

الباب التاسع

عزم القصور الذاتي

9.1 أنواع عزم القصور الذاتي :

تعريف : يعرف عزم القصور الذاتي - ويعرف أحياناً بالعطالة - لمجموعة من النقاط المادية بالنسبة لمستوى أو محور أو نقطة على أنه حاصل ضرب كتل تلك النقاط المادية في مربع المسافة بينها وبين المستوى أو المحور أو النقطة المراد حساب عزم القصور حولها .

ويمكننا أن نكتب صورته العامة كما يلي :

$$I = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 + \dots + m_i d_i^2 + \dots + m_n d_n^2$$

$$I = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 \dots \dots \dots (9.1)$$

حيث m_i هي كتلة النقطة المادية i ، و d_i هي البعد بين النقطة المادية i والمستوى أو المحور أو النقطة المراد حساب عزم القصور الذاتي حولها .

ولندرس ذلك بشيء من التفصيل ، فدعنا نعتبر مجموعة النقاط المادية :

$$A_1 , A_2 , \dots , A_i , \dots , A_n$$

$$m_1 , m_2 , \dots , m_i , \dots , m_n \quad \text{والتي كتلتها على التوالي :}$$

وليكن متجه الموضع لها بالنسبة لنقطة الأصل O كما بالشكل 9,1 هو :

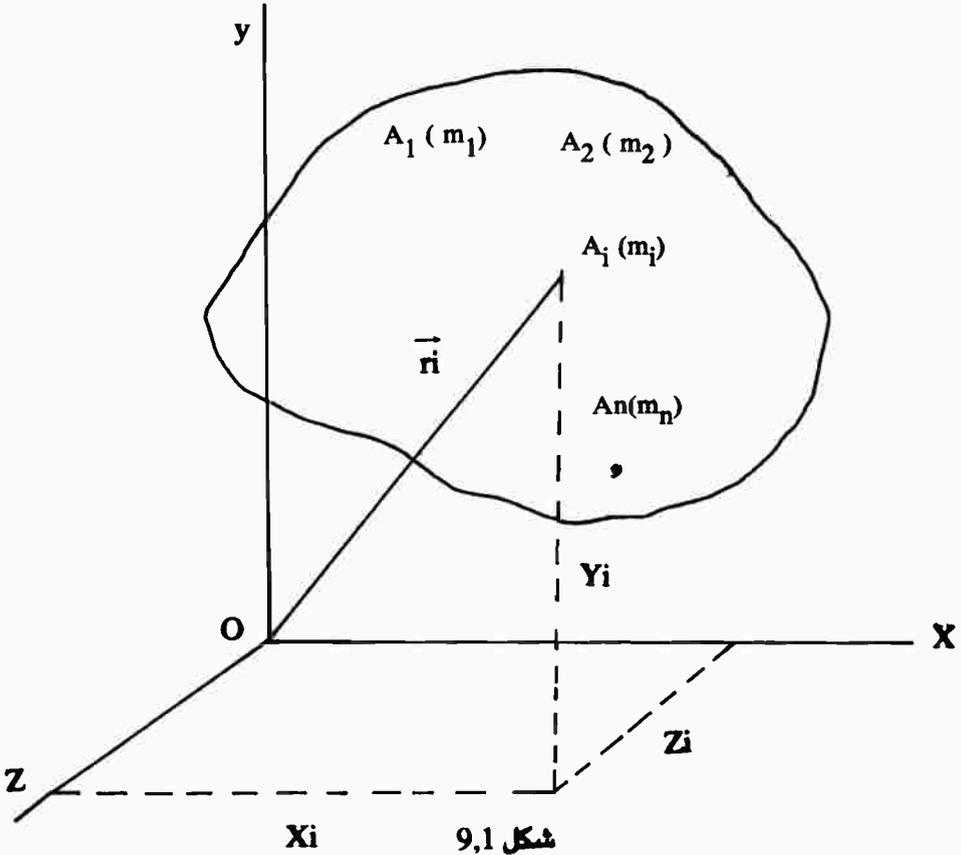
$$\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n$$

وتكون مركبات متجه الموضع \vec{r}_i كما هو معروف من دراستنا السابقة :

$$\vec{r}_i = X_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

وبالتالى فإننا يمكننا أن نكتب المعادلات التالية بالنسبة لمختلف عزم القصور الذاتي ، وذلك تبعاً للتعريف المين أعلاه :

١ - عزم القصور الذاتي بالنسبة للمستويات :



$$\left. \begin{aligned} I(xoy) &= \sum_{i=1}^n m_i z_i^2 \\ I(yoz) &= \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 \\ I(zox) &= \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9.2)$$

٢ - عزم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور :

$$\left. \begin{aligned} I_{xx} &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \\ I_{yy} &= \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2) \\ I_{zz} &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9.3)$$

٣ - عزم القصور الذاتي بالنسبة لنقطة ،

ويعرف هذا العزم أيضاً بعزم القصور الذاتي القطبي ؛

$$I_0 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \dots\dots\dots (9.4)$$

ونلفت النظر أن معادلات عزم القصور الذاتي أعلاه كانت لنقاط مادية أما إذا كان الجسم متصلاً فإننا نستبدل علامة التكامل بعلامة التجميع ..

$$I = \int P d^2 \cdot dV \dots\dots\dots (9.5)$$

حيث P هي كثافة الجسم الحجمية .

9.2 العلاقة بين مختلف عزوم القصور الذاتي :

بجمع عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور الثلاثة (أى بجمع المعادلات (9.3))
نحصل على المعادلات (9.4) وذلك بعد قسمة الجمع على 2 :

$$I_0 = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}) \dots\dots\dots (9.6)$$

هذا ويمكن للقارئ أن يستنتج عزم القصور الذاتي بالنسبة لمختلف المستويات من
المعادلات (9.3) حيث :

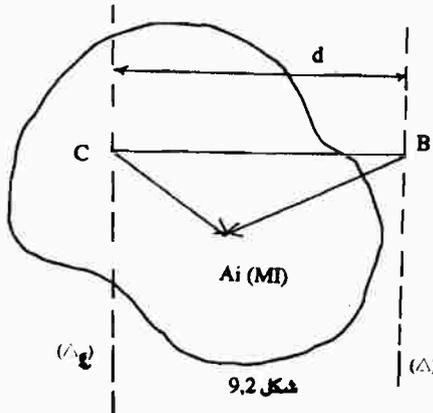
$$I_{(xoy)} = \frac{1}{2} (I_{xx} + I_{yy} - I_{zz})$$

$$I_{(yoz)} = \frac{1}{2} (I_{yy} + I_{zz} - I_{xx}) \dots\dots\dots (9.7)$$

$$I_{(zox)} = \frac{1}{2} (I_{zz} + I_{xx} - I_{yy})$$

9.3 نظرية هيجنز للمحاور المتوازية :

عزم القصور الذاتي لمجموعة من النقاط المادية بالنسبة لمحور ما (Δ) يكون مساوياً
لحاصل جمع عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحور (Δ_c) الموازي للمحور (Δ) والمار
بمركز الكتلة C ، وعزم القصور الذاتي بالنسبة لـ (Δ) للكتلة الكلية المركزه في C .



الإثبات :

لتكن A_i نقطة مادية من مجموعة النقاط . عند هذه النقطة يمر مستوى عمودي على كل من المحورين المتوازيين (Δ_c) و (Δ) كما بالشكل 9.2 . ولتكن المسافة بين المحورين هي d .

عزم قصور الذاتي بالنسبة للمحور (Δ) يكون :

$$I_{\Delta\Delta} = \sum m_i \cdot \overline{BA_i}^2$$

$$\overline{BA_i} = \overline{BC} + \overline{CA_i} \quad \text{ومن العلاقات الاتجاهية نكتب :}$$

بالتعويض عن المتجه $\overline{BA_i}$ نجد :

$$\begin{aligned} I_{\Delta\Delta} &= \sum m_i \cdot (\overline{BC} + \overline{CA_i})^2 = \sum m_i \cdot \overline{BC}^2 + \sum m_i \cdot \overline{CA_i}^2 \\ &+ 2 \sum m_i \cdot \overline{CA_i} \cdot \overline{BC} = \overline{BC}^2 \sum m_i + \sum m_i \cdot \overline{CA_i}^2 \\ &+ 2 \overline{BC} \cdot \sum m_i \cdot \overline{CA_i} \end{aligned}$$

ومن النظريات الخاصة بالعزوم نجد أن :

$$\sum m_i \cdot \overline{CA_i} = M \cdot \overline{r_c} = 0$$

$$\therefore I_{\Delta\Delta} = I_{\Delta c} + M \cdot d^2 \quad \dots\dots\dots (9.8)$$

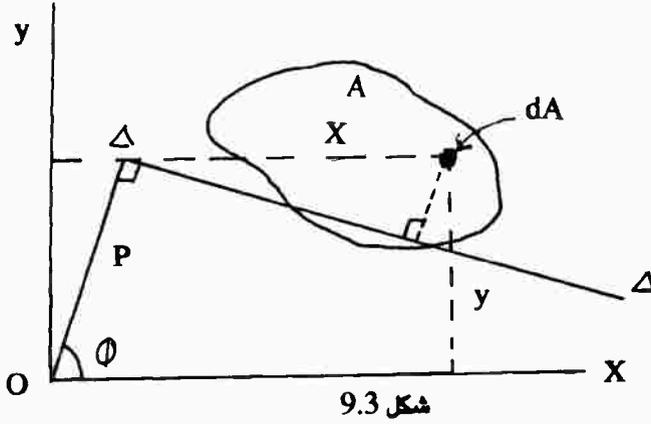
$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad \text{حيث :}$$

9.4 عزم القصور الذاتي بالمستوى :

إذا كانت الأشكال المتعامل معها عبارة عن مساحات تقع في مستوى فإننا في هذه الحالة يمكننا أن نختصر ونبسط المعادلات أعلاه ، فإذا فرض وأن المستوى المعنى هو XOY وأن المراد دراسة عزوم قصور الذاتي لمساحة بهذا المستوى فإننا يمكننا أن نستعين بالمعادلات (9.3) فتصبح :

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA , I_{yy} = \int_A X^2 dA \quad \dots\dots\dots (9.9)$$

حيث dA هي مساحة عنصر صغير بالمساحة المطلوب دراستها . انظر شكل 9.3 . أما A فهي مساحة القطاع كله .



ويكون عزم القصور الذاتي بالنسبة لأي محور بالمستوى كالمحور $\Delta\Delta$ بالشكل :

$$I_{\Delta\Delta} = \int_A d^2 dA \quad \dots\dots\dots (9.10)$$

هذا ونعرف نصف قطر القصور الذاتي لأي محور بالمعادلة التالية :

$$r_{\Delta} = \sqrt{\frac{I_{\Delta\Delta}}{A}} \dots\dots\dots (9.11)$$

هذا ويمكن تعريف حاصل ضرب القصور الذاتي (أو عزم القصور الذاتي المختلط) بالمعادلة التالية :

$$I_{xy} = \int_A xy dA \dots\dots\dots (9.12)$$

ويكون I_{xy} صفر إذا كان أحد المحورين محور تماثل للشكل .

أما عن عزم القصور الذاتي القطبي بالمستوى فيمكن أن يشتق من المعادلة (9.4) .

$$I_0 = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA \dots\dots\dots (9.13)$$

$$\therefore I_0 = I_{xx} + I_{yy} \dots\dots\dots (9.14)$$

والمعادلة (9.14) بالمستوى XOY هي المعادلة التي تشبه المعادلات (9.6) بالفراغ .

9.5 عزم القصور الذاتي الأقصى والأدنى :

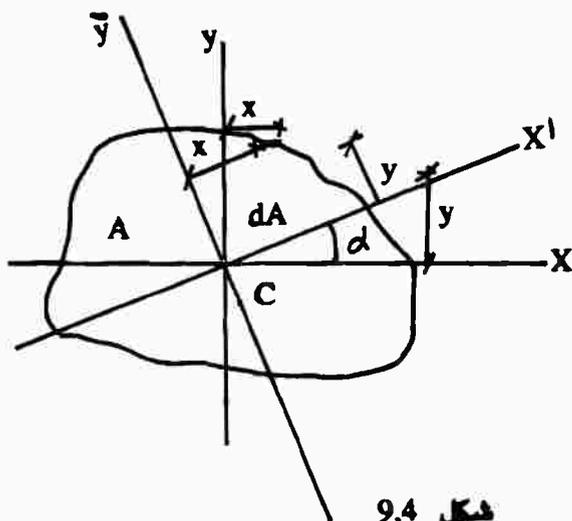
لنفرض أن هناك قطاع ما مساحته A ومركز ثقله C كما بالشكل 9.4 .

إذا علم كل من I_{xx} , I_{yy} , I_{xy} . فالمطلوب حساب I_{xx} , I_{yy} بالنسبة لمحاور X , Y المعرفة بالشكل 9.4 والتي تميل بزاوية α على المحور الأفقى .

المطلوب كذلك إيجاد القيمة العظمى والصغرى للعزم I_{xx} وذلك بإجراء عملية دوران للمحاور (بتغير قيمة α) .

بتطبيق المعادلات (9.9) نجد :

$$I_{xx} = \int_A y^2 dA$$



شكل 9,4

ومن هندسة الشكل نجد العلاقة التالية بين المحاور XY من ناحية و $x'y'$ من ناحية أخرى :

$$Y' = Y \cos \alpha - X \sin \alpha$$

$$X' = Y \sin \alpha + X \cos \alpha$$

بالتعويض عن y' نجد :

$$I_{xx'} = \int (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA$$

$$= \cos^2 \alpha \int y^2 dA + \sin^2 \alpha \int x^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int xy dA$$

$$= I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \sin^2 \alpha - 2 I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= I_{xx} \left(\frac{1 + \cos 2 \alpha}{2} \right) + I_{yy} \left(\frac{1 - \cos 2 \alpha}{2} \right) - I_{xy} \sin 2 \alpha$$

$$I_{xx'} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \right) \cos 2 \alpha - I_{xy} \sin 2 \alpha \quad \dots\dots\dots (9.15)$$

وبنفس الطريقة يمكننا إيجاد $I_{yy'}$ أو باستبدال α بالمعادلة (9.15) حيث :

$$\alpha = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$I_{yy'} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \left(\frac{I_{yy} - I_{xx}}{2} \right) \cos 2 \alpha - I_{xy} \sin 2 \alpha \quad \dots\dots\dots (9.16)$$

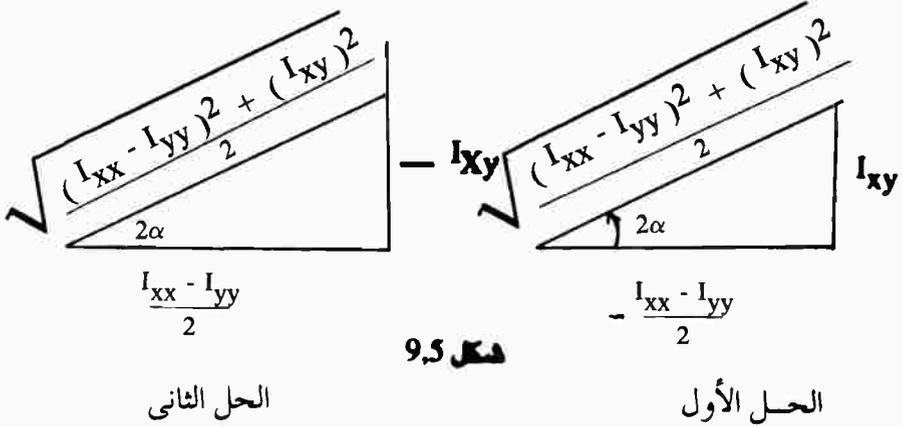
هذا ويمكن الحصول على النهاية العظمى والصغرى لعزم القصور الذاتي $I_{xx'}$ بإجراء عملية تفاضل هذا العزم بالنسبة للزاوية α ومساواة بالصفر لنحصل على :

$$\frac{d I_{xx'}}{d \alpha} = - (I_{xx} - I_{yy}) \sin 2 \alpha - 2 I_{xy} \cos 2 \alpha = 0$$

$$\therefore \tan 2 \alpha = - \frac{I_{xy}}{\frac{1}{2} (I_{xx} - I_{yy})} \quad \dots\dots\dots (9.17)$$

المعادلة (9.17) يمكن أن تعطى الزاوية التي تجعل $I_{xx'}$ عظمى ، وصغرى حيث

إن (9.17) لها حلان كما يتضح من الشكل التالي (9.5) :



شكل 9.5

وبالتعويض عن 2α في المعادلة (9.15) نحصل على :

$$I_{xx'} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_{xx} - I_{yy})^2}{4} + (I_{xy})^2} \dots\dots\dots (9.18)$$

$I_{xx'}$
 max
 min

حيث الإشارة + تكون للحل الثاني ، والسالبة للحل الأول بالشكل 9.5 .
 وتعتبر المعادلة (9.18) هي التي تعطى عزم القصور الذاتي الأقصى والأدنى ،
 وذلك بالنسبة للمحاور التي بالشكل 9.4 وتسمى هذه العزوم بعزوم القصور الأساسية
 والمحاور التي تحسب حولها أي x' و y' بالمحاور الأساسية .

ويمكننا الآن أن نثبت أن عزم القصور الذاتي المختلط $I_{x'y'}$ يكون صفراً .

$$\begin{aligned}
 I_{x'y'} &= \int x'y' dA \\
 &= \int (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA \\
 &= \cos^2 \alpha \int (xy) dA - \sin^2 \alpha \int xy dA \\
 &+ \sin \alpha \cos \alpha \int y^2 dA - \sin \alpha \cos \alpha \int x^2 dA
 \end{aligned}$$

$$= I_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (I_{xx} - I_{yy}) \sin \alpha \cos \alpha$$

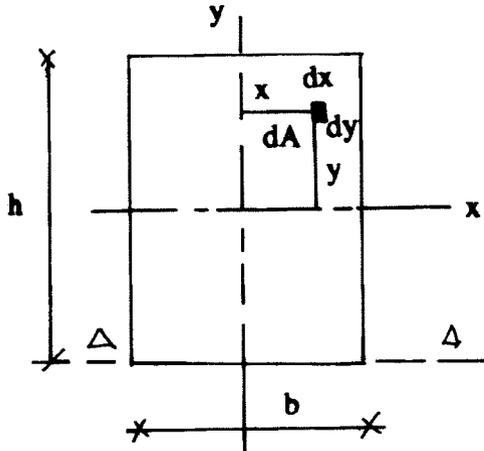
$$I_{xy'} = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha \quad \dots \dots \dots (9.19)$$

بالتعويض في (9.19) عن قيمتي 2α من الرسم بالشكل 9.5 فإننا نجد أن المعادلة (9.19) تتلاشى .

وينستنتج مما سبق أن هناك محورين يكون عزم القصور الذاتي حولهما ذو قيمة عظمتي وتضغري ، وأن هذين المحورين يتلاشى حولهما حاصل ضرب القصور الذاتي ، ويعرف المحوران بالمحورين الأساسيين .

9.6 أمثلة محولة :

١ - أوجد I_{xx} ، I_{yy} ، $I_{\Delta\Delta}$ ، $r_{\Delta\Delta}$ للمستطيل بالشكل التالي :



الحل :

I_x

بتطبيق المعادلة (9.9) :

$$I_{xx} = \int_A Y^2 dA = \int \int y^2 dx dy$$
$$= b \int y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{yy} = \int dA = \int \int X^2 dy dx = h \int dx = h \left[\frac{X^3}{2} \right]$$

$$I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$

بتطبيق نظرية المحاور المتوازية (9.8) نجد :

$$I_{\Delta\Delta} = I_{xx} + A \cdot d^2 + b \frac{h^3}{12} + bh \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{bh^2}{12} + \frac{bh^3}{4} = \frac{bh^3}{3}$$

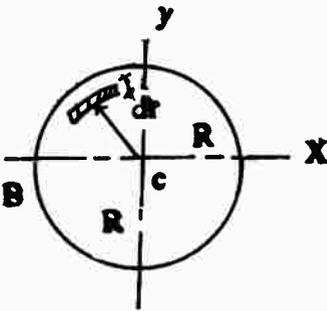
$$r_{\Delta} = \sqrt{\frac{I_{\Delta\Delta}}{A}} = \sqrt{\frac{bh^3/3}{bh}} = \frac{h}{3} \sqrt{3}$$

2 - أحسب عزم القصور الذاتي لقرص متجانس ثابت السمك وذلك بالنسبة :

(أ) محور عمودي على القرص ومار بمركزه .

(ب) محور عمودي على القرص ومار بأحد نقط محيطه .

(ج) محور ينطبق على أحد أقطاره .



الحل :

المحور العمود على القرص والمار بمركزه يكون هو المحور z وهو منطبق في هذه الحالة على المركز c ، وبالتالي يكون عزم القصور الذاتي حول المحور العمودي مساوياً لعزم القصور الذاتي حول مركزه C . وهذا يتضح من مقارنة المعادلة (9.3) بالمعادلة (9.13) .

$$I_c = \int r^2 dA = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

$$I_c = I_{xx} + I_{yy} \dots\dots\dots (1)$$

وفي هذه الحالة نجد أن العنصر المقترح مساحته :
 $dA = 2 \pi r . dr$

$$I_c = \int_0^R r^2 2 \pi r . dr = \int_0^R 2 \pi r^3 . dr = 2 \pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$I_c = \frac{R^4 \pi}{2}$$

وبتطبيق نظرية المحاور المتوازية يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي حول محور عمودي على القرص ومار بأحد نقط محيطه فنجد :

$$I_B = I_C + AR^2 = \frac{R^4 \pi}{2} + \pi R^2 R^2 = \frac{3 \pi R^4}{2}$$

من المعادلة رقم (1) أعلاه وكذلك من التماثل الواضح بالشكل نجد :

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{I_c}{2} = \frac{R^4 \pi}{4}$$

٣ - احسب عزم القصور الذاتي لكرة مصمته متجانسة نصف قطرها R وذلك بالنسبة :

(أ) مركزها .

(ب) قطرها .

الحل :

في هذه الحالة يكون مركز الكرة مثل المحور المار ، عمودى على مركز القرص بالمثل السابق ، وهذا كما ذكرنا واضح من مقارنة (9.4) مع (9.13) ، وبالتالي فإننا يمكن أن نستفيد من النتيجة بالمثل السابق فنجد أن عزم القصور للكرة حول مركزها :

$$I_0 = \frac{R^4 \pi}{2}$$

وبتطبيق المعادلة (9.4) نجد :

$$I_0 = \int (x^2 + y^2 + z^2) dV = \int x^2 dV + \int y^2 dV + \int z^2 dV$$

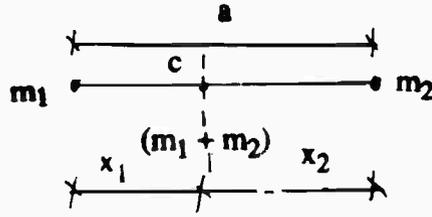
$$I_0 = I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 3 I_{xx} = 3 I_{yy} = 3 I_{zz}$$

وذلك نتيجة للتماثل ومن ثم فإننا نحصل على عزم القصور الذاتي حول القطر :

$$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = I_0 = \frac{R^4 \pi}{4}$$

4 - كتلتان مركزتان كل منهما فى نقطة m_1 , m_2 وهما متصلتان بواسطة قضيب صلب وزنه يمكن إهماله ، وطوله a . أثبت أن عزم القصور الذاتى للسجموعة $(m_1 + m_1)$ بالنسبة لمحور عمودى على المستوى الذى يجمع الكتلتان والمار

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{حيث : } \mu a^2$$



الحل :

كما بالشكل نفرض أن المحصلة تبعد X_1 عن m_1 وتبعد X_2 عن m_2 وبالتالي

نحصل على :

$$X_1 = \frac{a m_2}{m_1 + m_2} , \quad X_2 = \frac{a m_1}{m_1 + m_2}$$

$$X_1 + X_2 = a \quad \text{ولدينا أن :}$$

بتطبيق المعادلة (9.1) لإيجاد عزم القصور الذاتي حول المحور المار بالنقطة C نجد :

$$I_{zz} = m_1 x_1^2 + m_2 x_2^2$$

$$= m_1 \frac{a^2 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} + m_2 \frac{a^2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$I_{zz} = \frac{a^2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu a^2$$

هـ - احسب عزم القصور الذاتي للقطاع على شكل حرف T وذلك حول :

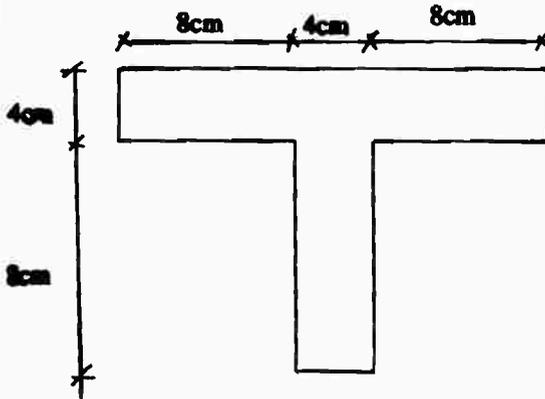
(أ) محور أفقي مار بمركز ثقله .

(ب) محور أفقي مار بنهايته السفلى .

الحل :

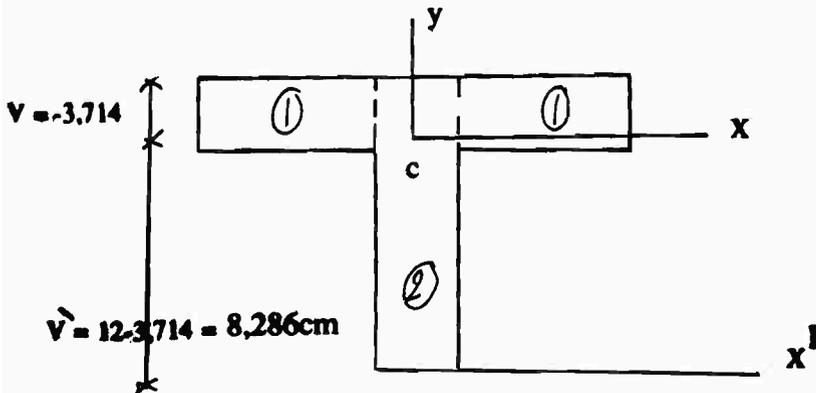
يمكن أن نستخدم نتائج المثال رقم 6 في الفصل الثامن والخاص بتعيين مركز ثقل هذا القطاع وذلك بالتعويض عن قيمة

$$l = 4 \text{ cm}$$



وبالتالي فإننا نجد :

$$v = \frac{13L}{14} = \frac{13 \times 4}{14} = 3.714 \text{ cm}$$



$$I_{xx} = I_1 + I_2$$

حيث : $I_1 =$ عزم القصور الذاتي للمستطيل رقم (1) حول xx

حيث : $I_2 =$ عزم القصور الذاتي للمستطيل رقم (2) حول xx

$$I_1 = \frac{8(4)^3}{12} \times 2 + 2 \times 8 \times 4 (3.714 - 2)^2 = \frac{256}{3} + 188.019 = 273.352$$

$$I_2 = \frac{4(12)^3}{12} + 4 \times 12 (6 - 3.714)^2 = 576 + 250.838 = 826.838$$

$$I_{xx} = 273.352 + 826.838 = 1100.19 \text{ cm}^4$$

ويمكن تطبيق نظرية المحاور المتوازية لإيجاد عزم القصور الذاتي حول x' هذا علماً بأن المساحة قد تم حسابها في المثال رقم 6 بالفصل الثامن .

$$A = \underline{7}^2 = 7(4)^2 = 112 \text{ cm}^2$$

$$I_{x'x'} = I_{xx} + A(\nu)^2$$

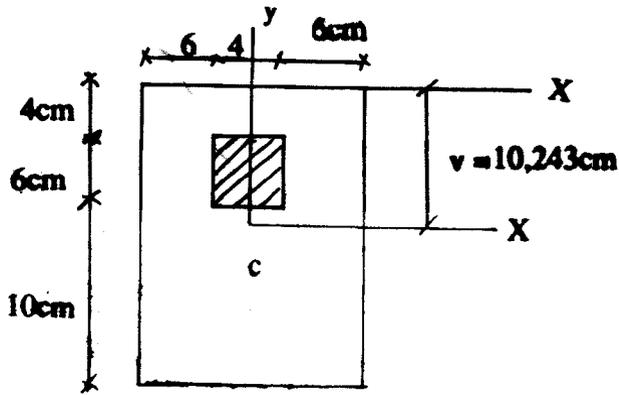
$$= 1100.19 + 112(8.286)^2 = 8789.863 \text{ cm}^4$$

6 - أحسب عزم القصور الذاتي للمستطيل الذي قطع منه جزء بالشكل التالي

وذلك حول :

(أ) محور مار بمركز ثقله ويكون أفقياً .

(ب) محور مار بأعلى الشكل ويكون أيضاً أفقياً .



لنعتبر المستطيل الكامل (بدون استقطاع) هو رقم (1) . والجزء المستقطع (المهشر) هو رقم (2) لنقيم الجدول التالي :

	b	h	bh	d	d(bh)	s*	I_G^{**}	$(bh)s^2$
1	16	20	320	10	3200	0,243	$\frac{3200}{3}$	18.8 * 957
2	4	6	24	7	-168	3,243	-72	- 252,409
Σ			296		3032		10594,7	233,513

$S^* =$ المسافة بين مركز ثقل الجزء المعنى (1) أو (2) ومركز ثقل الشكل كله .

$I_G^{**} =$ عزم القصور الذاتي للجزء المعنى حول محور أفقى مار بمركزه .

ويكون عزم القصور الذاتي هو :

$$I_{xx} = \Sigma I_G + \Sigma (bh) s^2 = 10594.7 + (-233.513)$$

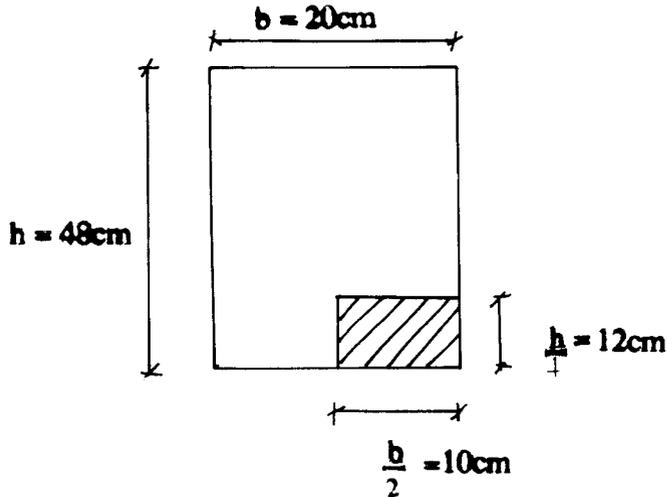
$$I_{xx} = 10361.187 \text{ cm}^4$$

وبتطبيق قاعدة المحاور المتوازية يمكن إيجاد عزم القصور الذاتي حول المحور x :

$$I_{xx} = I_{xx} + A (\nu)^2 = 10371.187 + 296(10.243)^2$$

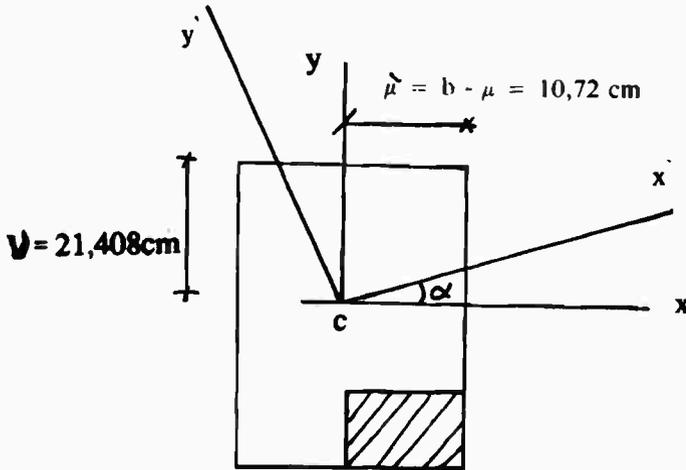
$$I_{xx} = 41417.226 \text{ cm}^4$$

٧ - أوجد المحاور الأساسية المارة بمركز ثقل الشكل التالى وعزم القصور الذاتي حولها .



الحل :

مركز ثقل هذا الشكل تم إيجاده بالمثال رقم 8 بالفصل الثامن ، ويمكن بالتالي التعويض فيه بالأرقام المبينة لكل من العرض والارتفاع لنحصل على :



$$\nu = 0.446(48) = 21,408 \text{ cm}$$

$$\mu = 0.464(20) = 9.28 \text{ cm}$$

نبدأ بإيجاد عزوم القصور الذاتي بالنسبة للمحاور X , Y أى :

$$I_{xx}, I_{yy}, I_{xy}$$

وذلك بتطبيق العلاقات (9.9) و (9.12) بالإضافة إلى نظرية المحاور المتوازية

نجد :

$$I_{xx} = I_1 + I_2 \quad (1)$$

حيث I_1 = عزم القصور الذاتي للمستطيل الكلي دون استقطاع حول X .

I_2 = عزم القصور الذاتي للفراغ (المهشر) حول X .

$$I_1 = \frac{bh^3}{12} + A \cdot d_1^2 = \frac{20(48)^3}{12} + 20 \times 48 \left(\frac{48}{2} - 21.408 \right)^2$$

$$I_1 = 184320 + 6449.725 = 190769.73 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = - \left[\frac{\frac{b}{2} \left(\frac{h}{4} \right)^3}{12} + \frac{b}{2} \frac{h}{4} (d_2)^2 \right] = - \left[\frac{10(12)^3}{12} + 10 \times 12 (26.592 - 6)^2 \right]$$

$$= - [1440 + 50883.656] = -52323.656 \text{ cm}^4$$

من المعادلة (1) نجد :

$$I_{xx} = 190769.73 - 52323.656 = 138446.07 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = I_3 + I_4 \quad (2)$$

حيث : $I_3 =$ عزم القصور الذاتي للمستطيل الكلي دون استقطاع حول محور Y .

$I_4 =$ عزم القصور الذاتي للفراغ (المهتر) حول المحور X .

$$I_3 = \frac{hb^3}{12} + A t_1^2 = \frac{48(20)^3}{12} + 48 \times 20 \left(\frac{20}{2} - 9.28 \right)^2$$

$$= 32000 + 497.664 = 32497.664 \text{ cm}^4$$

$$I_4 = - \left[\frac{\frac{h}{2} \left(\frac{b}{4} \right)^3}{12} + \frac{h}{4} \frac{b}{2} t_2^2 \right] = - \left[\frac{10(12)^3}{12} + 12 \times 10 (10.72 - 5)^2 \right]$$

$$= - [1000 + 3926.208] = -4926.208 \text{ cm}^4$$

بالتعويض في (2) نجد :

$$I_{yy} = 32497.664 - 4926.208 = 27571.456 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = I_5 + I_6 \dots\dots\dots(3)$$

حيث : $I_5 =$ عزم القصور الذاتي المختلط للمستطيل كاملاً حول XY .
 $I_6 =$ عزم القصور الذاتي المختلط للفراغ حول XY .

$$I_5 = 0 + A(-24 + 21.408)(-10 + 10.72) = -1791.59 \text{ cm}^4$$

$$I_6 = - \left[0 + \frac{b}{2} \frac{h}{4} (10.72 - 5)(-26.592 + 6) \right] = 14134.349 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_{xy} = -1791.59 + 14134.349 = 12342.859 \text{ cm}^4$$

لإيجاد قيمة α نطبق العلاقة (9.17) :

$$\tan 2\alpha = - \frac{1232.759}{\frac{1}{2} (138446.07 - 27571.456)} = -0.223$$

$$\therefore 2\alpha_1 = 347.429^\circ, \quad 2\alpha_2 = 167.4290$$

$$\alpha_1 = 173.715^\circ, \quad \alpha_2 = 83.715^\circ$$

لإيجاد عزم القصور الذاتي حول تلك المحاور الأساسية نطبق المعادلات (9.15) , (9.16) , أو (9.18) .

$$I_{xx'} = \frac{133446.07 + 27571.456}{2} + \frac{27571.456 - 138446.07}{2}$$

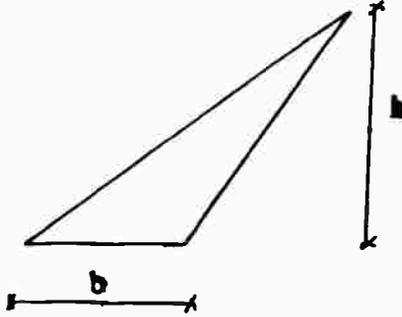
$$\cos 347.429 - 12342.759 \sin 347.429^\circ = 139803.47 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy'} = \frac{138446.07 + 27571.456}{2} + \frac{27571.456 - 138446.07}{2}$$

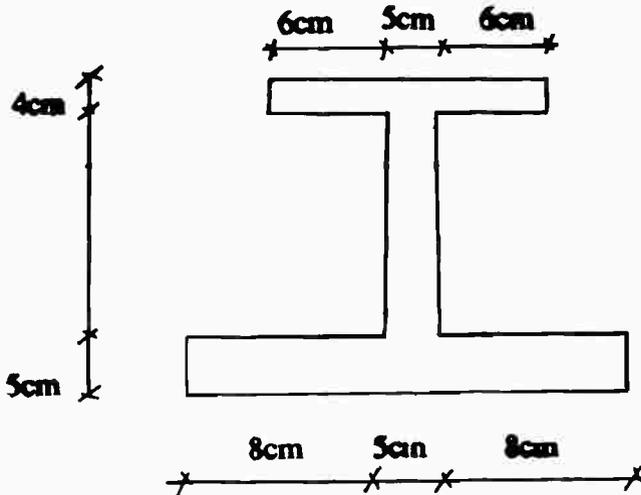
$$\cos 347.429 [+ 12342.759 \sin 347.429^\circ = 26214.06 \text{ cm}^4$$

9.7 تمارين :

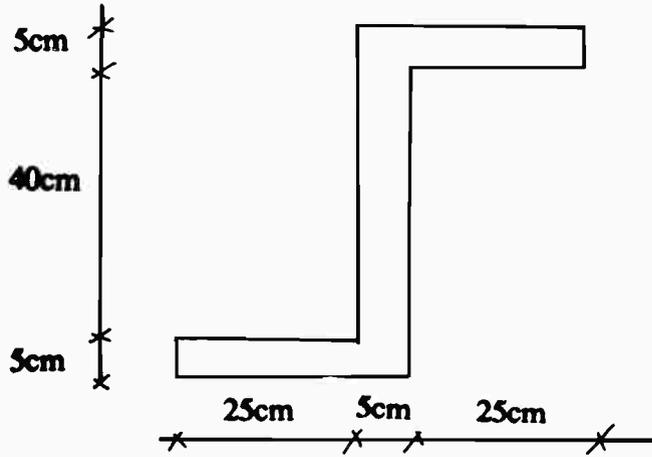
- ١ - أوجد عزم القصور الذاتي للمثلث حول محور يمر بقاعدته ، أوجد كذلك عزم القصور الذاتي حول محور مار بمركز ثقل المثلث وموازي لقاعدته .



- ٢ - المطلوب إيجاد عزم القصور الذاتي للقطاع التالي حول محور أفقى مار بمركز ثقله ، وكذلك إيجاد نصف قطر القصور الذاتي حول نفس المحور .



٣ - للشكل التالي أوجد المحاور الأساسية ، وكذلك عزم القصور الذاتي حولها .



٤ - المستطيل التالي استقطع منه نصف دائرة ، والمطلوب إيجاد عزم القصور الذاتي الأقصى والأدنى للشكل المتبقى .

