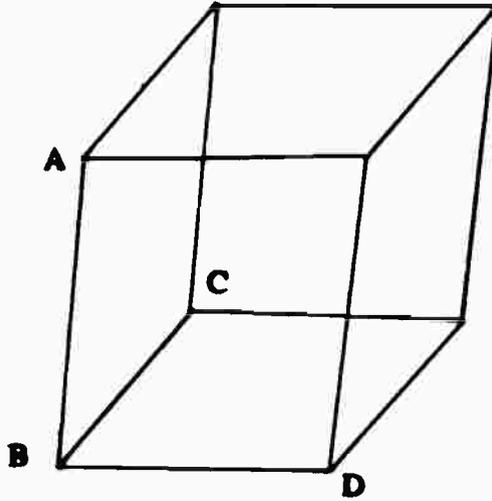


الباب العاشر

مسائل متنوعة

1.1 المطلوب إيجاد ارتفاع الشكل المبين بالرسم التالي حيث :

$A(3,2,1)$ $B(1,1,0)$, $C(3,-1,1)$, $D(-1,0,2)$



الحل :

نعلم أن حجم هذا الشكل يمكن الحصول عليه بإجراء عملية ضرب مختلط تبعاً لما جاء بالفقرة (1.36) :

$$\vec{BA} \cdot (\vec{BD} \wedge \vec{BC}) = 2 \Delta DBC \cdot h \quad (1)$$

وتبعاً لحاصل الضرب الاتجاهي
فإننا نجد بتطبيق المعادلة (1.29) أو (1.34) أو

$$2 \Delta DBC = \vec{BD} \wedge \vec{BC}$$

فم بإجراء عملية تسمى يمكن أن نجد ارتفاع الشكل h . وتكون الخطوات كالتالي

$$\vec{BA} = (3-1)\vec{i} + (2-1)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{BC} = (3-1)\vec{i} + (-1-1)\vec{j} + (1-0)\vec{k} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{BD} = (-1-1)\vec{i} + (0-1)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

من المعادلة (1.35) :

$$\vec{a} = \vec{BD} \wedge \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-1+4)\vec{i} + (4+2)\vec{j} + (4+2)\vec{k} \\ = 3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$$

وتكون قيمة \vec{a} من (1.16)

$$|\vec{a}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (6)^2} = 9 = 2 \Delta DBC$$

والآن بتطبيق المعادلة (1.36) نحصل على :

$$\vec{BA} \cdot \vec{a} = (2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \cdot (3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}) \\ = 6 + 6 = 18 = 2 \Delta DBC \cdot h$$

ويكون بالتالي ارتفاع الشكل هو :

$$h = \frac{18}{9} = 2$$

1.2 إذا علم أن :

$$\vec{A} = t \vec{i} - \sin t \vec{k} , \quad \vec{B} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \vec{k}$$

حيث t متغير . فالمطلوب إيجاد التفاضل التالي :

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

الحل :

من المعادلة (1.26) :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (t \vec{i} - \sin t \vec{k}) \cdot (\cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + \vec{k}) = t \cos t - \sin t$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} \cdot \vec{B}) = \cos t - t \sin t - \cos t = -t \sin t$$

1.3 أوجد مركبات واتجاهات متجه الوحدة المتعامد على كل من \vec{V}_1 و \vec{V}_2 حيث :

$$\vec{V}_1 = 3 \vec{i} - 2 \vec{j} + 4 \vec{k} , \quad \vec{V}_2 = \vec{i} + \vec{j} - 2 \vec{k}$$

الحل :

نفرض أن متجه الوحدة هو :

$$\vec{U} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

فلدينا من المعادلة (1.16) :

$$|\vec{U}| = 1 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1 \quad \dots \dots \dots (1)$$

ومن تعامد \vec{U} مع \vec{v}_1 يمكن أن نطبق (1.28) :

$$3 a_x - z a_y + 4 a_z = 0 \quad (2)$$

ومن تعامد U مع v_2 يعطى :

$$a_x + a_y - 2 a_z = 0 \quad (3)$$

بحل هذه المعادلات الثلاث نجد أن مركبات متجه الوحدة :

$$a_x = 0, \quad a_y = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad a_z = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \vec{U} = \frac{2}{\sqrt{3}} \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{3}} \vec{k}$$

وتكون اتجاهات متجه الوحدة من (1.17) :

$$\cos \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 90^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{2 / \sqrt{5}}{1} \rightarrow \beta = 26.565^\circ$$

$$\cos \gamma = \frac{1 / \sqrt{5}}{1} \rightarrow \gamma = 63.435^\circ$$

1.4 - أوجد التفاضل الجزئي التالي : $(\vec{A} \wedge \vec{B})$ عند النقطة

(1, -1, 2)

علماً بأن

$$\vec{A} = x^2 \vec{i} - y \vec{j} + xz \vec{k}, \quad \vec{B} = y \vec{i} + x \vec{j} - xyz \vec{k}$$

الحل :

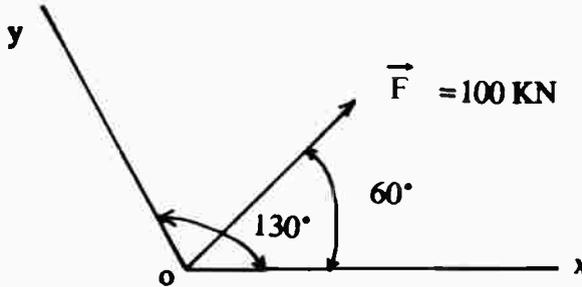
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x^2 & -y & xz \\ y & x & -xyz \end{vmatrix} = (xy^2z - x^2z) \vec{i} + (xyz + x^3yz) \vec{j} + (x^3 + y^2) \vec{k}$$

$$\frac{\delta^2}{\delta x \delta y} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = 2yz \vec{i} + (z + 3x^2z) \vec{j}$$

عند النقطة (1, -1, 2) نجد :

$$= 2(-1)2 \vec{i} + (2 + 3(1)^2 2) \vec{j} = -4 \vec{i} + 8 \vec{j}$$

2.1 المطلوب إيجاد مركبات القوة F على المحورين بالشكل هذا علماً بأن قيمتها (100 KN).



الحل :

مسقط |F| على المحور الأفقى X :

$$F \cos 60^\circ = 100 \cos 60 = 50 \text{ KN}$$

وهذا المسقط يكون مساوياً لمركبات |F| على كل من X وكذلك مركبة Y على X

ومنها :

$$\therefore \vec{F} = \vec{OX} + \vec{OY}$$

$$OX + (-oy \cos 50^\circ) = 50$$

$$OX - (0,643) oy = 50 \dots\dots\dots (1)$$

وإذا أسقطنا على المحور العمودي على الرأسى نجد :

$$Oy \cos 40^\circ = F \cos 30^\circ \dots\dots\dots (2)$$

من المعادلة (2) نجد أن :

$$Oy = \frac{100 (0.866)}{0.766} = 113.055 \text{ KN}$$

ومن (1) نجد :

$$Ox = 50 + 0.643 \times 113.055 = 122,694 \text{ KN}$$

2.2 - بالإشارة للرسم بالمثال السابق إذا كان :

$$|\vec{OY}| = 105 \text{ KN} , |\vec{Ox}| = 130 \text{ KN} , |\vec{F}| = 100 \text{ KN}$$

المطلوب إيجاد الزاوية بين القوة \vec{F} والمحور الأفقى ، وكذلك الزاوية بين المحورين .

الحل :

نفرض أن الزاوية بين القوة \vec{F} والمحور الأفقى هي α ، وأن الزاوية بين

المحورين هي β .

الإسقاط على المحور الأفقى يعطى :

$$130 + 105 \cos \beta = 100 \cos \alpha \quad (1)$$

وعلى المحور الرأسى :

$$105 \sin \beta = 100 \sin \alpha \quad (2)$$

من المعادلة (2) نجد :

$$\sin \alpha = 1.05 \sin \beta \rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - (1.05 \sin \beta)^2}$$

$$(1) \rightarrow 130 + 105 \cos \beta = 100 \sqrt{1 - (1.05 \sin \beta)^2}$$

بتربيع الطرفين نجد :

$$\begin{aligned} 16900 + 27300 \cos \beta + 11025 \cos^2 \beta &= 10000 - 11025 \sin^2 \beta \\ &= 10000 - 11025 (1 - \cos^2 \beta) \\ &= 10000 - 11025 + 11025 \cos^2 \beta \end{aligned}$$

$$27300 \cos \beta = 10000 - 11025 - 16900$$

$$\cos \beta = -0.6566 \rightarrow \beta = 131^\circ$$

ومن المعادلة (1) :

$$\cos \alpha = 1.3 + 1.05 (- 0.6566) = 0.61057$$

$$\therefore \alpha = 52.37^\circ$$

2.3 - قوة مقدارها 250 KN تعمل بنقطة الأصل في الاتجاهات :

$$\alpha = 65^\circ , \beta = 40^\circ$$

ومعروف كذلك أن المركبة في اتجاه المحور العمودى Z موجبة .

فالمطلوب إيجاد :

(أ) قيمة الزاوية التى تصنعها القوة مع المحور Z .

(ب) قيمة المركبات الثلاثة .

(ج) عزم هذه القوة بالنسبة للنقطة : A(1,-2,2)

الحل :

نتيجة للمعادلات (2.6) يمكن أن نكتب :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$\cos^2 65^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 \gamma = 1$$

وبالتعويض عن α , β نحصل على :

$$\therefore \cos^2 \gamma = 1 - 0.179 - 0.587 = 0.234$$

$$\gamma = 61^\circ$$

$$X = |\vec{F}| \cdot \cos \alpha = 250 \cos 65^\circ = 105.65 \text{ KN} \quad (1.2) , \quad (2.6)$$

$$Y = |\vec{F}| \cdot \cos \beta = 250 \cos 40^\circ = 191.51 \text{ KN}$$

$$Z = |\vec{F}| \cdot \cos \gamma = 250 \cos 61^\circ = 121.2 \text{ KN}$$

$$\therefore \vec{F} = 105.65 \vec{i} + 191.51 \vec{j} + 121.2 \vec{k}$$

ولإيجاد عزم هذه القوة حول النقطة A نكتب متجه الموضع في الصورة :

$$\vec{r} = \vec{i} - 2 \vec{j} + 2 \vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad \dots\dots\dots (2.12)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ (105.65) & (191.51) & (121.2) \end{vmatrix} = (-2(121,2) - 2(191.51)) \vec{i} + [2(105.65) - 1(121.2)] \vec{j} + [(191.51) + 2(105.65)] \vec{k}$$

$$= - 625.42 \vec{i} + 90.1 \vec{j} + 402.81 \vec{k}$$

وتكون مركبات هذا العزم :

$$|M_x| = - 625.42 , |M_y| = 90.1 , |M_z| = 402.81 \quad (2.13)$$

وقيمته :

$$|M_A| = \sqrt{(-625.42)^2 + (90.1)^2 + (402.81)^2} = 749.349 \quad (2.5)$$

أما الاتجاهات فتكون :

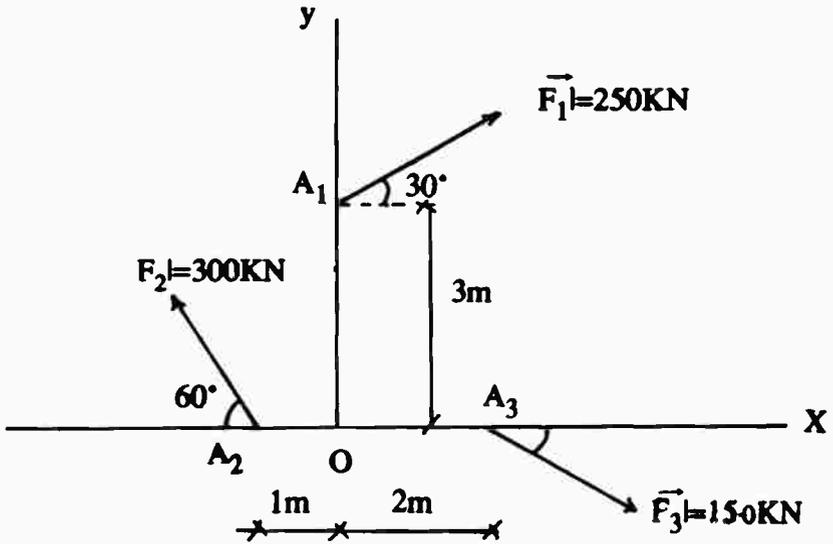
$$\cos \alpha_1 = \frac{-625.42}{749.349} = - 0.8346 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 146.576 \sim$$

$$\cos \beta_1 = \frac{90.1}{749.349} = +0.12 \quad \rightarrow \quad \beta_1 = 83. \sim \quad (2.6)$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{402.81}{749.349} = +0.5375 \quad \rightarrow \quad \gamma_1 = 57.483 \sim$$

2.4 القوى \vec{F}_1 ، \vec{F}_2 ، \vec{F}_3 تؤثر في النقط A_1 ، A_2 ، A_3 بالمستوى XY كما هو موضح بالشكل والمطلوب :

- (أ) إيجاد متجه كل قوة ومتجه موضعها .
 (ب) محصلة تلك القوى واتجاهها مع المحور الأفقى .
 (ج) عزم هذه القوى حول النقطة O .
 (د) نقطة تأثير المحصلة .



الحل :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = X \vec{i} + Y \vec{j}$$

$$\vec{F}_1 = 250 \cos 30 \vec{i} + 250 \sin 30 \vec{j}, \quad \vec{r}_1 = \vec{OA}_1 = 3 \vec{j}$$

$$\vec{F}_2 = 300 \cos 120 \vec{i} + 300 \sin 120 \vec{j}, \quad \vec{r}_2 = \vec{OA}_2 = -1 \vec{i}$$

$$\vec{F}_3 = 150 \cos 330 \vec{i} + 150 \sin 330 \vec{j}, \quad \vec{r}_3 = \vec{OA}_3 = 2 \vec{i}$$

$$X = \sum_{i=1}^3 X_i = 250 \cos 30 + 300 \cos 120 + 150 \cos 330 = 196.4 \text{ kn}$$

$$Y = \sum_{i=1}^3 Y_i = 250 \cos 60 + 300 \cos 30 + 150 \cos 240 = 309.8$$

$$\vec{R} = 196.4 \vec{i} + 309.8 \vec{j}$$

$$\tan \alpha = \frac{Y}{X} = \frac{309.8}{196.4} = 1.577 \rightarrow \alpha = 57.625^\circ$$

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^3 \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = [+3(250 \cos 30) - 300 \cos 30 + 2(150 \cos 240)] \vec{k}$$

$$\vec{M}_0 = [-649.519 - 259.8 - 150] \vec{k} = -1059.3 \vec{k}$$

$$|\vec{M}_0| = 1059.3 \text{ KN.m}$$

لإيجاد نقطة تأثير المحصلة C لدينا :

$$X_c = \frac{\sum Y_i X_i}{\sum Y_i}, \quad Y_c = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i}$$

حيث X_c ، Y_c هما إحداثيي نقطة تأثير المحصلة :

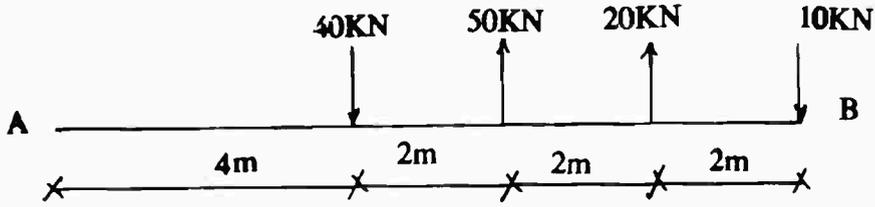
$$X_c = \frac{-300 \cos 30 + 2(150) \cos 240}{309.8} = -1.3$$

$$Y_c = \frac{-3 \times 250 \cos 30}{196.41} = -3.3$$

وبالتالي يكون متجه الموضع \vec{r}_c :

$$\vec{r}_c = -1.3 \vec{i} - 3.3 \vec{j}$$

2.5 عارضة AB طولها 10m تؤثر عليها مجموعة القوى الرأسية المتوازية المبينة بالشكل التالي . المطلوب إيجاد محصلة هذه القوى وعزمها حول النقطة A .



الحل :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^4 \vec{F}_i$$

$$|\vec{R}| = -40 + 50 + 20 - 10 = 20 \text{ KN } \uparrow$$

أى أن المحصلة تصنع زاوية مقدارها 90° مع المحور الأفقى ويمكن كتابتها كما يلى :

$$\vec{R} = 20 \vec{j}$$

لإيجاد نقطة تأثير المحصلة سوف نحسب العزم حول النقطة A .

$$|\vec{M}_A| = 40(4) + 50(6) + 20(8) - 10(10) = 200 \text{ KN.m}$$

$$X_c = \frac{|\vec{M}_A|}{|\vec{R}|} = \frac{200}{20} = 10 \text{ m}$$

$$\vec{r}_c = 10 \vec{i} \quad \text{ويكون متجه الموضع :}$$

$$\vec{M}_A = 200 \vec{k} \quad \text{أما متجه العزم حول A فهو :}$$

وواضح أن العلاقة بين المتجهات الثلاثة هى :

$$\vec{M}_A = \vec{r}_c \wedge \vec{R}$$

2.6 أثبت أن فى حالة تغيير القوة 10 KN بالمثال السابق مع تغيير نقطة تأثير إلى 9 m عن A فإن المجموعة تتحول إلى ازدواج .

الحل :

في هذه الحالة تصبح محصلة القوى :

$$\vec{R} = -40 + 50 + 20 - 30 = \vec{0}$$

وهذا أول شرط من شروط الازدواج

$$\sum M_A = -40(4) + 50(6) + 20(8) - 30(9) = 30 \text{ KN.m} \neq 0$$

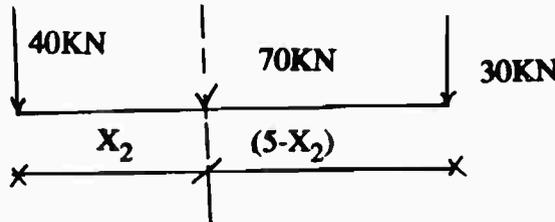
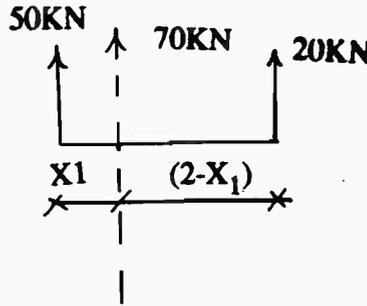
أى أن المجموعة غير متزنة ، وبالتالي تؤول إلى ازدواج انظر المعادلة (2.19) ويكون هذا الازدواج 30 KN.m حيث إن عزم مجموعة القوى لا يتغير .

ولإيجاد ذراع الازدواج أو المسافة بين قوتي الازدواج ، فواضح أن قوة الازدواج مقدارها 70 KN فتكون ذراع الازدواج .

$$d = \frac{30}{70} = \frac{3}{7} \text{ m}$$

ولإيجاد نقطة تأثير كل قوة من قوى الازدواج فإننا نجد نقطة تأثير محصلة كل قوتين

في نفس الاتجاه :

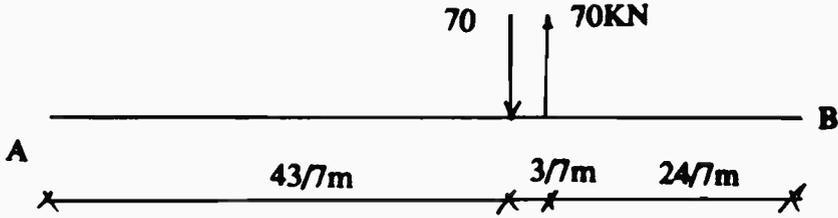


بأخذ العزوم حول القوة اليسرى لكل حالة نجد :

$$X_1 = \frac{30 \times 2}{70} = \frac{4}{7} \text{ m} = 0.57 \text{ m}$$

$$X_2 = \frac{30 \times 5}{70} = \frac{15}{7} \text{ m} = 2.14 \text{ m}$$

ويكون لدينا الشكل التالي للازدواج :



3.1- نقطة مادية معرضة للقوى :

$$\vec{F}_1 = 5 \vec{i} - 10 \vec{j} + 15 \vec{k} \quad \vec{F}_2 = 10 \vec{i} - 25 \vec{j} + 20 \vec{k}$$

$$\vec{F}_3 = 15 \vec{i} - 20 \vec{j} + 10 \vec{k}$$

أوجد القوة اللازمة لكي تصبح النقطة المادية في حالة اتزان .

الحل :

نفرض أن القوة اللازمة للاتزان هي F_4

بتطبيق المعادلات (3.2) نجد أن :

$$\sum_{i=1}^4 X_i = 0 \rightarrow 5 - 10 + 15 + X_4 = 0 \rightarrow X_4 = -10$$

$$\sum_{i=1}^4 Y_i = 0 \rightarrow -10 + 10 + 15 - 20 + Y_4 = 0 \rightarrow Y_4 = 5$$

$$\sum_{i=1}^4 Z_i = 0 \rightarrow 15 - 20 + 10 + Z_4 = 0 \rightarrow Z_4 = -10$$

$$\vec{F}_4 = -10 \vec{i} + 5 \vec{j} - 10 \vec{k}$$

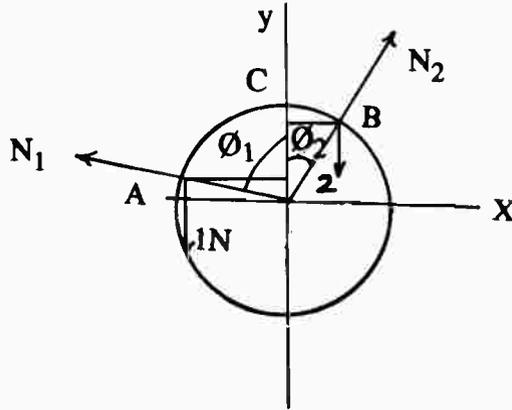
3.2 - بليتان A , B أبعادهما مهملة ، متصلتان بخط AB طوله 0.2 متر ، وموضوعتان على اسطوانة دائرية المقطع وملساء محورهما أفقى ونصف قطرها $OA = 0.1$ متر . وزن البلية 1A نيوتن و 2B نيوتن . أوجد الزاويتان Φ_1 , Φ_2 التى يصنعها نصفى القطر OA , OB مع الخط الرأسى OC وذلك فى حالة الاتزان . أوجد كذلك ردى الفعل N_1 , N_2 للأسطوانة على كل بلية عند النقطتين A , B .

الحل :

$$2\pi (0,1) = 2\pi r = \text{محيط الدائرة}$$

$$0.628 =$$

وهذا المحيط يقابل زاوية مركزية عند 0 مقدارها 360°



وبالتالى فإن القوس AB يقابل زاوية مركزية يمكن الحصول عليها بالتناسب :

$$\therefore \phi_1 + \phi_2 = \frac{0.2 \times 360}{0.628} = 114.59^\circ$$

بما أن البلية 1A = نيوتن ، و 2B = نيوتن فإن محصلتهما تكون 3 نيوتن وهى تقسم المسافة بينهما بنسبة $\frac{1}{3}$ من B إلى $\frac{2}{3}$ من A . وتطبيق نظرية القوى الثلاث فإن تلك المحصلة يجب أن تمر بنقطة تلاقى القوتين N_1 , N_2 أى بنقطة 0 .

وبناء على ذلك فإنه إذا كانت المسافة فى اتجاه محور X بين AB (أى المسافة الأفقية بين البليتين) هى 1 . فإن الإسقاط على محور X يعطينا :

$$\left(\frac{2}{3}\right)l = AC \quad \text{مسقط}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)l = BC \quad \text{مسقط}$$

ومن التحليل السابق يمكن أن نجد بالاستعانة بالمعادلة (1) :

$$\phi_1 = \frac{2}{3} (\phi_1 + \phi_2) = \frac{2}{3} \times 114.59 = 76.4^\circ$$

$$\phi_2 = \frac{1}{3} (\phi_1 + \phi_2) = \frac{1}{3} \times 114.59 = 38.2^\circ$$

وبتطبيق (3.3) :

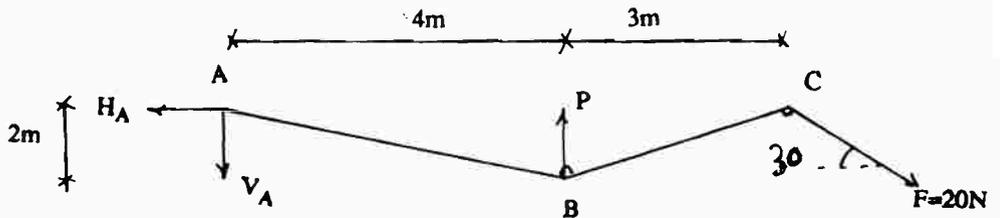
$$\Sigma X = 0 \rightarrow N_1 \sin \phi_1 = N_2 \sin \phi_2 \quad (2)$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow N_1 \cos \phi_2 + N_2 \cos \phi_2 = 3 \quad (3)$$

من (2) , (3) نجد أن :

$$N_1 = 2 \text{ N} , \quad N_2 = 3.2 \text{ N}.$$

3.3 - حبل ABC مشدود إلى وتد عند نهايته ، C بقوة مقدارها 20 نيوتن تميل على الأفقى بزاوية 30° ومثبت عند A . فإذا علم أن A ، C في مستوى أفقى واحد فالمطلوب إيجاد قيمة القوة P التي يجب أن تؤثر عند B لحفظ الاتزان ، وكذلك قيم ردود الأفعال عند الطرف A



الحل :

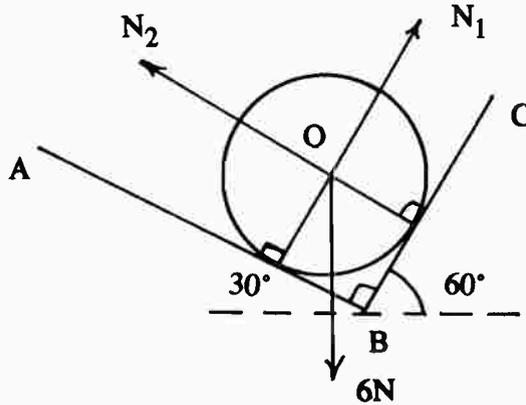
بتطبيق معادلات الاتزان بالمستوى (3.3) , (3.6) نجد أن :

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 4P - 20 \sin 30^\circ (7) = 0$$
$$P = + 35 \sin 30^\circ = 17.5 \text{ N } \uparrow$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 20 \cos 30 = 17.5 \text{ N } \leftarrow$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A = 17.5 - 20 \sin 30^\circ = 7.5 \text{ N } \downarrow$$

3.4 - قرص متجانس وزنه 6 نيوتن يتزن على مستويين مائلين ومتعامدين على بعضهما البعض AB و BC . أوجد رد فعل كل مستوى على القرص ، وذلك مع العلم أن المستوى BC يصنع زاوية مقدارها 60° مع الأفقى .



الحل :

بتطبيق معادلات الاتزان في المستوى (3.3) نجد ما يلي :

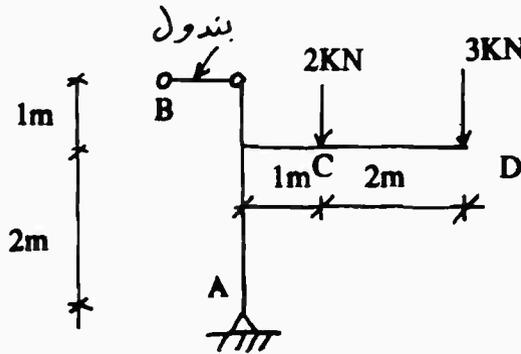
$$N_1 \cos 60^\circ = N_2 \cos 30^\circ \quad \dots\dots (1)$$

$$N_1 \sin 60^\circ + N_2 \sin 30^\circ = 6 \quad \dots\dots (2)$$

ومن المعادلتين (1) و (2) يمكننا إيجاد ردى الفعل N_2 , N_1 :

$$N_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ N} \quad , \quad N_2 = \frac{3}{2} \text{ N}$$

35 - المطلوب حساب ردود أفعال المنشأ ABCD بالشكل التالى :



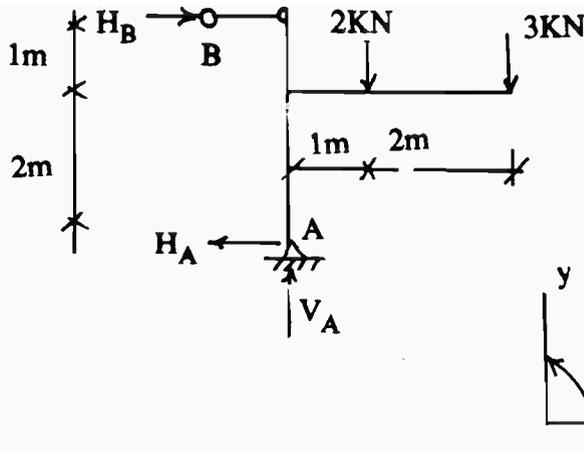
الحل :

عدد ردود الأفعال بهذا المنشأ ثلاثة : اثنان عند الركيزة المزدوجة A رأسى V_A وأفقى H_A والبندول يتحمل رد فعل فى اتجاه محوره أى أفقى وليكن H_B .

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_A = 2 + 3 = 5 \text{ KN } \uparrow$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow -H_B(3) - 2 \times 1 - 3 \times 3 = 0$$

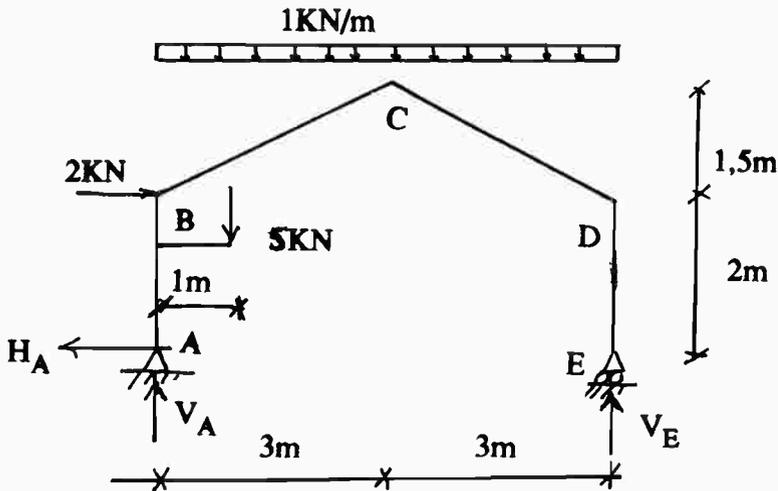
$$H_B = - \left[\frac{9 + 2}{3} \right] = - \frac{11}{3} \text{ KN}$$



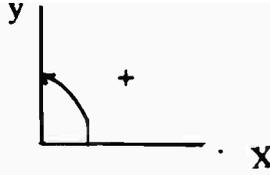
وحيث إن الإشارة سالبة فهذا يعني أن H_B اتجاهها عكس المفترض أى إلى اليسار بدلاً من اليمين .

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = H_B = \frac{11}{3} \text{ KN} \rightarrow$$

3.6 - أوجد ردود أفعال المنشأ ABCD بالشكل :



الحل :



نفرض أن ردود الأفعال كما هو موضح بالرسم وإذا خرجت النتيجة سالبة نعكس الاتجاه .

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_A = 2 \text{ KN } \leftarrow$$

$$\Sigma M_A = 0 \rightarrow 6V_E - 1 \times 6 \times \frac{6}{2} - 5 \times 1$$

$$- 2 \times 2 = 0 \rightarrow V_E = 4.5 \text{ KN } \uparrow$$

$$\Sigma M_E = 0 \rightarrow -6V_A + 1 \times 6 \times \frac{6}{2} + 5 \times 5 - 2 \times 2 = 0 \rightarrow$$

$$V_A = 6.5 \text{ KN } \uparrow$$

تحقيق صحة النتائج :

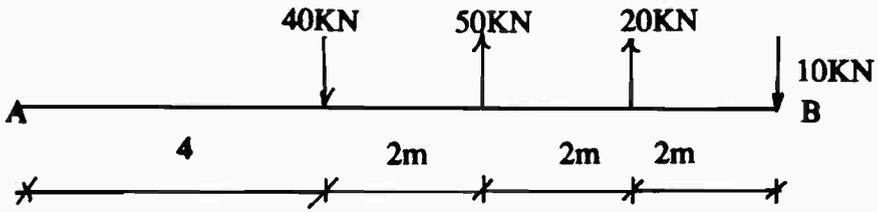
يجب أن نحقق المعادلة :

$$\Sigma Y = 0$$

$$\Sigma Y = V_A + V_E - 1 \times 6 - 5 = 0$$

. ه . ط .

4.1 المطلوب إيجاد الحل البياني للتمرين 2.5

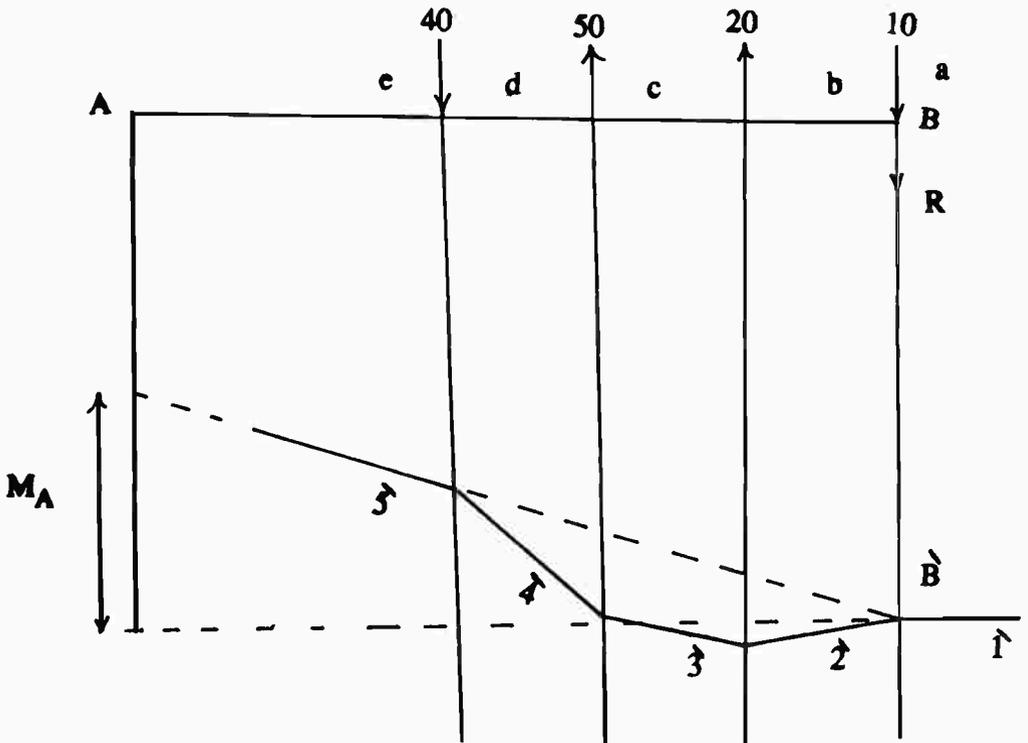


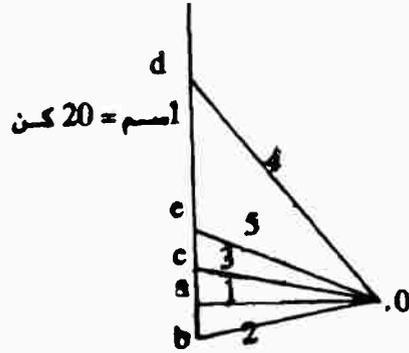
الحل :

نبدأ بتقسيم المساحة إلى مناطق (انظر الفقرة 4.4 المثال 4) وبعد ذلك نرسم مضع القوى وهو في هذه الحالة خط رأسي .

وتكون المحصلة من المضع هي قيمة المتجه \vec{ae} وذلك مع أخذ مقياس الرسم

$$|\vec{R}| = |\vec{ae}| = 20 \text{ KN} \quad \text{في الاعتبار :}$$



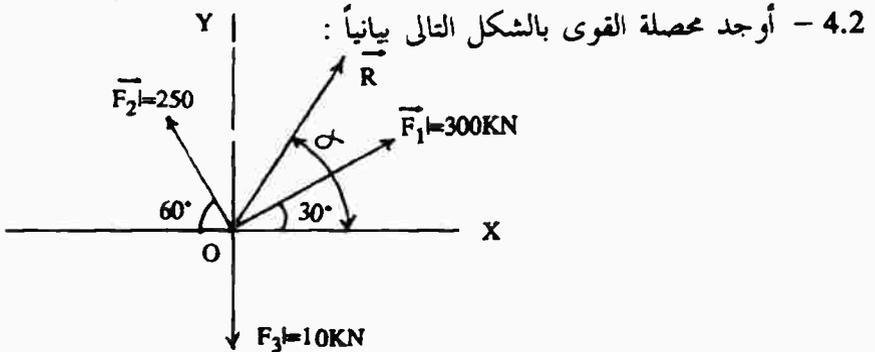


مضلع الأشعة القطبي

لإيجاد نقطة تأثير المحصلة نرسم مضلع الأشعة القطبي (على نفس مضلع القوى) وذلك باختيار نقطة مثل O على نفس الخط الأفقى المار بالنقطة a ، ونصل O بكل المناطق لنحصل على الأشعة القطبية ، وبعمل موازيات لتلك الأشعة بالمناطق المناظرة لها بالشكل الأسمى نحصل على الأشعة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 امتداد 1 ، 3 يلتقيان فى النقطة B' ، وبالتالى تكون نقطة تأثير المحصلة هى مسقط B' على العارضة أى نقطة B (كما سبق وحسبناها بالمثال 2.5) .

أما المسافة المحصورة ما بين امتداد كل من الشعاعين 1 ، 5 أسفل A وعلى المحور الرأسى فتمثل قيمة العزم عند النقطة A لمجموعة القوى (انظر الفقرة 4.4 مثال 6) .

$$\therefore | \vec{M}_A | = 200 \text{ KN.M}$$



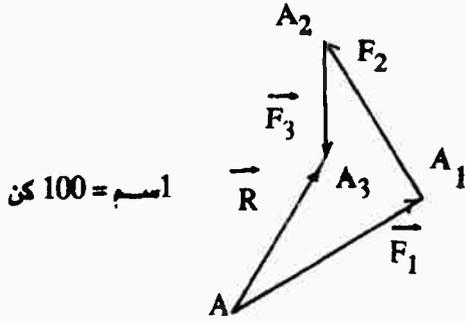
الحل :

في هذه المسألة نكتفى برسم مضع القوى للثلاث قوى ، وتكون المحصلة هي المتجه الذى يقفل هذا المضع باتجاه دورى مضاد . أما نقطة تأثيرها فلا بد وأن تكون نقطة تلاقي القوى أى النقطة 0 .

$$|\vec{R}| = AA_3 = 255 \text{ KN}$$

ومن الرسم يمكن أن نقيس الزاوية مع الأفقى (α)

$$\alpha = 58^\circ$$



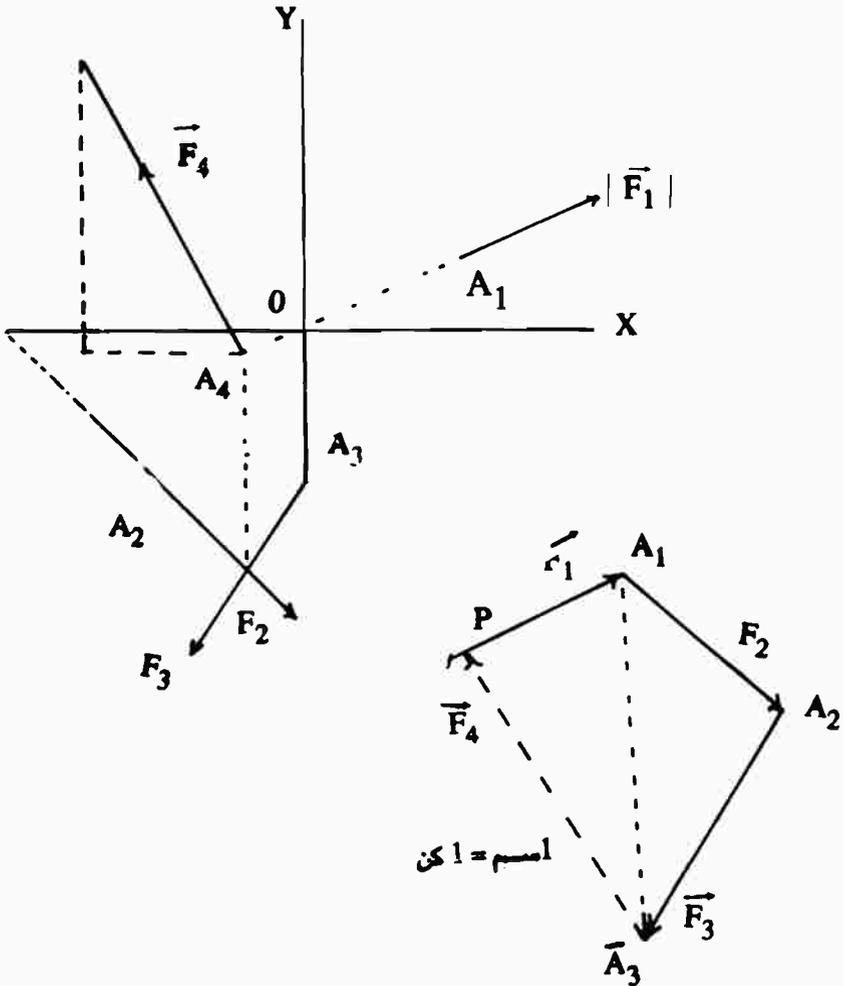
4.3 - المطلوب إيجاد القوة التى تتزن مع القوى التالية بطريقة بيانية :

$$\vec{F}_1 = 2\vec{i} + \vec{j} , \quad \vec{F}_2 = 2\vec{i} + 2\vec{j} , \quad \vec{F}_3 = -2\vec{i} - 3\vec{j}$$

والتي تؤثر بالنقاط : $A_3(0,-2)$, $A_2(2,-2)$, $A_1(2,1)$

الحل :

نحاول أولاً توقيع هذه القوى على المستوى XY كما بالرسم التالي ، وبعد ذلك نرسم لها مضلع القوى والضلع الذي يقفل المضلع ، ولكن في نفس الاتجاه هو القوة التي تجعل تلك المجموعة متزنة .



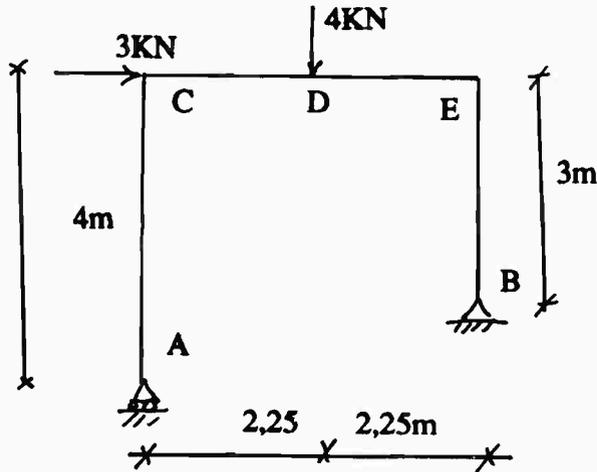
لإيجاد نقطة تأثير القوة التي تجعل هذه المجموعة متزنة أى \vec{F}_4 فإننا نحصل
 \vec{F}_2 و F_3 وحدهما فتكون المحصلة هي A_3A_1 بمضلع القوى والموازى لهذا المتجه ماراً
 بنقطة تلاقي تلك القوتين يعطى المحل الهندسى فى نقطة A_4 وهى نقطة التأثير المطلوبة -
 بقياس هذه القوة والزاوية التى نصنعها مع المحور الأفقى نجد ما يلى :

$$|\vec{F}_4| = 4.5 \text{ KN}, \alpha = 117^\circ$$

ويمكن كتابة القوة فى الصورة

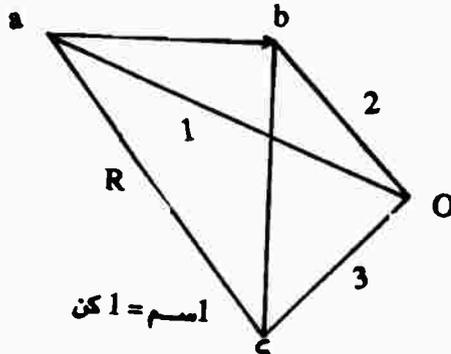
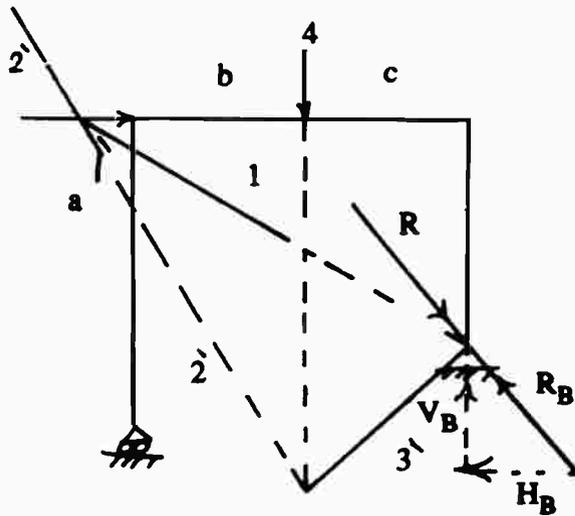
$$\vec{F}_4 = -2 \vec{i} + 4 \vec{j}$$

4.4 - المطلوب إيجاد ردود أفعال الهيكل التالى بيانياً :



الحل :

في هذه المسألة نحاول تقسيم المساحة إلى عدة مناطق كخطوة أولى للحل ، وبعد ذلك نرسم مضع القوى لنحصل على محصلة القوتين ، ونستكمله إلى مضع الأشعة القطبية لنحصل على نقطة تأثير تلك المحصلة .



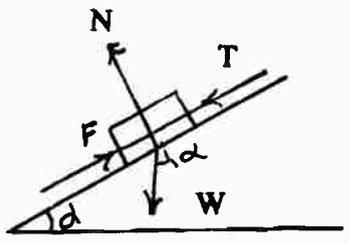
وبعد مزلع الأشعة القطبي نوقع الأشعة على الشكل الأصلي فنجد أن نقطة التقاء أول شعاع 1 وآخر شعاع 3 هي النقطة B ، وبالتالي تكون هي نقطة تأثير المحصلة .

وبما أن الهيكل متزن - فعل ورد فعل - فإن محصلة ردود الأفعال أيضاً يجب أن تمر بالنقطة B ، وهذا غير ممكن لرد الفعل عند A ؛ لأنه رأسى وبالتالي فلا بد أن يكون صفرأ . ويكون رد الفعل عند B مضادأ في الاتجاه للمحصلة R ويمكن تحليله أفقيأ ورأسياً لإيجاد مركبتيه ونحصل بالقياس على النتائج التالية :

$$|\vec{R}| = 5 \text{ KN} , |\vec{R}_B| = 5 \text{ KN} \quad \text{والمركبات تكون :}$$

$$|\vec{V}_B| = 4 \text{ KN} \uparrow , |\vec{H}_B| = 3 \text{ KN} \leftarrow$$

5.1 - جسم موضوع على سطح مائل وخشن . وزن هذا الجسم w وهو معرض لقوة F موازية للسطح المائل وتمنع الجسم من الانزلاق . فإذا علم أن $W = F$ وأن معامل الاحتكاك الإستاتيكي للسطح الخشن $\mu = \frac{1}{2}$ أوجد زاوية ميل السطح الخشن على الأفقى في وضع الاتزان .



الحل :

تكون معادلات الاتزان في هذه الحالة في اتجاه موازى للسطح وعمودى عليه كما يلي :

$$F_2 = T + W \sin \alpha \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$N = W \cos \alpha \quad \dots\dots\dots (2)$$

أما معادلة الاحتكاك فتكتب :

$$T = N \tan \phi = N \mu \dots\dots\dots (3)$$

من المعادلة الأولى والثالثة نجد :

$$F = N \mu + W \sin \alpha$$

وبالتعويض عن N من المعادلة الثانية :

$$\begin{aligned} F &= W \cos \alpha \cdot \mu + W \sin \alpha \\ &= W [\mu \cos \alpha + \sin \alpha] \end{aligned}$$

$$\frac{F}{W} = \frac{1}{2} \cos \alpha + \sin \alpha = 1$$

$$\sin \alpha = 1 - \frac{1}{2} \cos \alpha$$

$$\therefore \sin^2 \alpha = 1 - \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha$$

$$\frac{5}{4} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 = 0 \quad \therefore \alpha = 36.87^\circ$$

$$\frac{5}{4} \cos^2 \alpha = 1 \quad \rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{4}{5} = 0.8$$

5.2 - بالتمرين السابق أوجد قيمة α إذا كانت الزاوية التي تصنعها القوة F مع السطح المائل هي 30° .

أوجد كذلك α إذا كانت : $F = 0,9 W$.

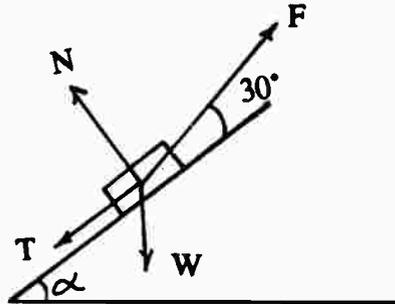
الحل :

في هذه الحالة تصبح المعادلات (1) , (2) , (3) بالتمرين السابق كما يلي :

$$F \cos 30^\circ = \mu (W \cos \alpha - F \sin 30) + \sin \alpha \dots\dots\dots (1)$$

$$N = W \cos \alpha - F \sin 30 \dots\dots\dots (2)$$

$$T = \mu N \dots\dots\dots (3)$$



بالمثل - كما حدث في التمرين السابق - يمكن إيجاد المعادلة :

$$F \cos 30^\circ = \mu (W \cos \alpha - F \sin 30) + \sin \alpha \dots\dots\dots (4)$$

وحيث إن $F = W$:

$$\cos 30^\circ = \frac{1}{2} (\cos \alpha - \sin 30) + \sin \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 1.245 - 1.116 \cos \alpha + \frac{1}{4} \cos^2 \alpha$$

$$\cos \alpha = 0.4464 \pm 0.0572$$

$$\therefore \alpha_1 = 60^\circ . \quad , \quad \alpha_2 = 67^\circ$$

في حالة ما إذا كانت $F = 0,9W$

فإننا نجد من المعادلة (4) بالتعويض عن F بدلالة W

$$0.9 W \cos 30^\circ = \mu (W \cos \alpha - 0.9 W \sin 30) + W \sin \alpha$$

$$0.779 = \frac{1}{2} (\cos \alpha - 0.45) + \sin \alpha$$

$$1 = 0.5 \cos \alpha + \sin \alpha$$

$$\sin \alpha = 1 - \frac{1}{2} \cos \alpha$$

ومنها نحصل على $\alpha \approx 36.87^\circ$

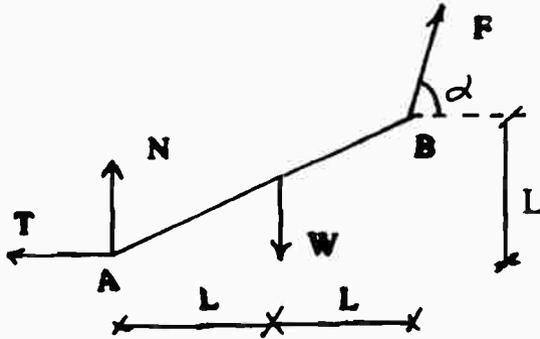
أى نفس القيمة بالتمرين السابق .

5.3 - قضيب وزنه W مشلود من أحد طرفيه بقوة F تميل على الأفقى بزاوية α والطرف الآخر يستند على سطح خشن أفقى . فإذا كان مسقط القضيب فى وضع الاتزان 21 , 1 على الأفقى والرأسى على الترتيب حيث l وحدة أطوال . فالمطلوب إثبات

$$\tan \phi = \frac{1}{\tan \alpha - 1} \quad \text{أن :}$$

حيث ϕ هى زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح الخشن .

استنتج حدود α لكى يتم هذا الاتزان .



الحل :

معادلات الاتزان بالنسبة للمحور الأفقى والرأسى تكون :

$$T = F \cos \alpha \dots\dots\dots (1)$$

$$N = W - F \sin \alpha \dots\dots\dots (2)$$

$$W1 = F \sin \alpha (2 1) - 1 F \cos \alpha$$

$$W = 2 F \sin \alpha - F \cos \alpha \dots\dots\dots (3)$$

أما معادلة الاحتكاك فهى كالعادة :

$$T = N \tan \phi \dots\dots\dots (4)$$

بالتعويض عن N , T من المعادلتين (1) , (2) فى المعادلة (4) نجد :

اما معادلة الاحتكاك فهى كالعادة :

$$T = N \tan \phi \dots\dots\dots (4)$$

بالتعويض عن N , T من المعادلتين (1) , (2) فى المعادلة (4) نجد :

$$F \cos \alpha = (W - F \sin \alpha) \tan \phi$$

المعادلة رقم (3) تعطى W بدلالة F ولذلك نعوض فى المعادلة أعلاه فنجد :

$$F \cos \alpha = (2 F \sin \alpha - F \cos \alpha - F \sin \alpha) \tan \phi$$

$$\tan \phi = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{1}{\tan \alpha - 1}$$

لكى يتم الاتزان فيجب أن يكون رد الفعل N موجباً (لأعلى) أو على أقل تقدير

يساوى صفر ويمكن من المعادلة (4) إيجاد :

$$N \tan \phi = T = F \cos \alpha$$

$$N = F \frac{\cos \alpha}{\tan \phi} = F (\sin \alpha - \cos \alpha)$$

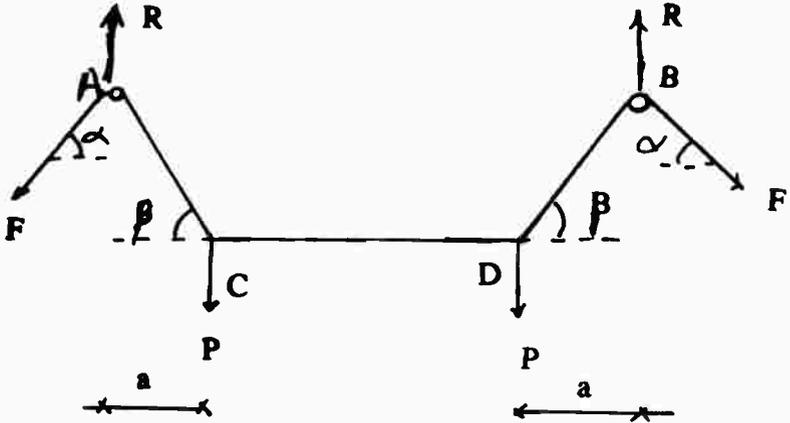
ولكى تكون N موجبة فلا بد أن :

$$\sin \alpha > \cos \alpha$$

$$\therefore \alpha \geq 45^\circ$$

6.1 - خيط مربوط إلى مفصلتين A , B في مستوى أفقى واحد . الخيط مشدود بقوتين F من كل طرف ، وتميل تلك القوة على الأفقى بزاوية α . علق في الخيط وزنان P في كل من النقطتين C , D على بعد a عن كل من A , B فأصبح الخيط مائلاً على الأفقى بزاوية β .

المطلوب رد الفعل الرأسى عند كل من المفصلتين . وكذلك العلاقة بين كل من الزاويتين α , β وذلك عندما تكون $F = P$.



واضح أن الشكل متماثل ولذلك يكون رد الفعل عند كل من A , B متساوى .

فإذا حللنا القوى عند المفصلة A فى اتجاه رأسى نجد أن رد الفعل عند A وهو R يكون :

$$R = P + F \sin \alpha$$

ولإيجاد العلاقة بين كل من الزاويتين α , β ندرس المفصلة C . فإذا حللنا القوى رأسياً عند C نجد أن :

$$P = T_{CA} \sin \beta \rightarrow T_{CA} = \frac{P}{\sin \beta} \dots\dots\dots (1)$$

حيث T_{CA} هو الشد فى الخيط \vec{CA} .

وبدراسة المفصلة A مرة أخرى ، وإجراء التحليل الأفقى هذه المرة نجد :

$$F \cos \alpha = T_{AC} \cos \beta \dots\dots\dots (2)$$

وحيث إن :

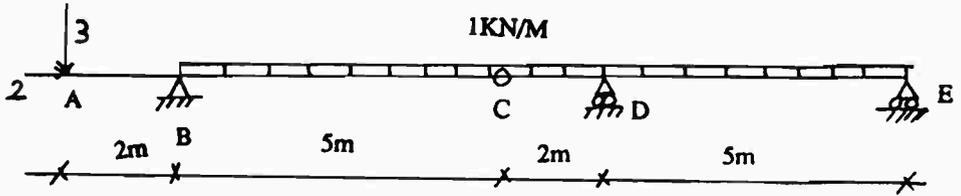
$$T_{CA} = T_{AC} , F = P$$

فإن المعادلة (2) تصبح :

$$F \cos \alpha = \frac{F}{\sin \beta} \cos \beta \rightarrow \cos \alpha = \cos \beta$$

وهى العلاقة المطلوبة .

6.2 - أوجد القوى بالمفصلة التي بالكمرة أسفله . أوجد كذلك ردود الأفعال



الحل :

لإيجاد القوى بالمفصلة C نجري قطع بها وندرس الجزء ABC أسفله .

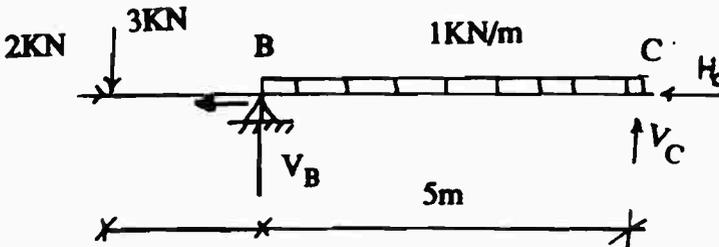
حيث إن الركيذة عند B مزدوجة

فلا بد أن يكون لها مركبتين أفقية H_B

ورأسية V_B ومن ثم فإنه بتطبيق

قواعد الاتزان نجد أن : $H_B = 2 \text{ KN} \leftarrow$

وبناء على ذلك فإن H_C تكون صفراً . $H_C = 0$



ولإيجاد V_C نحسب العزوم حول B :

$$\sum_A^C M_B = 0 \rightarrow 3 \times 2 + V_C \times 5 - 1 \times 5 \times 2.5 = 0$$

$$V_C = 1.3 \text{ KN } \uparrow$$

ولإيجاد رد الفعل عند B الرأسى V_B يمكن أن نحسب العزوم حول C هذه المرة :

$$\sum_A^C M_C = 0 \rightarrow 3 \times 2 - V_B \times 5 + 1 \times 5 \times 2.5 = 0$$

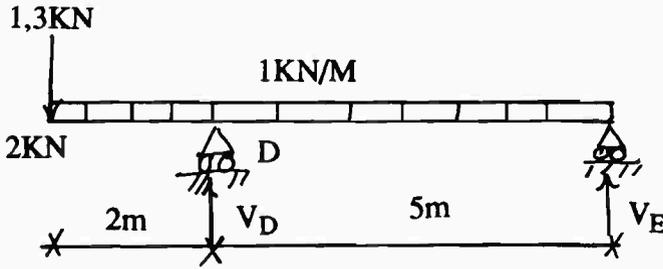
$$\therefore V_B = 6.7 \text{ KN } \uparrow$$

تحقيق صحة النتائج للجزء ABC :

يجب أن نحقق المعادلة $\Sigma Y = 0$:

$$\Sigma Y = V_B + V_C - 3 - 1 \times 5 = 6.7 + 1.3 - 3 - 5 = 0$$

ولإيجاد بقية ردود الأفعال ندرس الجزء CDE :



$$\sum_C^E M_D = 0 \rightarrow 5V_E - 1 \times 7 \times 1.5 + 1.3 \times 2 = 0$$

$$\therefore V_E = 1.58 \text{ KN } \uparrow$$

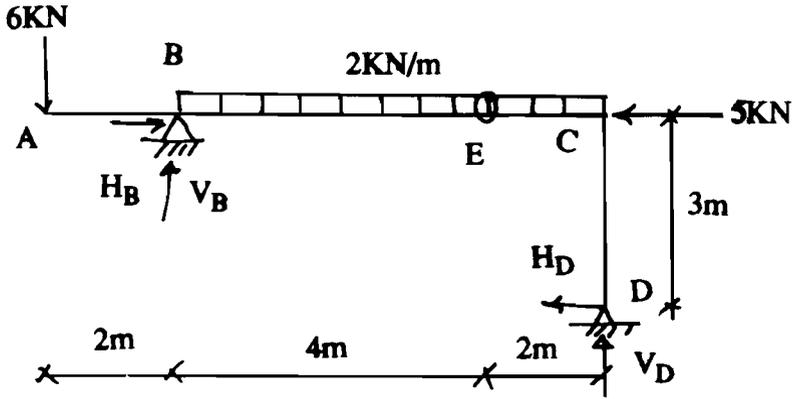
$$\sum_C^E M_E = 0 \rightarrow 1.3 \times 7 + 1 \times 7 \times 3.5 - 5V_D = 0$$

$$\therefore V_D = 6.72 \text{ KN } \uparrow$$

تحقيق صحة النتائج للجزء CDE :

$$\Sigma Y = V_D + V_E - 1.3 - 1 \times 7 = 6.72 + 1.58 - 1.3 - 7 = 0$$

6.3 - أوجد القوى بالمفصلة التي بالهيكل التالي وكذلك ردود الأفعال .



الحل :

في هذه الحالة يمكننا أن نبدأ بإيجاد ردود الأفعال عند B حيث :

$$\sum_A^E M_E = 0 \rightarrow 6 \times 6 - 4V_B + 2 \times 4 \times 2 = 0$$

$$\therefore V_B = 13 \text{ KN } \uparrow$$

$$\sum_A^D M_D = 0 \rightarrow 6 \times 8 - 6V_B - 3H_B + 2 \times 6 \times 3 + 5 \times 3 = 0$$

$$\therefore H_B = 7 \text{ KN } \rightarrow$$

$$\sum X = 0 \rightarrow H_D = 7 - 5 = 2 \text{ KN } \leftarrow$$

$$\sum_D^E M_E = 0 \rightarrow 2V_D - 3H_D - 2 \times 2 \times 1 = 0$$

$$\therefore V_D = 5 \text{ KN } \uparrow$$

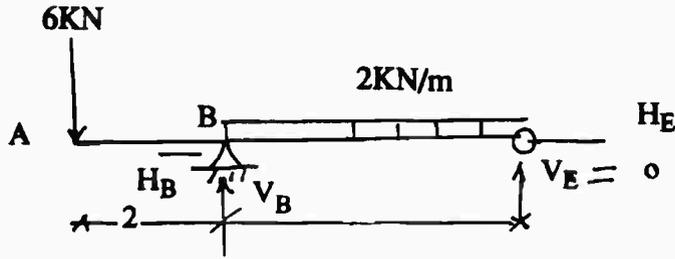
تحقيق صحة النتائج :

$$\sum Y = V_B + V_D - 6 - 2 \times 6 = 13 + 5 - 6 - 12 = 0$$

لإيجاد القوى بالمفصلة E يمكننا الآن أن ندرس الجزء ABE :

$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_E = 7 \text{ KN} \leftarrow$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_E = 13 - 6 - 2 \times 4 \therefore V_E = 1 \text{ KN} \uparrow$$



6.4 - في التمرين السابق المطلوب إيجاد موضع المفصلة E بحيث يكون قيمة المركبة الرأسية بها صفراً . أوجد ردود الأفعال في هذه الحالة .

الحل :

بأخذ العزوم حول B للجزء ABE :

وحيث إن المطلوب هو $V_E = 0$.

$$\sum_A^E M_B = 0 \rightarrow X V_E - 2 \times \frac{X^2}{2} + 6 \times 2 = 0$$

$$\therefore X^2 = 12 \text{ KN} \rightarrow X = 3.464 \text{ m}$$

$$V_B = \sum_A^E F = 6 + 2 \times 3.464 = 12.928 \text{ KN} \uparrow$$

وتكون قيمة رد الفعل الرأسى عند D من الاتزان الرأسى للشكل كله :

$$V_D = 6 + 2 \times 6 - 12.928 = 5.072 \text{ KN} \uparrow$$

ولإيجاد ردود الأفعال الأفقية عند كل من B , D نحسب العزوم حول D لكل

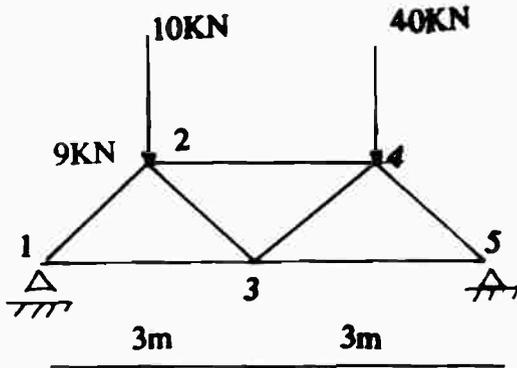
القوى فنجد :

$$\sum_A^D M_D = 0 \rightarrow 6 \times 8 - 6V_B - 3H_B + 2 \times 6 \times 3 + 5 \times 3 = 0$$

$$\therefore H_B = 7.144 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\sum X = 0 \rightarrow H_D = 7.144 - 5 = 2.144 \text{ KN} \leftarrow$$

7.1 - أوجد بطريقة تحليلية القوى بقضبان الجمالون بالشكل التالي :



الحل :

ردود الأفعال :

$$\sum X = 0 \rightarrow H_5 = 9 \text{ KN} \leftarrow$$

$$\sum M_5 = 0 \rightarrow -6V_1 + 10(4.5) + 10(1.5) - 9(1.5) = 0$$

$$\therefore V_1 = 7.75 \text{ KN} \uparrow$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow -6V_5 - 10(4.5) - 10(1.5) - 9(1.5) = 0$$

$$\therefore V_5 = 12.25 \text{ KN} \uparrow$$

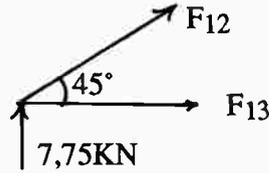
القوى بالقضبان :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow F_{12} \frac{1}{\sqrt{2}} + 7,75 = 0$$

$$\therefore F_{12} = -7,75 \sqrt{2}$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow F_{12} \frac{1}{\sqrt{2}} + F_{13} = 0$$

$$\therefore F_{13} = 7,75$$



: (1) المفصلة

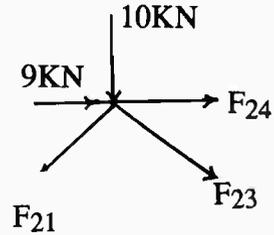
: (2) المفصلة

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow -10 - \frac{F_{21}}{\sqrt{2}} - \frac{F_{23}}{\sqrt{2}} = 0$$

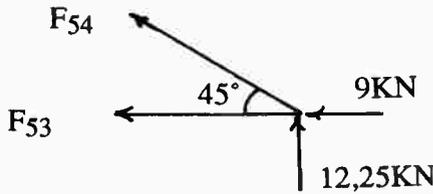
$$-10 - \frac{1}{\sqrt{2}} (-7,75 \sqrt{2}) - \frac{F_{23}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow 9 + F_{24} - \frac{F_{21}}{-2} + \frac{F_{23}}{-2} = 0$$

$$9 + F_{24} - \frac{1}{\sqrt{2}} (-7,75 \sqrt{2}) + \frac{1}{\sqrt{2}} (-2,25 \sqrt{2}) = 0$$



: (5) المفصلة



$$\Sigma Y = 0 \rightarrow 12,25 + \frac{F_{54}}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow F_{54} = -12,25 \sqrt{2}$$

$$\Sigma X = 0 \rightarrow -9 - F_{53} \frac{F_{54}}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow$$

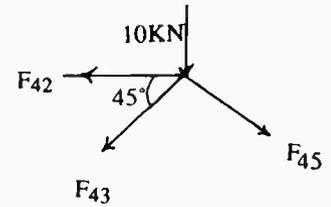
$$9 - F_{53} - \frac{1}{-2} (-12,25 \frac{1}{\sqrt{2}}) = 0 \rightarrow F_{53} = 3,25 \text{ KN}$$

المفصلة (4) :

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow -10 - \frac{F_{43}}{\sqrt{2}} - \frac{F_{45}}{\sqrt{2}} = 0$$

$$-10 - \frac{F_{43}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} (-12.25 \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore F_{43} = + 2.25 \sqrt{2} \text{ KN}$$



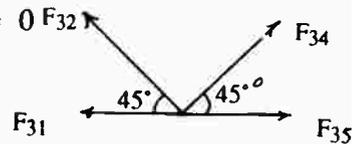
تحقيق صحة النتائج :

ندرس لذلك اتزان المفصلة رقم (3) :

$$\Sigma Y = (F_{34} + F_{32}) / \sqrt{2} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (+2.25 \sqrt{2} + (-2.25 \sqrt{2})) = 0$$

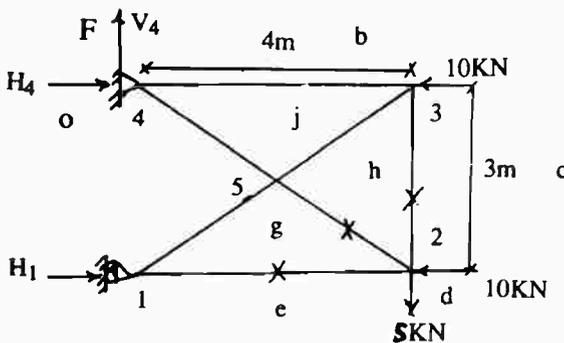
$$\Sigma X = F_{35} + \frac{F_{34}}{\sqrt{2}} - \frac{F_{32}}{\sqrt{2}} - F_{31} = 0$$



$$3.25 + \frac{1}{\sqrt{2}} (2.25 \sqrt{2}) - \frac{1}{\sqrt{2}} (-2.25 \sqrt{2}) - 7.75 = 0$$

وهو ما يحقق صحة النتائج .

7.2 - عن طريق الحل البياني أوجد القوى بالجمالون التالي ، ثم حقق النتائج تحليلياً بالنسبة للقضبان المحددة بعلامة X .



الحل :

بنداً أولاً بتقسيم المناطق وتعيينها ثم بعد ذلك نرسم مضع القوى (الخارجية + ردود الأفعال) وبعدها ندرس كل مفصلة لتعيين القوى بالقضبان لديها .

ردود الأفعال :

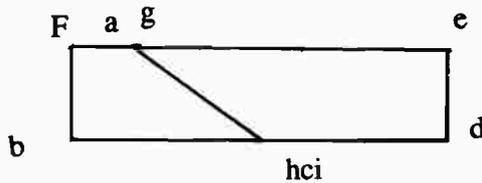
$$\Sigma Y = 0 \rightarrow V_4 = 5 \text{ KN } \uparrow$$

$$\Sigma M_4 = 0 \rightarrow 3 H_1 - 10 \times 3 - 5 \times 4 = 0$$

$$\therefore H_1 = \frac{50}{3} \text{ KN } \rightarrow$$

$$\Sigma M_1 = 0 \rightarrow 3 H_4 - 10 \times 3 - 5 \times 4 = 0$$

$$\therefore H_4 = \frac{10}{3} \text{ KN } \rightarrow$$



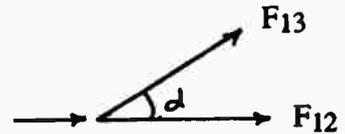
قيمة القوة ونوعها	الاتجاه	القوى	المنطق	المفصلة
صغير - 16,7 كـن	تضغط ①	H1 = Qe ② - ① // eg ③ - ① // ge	aega	①
8,3 كـن	تشد ②	5 = ed 10 = dc ③ - ② // ch ④ - ② // hg ① - ② ge	edchge	②
- 10,4 كـن	تضغط ③	10 = cb ④ - ③ // bi ⑤ - ③ // ih	cbihc	③

تحقق صحة النتائج تحليلياً للقضبان المحددة بالعلامة X .

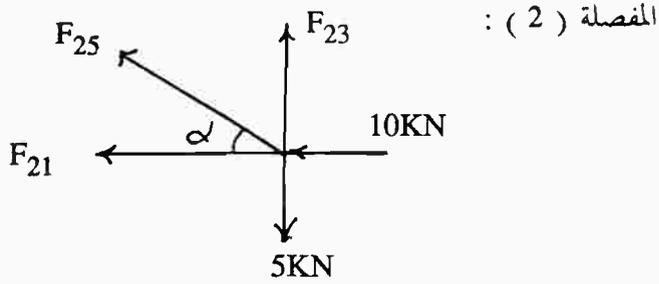
المفصلة (1) :

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} , \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\Sigma Y = 0 \rightarrow F_{13} \sin \alpha = 0 \rightarrow F_{13} = 0$$



$$\Sigma X = 0 \rightarrow H_1 + H_{13} \sin \alpha + F_{12} = 0 \rightarrow F_{12} = -\frac{50}{3} \text{ KN}$$



$$\sum X = 0 \rightarrow -F_{21} - F_{25} \cos \alpha - 10 = 0$$

$$\therefore F_{25} = [- (- \frac{50}{3}) - 10] \frac{5}{4} \rightarrow$$

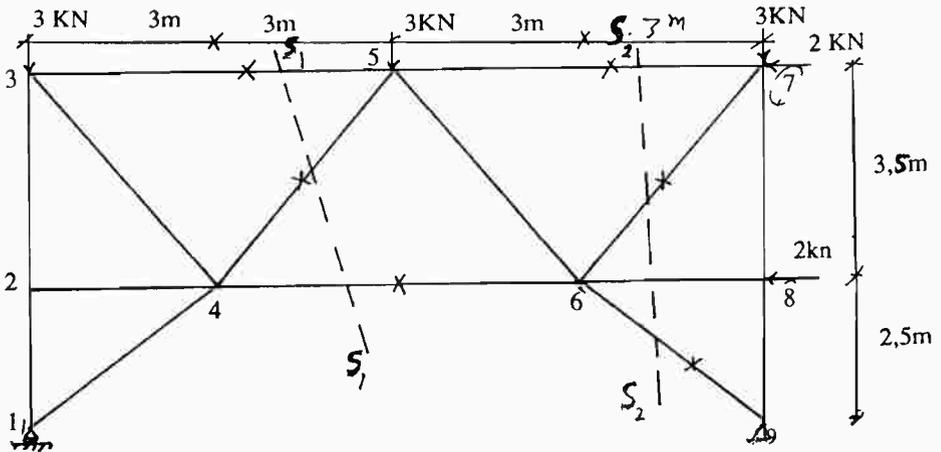
$$F_{25} = \frac{25}{3} \text{ KN}$$

$$F_{25} + F_{23} - 5 = 0 \rightarrow$$

$$\therefore F_{23} = 5 - \frac{25}{3} \left(\frac{3}{5} \right) = 0 \text{ KN}$$

وهو ما يحقق صحة النتائج البيانية :

7.3 - أوجد القوى بالقضبان المحددة بعلامة X فقط في الشكل التالي :



الحل :

ردود الأفعال :

$$\sum X = 0 \rightarrow H_9 = 2 + 2 = 4 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\sum M_9 = 0 \rightarrow 12 V_9 + 2(2.5) + 2(6) - 3(12) - 3(6) = 0$$

$$\therefore V_9 = \frac{37}{12} \text{ KN} \uparrow$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow -12V_1 + 2(2.5) + 2(6) + 3(12) + 3(6) = 0$$

$$\therefore V_1 = \frac{71}{12} \text{ KN} \uparrow$$

لإيجاد القوى بالقضبان المحددة بعلامة X نلجأ إلى طريقة المقاطع . فندرس المقطع $S_1 - S_1$ وبالتحديد الجزء الأيسر هذا المقطع :

$$\sum Y = 0 \rightarrow \frac{71}{12} - 3 + F_{45} \sin \alpha = 0$$

$$\sin \alpha = 0.759 \quad \cos \alpha = 0.651$$

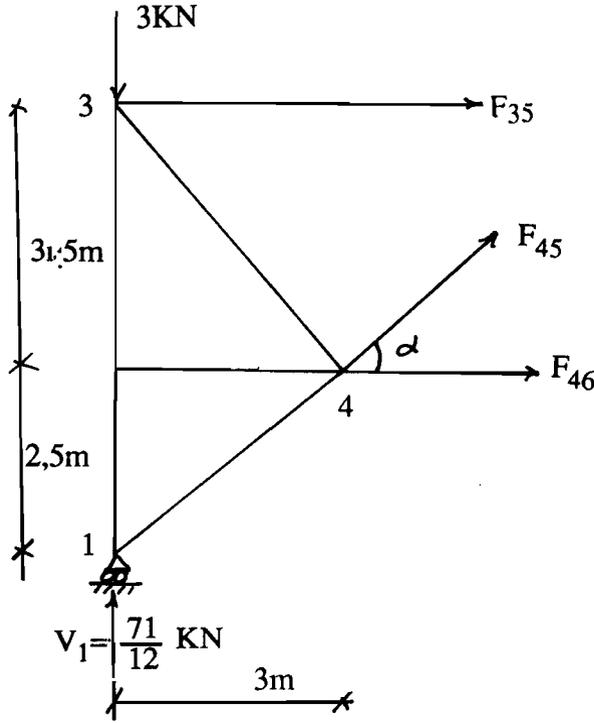
$$F_{45} = \frac{1}{0.759} \left[3 - \frac{71}{12} \right] = -2.214 \text{ KN}$$

$$\sum M_4 = 0 \rightarrow 3(3) - F_{35} (3.5) - \frac{71}{12} (3) = 0$$

$$F_{35} = -2.5 \text{ KN}$$

$$\sum X = 0 \rightarrow F_{35} + F_{45} \cos \alpha + F_{46} = 0$$

$$F_{46} = -(-2.5) - (-2.214) 0.651 = 3.941 \text{ KN}$$



بالنسبة للقضبان الثلاثة الأخرى ندرس المقطع $S_2 - S_2$ إلا أنه يمر بأربعة قضبان غير معلومة القوى ، وهذا يزيد عن الحد الأقصى المسموع به وهو ثلاثة قضبان ، ولذلك فإنه يجب إيجاد إحدى القضبان قبل دراسة هذا القطاع .

ويمكن إيجاد القوى بالقضيب (8) - (6) بسهولة وذلك واضح من دراسة المفصلة (8) حيث إن القوى بتلك القضيب تكون مساوية للقوة عند المفصلة ومضاده لها في الاتجاه لحدوث الاتزان (انظر الفقرة 7.5) .

$$\therefore F_{8-6} = -2 \text{ KN}$$

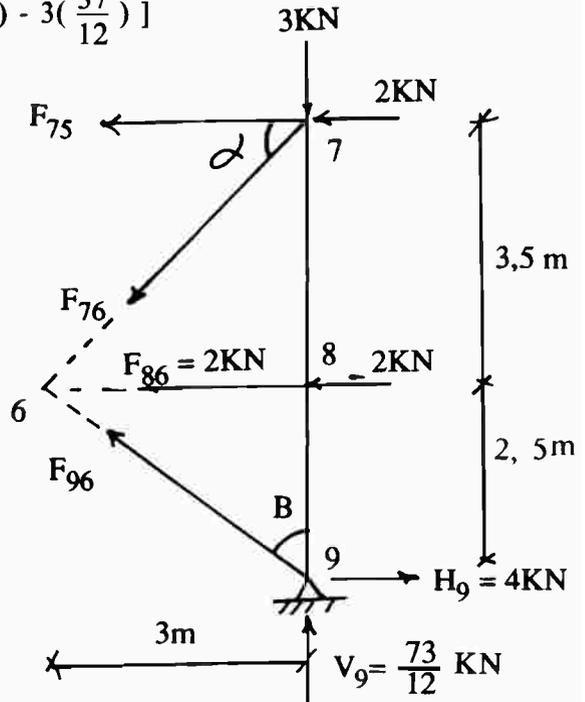
الآن ندرس الجزء على يمين القطاع $S_2 - S_2$:

$$\sum M_6 = 0 \rightarrow 3 V_9 + 2.5 H_9 + 2(3.5)$$

$$- 3 (3) + F_{75} (3.5) = 0$$

$$F_{75} = \left(\frac{1}{3.5} \right) \left[9 - 7 - 25(4) - 3 \left(\frac{37}{12} \right) \right]$$

$$\therefore F_{75} = - 4.93 \text{ KN}$$



$$\sum M_7 = 0 \rightarrow 6 H_9 - 2(3.5) - F_{86} (3.5)$$

$$- F_{96} \sin \beta (6) = 0$$

$$\sin \beta = 0.768 \quad , \quad \cos \beta = 0.64$$

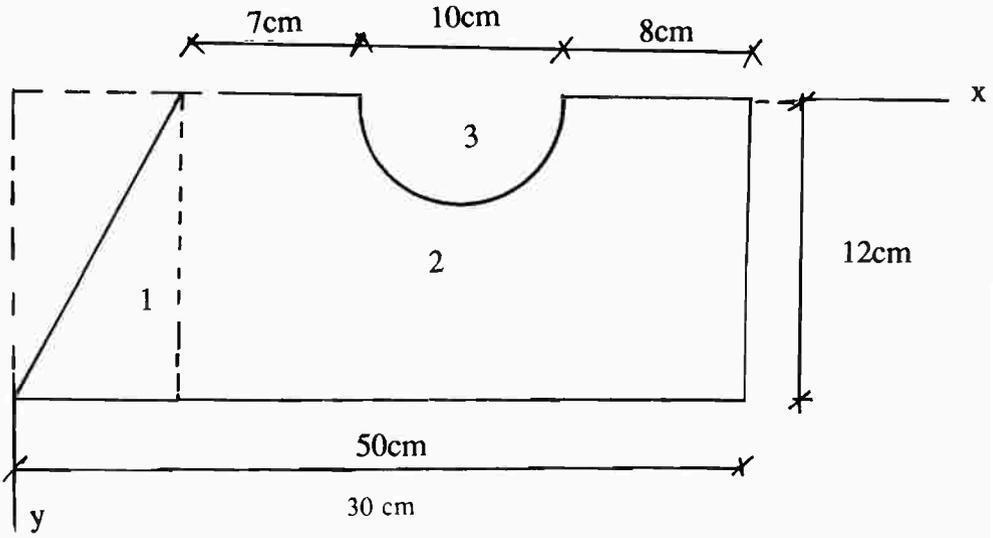
$$F_{96} = \frac{1}{6(0.768)} \left[6(4) - 7 - (-2) 3.5 \right] = 5.2 \text{ KN}$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow V_9 + F_{96} \cos \beta - F_{76} \sin \alpha - 3 = 0$$

$$F_{76} = \frac{1}{0.759} \left[\frac{37}{12} + 5.2 (0.64) - 3 \right] = 4.495 \text{ KN.}$$

۲۲۷

8.1 - المطلوب إيجاد مركز ثقل شبه المنحرف الذي استقطع منه نصف الدائرة بالشكل التالي :



الحل :

بأخذ المحاور كما بالشكل ، وبإجراء تقسيم الشكل إلى ثلاث مناطق حيث

$$\text{المنطقة (1) هي مثلث مساحته } A_1 = \frac{1}{2} (12 \times 5) = 30 \text{ سم}^2$$

$$\text{المنطقة (2) هي مستطيل مساحته } A_2 = 25 \times 12 = 300 \text{ سم}^2$$

المنطقة (3) وهي الجزء المستقطع ، وهو عبارة عن نصف دائرة ولذلك نعتبر أن مساحته

$$\text{سالبة } A_3 = - \frac{\pi}{2} (5)^2 = - 39.37 \text{ سم}^2$$

بتطبيق المعادلات (8.3) نجد :

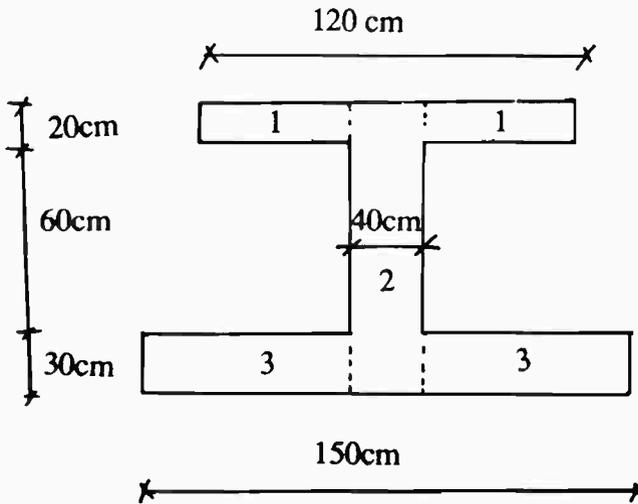
$$X_c = \frac{A_1 X_1 + A_2 X_2 + (-A_3) X_3}{A_1 + A_2 + (-A_3)} \quad \text{حيث } X_3, X_2, X_1$$

الإحداثي الأفقي لمراكز ثقل المثلث والمستطيل والدائرة على الترتيب :

$$X_c = \frac{30 \times \frac{2}{3} (5) + 300 (5 + \frac{25}{2}) - 39.27 (12 + \frac{10}{2})}{30 + 300 - 39.27} = 16.110 \text{ cm}$$

$$Y_c = \frac{30 \times \frac{2}{3} (12) + 300 (\frac{12}{2}) - 39.27 (\frac{4 \times 5}{3\pi})}{30 + 300 - 39.27} = 6.73 \text{ cm}$$

8.2 - أوجد مركز ثقل القطاع على شكل حرف I بالشكل التالي :



الحل :

يتضح من تماثل الشكل حول محور رأسي يمر بمنتصفه أن مركز الثقل سيقع على هذا المحور ، ولذلك فالمطلوب فقط هو تحديد ارتفاع أو بعد هذا المركز عن الشريحة العلوية للقطاع (v) .

ونقسم الشكل إلى ثلاثة مستطيلات كما هو موضح ، ونلخص العمل في الجدول

التالي :

	b	h	(b.h)	d	d(b.h)
1	80	20	1600	10	16000
2	40	110	4400	55	242000
3	110	30	3300	95	313500
Σ			9300		571500

$$\nu = \frac{571500}{9300} = 61.45 \text{ cm}$$

8.3 - شكل رباعي ABCD على رؤوسه الأربعة الكتل التي قيمها 1,2,3,4 وحدات على الترتيب فإذا علم أن إحداثيات رؤوس الشكل هي :

$$A(-1,-2,2) , B(3,2,-1) , C(1,-2,4) , D(3,1,2)$$

أوجد إحداثيات مركز هذه الكتل .

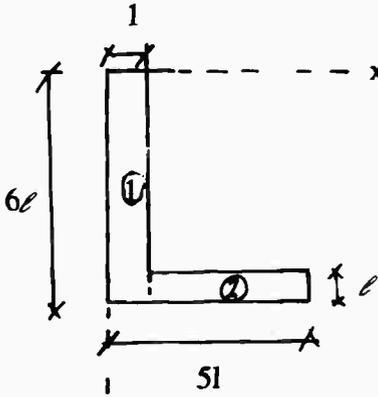
الحل :

$$X_C = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i x_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{1(-1) + 2(3) + 3(1) + 4(3)}{1 + 2 + 3 + 4} = 2$$

$$Y_C = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i y_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{1(-2) + 2(2) + 3(-2) + 4(1)}{1 + 2 + 3 + 4} = 0$$

$$Z_C = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i z_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{1(2) + 2(-1) + 3(4) + 4(2)}{1 + 2 + 3 + 4} = 2$$

وبالتالى تكون إحداثيات مركز الكتلة : (2, 0, 2)



8.4 أوجد مركز ثقل القطاع على شكل زاوية .

الحل :

حيث 1 هى وحدة أطوال .

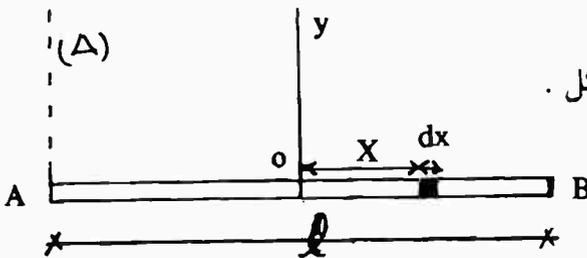
$$Y_c = \frac{6l^2(3l) + 4l^2(5.5l)}{1(6l) + 1(4l)} = 4l$$

$$X_c = \frac{6l^2(0.5l) + 4l^2(3l)}{1(6l) + 1(4l)} = 1.5l$$

9.1 - أحسب عزم القصور الذاتي لقضيب منتظم ومنتجانس طوله l وكتلته M وذلك بالنسبة لمحور عمودى على القضيب ومار

(أ) مركز كتلته 0 .

(ب) مار بنهايته كما بالشكل .



الحل :

(أ) باعتبار العنصر dx على بعد x من المحور الرأسى oy والذى كتلته dm حيث :

$$dm = dx \cdot \lambda$$

ويكون عزم القصور الذاتى للقضيب بالنسبة للمحور oy :

$$I_{yy} = I_0 = \int_{-l/2}^{l/2} \lambda x^2 dx = 2\lambda \int_0^{l/2} x^2 dx = 2\lambda [x^3]_0^{l/2}$$

$$I_{yy} = \frac{2\lambda l^3}{24} = \frac{\lambda l^3}{12}$$

حيث λ هي الكثافة الطولية :

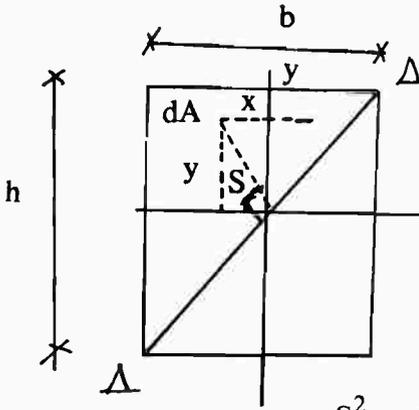
$$\lambda = \frac{M}{l}$$

(ب) أما بالنسبة للمحور $\Delta\Delta$ فإننا نستعمل نظرية المحاور المتوازية .

$$I_{\Delta\Delta} = I_{yy} + M \left(\frac{l}{2}\right)^2$$

$$I_{\Delta\Delta} = \frac{Ml^2}{12} + M \frac{l^2}{4} = \frac{Ml^2}{3} = I_A$$

9.2 - أحسب عزم القصور الذاتى لمستطيل $b \times h$ وذلك حول أحد أقطاره $(\Delta\Delta)$.



الحل :

لنعتبر العنصر الذى يبعد مسافة S عن المحور القطرى $\Delta\Delta$ وتكون مساحة هذا العنصر dA حيث :

$$dA = dx dy$$

ونلاحظ من هندسة الشكل أن :

$$S^2 = X^2 + Y^2$$

$$\therefore I_{\Delta\Delta} = \int_A S^2 dA = \int_A (x^2 + Y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A Y^2 dA$$

$$\therefore I_{\Delta\Delta} = I_{yy} + I_{xx}$$

ويمكن أن نستفيد من نتائج المثال الأول بالفصل التاسع حيث وجدنا أن :

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} , \quad I_{yy} = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{\Delta\Delta} = \frac{bh^3}{12} + \frac{hb^3}{12} = \frac{bh}{12} (h^2 + b^2) = \frac{A}{12} (h^2 + b^2)$$

حيث A هي مساحة المستطيل .

9.3 - أوجد عزم القصور الذاتي للمكعب حول أحد أحره علماً بأن طول الحرف هو a .

الحل :

نفرض أن الحرف المراد إيجاد عزم القصور الذاتي حوله هو موازى للمحور الرأسى oy وهو بالتالى يبعد عنه مسافة مقدارها $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ حيث إن المحور oy يكون مار بمركز المكعب .

من تعاريف عزم القصور الذاتي نجد أن هذا العزم حول المحور oy (المعادلة

$$I_{yy} = \iiint (z^2 + X^2) dx dz \quad (9.3)$$

$$= \iiint Z^2 dx dz + \iiint x^2 dx dz$$

$$I_{yy} = \frac{a^4}{12} + \frac{a^4}{12} = \frac{a^4}{6}$$

$$= \frac{\alpha^4}{3} + \alpha^2 \frac{\alpha^2}{2} = \frac{2\alpha^4}{3}$$

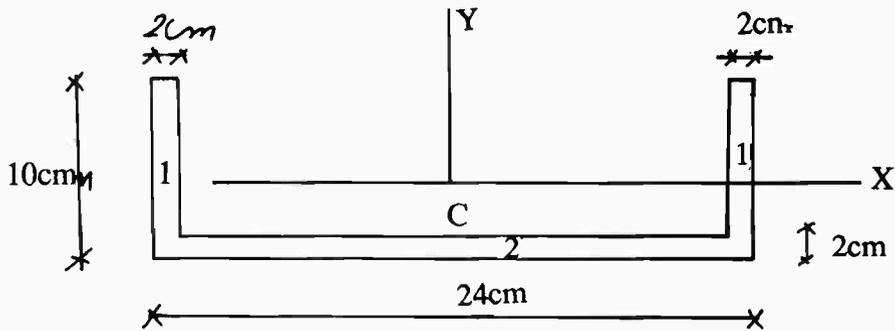
باستخدام نظرية المحاور المتوازية نجد أن عزم القصور الذاتي حول الحرف $\Delta\Delta$

يكون :

$$I_{\Delta\Delta} = I_{yy} + A \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

$$= \frac{a^4}{3} + a^2 \frac{a^2}{2} = \frac{2a^4}{3}$$

9.4 - أحسب عزم القصور الذاتي ونصف قطر القصور الذاتي للقطاع بالشكل التالي ، وذلك بالنسبة لمحور أفقى مار بمركز ثقل الشكل :



الحل :

من التماثل حول المحور الرأسى المار بمنتصف الشكل سيكون مركز الثقل عليه ، وبالتالي فالمطلوب فقط هو تعيين موضعه الرأسى ، وذلك قبل الشروع فى حساب عزم القصور الذاتي .

نقسم الشكل إلى مستطيلات كما هو موضح ونجرى كل العمليات بالجدول

التالى :

	b	h	bh	d	d(bh)	s(b.h)	s ² (b.h)	(bh)s ²
1	2x2	10	40	5	200	2	160	1000/3
2	20	2	40	9	360	2	160	160/3
Σ			80		560		320	1160/3

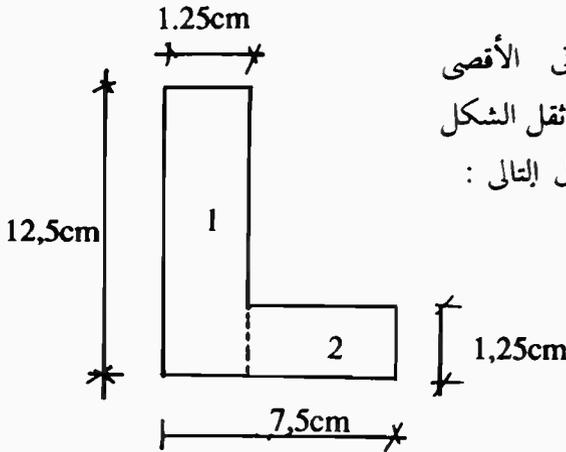
$$\nu = \frac{d(bh)}{bh} = \frac{560}{80} = 7 \text{ cm}$$

$$I_{xx} = \Sigma s^2(b.h) + \Sigma \frac{bh^3}{12} = 330 + \frac{1160}{3} = \frac{2120}{3} \text{ cm}^4$$

$$r_{xx} = \sqrt{\frac{I_{xx}}{\Sigma bh}} = \sqrt{\frac{2120/3}{80}} = 2.972 \text{ cm}$$

9.5 - أوجد عزوم القصور الذاتي القصى والدنيا للشكل التالى . أوجد كذلك اتجاهات المحاور التى تقع عليها .

الحل :

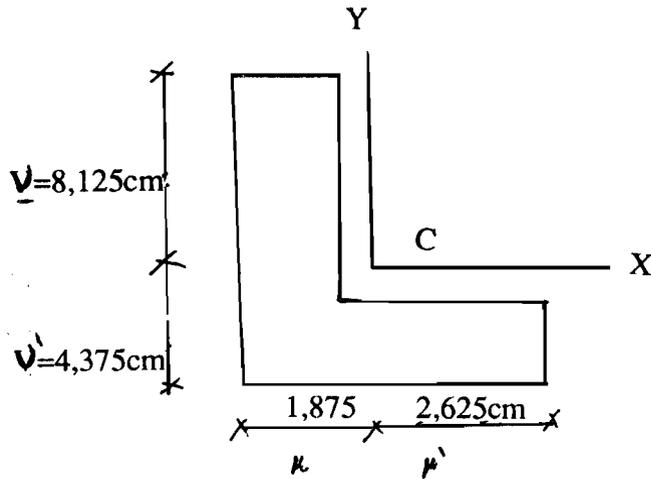


لإيجاد عزم القصور الذاتي الأقصى والأدنى لابد من إيجاد مركز ثقل الشكل أولاً وهذا نلخصه فى الجدول التالى :

	b	h	b . h	d	d(bh)	d`	d`(bh)
1	1,25	12,5	15,625	6,25	97,656	0,625	9,7656
2	6,25	1,25	7,8125	11,875	92,773	4,375	43,1797
Σ			23,4375		190,429		43,9453

$$\nu = \frac{190,429}{23,4375} = 8,125 \text{ cm} \quad , \quad \nu = 12,5 - 8,125 = 4,375 \text{ cm}$$

$$\mu = \frac{43,9453}{23,4375} = 1,875 \text{ cm} \quad , \quad \mu = 7,5 - 1,875 = 5,625 \text{ cm}$$



بعد توقيع مركز الثقل كما بالشكل السابق يمكن الآن حساب عزوم القصور الذاتي حول المحاور المارة بمركز الثقل ، وذلك في الجداول التالية :

	b	h	b . h	S	S(bh)	S`	S ² (bh)	bh ³ /12	bh ³ /12
1	1,25	12,5	15,625	1,875	54,93	-1,25	24,414	203,45	2,0345
2	6,25	1,25	7,8125	3,75	109,86	2,5	48,828	1,02	25,432
Σ			23,4375		164,79		73,242	204,47	27,466

$$I_{xx} = \frac{bh^3}{12} + S^2 (bh) = 204.47 + 164.79 = 369.26 \text{ cm}^4$$

$$I_{yy} = \frac{b^3h}{12} + S^2 (bh) = 27.466 + 73.242 = 100.708 \text{ cm}^4$$

$$I_{xy} = (b_1 h_1) (S_1) (S_1') + (b_2 h_2) (S_2) (S_2')$$

$$= 15,625 (-1,25)(1,875) + 7,8125 (2,5)(-3,75)$$

$$I_{xy} = -109.863 \text{ cm}^4$$

$$I_{\max.} = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}\right)^2 + (I_{xy})^2}$$

$$= \frac{369.26 + 100.708}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{369.26 - 100.708}{2}\right)^2 + (109.863)^2}$$

$$= 234.984 \pm 173.465$$

$$I_{\max.} = 408.45 \text{ cm}^4 \quad , \quad I_{\min} = 61.52 \text{ cm}^4$$

$$\tan 2 \alpha = - \frac{I_{xy}}{\frac{I_{xx} - I_{yy}}{2}}$$

$$\tan 2 \alpha = - \frac{-109,863}{\frac{369,26 - 100,708}{2}} = 0,818$$

$$\therefore 2 \alpha_1 = 39,29^\circ \quad , \quad 2 \alpha_2 = 219,29^\circ$$

$$\alpha_1 = 19,64^\circ \quad , \quad \alpha_2 = 109,645^\circ$$

ولمعرفة أى محور يوافق عزم القصور الذاتي الأقصى نعوض في المعادلة :

$$I = \frac{I_{xx} + I_{yy}}{2} + \frac{I_{xx} - I_{yy}}{2} \cos 2 \alpha - I_{xy} \sin 2 \alpha$$

$$= \frac{369,26 + 100,708}{2} + \frac{369,26 - 100,708}{2} \cos 39,29^\circ - (-109,863) \sin 29,29^\circ$$

$$I = 234,984 + 103,923 + 69,57 = 408,45 = I_{\max}$$

∴ « الزاوية 19.645 توافق عزم القصور الذاتي الأقصى . »

