ = \\ \geq \end{array} \left\{ \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, n$$

إذا كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي محدودة عندئذ يكون الحل الأمثل موجوداً عند نقطة حدية (ركنية) من هذه المنطقة. أما إذا

كانت المنطقة المسموح بها لهذا البرنامج الخطي غير محدودة عندئذ يكون الحل الأمثل (إن وجد) موجوداً عند نقطة حدية (ركنية) من هذه المنطقة. البرهان: انظر الحميدان وآخرون.

### 9.1 الصياغة القياسية للبرنامج الخطي

#### Canonical form for linear programming

لاحظنا من النماذج السابقة أن الغرض من البرمجة الخطية هو إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة خطية (تدعى دالة الهدف) تخضع متغيراتها لشروط خطية على شكل متباينات أو معادلات. ومهما اختلفت صياغة البرنامج الخطي فإنه يمكن التعبير عنه في كل الأحوال بالصيغة القياسية الآتية:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\
 &\text{subject to} && \\
 &&& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\
 &&& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\
 &&& \vdots \\
 &&& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \\
 &&& x_i \geq 0, \quad i=1, \dots, n
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

ونعني بذلك أن نظام المعادلات (4.1) قياسياً (انظر الفصل 10.1)، والمعاملات  $a_j, b_j, c_i$  هي أعداد ثابتة، بينما  $x_i$  هي المتغيرات التي يراد تعيينها. ومن الممكن التعبير عن الصيغة القياسية (4.1) بشكل مختصر على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && f(x) = c^T x \\
 &\text{subject to} && Ax \geq b \\
 &&& x \geq 0
 \end{aligned}$$

ملاحظة: إذا كانت دالة الهدف تعظيمية (maximize) فيمكن إعادتها إلى دالة هدف تصغيرية (minimize) وذلك بجعل  $z' = -z$ .

### مثال 11.1

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\text{maximize } z = 3x_1 - 2x_2$$

subject to

$$2x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

الذي يمكن تحويله للبرنامج التالي:

$$\text{minimize } z' = -3x_1 + 2x_2$$

subject to

$$2x_1 - x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

إن أعظم قيمة لـ  $z$  تقابل أصغر قيمة لـ  $z'$ . فأعظم قيمة لـ  $z$  تساوي سالب أصغر قيمة لـ  $z'$ . وللمسألتين الحل الأمثل نفسه.

### 10.1 الأشكال غير القياسية للبرنامج الخطي

#### Non Canonical form for linear programming

قبل الشروع في دراسة المسألة المعروضة نود أن نستعرض أشكالاً أخرى

غير قياسية ونوضح كيفية إعادتها إلى الشكل القياسي:

المتغيرات الإضافية The Slack Variables

إذا كان البرنامج الخطي مصاغاً على الشكل الآتي:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\
 &\text{subject to} && \\
 &&& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n \leq b_1 \\
 &&& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n \leq b_2 \\
 &&& \vdots \\
 &&& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n \leq b_m \\
 &&& x_i \geq 0, \quad i=1, \dots, n
 \end{aligned}$$

فإنه يمكن إعادته إلى الشكل القياسي وذلك بإدخال متغيرات جديدة

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$$

ندعوها متغيرات إضافية. عندها تتحول المتباينات إلى معادلات، مما يجعل عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات. وبالتالي لا يوجد حل وحيد لمجموعة المعادلات السابقة، ويكون الشكل الجديد للبرنامج الخطي كما يلي:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimize} && c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \\
 &\text{subject to} && \\
 &&& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n + x_{n+1} = b_1 \\
 &&& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n + x_{n+2} = b_2 \\
 &&& \vdots \\
 &&& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n + x_{n+m} = b_m \\
 &&& x_i \geq 0, \quad i=1, \dots, n+m
 \end{aligned}$$

### المتغيرات الزائدة Surplus Variables

هي حالة معاكسة للحالة السابقة ويكون البرنامج الخطي المصاغ على النحو التالي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ &\text{subject to} && \\ &&& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \geq b_1 \\ &&& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \geq b_2 \\ &&& \vdots \\ &&& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n \geq b_m \\ &&& x_j \geq 0, \quad i=1, \dots, n \end{aligned}$$

هذا البرنامج يمكن إعادته إلى الشكل القياسي بإدخال متغيرات جديدة نسميها متغيرات زائدة، وذلك كما يلي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ &\text{subject to} && \\ &&& a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n - x_{n+1} = b_1 \\ &&& a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n - x_{n+2} = b_2 \\ &&& \vdots \\ &&& a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n - x_{n+m} = b_m \\ &&& x_j \geq 0, \quad i=1, \dots, n+m \end{aligned}$$

### المتغيرات الحرة Free Variables

لنفترض أن البرنامج الخطي مكتوباً بالصياغة القياسية إلا أن أحد المتغيرات  $x_j$  سالب بمعنى أنه متغير حر، فهناك طريقة لتحويله إلى الصيغة القياسية. نستعرضها فيما يلي:

يمكن استبدال المتغير  $x_j$  بمتغيرين جديدين غير سالبين  $\mu_j, \nu_j$  وذلك بأن نكتب

$$x_j = \mu_j - \nu_j,$$

وبالتالي فإن البرنامج الخطي الآن ممثل بالمتغيرات الـ  $n+1$  وهي

$$x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \mu_j, v_j, x_{j+1}, \dots, x_n$$

وذلك بعد حذف  $x_j$  وإضافة المتغيرين  $\mu_j, v_j$  غير السالبين إلى البرنامج الخطي.

## تمارين الباب الأول

1.1 باستخدام واحد من المعادلات الـ  $m$  والتي معامل  $x_j$  فيها لا يساوي الصفر. على سبيل المثال

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

أوجد طريقة أخرى للتخلص من المتغير الحر  $x_j$  ؟

2.1 شركة لإنتاج مواد البلاستيك، تريد إنتاج منتج جديد من أربع مركبات كيميائية. هذه المركبات مكونة من ثلاث مواد هي A, B, و C. نسب المواد في هذه المركبات وتكلفتها معطاة في الجدول التالي:

4	3	2	1	المركب الكيميائي
20	40	20	30	نسبة A في المركب
40	30	60	20	نسبة B في المركب
30	25	15	40	نسبة C في المركب
15	20	30	20	التكلفة/ الكيلو

المنتج الجديد يحتوي على 20% من مادة A. ويحتوي على الأقل 30% من مادة B. ويحتوي على الأقل 20% من مادة C. وبسبب المضاعفات الجانبية فإن نسبة المركبات 1 و 2 يجب أن لا تتعدى 20% و 30% من المنتج الجديد على التوالي. اكتب النموذج الرياضي لهذه المسألة لإنتاج المنتج الجديد بأقل تكلفة؟

3.1 اعتبر المسألة التالية:

$$\begin{aligned} &\text{maximize} && 2x_1 + 3x_2 \\ &\text{subject to} && \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 6x_2 \leq 9$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

أوجد النقاط الحدية (الركنية) للمنطقة المضلعة، ثم أوجد الحل الأمثل هندسياً؟

4.1 أثبت أنه إذا كانت المنطقة المسموح بها للبرنامج الخطي

$$\text{minimize } c^T x \text{ subject to } , x \geq 0 \quad Ax = b$$

محدودة، عندئذ يكون الحل الأمثل متواجد عند نقطة حرجة (ركنية) من هذه المنطقة.

5.1 أعد المسألة التالية إلى الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && |x_1| + |x_2| + |x_3| \\ &\text{subject to} && \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$2x_1 + x_3 = 3$$